MULTIPLICIDAD DE SOLUCIONES PARA UN PROBLEMA NO LOCAL CON CRECIMIENTO CRÍTICO

Natalí Ailín Cantizano† y Analía Silva‡

† *Instituto de Matemática Aplicada San Luis, IMASL.Universidad Nacional de San Luis and CONICET. Ejercito de los Andes 950.D5700HHW San Luis, Argentina.* ncantizano@unsl.edu.ar

‡ *Instituto de Matemática Aplicada San Luis, IMASL.Universidad Nacional de San Luis and CONICET. Ejercito de los Andes 950.D5700HHW San Luis, Argentina.* acsilva@unsl.edu.ar,https://analiasilva.weebly.com/

Resumen: El principal objetivo de este trabajo es probar existencia de tres soluciones diferentes (una positiva, una negativa y una que cambia de signo) para una ecuación que involucra el p-Laplacianco fraccionario con crecimiento crítico en el sentido de las inclusiones de Sobolev. La prueba se basa en un paper viejo de Struwe, en la extensión del famoso Principio de compacidad por concentración de Lions para el contexto no local y el principio variacional de Ekeland.

Palabras clave: *No local, Exponentes críticos, Compacidad por concentración*
2000 AMS Subject Classification: 35R01,35R11

1. INTRODUCCIÓN

Consideremos la siguiente ecuación no local con condición de Dirichlet

$$\begin{cases} (-\Delta_p)^s u = |u|^{p_s^*-2}u + \lambda f(x,u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

donde $s \in (0,1)$, Ω es un dominio acotado con borde suave en $\mathbb{R}^n$ y $(-\Delta_p)^s u$ denominado p-Laplaciano fraccionario, es definido con una constante de normalización de la siguiente forma

$$(-\Delta_p)^s u := 2 \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{n+ps}}\, dy.$$

El marco funcional para este operador es el espacio de Sobolev fraccionario, ver[18] y [8],definido de la siguiente forma

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) := \{u \in L^p(\mathbb{R}^n) \colon [u]_{s,p} < \infty\},$$

donde $[u]_{s,p}$ es la famosa seminorma de Gagliardo definida por

$$[u]_{s,p} := \left(\int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{(u(x)-u(y))^p}{|x-y|^{n+ps}}\, dx\, dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Es bien sabido que cuando $sp < n$ la siguiente desigualdad de Sobolev se mantiene

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{np}{n-sp}}\, dx \right)^{\frac{n-sp}{n}} \le C \int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\, dxdy$$

para $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, donde $p_s^* = \frac{np}{n-sp}$ es llamado el exponente crítico de Sobolev. Por lo tanto la inmersión $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $1 \le q \le p_s^*$ es continua, además es compacta para $1 \le q < p_s^*$. Las ecuaciones críticas con el Laplaciano fraccionario en dominios acotados han sido considerados en [1, 13, 12, 14, 15]. La multiplicidad de soluciones para el operador no local con crecimiento crítico ha sido estudiado en [11]. El objetivo principal de este trabajo es mostrar la existencia de tres soluciones al problema (1). Más aún una positiva, una negativa y una que cambia de signo. Imponemos condiciones adecuadas a f y al parámetro λ sin embargo no imponemos condiciones de paridad en la fuente f. Este resultado extiende un paper de Struwe [17]. Resultados similares para algunos operadores locales pueden ser encontrados en [3, 16, 5]. El método usado en la prueba en [17] consiste en restringir el funcional asociado a (1) a tres diferentes variedades construidas imponiendo una restricción de signo y una condición de normalización. Luego utilizando el Principio variacional de Ekeland (ver [4]) y una generalización en el caso fraccionario hecha por Mosconi et al. para cualquier $1 < p < \frac{n}{s}$ (ver[10]) del bien conocido Principio por Concentración de P.L.Lions (ver [9]),utilizando esto podemos probar la existencia de puntos críticos en cada funcional restringido, que son a la vez puntos críticos del funcional no restringido. Más precisamente podemos probar el siguiente teorema:

Teorema 1 *Suponiendo que f satisface ciertas condiciones,existe $\lambda^* > 0$ dependiendo solamente de n, p, q , tal que para todo $\lambda > \lambda^*$, existen tres soluciones débiles no triviales del problema,* (1)*. Además estas soluciones, son una positiva, una negativa y una que cambia de signo.*

2. PRUEBA

A lo largo de este trabajo entendemos por soluciones débiles de (1) a los puntos críticos del funcional de energía asociado actuando sobre el espacio de Sobolev $W_0^{s,p}(\Omega)$:

$$\Phi(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{(u(x)-u(y))^p}{|x-y|^{n+ps}}\,dy\,dx - \int_\Omega \frac{1}{p_s^*}|u(x)|^{p_s^*} + \lambda F(x,u(x))\,dx, \tag{2}$$

donde $F(x,u) = \int_0^u f(x,z)dz$. Las hipótesis sobre la fuente f son las siguientes:

(H1) $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es medible con respecto al primer argumento y continua respecto de la segunda variable para casi todo $x \in \Omega$. Más aún, $f(x,0) = 0$ para todo $x \in \Omega$.

(H2) Existen constantes $c_1 \in (0, \frac{1}{p_s^*-1})$, $c_2 \in (p, p_s^*)$, $0 < c_3 < c_4$ tal que para todo $u \in L^q(\Omega)$ y $p < q < p_s^*$,

$$c_3\|u\|^q_{L^q(\Omega)} \le c_2\int_\Omega F(x,u)\,dx \le \int_\Omega f(x,u)u\,dx \le c_1\int_\Omega f_u(x,u)u^2\,dx \le c_4\|u\|^q_{L^q(\Omega)}.$$

El siguiente ejemplo satisface nuestras hipótesis, $f(x,u) = |u|^{q-2}u + |u_+|^{r-2}u_+$ if $r \le q$.

Construiremos tres conjuntos disjuntos K_i los cuales no contienen al cero, tal que Φ tiene punto crítico en K_i. Estos conjuntos serán subconjuntos de C^1-variedades $M_i \subset W_0^{s,p}(\Omega)$ que serán construidas imponiendo una restricción de signo y una condición de normalización.

En efecto,

Definicin 1 *Para todo $i = 1,2,3$, sea $M_i \subset W_0^{s,p}(\Omega)$ definido*

$$M_1 = \left\{u \in W_0^{s,p}(\Omega) : \int_\Omega u_+ > 0 \ y \ [u_+]^p_{s,p} - \int_\Omega |u_+|^{p_s^*}\,dx = \int_\Omega \lambda f(x,u)u_+\,dx\right\},$$

$$M_2 = \left\{u \in W_0^{s,p}(\Omega) : \int_\Omega u_- > 0 \ y \ [u_-]^p_{s,p} - \int_\Omega |u_-|^{p_s^*}\,dx = \int_\Omega \lambda f(x,u)u_-\,dx\right\},$$

$$M_3 = M_1 \cap M_2,$$

donde $u_+ = \max\{u,0\}$ *y* $u_- = \max\{-u,0\}$.

Definicin 2 *Para todo $i = 1,2,3$, sea $K_i \subset W_0^{s,p}(\Omega)$ definido*

$$K_1 = \{u \in M_1 : u \ge 0\}, \quad K_2 = \{u \in M_2 : u \le 0\}, \quad K_3 = M_3.$$

Se puede probar que los conjuntos así definidos son no vacios. El siguiente lema describe las propiedades de las variedades M_i, para una prueba detallada del mismo ver [2]

Lema 1 *M_i es una sub-variedad de $W_0^{s,p}(\Omega)$ de codimensión 1, si $i = 1,2$ y 2 si $i = 3$ respectivamente, los conjuntos K_i son completos, y para todo $u \in M_i$ tenemos $T_uW_0^{s,p}(\Omega) = T_uM_i \oplus \langle u_+, u_-\rangle$ donde T_uM es el espacio tangente en u de la variedad de Banach M. Finalmente la proyección a la primera coordenada es uniformemente continua en M_i.*

Ahora para poder utilizar el principio variacional de Ekeland, necesitamos chequear la condición de Palais-Smale para el funcional Φ restringido a la variedad M_i. Con este fin necesitamos el siguiente lema, el cual prueba la condición de Palais-Smale para el funcional no restringido bajo cierto nivel de energía.

Lema 2 *Sea S la mejor constante de Sobolev para el Laplaciano fraccionario*

$$S := \inf_{\phi \in C_c^\infty(\Omega)} \frac{[\phi]_{s,p}^p}{\|\phi\|_{p_s^*}^p}. \tag{3}$$

Entonces el funcional no restringido Φ verifica la condición de Palais-Smale para un nivel de energía c tal que $c < \frac{s}{n} S^{\frac{n}{sp}}$.

La prueba de este lema se basa en el Principio de compacidad por concentración para operadores no locales ver(see[10]). La prueba para el caso local de este lema se puede encontrar en [7, 16]. El caso no local es similar y se puede encontrar en[6].

Ahora podemos probar la condición de Palais-Smale para el funcional restringido.

Lema 3 *El funcional $\Phi|_{K_i}$ satisface la condición de Palais-Smale para niveles de energía $c < \frac{s}{n} S^{\frac{n}{sp}}$.*

Prueba. Sea $\{u_k\} \subset K_i$ una sucesión de Palais-Smale, es decir $\Phi(u_k)$ es uniformemente acotada y $\nabla\Phi|_{K_i} \to 0$ fuertemente. Necesitamos demostrar que existe una subsucesión u_{k_j} que converge fuertemente en K_i.

Sea $v_j \in T_{u_j} W_0^{s,p}(\Omega)$ vector tangente unitario tal que

$$\langle \nabla\Phi(u_j), v_j \rangle = \|\nabla\Phi(u_j)\|_{W_0^{-s,p}(\Omega)}.$$

Ahora, por lema 1, $v_j = w_j + z_j$ con $w_j \in T_{u_j} M_i$ y $z_j \in \langle (u_j)_+, (u_j)_- \rangle$.

Como $\Phi(u_j)$ es uniformemente acotado, se puede ver que u_j es uniformemente acotado en $W_0^{s,p}(\Omega)$ y en consecuencia w_j es uniformemente acotado en $W_0^{s,p}(\Omega)$. Por lo tanto

$$\|\nabla\Phi(u_j)\|_{W_0^{-s,p}(\Omega)} = \langle \nabla\Phi(u_j), v_j \rangle = \langle \nabla\Phi|_{K_i}(u_j), v_j \rangle \to 0.$$

Como v_j es uniformemente acotado y $\nabla\Phi|_{K_i}(u_j) \to 0$ fuertemente, la igualdad converge fuertemente a 0. Ahora el resultado esperado resulta del Lema 2.

□

Inmediatamente obtenemos el siguiente lema.

Lema 4 *Existe $u \in K_i$ punto crítico del funcional restringido $\Phi|_{K_i}$. Más aún u es punto crítico del funcional sin restringir Φ y por lo tanto solución débil de* (1).

Con todo este preámbulo, esta es la demostración de nuestro resultado principal.

Prueba. [Demostración del Theorema 1] Para probar el Teorema 1, necesitamos chequear que el funcional $\Phi|_{K_i}$ verifique las hipótesis del Principio Variacional de Ekeland.

En efecto la prueba de que Φ es acotado inferiormente en K_i es una consecuencia directa de la construcción de la variedad K_i.

Entonces por el Principio Variacional de Ekeland existe $v_k \in K_i$, tal que

$$\Phi(v_k) \to c_i \text{ y } (\Phi|_{K_i})'(v_k) \to 0.$$

Necesitamos chequear que si elegimos λ suficientemente grande podemos asegurar que $c_i < \frac{s}{n} S^{\frac{n}{sp}}$. En efecto sea $w_0 \geq 0$ fija, gracias al siguiente lema

Lema 5 *Para todo $w_0 \in W_0^{s,p}(\Omega)$, $w_0 > 0$ ($w_0 < 0$), existe $t_\lambda > 0$ tal que $t_\lambda w_0 \in M_1$ ($\in M_2$). Asimismo,* $\lim_{\lambda\to\infty} t_\lambda = 0$.

Como consecuencia, dado $w_0, w_1 \in W_0^{s,p}(\Omega)$, $w_0 > 0$, $w_1 < 0$ con soportes disjuntos, existe $\overline{t}_\lambda, \underline{t}_\lambda$ tal que $\overline{t}_\lambda w_0 + \underline{t}_\lambda w_1 \in M_3$. Además $\overline{t}_\lambda, \underline{t}_\lambda \to 0$ cuando $\lambda \to \infty$.

Tenemos que

$$c_1 \leq \Phi(t_\lambda w_0) \leq \frac{1}{p} t_\lambda^p [w_0]_{s,p}^p.$$

y podemos afirmar que $c_1 \to 0$ cuando $\lambda \to 0$. Entonces $c_i < \frac{s}{n} S^{\frac{n}{sp}}$ para $\lambda > \lambda^*(p, q, n, c_3)$. Los otros casos son análogos.

Del Lema 2, se consigue que v_k tiene una subsucesión convergente, a la que llamamos v_k. Por lo tanto Φ tiene punto crítico en K_i, $i = 1, 2, 3$ y por construcción una de las soluciones es positiva, una es negativa y la otra cambia de signo. $\square$

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo esta soportado por UBACyT 20020130100283BA, CONICET PIP 11220150100032CO y PROICO 031906, UNSL.

N.Cantizano es becaria del CONICET y A.Silva es miembro del CONICET.

REFERENCIAS

[1] B.Barrios, E. Colorado, A. de Pablo, and U. Sánchez, *On some critical problems for the fractional Laplacian operator*, J.Differential Equations,252, (2012),pp.6133–6162.

[2] N. Cantizano and A. Silva. *Three solutions for a nonlocal problem with critical growth.*J. Math. Anal. Appl 469 (2019),no 2, 841-851.

[3] P. De Nápoli, J.Fernández Bonder and A. Silva. *Multiple solutions for a the p- Laplace operator with critical growth.*Nonlinear Anal. 71 (2009),no 12,6283–6289 .

[4] I. Ekeland, *On the variational principle*,Journal of Mathematical Analysis and Applications, 47 (1974), pp.324-353.

[5] J.Fernández Bonder *Multiple solutions for a the p- Laplace operator nonlinear boundary conditions*Electronic Journal of Differntial Equations.(2006),37, 7 pp. (electronic) .

[6] J. Fernández Bonder, N. Saintier and A. Silva . *The concentration- compactness principle for fractional order Sobolev spaces in unbounded domains and applications to the generalized Fractional Brezis- Niremberg Problem.*,Nodea Nonlinear Differential Equations.Appl 25(2018),6, art 52.

[7] J.García Azorero and I.Peral Alonso, *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymmetric term*,Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 323 (1991), pp. 877-895.

[8] E.Di Nezza,G. Palatucci and E. Valdinoci, *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*, Bulletin des Sciences Mathématiques, 136 (2012), pp.521-573.

[9] P.L, Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I* Revista Matemática Iberoamericana ,1, (1985), 145-201.

[10] S. Mosconi and M.Squassina, *Nonlocal problems at nearly critical growth*, Nonlinear Anal. 136 (2016), pp. 84-101.

[11] K.Perera and M.Squassina and Y.Yang, *Bifurcation and multiplicity results for critical fractional p-Laplacian problems*, Mathematische Nachrichten. 289 (2016),2-3 pp. 332–342.

[12] R.Servadei, *A critical fractional Laplace equation in the resonant case*, Topological Methods in Nonlinear Analysis. 43 (2014),1 pp.251–267.

[13] R.Servadei, *The Yamabe equation in a non-local setting*,Advances in Nonlinear Analysis. 2 (2013),3 pp.235–270.

[14] R.Servadei and E.Valdinoci, *A Brezis-Nirenberg result for non-local critical equations in low dimension*,Communications on Pure and Applied Analysis. 12 (2013),6 pp.2445–2464.

[15] R.Servadei and E.Valdinoci, *Fractional Laplacian equations with critical Sobolev exponent*,Revista Matemática Complutense. 28 (2015),3 pp.655–676.

[16] A. Silva*Multiple solutions for the $p(x)-$laplace operator with critical growth.* Advanced Nonlinear Studies. 11(2011)63-75

[17] M.Struwe, *Three nontrivial solutions of anticoercive boundary value problems for the pseudo-Laplace operator*,Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. 325 (1981),pp.68–74.

[18] H.Triebel, *Theory of function spaces*,Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel (2010),pp.285