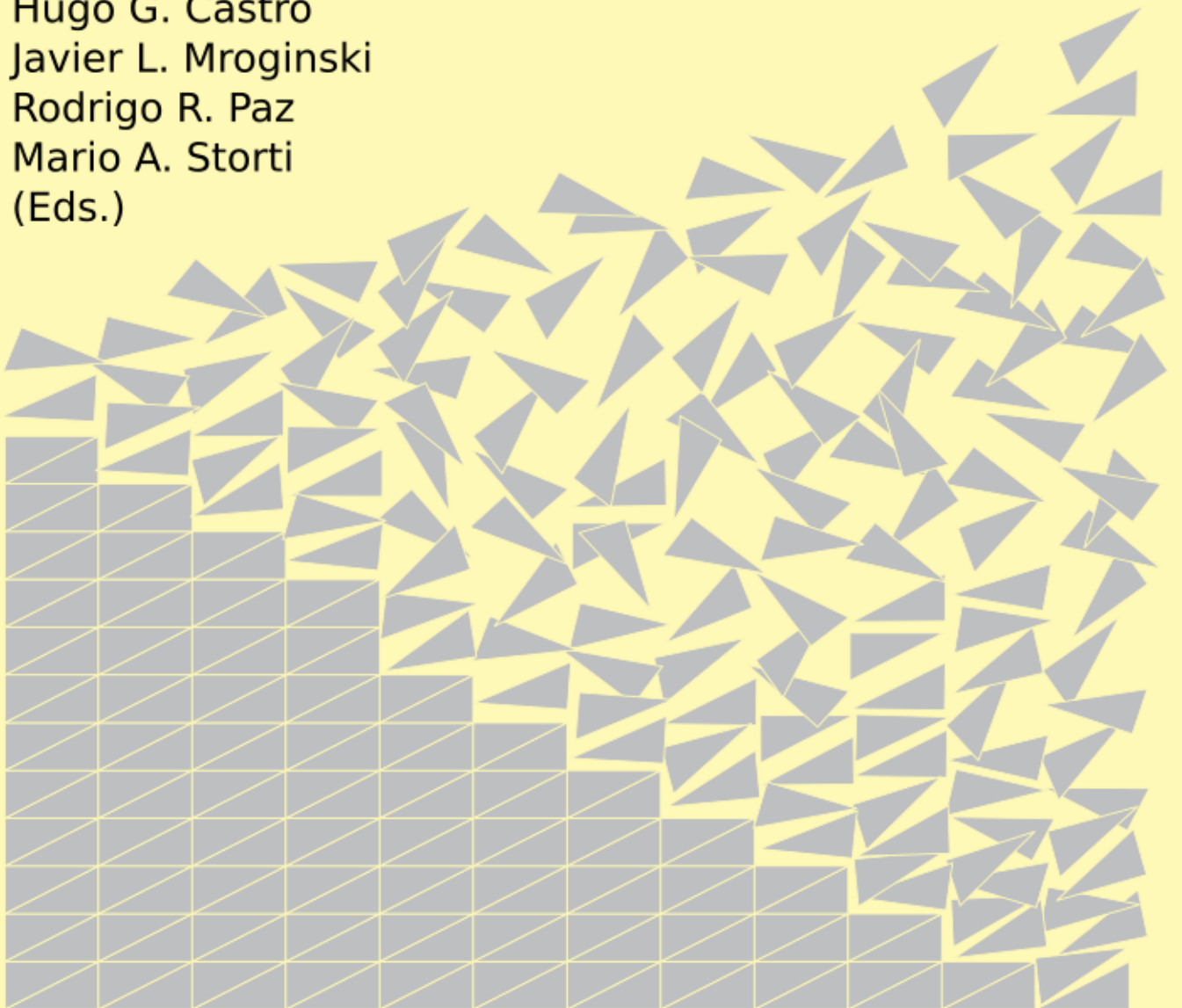


ISSN 2591-3522 (electrónico)
ISSN 1666-6070 (impreso)

MECÁNICA COMPUTACIONAL

Vol. XXXVIII

Hugo G. Castro
Javier L. Mroginski
Rodrigo R. Paz
Mario A. Storti
(Eds.)



**Asociación Argentina de
Mecánica Computacional**



Publicado en 2021 por AMCA
ISSN 2591-3522 (electrónico)
ISSN 1666-6070 (impreso)

PREFACIO

La serie de congresos ENIEF/MECOM consiste en reuniones anuales realizadas con el auspicio de la Asociación Argentina de Mecánica Computacional (AMCA) para promover la difusión de información científica y tecnológica sobre métodos computacionales en ingeniería, favorecer el intercambio científico y profesional del uso de los métodos numéricos y las técnicas computacionales tanto a nivel de investigación como en transferencia al sector industrial, estimular la investigación y el aprendizaje de las teorías básicas de la mecánica computacional a nivel universitario y de posgrado, y promover el intercambio de información y de trabajos científicos y tecnológicos.

El XXXVII Congreso Argentino de Mecánica Computacional, MECOM 2021, fue organizado en forma conjunta por la Asociación Argentina de Mecánica Computacional y el Laboratorio de Mecánica Computacional (LAMEC), dependiente de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Nordeste y del Instituto de Modelado e Innovación Tecnológica (CONICET - UNNE).

Durante este congreso participaron y dictaron conferencias plenarias, que se encuentran grabadas en el canal bit.ly/MeCOM2021 los siguientes especialistas:

- **Dra. Deborah Sulsky**, Department of Mathematics and Statistics University of New Mexico, USA;
- **Dr. Rainald Löhner**, Director, Center for Computational Fluid Dynamics, George Mason University, Fairfax (VA), USA;
- **Dr. Sergio Oller**, Universidad Nacional de Salta, Argentina;
- **Dr. Norman Fleck**, Director, Cambridge Centre for Micromechanics, Cambridge University Engineering Department, UK;
- **Dr. Armando Awruch**, Investigador I-A del CNPq, Brasil;
- **Dr. Martín Idiart**, Grupo de Fluidodinámica Computacional (GFC), Universidad Nacional de la Plata, Argentina;
- **Dr. Gustavo Buscaglia**, Instituto de Ciencias Matemáticas e de Computação, Universidade de Sao Paulo, Brasil;
- **Dr. Pedro Arduino**, Department of Civil & Environmental Engineering, the University of Washington, USA;
- **Dr. Matteo Parsani**, Applied Mathematics and Computational Science, King Abdullah University of Science and Technology, Saudi Arabia;
- **Dr. Paul Steinmann**, University Kaiserslautern, FAU Erlangen-Nürnberg, Alemania.

Además participaron como conferencistas en sesiones específicas (keynote speakers) los siguientes especialistas:

- **Dra. Laura Morales**, Dpto de Física UBA-CONICET, Argentina;
- **Dr. Alex Ferrer**, Universitat Politècnica de Catalunya, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE), España;
- **Dr. Mauro Innocente**, Coventry University, UK.

El MECOM 2021 se organizó sobre la base de 21 Sesiones Técnicas en las que se presentaron más de 230 trabajos. La mayor parte de los trabajos tienen como autores

a investigadores argentinos, participando también autores de países latinoamericanos, España y Estados Unidos.

En agradecimiento a su labor como científico y formador de jóvenes investigadores, se llevó a cabo una sesión en homenaje al Dr. Ing. Armando Miguel Awruch, en la que participaron ex-alumnos dirigidos por el Dr. Awruch y nuevos investigadores que siguen su línea de investigación.

Desde el comité organizador del MECOM 2021 reconocemos y agradecemos el apoyo y colaboración de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Nordeste, fundamental para la concreción de este evento, al Instituto de Modelado e Innovación Tecnológica (IMIT), al Gobierno de la Provincia del Chaco, al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y a la Agencia Nacional de Promoción de la Investigación, el Desarrollo Tecnológico y la Innovación (Agencia I+D+i).

Asimismo, queremos destacar la valiosa colaboración del grupo de voluntarios de MECOM 2021: becarios de la Facultad de Ingeniería de la UNNE que aportaron muchas horas de trabajo para que el Congreso se lleve a cabo de la mejor manera para todos los asistentes.

No podemos dejar de mencionar que esta edición del Congreso debió haberse realizado durante el año 2020. Dadas las condiciones impuestas por la pandemia, desde el Comité Organizador y las autoridades del AMCA nos vimos forzados a aplazar el Congreso con todas las expectativas puestas a una reunión presencial. Ya iniciado el año 2021, luego de varias reuniones con las autoridades del AMCA y ante la incertidumbre reinante, se tomó la decisión de realizarlo de manera completamente virtual. Lamentablemente, esto implicaba la pérdida del contacto cara a cara al que estábamos acostumbrados, la posibilidad de discutir e intercambiar ideas en pasillos, cafés y cualquier rincón de la sede que sea propicio para ello. Además, se debieron suspender muchas otras actividades como la posibilidad de conocer lugares típicos de la ciudad de Resistencia y alrededores, como así también la cena de camaradería y la ceremonia de entrega de los Premios AMCA.

Como contraparte, y a pesar de todo lo anterior, se abrió la posibilidad de poder invitar a un número mayor de conferencistas plenarios y keynotes, como también aumentar la duración del Congreso. Además, fue posible que mucha gente que por diversos motivos no podía asistir regularmente a los ENIEF/MECOM lo hiciera este año, al menos de forma virtual, contando con asistencia perfecta en casi la totalidad de las sesiones.

Los editores queremos reconocer la labor de otros miembros del Comité Organizador de MECOM 2021, de Sandra Sarano (Secretaria del AMCA), de María Laura Guerrini y Martín Alejo Pucheta (Mesa de Ayuda de OCS), y agradecer su colaboración con la organización del Congreso y edición de los presentes Anales. Hacemos extensivo el reconocimiento y agradecimiento a todos los directores de sesión y a los revisores por su ayuda en la evaluación y seguimiento de los resúmenes y trabajos completos, así como a todos los conferencistas invitados, autores y participantes. MECOM 2021 fue posible gracias al aporte conjunto de todos ellos.

Dr. Ing. Javier L. Mroginski, Presidente del Comité Organizador

Dr. Ing. Hugo G. Castro, Presidente del Comité Científico

Dr. Ing. Rodrigo R. Paz, Vice-Presidente 1ro del Comité Científico

INTEGRANTES DEL COMITÉ ORGANIZADOR

- **Presidente:** Dr. Javier Luis Mroginski
- **Vice-presidente 1ro:** Ing. José Basterra
- **Vice-presidente 2do:** Dr. Pablo Beneyto
- **Coordinador general:** Dr. Juan M. Podestá
- **Vocal:** Dr. Ariel Di Rado
- **Vocal:** Mag. Ricardo J. Barrios D'Ambra
- **Vocal:** Ing. Marcelo I. Adotti
- **Vocal:** Mauro Brite
- **Vocal:** Raúl Rojas

COMITÉ CIENTÍFICO

- **Presidente:** Dr. Hugo G. Castro
- **Vice-presidente 1ro:** Dr. Rodrigo R. Paz
- **Vice-presidente 2do:** Dr. Gustavo A. Aucar
- **Coordinador general:** Dr. Mario E. De Bortoli
- **Vocal:** Julián Romero
- **Vocal:** Nicolás Rivolta
- **Vocal:** Guido Paparella
- **Vocal:** Pedro Leiva
- **Vocal:** Federico Tripaldi

PATROCINADORES

Patrocinaron la organización del MECOM 2021:

- Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET),
- Agencia Nacional de Promoción de la Investigación, el Desarrollo Tecnológico y la Innovación (Agencia I+D+i),
- Gobierno de la Provincia de Corrientes,
- Gobierno de la Provincia del Chaco,
- Universidad Nacional del Nordeste (UNNE),

ESTUDIO SOBRE LA DINÁMICA DEL PÉNDULO PARAMÉTRICO TRIDIMENSIONAL CON MIRAS A LA RECOLECCIÓN DE ENERGÍA AMBIENTAL

STUDY ON THE DYNAMICS OF THE THREE-DIMENSIONAL PARAMETRIC PENDULUM WITH A VIEW ON AMBIENT ENERGY HARVESTING

Franco E. Dotti^{a,b}, Lisandro M. Rojas^a, J. Nicolás Virla^{a,b} y Carlos A. Vera^a

^a*Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina, gimap@frbb.utn.edu.ar, <http://www.frbb.utn.edu.ar/frbb>*

^b*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas, CONICET, Argentina*

Palabras clave: Péndulo paramétrico, energía ambiental, dinámica no lineal.

Resumen. Se estudia la dinámica no lineal de un sistema de péndulo paramétrico tridimensional en términos de su capacidad de producir energía cinética, con foco en una posible aplicación de recolección de energía ambiental. Para el estudio de la dinámica, se desarrolla un modelo matemático con el cual se realizan predicciones numéricas. Dicho modelo consiste de tres ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, cuya resolución revela una dinámica rica y compleja. Para lograr precisiones acerca de las configuraciones más aptas para la producción de energía cinética aprovechable, se presentan y discuten resultados empleando herramientas típicas de la dinámica no lineal como diagramas de bifurcaciones y espacios de parámetros. Los resultados de las simulaciones muestran que el movimiento tridimensional del péndulo no incrementa la generación energética, mientras que sí lo hace el hecho de forzar el péndulo en direcciones inclinadas con respecto a la vertical.

Keywords: Parametric pendulum, ambient energy, nonlinear dynamics.

Abstract. The nonlinear dynamics of a three-dimensional parametric pendulum system is studied in terms of its ability to produce kinetic energy, with focus on a possible ambient energy harvesting application. To study the dynamics, a mathematical model is developed and numerical predictions are made. This model consists of three ordinary nonlinear differential equations, which resolution a rich and complex dynamic. To achieve precisions about the most suitable configurations for the production of usable kinetic energy, results are presented and discussed using typical tools of nonlinear dynamics such as bifurcation diagrams and parameter spaces. The results of the simulations show that the three-dimensional movement of the pendulum does not increase the energy generation, while the fact of forcing the pendulum in tilted directions with respect to the vertical does.

1 INTRODUCCIÓN

El péndulo paramétrico ha desempeñado históricamente un importante rol en la dinámica no lineal, especialmente en la ilustración de sus técnicas fundamentales. Ha sido incluso la herramienta más comúnmente empleada en las primeras comprobaciones de la existencia de caos en sistemas mecánicos (McLaughlin, 1980; Leven y Koch, 1980). Actualmente, este sistema simple mantiene su utilidad pedagógica (Guo y Luo, 2020), pero además ha motivado nuevas direcciones de investigación en cuanto a su empleo como dispositivo recolector de energía ambiental, especialmente undimotriz (Dotti et al., 2015). La idea de este sistema se basa en lograr, a partir del movimiento de las olas, un estado dinámico altamente energético del péndulo, que permita convertir parte de su energía cinética en energía eléctrica mediante un generador adosado al eje pivote.

El modelo de péndulo paramétrico más empleado en la aplicación undimotriz es el denominado ‘clásico’, el cual consiste de un péndulo plano de masa puntual cuyo punto de pivote es sometido a una excitación sinusoidal vertical. El movimiento que se desea alcanzar es una rotación estacionaria, que corresponde al de mayor energía cinética. La respuesta rotacional del péndulo paramétrico clásico fue estudiada en detalle por Clifford y Bishop (1995), quienes establecieron las regiones del espacio de parámetros de forzamiento donde es factible tal respuesta. En base a estos estudios, Wiercigroch et al. (2011) propusieron emplear un péndulo paramétrico como recolector undimotriz y, seguidamente, Nandakumar et al. (2012) mostraron que era posible la extracción energética si el sistema pendular contaba con baja fricción.

Si bien la idea resulta muy prometedora, dada la alta energía que puede alcanzar un péndulo en rotación y la simplicidad del mecanismo, la tecnología es aún incipiente y afronta varios desafíos (Yurchenko y Alevras, 2018). Uno de estos desafíos corresponde a la búsqueda de configuraciones que proporcionen una mayor generación de energía, y es en el que se enfoca el presente trabajo. En tal sentido, se desarrolla un modelo general del péndulo paramétrico, que admite la tridimensionalidad en el movimiento y permite la consideración de un vector de forzamiento también tridimensional sobre el eje pivote. Como caso particular de este modelo, se cuenta al péndulo paramétrico vertical, como así también innumerables configuraciones de forzamiento inclinado y péndulos inclinados.

2 MODELO MATEMÁTICO

La Figura 1 muestra el esquema de un péndulo paramétrico tridimensional, de longitud l y masa m . Su punto de pivote O se asume como origen de un sistema cartesiano xyz , definiéndose por lo tanto las coordenadas de la masa m de la siguiente manera, en términos de los tres ángulos de Euler

$$\begin{aligned}x &= l \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \\y &= l \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \\z &= l \cos \theta.\end{aligned}\tag{1}$$

Los ángulos θ y ϕ son idénticos a los del sistema de coordenadas esféricas (polar y azimutal, respectivamente) mientras que ψ es el ángulo de rotación con respecto al eje de simetría del péndulo. El eje O se halla sometido a un movimiento de traslación general Δ , que corresponde al forzamiento externo, y cuyas componentes están dadas por X , Y y Z . Así, la energía cinética del sistema puede definirse de la siguiente manera

$$T = \frac{1}{2} m \left[(x' + X')^2 + (y' - Y')^2 + (z' + Z')^2 \right] + \frac{1}{2} I_0 \omega_m^2,\tag{2}$$

donde el apóstrofe denota derivación con respecto al tiempo t y ω_m es la velocidad de rotación del péndulo sobre su propio eje de simetría, dada por

$$\omega_m = \phi' \cos \theta + \psi'. \quad (3)$$

Se asume en (2) que la masa del péndulo es una esfera de radio r , por lo que $I_0 = \frac{2}{5}mr^2$. Notar que, asumiendo $X = Y = Z = 0$ en (2), se recupera la expresión de energía cinética correspondiente a una *peonza simétrica pesada con un punto fijo*, tal como la definirían Goldstein (1994) y Eckardt (2018).

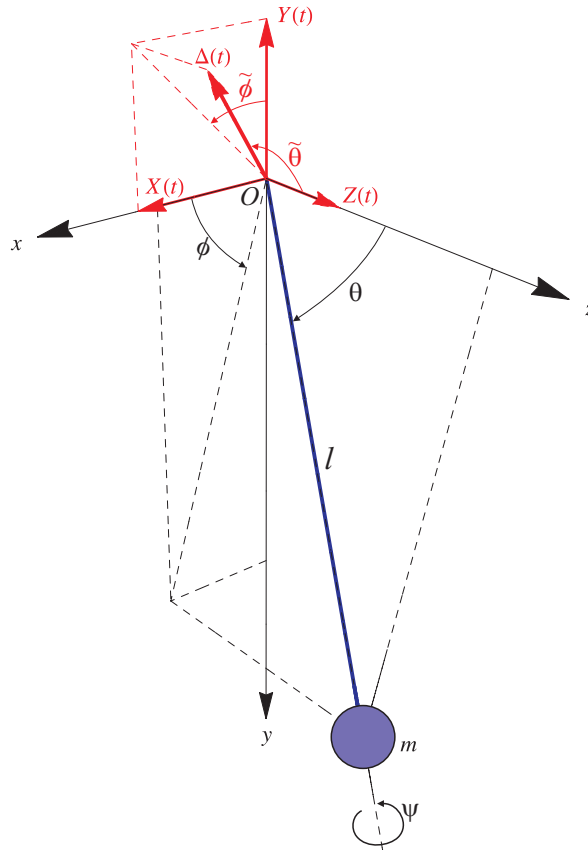


Figura 1: Esquema del péndulo paramétrico tridimensional.

Por su parte, si se asume y como eje vertical, la energía potencial del sistema puede definirse como

$$V = mg[l - y], \quad (4)$$

mientras que, asumiendo únicamente fricción viscosa, la energía disipada estará dada por

$$D = \frac{1}{2}b[x'^2 + y'^2 + z'^2], \quad (5)$$

siendo b un coeficiente de fricción.

Introduciendo (2-5) en las ecuaciones de Euler-Lagrange para las coordenadas angulares θ , ϕ y ψ , se obtienen tres ecuaciones diferenciales ordinarias. Asumiendo un forzamiento externo dado por $\Delta = -A \cos \Omega t$, estas ecuaciones pueden escribirse en su forma adimensional como

$$\ddot{\theta} + \beta \dot{\theta} - \cos \theta \sin \phi + \left(\frac{1}{5}R^2 - \frac{1}{2}\right)\dot{\phi}^2 \sin 2\theta + \frac{2}{5}R^2 \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta + p \cos \omega \tau (\cos \theta \cos \phi \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi} - \cos \tilde{\theta} \sin \theta - \cos \theta \sin \phi \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\phi}) = 0, \quad (6)$$

$$\ddot{\phi} \sin \theta + \beta \dot{\phi} \sin \theta - \cos \phi (1 + p \cos \omega \tau \cos \tilde{\phi} \sin \tilde{\theta}) - p \cos \omega \tau \sin \phi \sin \tilde{\phi} \sin \tilde{\theta} + \left(2 - \frac{2}{5}R^2\right)\dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta - \frac{2}{5}R^2 \dot{\theta} \dot{\psi} = 0, \quad (7)$$

$$\ddot{\psi} \sin \theta - \frac{1}{2}\beta \dot{\psi} \sin 2\theta + \cos \theta \cos \phi (1 + p \cos \omega \tau \cos \tilde{\phi} \sin \tilde{\theta}) + \left(p \cos \omega \tau \sin \phi \sin \tilde{\phi} \sin \tilde{\theta} + \frac{2}{5}R^2 \dot{\theta} \dot{\psi}\right) \cos \theta + \left(\frac{1}{5}R^2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{5}R^2 \cos 2\theta\right)\dot{\phi} \dot{\theta} = 0 \quad (8)$$

donde la derivación se realiza con respecto a la variable adimensional $\tau = \omega_0 t$, siendo $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ la frecuencia natural del péndulo. En (6-8) se han definido además las siguientes magnitudes adimensionales

$$\omega = \Omega/\omega_0, \quad p = \frac{A\omega^2}{l}, \quad \beta = \frac{b}{m\omega_0}, \quad R = \frac{r}{l}. \quad (9)$$

Cabe mencionar el hecho de que (6-8) recuperan el modelo del péndulo paramétrico clásico tanto si se define $\theta = \pi/2$ y $\psi = 0$, como si se define $\phi = \pi/2$ y $\psi = 0$.

Por último, se define la energía cinética adimensional empleando en (2) las relaciones (9), de la siguiente manera

$$T_{ad} = \frac{T}{ml^2\omega_0^2} = \frac{p^2 \sin^2 \omega \tau}{2\omega^2} (\cos^2 \tilde{\theta} + \cos^2 \tilde{\phi} \sin^2 \tilde{\theta} + \sin^2 \tilde{\theta} \sin^2 \tilde{\phi}) + \frac{p \sin \omega \tau}{\omega} \left\{ \dot{\theta} \sin \theta [\cos \theta \sin \tilde{\theta} \sin(\tilde{\phi} - \phi) - \cos \tilde{\theta}] - \dot{\phi} \cos(\tilde{\phi} - \phi) \sin \tilde{\theta} \right\} + \frac{2}{5}R^2 \dot{\phi} \dot{\psi} \cos \theta + \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \dot{\phi}^2 \left[\frac{1}{4} + \frac{R^2}{10} + \left(\frac{R^2}{10} - \frac{1}{4} \right) \cos 2\theta \right] + \frac{R^2}{5} \dot{\psi}^2. \quad (10)$$

Esta magnitud resulta conveniente en el estudio numérico sobre la potencialidad del péndulo paramétrico que se presenta a continuación. Notar que R siempre aparece al cuadrado en (10). Así, en el caso de un péndulo en el que se cumpla $R \ll 1$, los términos en ψ resultarían despreciables, indicando que la rotación del péndulo sobre su eje de simetría no tiene una influencia importante en la energía cinética.

3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Se presentan los resultados de la investigación numérica sobre la dinámica del péndulo paramétrico tridimensional. Siendo la motivación de este trabajo una posible aplicación en generación ambiental, el estudio se enfoca en la aptitud del sistema en cuanto a su capacidad de producir energía cinética. Se compara el sistema tridimensional con otros sistemas propuestos previamente para el mismo propósito, como lo son el péndulo paramétrico vertical clásico y un sistema de péndulo inclinado.

Para resolver el sistema (6-8) se empleó el método de Runge-Kutta clásico de orden 4, realizándose las simulaciones en un ordenador de 16 Gb de memoria RAM y procesador Intel Core i7-4790. En todos los casos, se consideró $\beta = 0.1$, a partir del trabajo de [Nandakumar et al \(2012\)](#), quienes indicaron tal valor como la máxima fricción que admite un sistema de

péndulo capaz de producir energía usable. Por otra parte, en el estudio se ha considerado $R = 0.15$ en todos los casos. En tal situación, las simulaciones demostraron una mínima influencia de la rotación del péndulo sobre su eje en términos de generación energética. Por ello, si bien el grado de libertad ψ es considerado en los cálculos, no es parte del objeto principal del estudio.

La Figura 2 muestra el comportamiento bifurcacional de un péndulo paramétrico tridimensional, en términos de la energía cinética adimensional T_{ad} y su función promedio asociada en el régimen estacionario, \bar{T}_{ad} . La amplitud de forzamiento p varía entre 0 y 3, lo cual se asume como un rango operativo factible de un recolector pendular. La frecuencia de forzamiento ω se fija en el estado de resonancia paramétrica principal ($\omega = 2$).

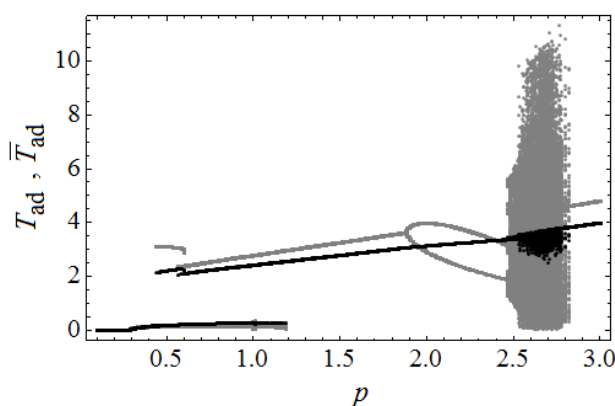


Figura 2: Diagrama de bifurcaciones del péndulo tridimensional variando el parámetro de amplitud p , para un estado de resonancia paramétrica ($\omega = 2$), con $\beta = 0.1$, $R = 0.15$, $\tilde{\theta} = \pi/2$, $\tilde{\phi} = \pi/4$. Referencia: (\circ): energía cinética adimensional, (\bullet): energía cinética adimensional promedio en el régimen estacionario.

Dado que el movimiento del péndulo se produce en el espacio tridimensional, no resulta del todo preciso hablar de *oscilaciones* o *rotaciones* como en el caso del péndulo paramétrico vertical. Sería de hecho necesario redefinir más rigurosamente las denominaciones de los movimientos, lo cual no es el objetivo de este trabajo. No obstante, se usarán tales denominaciones apelando a un criterio práctico, aunque no sea del todo riguroso. Así, en el rango $0.2 < p < 1.2$ se observa una respuesta de baja energía, la cual corresponde al movimiento de la Figura 3a, y que cuenta con características de movimiento oscilatorio, con dos puntos de velocidad casi nula. Además de este movimiento, para $p = 0.58$ se cuenta con dos incipientes atractores de alta energía, que pueden asociarse con la rotación en términos del péndulo paramétrico clásico. Uno de ellos (Figura 3b) se ubica en el plano del forzamiento y resulta de efímera duración: su existencia estable se da aproximadamente en el rango $0.4 < p < 0.6$. Mientras que el otro (Figura 3c) corresponde a una rotación en plano inclinado y puede hallarse para $0.55 < p < 1.9$. Este plano inclinado gira a medida que aumenta p , como se muestra en la Figura 3d.

En el rango $1.9 < p < 2.45$, el atractor de alta energía dobla su período, generando el movimiento de la Figura 3e. Es interesante observar en la Figura 2 cómo la energía cinética promedio del atractor no disminuye al doblar su período. Esto también sucede de manera similar en el péndulo paramétrico vertical clásico, lo cual desmitifica la creencia arraigada de que las rotaciones de período 1 son muy superiores en términos de generación de energía. Más allá de $p = 2.45$ sobreviene una rápida cascada de doblamientos de período que conduce al caos. El atractor caótico produce el movimiento tipo *bola de estambre* de la Figura 3f, correspondiente a $p = 2.60$. Además, para este valor del parámetro coexisten con el caos atractores rotatorios de períodos altos (Figuras 3g y 3h) que mantienen el nivel de energía

cinética, continuando la línea aproximadamente recta que forma la energía cinética promedio en la [Figura 2](#). Por su parte, el atractor caótico produce valores totalmente ruidosos de la energía cinética, lo que se comprueba en la zona gris en el rango $2.45 < p < 2.85$ de la [Figura 2](#). No obstante, puede verse que la energía cinética promedio en esta región toma valores similares a los de la rotación, lo cual implica que sería factible obtener energía usable también del movimiento caótico. Por último, para $p > 2.85$ el atractor de alta energía de período 1 recupera su estabilidad, tal como se muestra en la [Figura 3i](#), y de hecho resulta la única respuesta posible del sistema. Esta observación coincide con las realizadas por [Dotti y Virla \(2021\)](#) para el caso de un péndulo paramétrico inclinado.

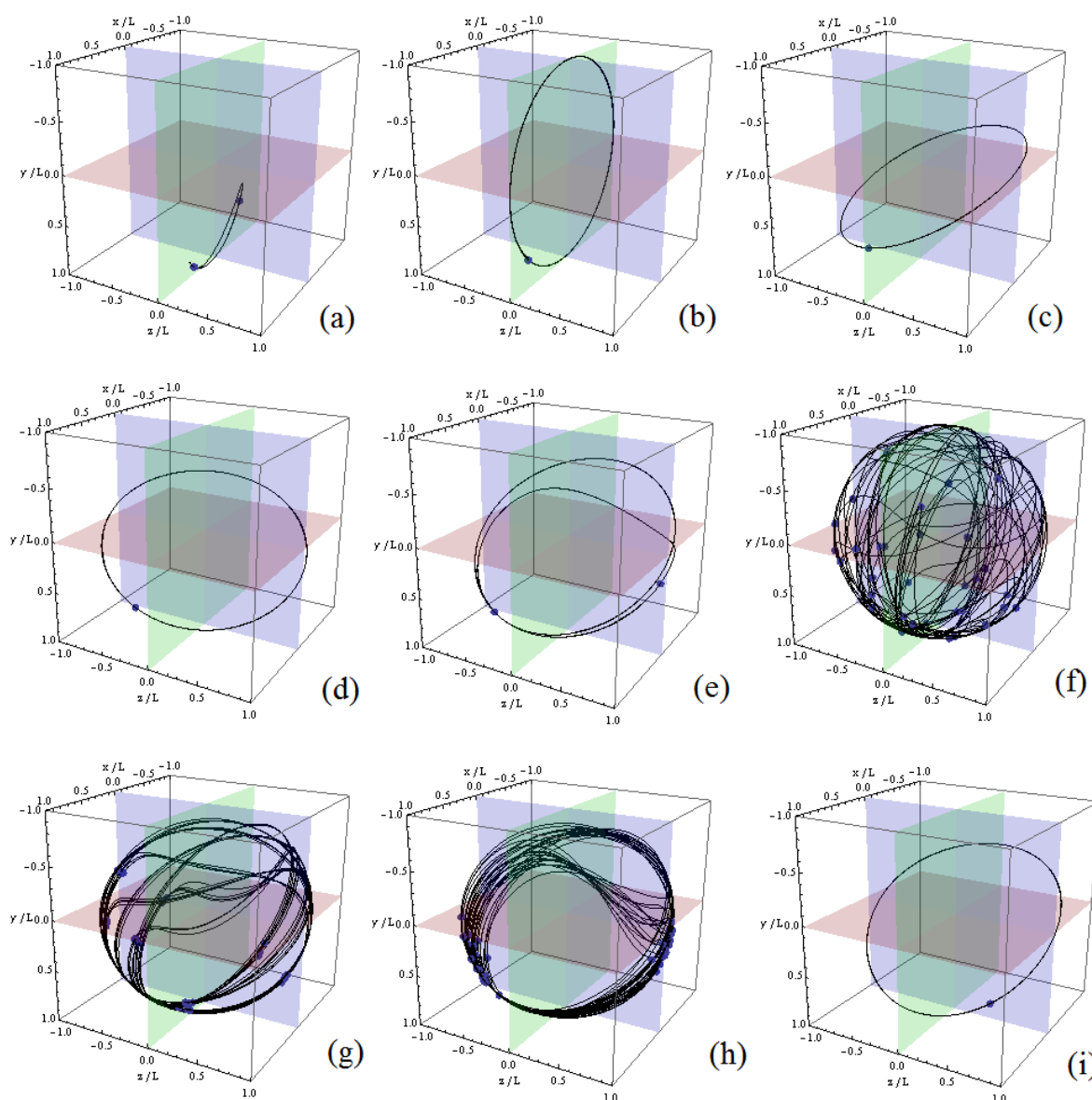


Figura 3: Respuestas estacionarias del sistema de péndulo paramétrico tridimensional de la [Figura 2](#), junto a sus correspondientes puntos de Poincaré, para las siguientes amplitudes de forzamiento: (a) $p = 0.58$, (b) $p = 0.58$, (c) $p = 0.58$, (d) $p = 1.01$, (e) $p = 2.30$, (f) $p = 2.60$, (g) $p = 2.60$, (h) $p = 2.60$, (i) $p = 2.90$.

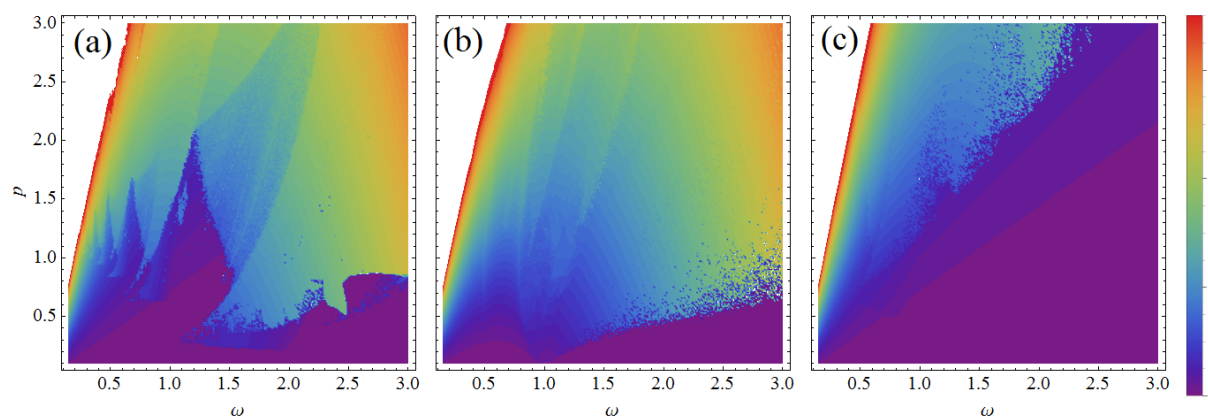


Figura 4: Espacio de parámetros p - ω indicando niveles máximos de energía cinética promedio estacionarias correspondiente a: (a) péndulo paramétrico vertical clásico ($\phi = \pi/2$, $\psi = 0$, $\tilde{\theta} = \pi/2$ y $\tilde{\phi} = 0$), (b) péndulo paramétrico tridimensional ($\tilde{\theta} = \pi/3$ y $\tilde{\phi} = \pi/3$), (c) péndulo paramétrico con forzamiento vertical y plano inclinado ($\phi = \pi/18$, $\psi = 0$, $\tilde{\theta} = \pi/2$ y $\tilde{\phi} = 0$).

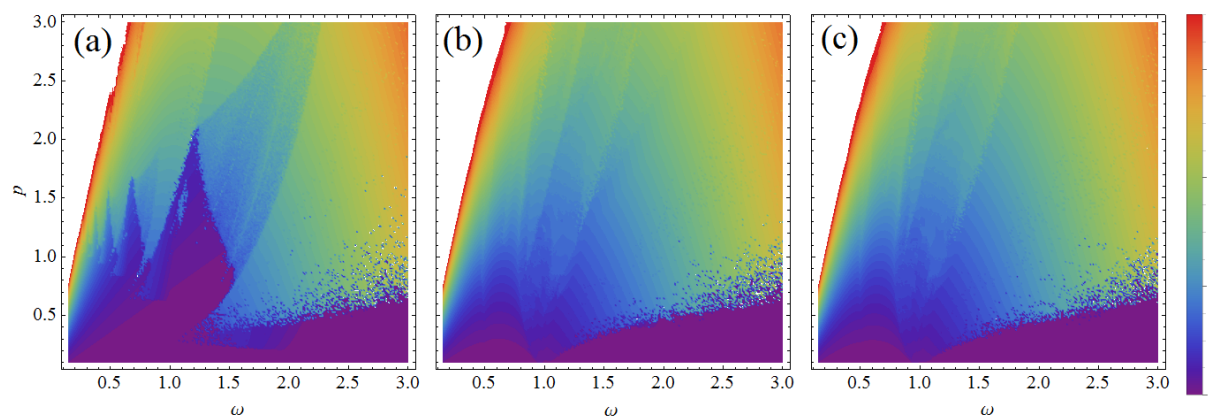


Figura 5: Espacio de parámetros p - ω indicando niveles máximos de energía cinética promedio estacionarias correspondiente a: (a) péndulo paramétrico tridimensional con $\tilde{\theta} = \pi/2$ y $\tilde{\phi} = 0$, (b) péndulo paramétrico tridimensional con $\tilde{\theta} = \pi/4$ y $\tilde{\phi} = \pi/4$, (c) péndulo paramétrico tridimensional con $\tilde{\theta} = \pi/8$ y $\tilde{\phi} = \pi/8$.

La Figura 4 muestra los tres primeros espacios de parámetros p - ω que fueron calculados resolviendo el sistema (6-8). Estas gráficas presentan niveles máximos de energía cinética promedio, para distintas configuraciones¹. La Figura 4a corresponde al péndulo paramétrico vertical clásico, con excitación únicamente en dirección y , y restringido a moverse en el plano yz . La Figura 4b corresponde a un péndulo totalmente libre de moverse tridimensionalmente y con forzamiento en una dirección inclinada con respecto a la vertical. Por último, la Figura 4c se asocia también a un péndulo con excitación únicamente en dirección y y restringido a moverse en un plano, pero inclinado alrededor de z unos 80° con respecto a la vertical. Con comparar las tres gráficas, resulta claro que la configuración de la Figura 4b es la que cuenta con mayor energía cinética. Uno podría concluir de manera apresurada –y siguiendo quizá el sentido común– que la libertad del movimiento tridimensional sería beneficiosa para un hipotético recolector pendular de energía ambiental, en relación a péndulos que sólo son

¹ La expresión adimensionalizada de la energía cinética, ecuación (10), presenta una singularidad para $\omega \rightarrow 0$. Esto se debe a que posee términos que dividen por ω y ω^2 . Esto se evidencia en las regiones en blanco de las gráficas de la Figuras 4 y 5. No obstante, se considera que las mencionadas figuras cumplen con su misión ilustrativa.

libres de moverse en un plano fijo. No obstante, además de la tridimensionalidad, la configuración de la [Figura 4b](#) cuenta con forzamiento en las tres direcciones cartesianas, a diferencia de los otros dos casos, que sólo cuentan con forzamiento en dirección y .

La [Figura 5a](#) corresponde a un péndulo tridimensional forzado únicamente en dirección y . Allí se observa que los niveles de energía cinética son similares a los de la [Figura 4a](#), lo cual indica que si el forzamiento es puramente vertical, el péndulo paramétrico tridimensional se comporta de manera casi idéntica al péndulo paramétrico clásico en cuanto a su energía cinética. A su vez, para distintas inclinaciones del vector de forzamiento Δ , se obtienen resultados similares al de la [Figura 4b](#), como se muestra en las [Figuras 5b-c](#). Esto indica que la inclinación del forzamiento sí puede resultar determinante en la generación energética. Resultados similares en cuanto a la inclinación del forzamiento fueron obtenidos por [Yurchenko y Alevras \(2018\)](#) y [Dotti y Virla \(2021\)](#) para el caso del péndulo paramétrico vertical.

4 CONCLUSIONES

En este artículo se abordó la dinámica del péndulo paramétrico tridimensional apuntando a una posible aplicación en recolección de energía ambiental. Para ello se desarrolló un modelo general de este sistema mecánico simple, que además de admitir la tridimensionalidad en el movimiento, permite la consideración de un vector de forzamiento también tridimensional sobre el eje pivot. Como caso particular, puede considerarse el péndulo paramétrico vertical clásico, como así también innumerables configuraciones de forzamiento inclinado y péndulos inclinados.

Apuntando a la generación energética, se estudió la dinámica no lineal en términos de su capacidad de producir energía cinética. Dado que el péndulo paramétrico clásico ha sido considerado para tales propósitos, se compara la dinámica general con este caso en particular. Las conclusiones más importantes del trabajo son dos:

- Si el forzamiento es puramente vertical, los niveles de energía cinética del péndulo paramétrico tridimensional resultan similares a los del péndulo paramétrico clásico. Esto permite concluir que un recolector pendular tridimensional aportaría más complicaciones desde lo constructivo que beneficios desde la generación energética.
- La inclinación de la dirección de forzamiento con respecto a la vertical sí puede resultar determinante en la generación energética. Todas las configuraciones simuladas con forzamiento inclinado produjeron en general más energía cinética que aquellas con forzamiento vertical. Este efecto se relaciona con una reducción en la influencia de la gravedad y puede verse como un resultado alentador, especialmente en situaciones donde es posible definir un mecanismo que redirija el forzamiento. No obstante, este efecto también fue observado en el caso del péndulo paramétrico clásico ([Yurchenko y Alevras, 2018](#); [Dotti y Virla, 2021](#)). Por lo tanto, esta ventaja no logra paliar la desventaja de la conclusión anterior, que alienta a descartar el péndulo paramétrico tridimensional como posible recolector de energía ambiental.

Por último, aunque el péndulo paramétrico tridimensional no cuente con utilidad tecnológica, su dinámica no lineal muestra una belleza que puede ser apreciada desde lo académico y quizá también, por qué no, desde lo artístico.

5 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo de la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la UTN, el CONICET y la CIC de la Provincia de Buenos Aires.

REFERENCIAS

- Clifford, M.J. y Bishop, S.R., Rotating periodic orbits of the parametrically excited pendulum. *Physics Letters A* 201:191-196, 1995.
- Dotti, F.E., Reguera, F. y Machado, S.P., A review on the nonlinear dynamics of pendulum systems for energy harvesting from ocean waves. *Proceedings of the 1st PANACM*, 1516-1529, Buenos Aires, Argentina, 2015.
- Dotti, F.E. y Virla, J.N., Nonlinear dynamics of the parametric pendulum with a view on wave energy harvesting applications, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 16(6):061007, 2021.
- Eckardt, H., The gyroscope fully understood: Complete gyroscopic motion with external torque, <http://aias.us/documents/uft/Gyroscope.pdf>, 2018.
- Goldstein, H., *Mecánica Clásica*. Reverté, 1994.
- Guo, Y. y Luo, A.C., *Bifurcation dynamics of a damped parametric pendulum*. Morgan & Claypool, San Rafael, United States of America, 2020.
- Lenci, S. y Rega, G., Experimental versus theoretical robustness of rotating solutions in a parametrically excited pendulum: A dynamical integrity perspective. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 240(9–10):814–824, 2011.
- Leven, R.W. y Koch, B.P., Chaotic behavior of a parametrically excited damped pendulum. *Physics Letters A* 86(2):71–74, 1981.
- McLaughlin, J.B., Period-doubling bifurcations and chaotic motion for a parametrically forced pendulum. *Journal of Statistical Physics* 24(2):375–388, 1981.
- Nandakumar, K., Wiercigroch, M. y Chatterjee, A., Optimum energy extraction from rotational motion in a parametrically excited pendulum. *Mechanics Research Communications* 43:7-14, 2012.
- Wiercigroch, M., J., Najdecka, A. y Vaziri, V., Nonlinear dynamics of pendulum systems for energy harvesting. *Vibration Problems ICOVP 2011: The 10th International Conference on Vibration Problems, Springer Proceedings in Physics* 139:35-42, 2011.
- Yurchenko, D. y Alevras, P., Dynamics of the N -pendulum and its application to a wave energy converter concept. *International Journal of Dynamics and Control* 1(4):290-299, 2013.

- 14:40 a 15:00 Estimación de la fracción sólida de hueso trabecular mediante el análisis inverso de ensayos de ultrasonido
*Adrián Cisilino, **GABRIELA MESSINEO**, Joaquín García Zárate, Lucas Collabella, Vu-Hieu Nguyen, Guillaume Haiat*
- 15:00 a 15:20 Estimación del ruido de tráfico vehicular utilizando un enfoque de red neuronal artificial
MARTIN SEQUEIRA, Víctor Cortínez, Adrián Azzurro

Moderadores: Ricardo Barrios Dambra y Luis Kostascki

- 15:40 a 16:00 Phononic band-gap materials design by means of topology optimization
ROLANDO YERA MORENO, Carlos Mendez, Alfredo Huespe
- 16:00 a 16:20 Estudio sobre la dinámica del péndulo paramétrico tridimensional con miras a su empleo como dispositivo recolector de energía undimotriz
FRANCO DOTTI, Juan Virla, Sebastián Machado, Carlos Vera
- 16:20 a 16:40 Evolution of the long-range correlations in acoustic emission signals capture in peridynamic modeling
*Leandro Friedrich, **LUIS KOSTESKI**, Ignacio Iturrioz, Édiblu Cezar*

Sala 5 - Sesión 7: Cuantificación de incertidumbre y modelado estocástico

Moderadores: Jorge Ballaben y Marcelo Piovan

- 14:00 a 14:20 Análisis de la pérdida de sintonía en metaestructuras electromecánicas curvas mediante enfoque probabilístico paramétrico
*Lucas Di Giorgio, **MARCELO PIOVAN***
- 14:20 a 14:40 Material cementicio reforzado con fibras cortas, una aproximación estocástica
GONZALO RUANO, Facundo Bellomo, Liz Nallim, Sergio Oller
- 14:40 a 15:00 Análise do desempenho dos algoritmos HLRF e iHLRF no cálculo do índice de confiabilidade de vigas de concreto armado
RUBENS CORREIA, Giuliana Bono, Charlei Paliga, Gustavo Bono
- 15:00 a 15:20 Métodos probabilísticos para el estudio de vibraciones libres de entramados planos con parámetros inciertos
HÉCTOR MARTÍN, Nicolás Martín Gutbrod, Marcos Pereson, Marcelo Piovan

Martes 2

Sala 3: Plenarias - Conferencia Plenaria

- 11:00 a 12:00 *Moderador: Martin Idiart*
The mechanics of multi-phase lattices
NORMAN FLECK

Sala 3: Plenarias - Conferencia Plenaria

- 17:00 a 18:00 *Moderador: Bibiana Luccioni*
Assessment Of The Lifetime Of The Containment Building Of A Prestressed Nuclear Power Plant
SERGIO OLLER

Sala 1 - Concurso de pósters de estudiantes de grado

Moderadores: Bruno Natalini y Pablo Beneyto

- 09:30 a 09:50 Estudio numérico del flujo alrededor de perfiles aerodinámicos en régimen subsónico, transónico y supersónico
LUCAS MONALDI, Sergio Elaskar
- 09:50 a 10:10 The influence of randomness on prediction of ductile-to-brittle transition behavior using peridynamics simulations

[OCSID: 7048] ESTUDIO SOBRE LA SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE PROBLEMAS MULTI-ESCALA APLICANDO MÉTODOS ITERATIVOS	
L. Hernandez, S. Toro, G. Rios Rodriguez	119-119
[OCSID: 6863] THE INFLUENCE OF RANDOMNESS ON PREDICTION OF DUCTILE-TO-BRITTLE TRANSITION BEHAVIOR USING PERIDYNAMICS SIMULATIONS	
M.B. Silva, C. Bremm, L.F. Friedricch, L.E. Kostascki, I. Iturrioz	121-121
[OCSID: 6900] EFFECTO DEL MODELADO ESTRUCTURAL EN ANÁLISIS AEROELÁSTICOS: PARTICIPACIÓN DE MODOS SUPERIORES EN EL FLUTTER DE ESTRUCTURAS ALTAMENTE FLEXIBLES.	
R.R. Velazquez, M. Maza, S. Preidikman, F. Flores	123-123
[OCSID: 6959] SIMULATION OF THE HEAT TRANSPORT IN A CONTINUOUS SOLID WITHHOLE PATTERNS THROUGH FINITE DIFFERENCES	
L.L. Zurdo, L.G. Chej, A.G. Monastra, F.M. Carusela	125-125

Acústica y Vibraciones

ARTÍCULOS COMPLETOS

[OCSID: 6660] VALIDACIÓN DE CÓDIGO LIBRE Z88 PARA EL CÁLCULO DE VIBRACIONES NATURALES DE COMPONENTES MECÁNICOS	
M. Caparroz, V. Simó, A. Flamant, C.A. Bello	129-137
[OCSID: 7012] DISEÑO ÓPTIMO DE METAMATERIALES ACÚSTICOS LOCALMENTE RESONANTES	
P.N. Dominguez, V.H. Cortinez, M.E. Sequeira	139-148
[OCSID: 6824] ESTUDIO SOBRE LA DINÁMICA DEL PÉNDULO PARAMÉTRICO TRIDIMENSIONAL CON MIRAS A SU EMPLEO COMO DISPOSITIVO RECOLECTOR DE ENERGÍA UNIDIMOTRIZ	
F.E. Dotti, L.M. Rojas, J.N. Virla, C.A. Vera	149-157
[OCSID: 6666] OSCILACIONES TRANSVERSALES EN UN MEDIO ELÁSTICO UNIDIMENSIONAL CON MEMORIA	
A.J. Ferrari, L.P. Lara, M.C. Olguin, E.A. Santillan Marcus	159-166
[OCSID: 6926] NIVELES DE RUIDO AMBIENTAL DURANTE LA PANDEMIA COVID-19 EN CÓRDOBA, ARGENTINA	
J. Muratore, A.L. Maggi, S. Gaetán, L. Romero, F. Alassia, A. Santillán, J.A. Pérez Villalobo, M. Hinalaf	167-176
[OCSID: 6736] ESTIMACIÓN DEL RUIDO DE TRÁFICO VEHICULAR UTILIZANDO UN ENFOQUE DE RED NEURONAL ARTIFICIAL	
M. Sequeira, V. Cortínez, A. Azzurro	177-188

RESÚMENES

[OCSID: 6884] APLICAÇÃO DA PERIDINÂMICA NA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS DE EMISSÃO ACÚSTICA EM COMPÓSITOS REFORÇADOS COM FIBRAS	
C. Bremm, M.B. da Silva, L.F. Friedrich, L.E. Kostascki, I. Iturrioz	189-189
[OCSID: 6883] EVOLUÇÃO DAS CORRELAÇÕES DE LONGO ALCANCE EM SINAIS DE EMISSÃO ACÚSTICA CAPTURADOS EM UM MODELO PERIDINÂMICO	
L.F. Friedrich, E. Cezar, L.E. Kostascki, I. Iturrioz	191-191