

## **BANDAS DE ATENUACIÓN DE VIBRACIONES FLEXO-TORSIONALES EN VIGAS LOCALMENTE RESONANTES**

### **ATTENUATION BANDS FOR FLEXURAL-TORSIONAL VIBRATIONS OF LOCALLY RESONANT BEAMS**

**Patricia N. Dominguez<sup>a,b</sup> y Víctor H. Cortínez<sup>a,b,c</sup>**

<sup>a</sup>*Centro de Investigación en Mecánica Teórica y Aplicada CIMTA, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina, vcortine@frbb.utn.edu.ar.*

<sup>b</sup>*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, pdoming@uns.edu.ar.*

<sup>c</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnica, CONICET*

**Palabras clave:** vigas Vlasov, atenuación de vibraciones, metamateriales, múltiples resonadores.

**Resumen.** En este trabajo se presenta un estudio de bandas de atenuación de vibraciones flexo-torsionales en vigas con sección transversal no simétrica, teniendo una gran cantidad de resonadores acoplados a lo largo de su longitud. El presente modelo estructural se formula mediante la teoría de Vlasov que contempla el alabeo torsional no uniforme. Se obtiene una solución analítica exacta de las vibraciones libres y forzadas para condiciones de borde de apoyo simple y se presentan soluciones numéricas para otros tipos de vinculación.

**Keywords:** Vlasov beams, attenuation of vibration, metamaterials, multiple resonators.

**Abstract.** In this paper a study on attenuation bands of flexural-torsional vibrations in beams with non-symmetrical cross section having a great number of resonators periodically attached is presented. This structural model is formulated by means of the Vlasov theory that takes into account the non-uniform torsional warping. For the case of simply supported beams an analytical exact solution for the free and forced vibration is obtained. For other boundary conditions, numerical solutions are given.

## 1 INTRODUCCIÓN

En los últimos años ha cobrado gran importancia el estudio dinámico de los metamateriales, entendiéndose como tales a ciertos materiales artificiales que, entre otras propiedades, son capaces de absorber la energía de ondas elásticas propagándose a través de los mismos. En general, están constituidos por micro estructuras periódicas que presentan la posibilidad de atenuar vibración a partir de dos tipos de fenómenos: dispersión de Bragg y resonancia local. El primero de éstos corresponde a los efectos de interferencia que una onda acústica sufre al propagarse en tal medio periódico, atenuándose su amplitud. Este fenómeno ocurre cuando la longitud de la onda que se propaga es comparable con la de la celda de la microestructura. El efecto de resonancia local, en cambio, se debe fundamentalmente a la vibración interna de las microestructuras que conforman el material y actúan como absorbedores dinámicos de las ondas que se propagan en el medio. Este fenómeno hace efectivo al material para atenuar vibraciones con longitudes de onda mucho mayores que el tamaño de la microcelda. Debido a tales propiedades, los metamateriales han adquirido gran interés científico por sus aplicaciones potenciales como absorbedores de vibración en banda ancha.

Hace unos pocos años se propuso una manera simple y de bajo costo para construir un metamaterial localmente resonante, acoplado un arreglo periódico de pequeños subsistemas de masa-resorte a vigas o placas. Se ha estudiado la propagación de ondas axiales, flexionales y torsionales en estos sistemas descubriendo que en ciertas frecuencias se producen importantes atenuaciones asociadas al concepto de brecha de banda. Este último concepto puede definirse como un rango de frecuencias donde no pueden tener lugar vibraciones resonantes. Entre las investigaciones relacionadas con el tema puede mencionarse a [Yu et al. \(2006\)](#), quienes analizaron la formación de brechas de banda flexionales en vigas Bernoulli-Euler acopladas a sistemas masa-resorte con dos grados de libertad. [Sun et al. \(2010\)](#) presentaron un desarrollo teórico y un estudio numérico de vigas de metamaterial con muchos sistemas masa-resorte emplazados a lo largo de su longitud para la absorción en banda ancha de ondas elásticas transversales. Recientemente, [Cveticanin y Mester \(2016\)](#) presentaron una reseña de vigas de metamateriales. Los trabajos mencionados y otros relacionados se concentraron en la formación de brechas de banda para ondas viajeras en vigas infinitas constituidas de celdas unitarias repetidas. Este enfoque resulta apropiado para estudiar los efectos de absorción en estructuras muy largas. Sin embargo, para estructuras finitas, en el rango de bajas frecuencias puede ser más conveniente estudiar la atenuación de vibraciones mediante métodos de análisis modal. Este fue el enfoque propuesto por [Sugino et al. \(2016\)](#) para determinar el comportamiento de brechas de banda en vibraciones flexionales de vigas Bernoulli-Euler de longitud finita con resonadores distribuidos longitudinalmente. Han demostrado que el análisis modal de una viga finita con infinito número de resonadores es el problema dual de la propagación de ondas en una viga infinita. Con tal metodología han obtenido una fórmula simple para determinar la banda de absorción en un rango de frecuencia deseado. El enfoque de [Sugino et al. \(2017\)](#) fue utilizado también para considerar de manera unificada las vibraciones longitudinales y torsionales de barras y vibraciones transversales de placas con muchos resonadores acoplados. Sin embargo, el caso de vibraciones flexo-torsionales acopladas de vigas de paredes delgadas con resonadores periódicamente instalados no fue considerado a pesar de su potencial en la ingeniería estructural.

Este trabajo se dirige a la exploración de las propiedades de atenuación de vibraciones de vigas finitas de paredes delgadas de sección transversal no simétrica con un arreglo de resonadores masa-resorte distribuidos a lo largo de su longitud. El modelo se formula a partir

de la teoría de Vlasov en combinación con el enfoque de Sugino et al. (2016, 2017). Se obtiene una solución analítica exacta de las vibraciones libres y forzadas, para vigas de metamaterial simplemente apoyadas. Para otras condiciones de borde se emplea el Método de elementos Finitos (MEF).

Mediante ejemplos numéricos se analiza la atenuación de amplitudes de vibración forzada para esta tipología estructural y se discute la formación de brechas de banda.

## 2 DINÁMICA FLEJO-TORSIONAL DE VIGAS DE METAMATERIAL DE PAREDES DELGADAS

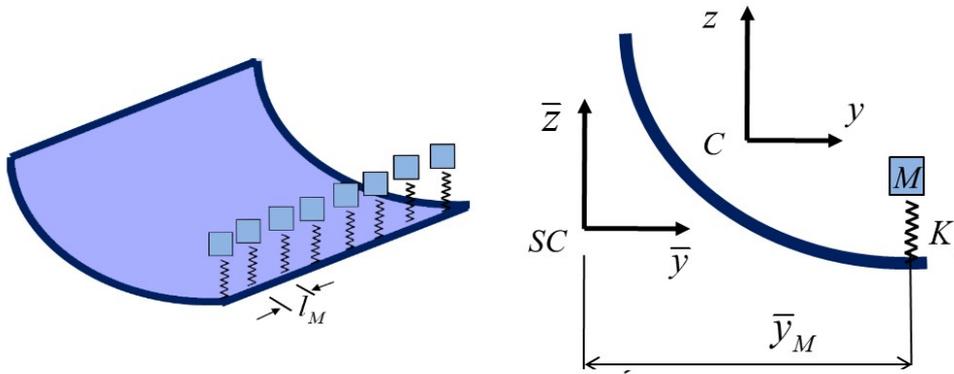


Figura 1: Viga de pared delgada con resonadores periódicamente distribuidos

### 2.1 Ecuaciones gobernantes del sistema viga-resonadores

Se analiza una viga de pared delgada con  $N$  resonadores masa-resorte acoplados como se muestra en la Figura 1 sometida a cargas transversales armónicas. El sistema puede ser modelado adecuadamente mediante la teoría de Vlasov (Cortínez et al., 2016):

$$\begin{aligned}
 EI_y \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} - \rho A y_s \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \sum_i K_i (\xi_i - (w_{si} + \phi_i \bar{y}_M)) \delta_i + \bar{q}_z \cos(\omega t) \\
 EI_z \frac{\partial^4 v_s}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} + \rho A z_s \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \bar{q}_y \cos(\omega t) \\
 EC_w \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - GJ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{I_s}{A} \phi + z_s v_s - y_s w_s \right) &= \sum_i K_i \bar{y}_M (\xi_i - (w_{si} + \phi_i \bar{y}_M)) \delta_i + \bar{m}_x \cos(\omega t) \\
 M_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} + K_i \xi_i &= K_i (w_{si} + \phi_i \bar{y}_M), \quad i=1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{1}$$

donde  $v_s, w_s$  corresponden a las componentes del desplazamiento transversal del centro de corte (en las direcciones  $y$  y  $z$ , respectivamente),  $\phi$  a la rotación torsional,  $\xi_i$  es el desplazamiento en la dirección de  $z$  de la masa ubicada en  $x_i$ ,  $w_{si}$  y  $\phi_i$  corresponden a los valores de  $w_s$  y de  $\phi$  en la coordenada  $x_i$ ,  $EI_y, EI_z, EC_w$  y  $GJ$  son las rigideces de flexión, torsión por alabeo y torsión pura respectivamente,  $\rho$  es la densidad,  $A, I_s, y_s, z_s$  corresponden al área de la sección transversal, el momento de inercia con respecto al centro de corte y las coordenadas del centro de corte con respecto al centroide respectivamente,  $K_i$  y  $M_i$

son la rigidez y la masa de cada absorbedor,  $\bar{y}_M$  es la coordenada del absorbedor con respecto al centro de corte,  $\bar{q}_z, \bar{q}_y, \bar{m}_x$  corresponden a las amplitudes de las cargas distribuidas en las direcciones  $z$  e  $y$ , y al momento torsor distribuido con respecto al eje  $x$ , respectivamente,  $N$  el número de resonadores y  $\delta$  la función de Dirac. Debe observarse que las ecuaciones formuladas corresponden (a manera de ejemplo) a una configuración particular del resonador dentro de la sección transversal. De manera similar podría plantearse para una orientación arbitraria de los resonadores. El sistema se complementa con las correspondientes condiciones de borde.

## 2.2 Formulación simplificada: sistema viga-resonadores distribuidos continuamente

Se considera que el sistema bajo estudio tiene un número  $N$  muy grande de resonadores idénticos. Consecuentemente, siguiendo a Sugino et al. (2016), puede aproximarse asumiendo que la viga está en contacto con infinitos resonadores de masa y rigidez distribuidas  $M/l_M$  y  $K/l_M$ , respectivamente, donde  $l_M$  es la distancia entre resonadores. Con la ayuda de tal idealización y asumiendo vibraciones armónicas ( $w_s = W_s(x) \cos(\omega t)$ ,  $v_s = V_s(x) \cos(\omega t)$ ,  $\phi = \psi(x) \cos(\omega t)$ ,  $\xi_i = \bar{\xi}_i \cos(\omega t)$ ), el sistema anterior puede ser escrito, después de eliminar la variable  $\xi_i$ , en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} EI_y \frac{d^4 W_s}{dx^4} - \overline{\rho A_1} \omega^2 W_s + \overline{\rho A y_s} \omega^2 \psi &= \bar{q}_z \\ EI_z \frac{d^4 V_s}{dx^4} - \overline{\rho A_2} \omega^2 V_s - \overline{\rho A z_s} \omega^2 \psi &= \bar{q}_y \\ EC_w \frac{d^4 \psi}{dx^4} - GJ \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \overline{\rho A y_s} \omega^2 W_s - \overline{\rho I_s} \omega^2 \psi - \overline{\rho A z_s} \omega^2 V_s &= \bar{m}_x \end{aligned} \quad (2)$$

Donde  $\overline{\rho A_1}$ ,  $\overline{\rho A_2}$ ,  $\overline{\rho A y_s}$ ,  $\overline{\rho A z_s}$  y  $\overline{\rho I_s}$  son propiedades inerciales seccionales generalizadas expresadas como:

$$\begin{aligned} \overline{\rho A_1} &= \rho A \left( 1 + \frac{\alpha}{1 - (\omega / \omega_M)^2} \right), \quad \overline{\rho A y_s} = \rho A y_s \left( 1 - \alpha \frac{\bar{y}_M}{y_s} \frac{1}{1 - (\omega / \omega_M)^2} \right) \\ \overline{\rho I_s} &= \rho I_s \left( 1 + \alpha \frac{A \bar{y}_M^2}{I_s} \frac{1}{1 - (\omega / \omega_M)^2} \right), \quad \overline{\rho A z_s} = \rho A z_s, \quad \overline{\rho A_2} = \rho A \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $\omega_M = \sqrt{K/M}$  es la frecuencia natural local de un absorbedor aislado y  $\alpha = M / (\rho A l_M)$  es el cociente entre la masa total de los absorbedores y la de la viga. Esta forma de escribir la ecuación gobernante puede ser de utilidad para obtener expresiones analíticas como se verá en la sección siguiente.

## 3 VIBRACIONES LIBRES Y FORZADAS DE VIGAS SIMPLEMENTE APOYADAS: SOLUCIÓN ANALÍTICA

Se considera una viga con las siguientes condiciones de borde:  $V_s = W_s = \psi = d^2 V_s / dx^2 = d^2 W_s / dx^2 = d^2 \psi / dx^2 = 0$  en  $x = 0$  y  $x = L$ . La solución del sistema (2) que verifica tales condiciones de borde puede ser obtenida a partir de una expansión de

Fourier de las incógnitas y de la carga:

$$\begin{aligned} V_s &= \sum_n \alpha_n^v \sin \frac{\pi x}{\lambda_n}, W_s = \sum_n \alpha_n^w \sin \frac{\pi x}{\lambda_n}, \psi = \sum_n \beta_n \sin \frac{\pi x}{\lambda_n}, \bar{q}_z = \sum_n q_n^z \sin \frac{\pi x}{\lambda_n}, \\ \bar{q}_y &= \sum_n q_n^y \sin \frac{\pi x}{\lambda_n}, \bar{m}_x = \sum_n m_n \sin \frac{\pi x}{\lambda_n}, \text{ con } \lambda_n = L/n \end{aligned} \quad (4)$$

Reemplazando esta expresión en (2) es posible llegar al siguiente sistema de tres ecuaciones algebraicas simultáneas para cada  $n$ :

$$(\mathbf{K}_n - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{X}_n = \mathbf{Q}_n \quad (5)$$

donde:

$$\mathbf{K}_n = \begin{bmatrix} \frac{EI_y \pi^4}{\lambda_n^4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI_z \pi^4}{\lambda_n^4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EC_w \pi^4}{\lambda_n^4} + \frac{GJ \pi^2}{\lambda_n^2} \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \overline{\rho A_1} & 0 & -\overline{\rho A y_s} \\ 0 & \overline{\rho A_2} & \overline{\rho A z_s} \\ -\overline{\rho A y_s} & \overline{\rho A z_s} & \overline{\rho I_s} \end{bmatrix}, \mathbf{X}_n = \begin{Bmatrix} \alpha_n^w \\ \alpha_n^v \\ \beta_n \end{Bmatrix}, \mathbf{Q}_n = \begin{Bmatrix} q_n^z \\ q_n^y \\ m_n \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Es fácil obtener  $\mathbf{X}_n$  y, entonces, la solución forzada estacionaria con (4). Por otra parte, cuando  $\mathbf{Q}_n = 0$ , del sistema (5) pueden obtenerse las frecuencias naturales. Se mostrará que cuando  $\alpha \neq 0$ , para cada valor de  $n$  surgen cuatro autovalores, dos de los cuales ( $\omega_{nI}, \omega_{nS}$ ) acotan por arriba y por abajo a la frecuencia del resonador aislado  $\omega_M$  ( $\omega_{nI} \leq \omega_M \leq \omega_{nS}$ ). En cambio, cuando  $\alpha = 0$ , para cada valor de  $n$  existen sólo tres autovalores. Si la sección transversal presenta un eje de simetría como la de la Figura 2, el sistema (5) puede ser resuelto en forma explícita. Las correspondientes expresiones para el movimiento flexo-torsional acoplado ( $W_s, \psi$ ) son las siguientes:

$$\begin{aligned} \alpha_n^w &= \frac{q_n^z \left( \frac{EC_w \pi^4}{\lambda_n^4} + \frac{GJ \pi^2}{\lambda_n^2} - \overline{\rho I_s} \omega^2 \right) - m_n \overline{\rho A y_s} \omega^2}{\Delta_n} \\ \beta_n &= \frac{-q_n^z \overline{\rho A y_s} \omega^2 + m_n \left( \frac{EC_w \pi^4}{\lambda_n^4} + \frac{GJ \pi^2}{\lambda_n^2} - \overline{\rho I_s} \omega^2 \right) \left( \frac{EI_y \pi^4}{\lambda_n^4} - \overline{\rho A_1} \omega^2 \right)}{\Delta_n} \end{aligned} \quad (7)$$

donde:

$$\Delta_n = \left( \frac{EI_y \pi^4}{\lambda_n^4} - \overline{\rho A_1} \omega^2 \right) \left( \frac{EC_w \pi^4}{\lambda_n^4} + \frac{GJ \pi^2}{\lambda_n^2} - \overline{\rho I_s} \omega^2 \right) - (\overline{\rho A y_s} \omega^2)^2 \quad (8)$$

#### 4 ATENUACIÓN DE LA RESPUESTA DINÁMICA

El uso práctico de vigas de metamaterial es la atenuación de amplitudes de vibración en comparación con la estructura original sin resonadores. Este análisis de vibración forzada puede realizarse fácilmente con la solución analítica previamente establecida. Como se puede observar en los resultados numéricos, para atenuar la respuesta a una frecuencia específica  $\omega_T$  del sistema original (usualmente coincidente con alguna de sus frecuencias naturales), la frecuencia local del resonador debe ser elegida ligeramente menor (por ejemplo  $\omega_M = 0.9\omega_T$ ).

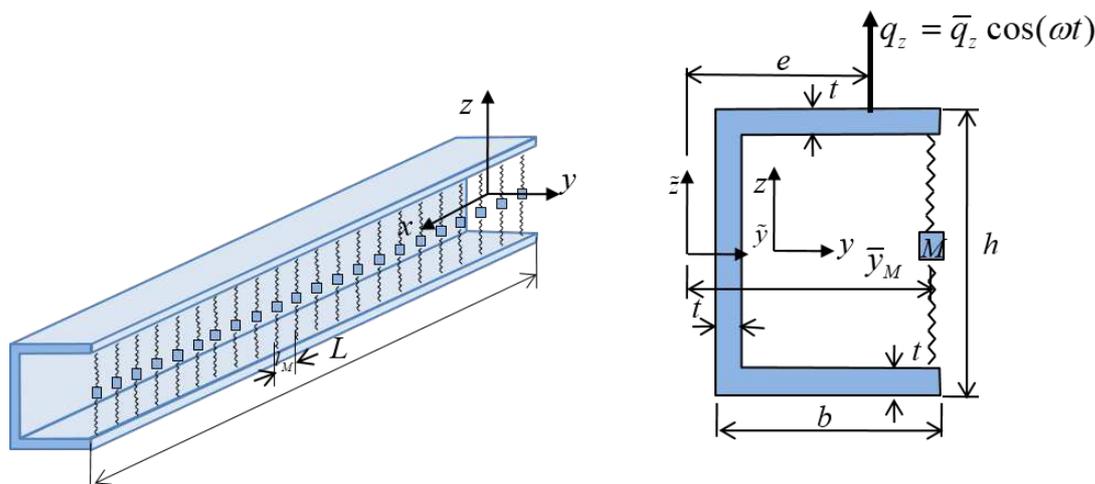


Figura 2: Viga de pared delgada monosimétrica con resonadores periódicamente distribuidos.

De esta forma, en la viga de metamaterial desaparecerá la resonancia  $\omega_T$  siendo sustituida por otras dos, una a cada lado de la misma ( $\omega_{n1} \leq \omega_T \leq \omega_{n2}$ ). Así, dentro del rango de frecuencias  $\omega_{n1}, \omega_{n2}$  las amplitudes serán atenuadas (banda de atenuación). Esto puede observarse en la Figura 3 para el caso de una viga simplemente apoyada como la de la Figura 2 con las características:  $L = 2\text{ m}$ ,  $E = 4,5E10\text{ Pa}$ ,  $G = 1,8E10\text{ Pa}$ ,  $\rho = 2650\text{ kg/m}^3$ ,  $h = 0,1\text{ m}$ ,  $b = 0,04\text{ m}$ ,  $t = 0,006\text{ m}$ ,  $y_s = -0,020816\text{ m}$ ,  $\omega_T = 3942$ ,  $\omega_M = 0.9\omega_T = 3548,3\text{ rad/s}$ ,  $K_i = 2K_i^0$ ,  $\bar{y}_M = 0,028\text{ m}$ ,  $\bar{q}_z = 1000\text{ N/m}$ ,  $e = 0$ ,  $\alpha = 0,5$ . La Figura 3b muestra la respuesta del sistema para la carga indicada mientras que la a) muestra la respuesta para una de las componentes de Fourier de la carga:  $q = q_3 \sin(3\pi x/L)$ . Esta última forma coincide con la forma modal resonante en  $\omega_T$ . Como se puede apreciar en la Figura 3a, la viga de metamateriales presenta una banda de atenuación anulándose la resonancia en  $\omega_T$ . Dicha respuesta dinámica involucra solamente dos modos flexo-torsionales (correspondientes a  $n=3$  en las expresiones (4)). En la Figura 3b se observa la respuesta dinámica para la carga distribuida uniforme que excita a varios modos de vibración. De todas maneras, se sigue apreciando la existencia de una banda de atenuación aunque ligeramente inferior a la del caso anterior.

Tal estudio numérico ha sido realizado mediante el modelo de la ecuación (2) y su correspondiente solución analítica. Es importante verificar su precisión para predecir la respuesta de la estructura con resonadores concentrados (1) que corresponde al caso real.

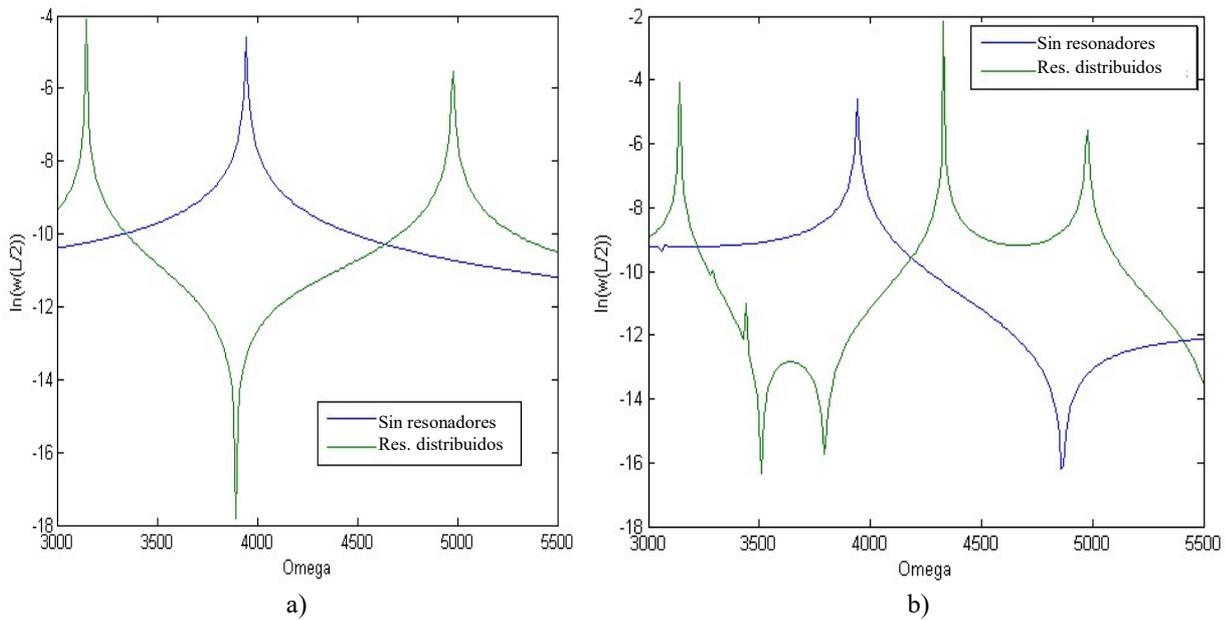


Figura 3: comparación entre la respuesta dinámica de la viga sin resonadores versus viga con resonadores (Fig.2).

Con este objetivo, en la Figura 4 se muestra una comparación entre la respuesta dinámica obtenida con la solución analítica (4-8) y una solución obtenida mediante el método de elementos finitos de la ecuación (1), considerando 5 (Figura 4a) y 15 resonadores (Figura 4b). Como se puede apreciar para 5 resonadores el comportamiento es similar aunque hay una discrepancia de 5% aproximadamente en las frecuencias resonantes, mientras que para 15 resonadores las soluciones son prácticamente coincidentes. Esto muestra que para un número suficientemente alto de resonadores la respuesta del modelo simplificado es precisa a los efectos prácticos.

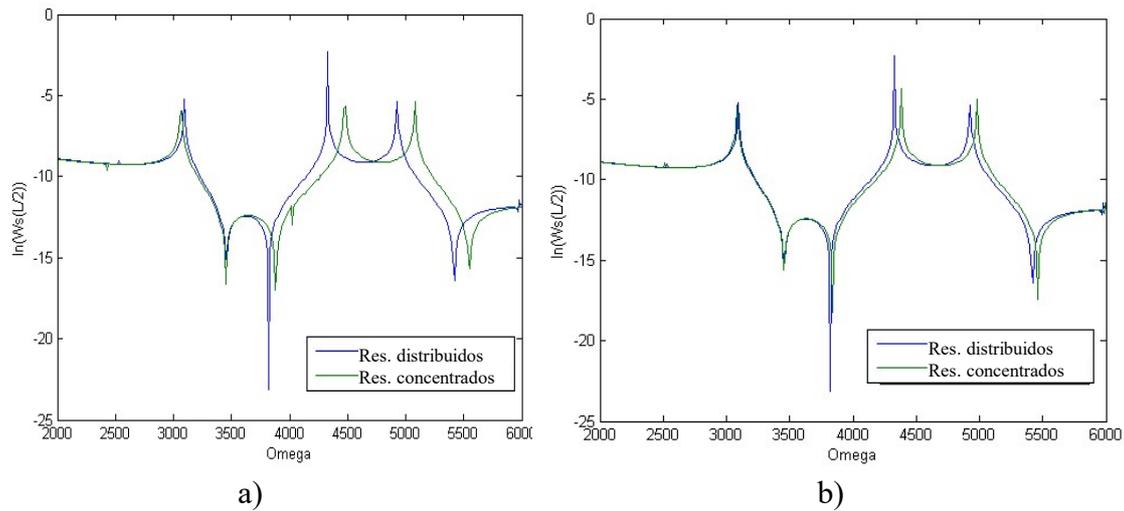


Figura 4: Comparación entre la respuesta dinámica con resonadores distribuidos y concentrados para a) 5 resonadores y b) 15 resonadores.

Es útil notar que la solución analítica utilizada permite analizar bandas de atenuación en frecuencias bajas para vigas simplemente apoyadas pero también para frecuencias más altas para condiciones de borde arbitrarias puesto que el efecto de estas últimas se va perdiendo a medida que el orden de frecuencia aumenta. Por supuesto, para otras condiciones de contorno

y frecuencias bajas es necesario resolver el sistema (2) con un enfoque adecuado tal como el MEF. De esta manera se realiza un estudio similar al mostrado en la Figura 3 aunque para condiciones de bordes empotrados. Los resultados, obtenidos mediante un programa de elementos finitos (FlexPDE, 2015) se muestran en la Figura 5, donde también se aprecia la existencia de una banda de atenuación.

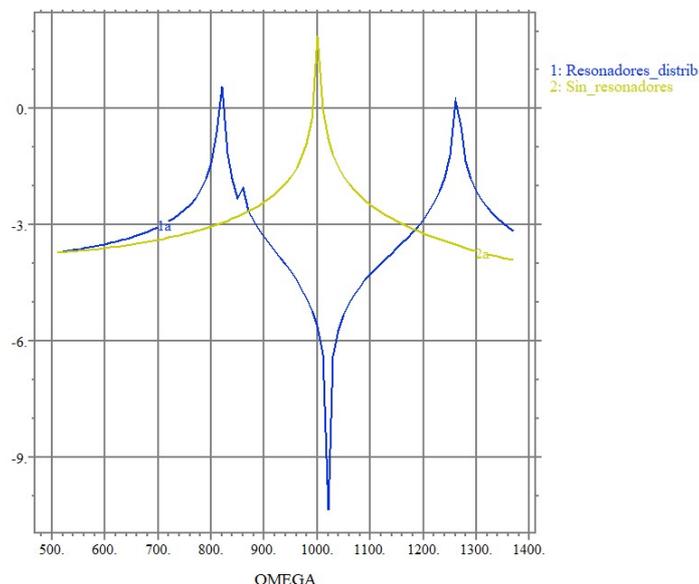


Figura 5: Respuesta dinámica ( $\ln(W_s)$ ) en  $x=L/2$ , viga Emp.-Emp.,  $\omega_T = 998 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_M = 898 \text{ rad/s}$ .

El análisis de vibración forzada requiere el conocimiento de la distribución de la carga externa. Sin embargo, tiene interés analizar la existencia de bandas de atenuación de manera independiente de la forma de tal carga. Para vigas tipo Bernoulli-Euler esto se ha realizado mediante el estudio de ondas viajeras con la teoría de Bloch-Floquet, con el propósito de buscar bandas de frecuencia donde esté impedida la propagación (Sun et al., 2010). Esto también puede estudiarse analizando bandas de frecuencia donde no existan frecuencias naturales (donde no pueden darse condiciones resonantes). Este último enfoque es el utilizado por Sugino et al. (2016) para vigas Bernoulli-Euler. Para el caso de la viga simplemente apoyada mostrada en la Figura 2 se han obtenido las frecuencias naturales de vibración mediante el modelo analítico explicado. Los resultados correspondientes a los modos simétricos se muestran en la Figura 6. Es posible observar aquí que existe una banda de frecuencias, cuyo valor inferior es  $\omega_M$ , carente de frecuencias naturales, lo que quiere decir que si las frecuencias externas están en dicha banda, no pueden producir resonancia y el movimiento resultante tendrá pequeñas amplitudes. Dicho concepto se denomina “brecha de banda”. Si bien la búsqueda de brechas de banda para estudiar la atenuación de vibraciones es una metodología económica de análisis, puede ser difícil obtener esta brecha para modos de vibración acoplados ya que la misma puede eventualmente no existir y aún así una viga de metamaterial puede ser de utilidad para la atenuación de vibraciones para ciertas formas de carga y cierto rango de frecuencias.

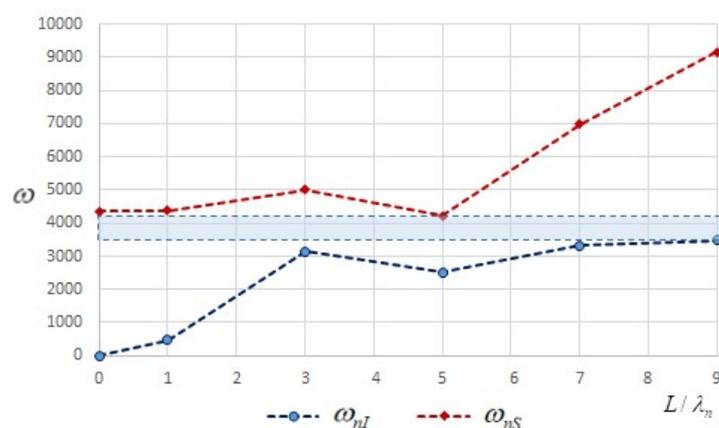


Figura 6: Frecuencias naturales  $\omega_{nI}$  y  $\omega_{nS}$  limitando la frecuencia local  $\omega_M$  en función de  $L/\lambda_n$

No obstante, si se va a utilizar el concepto de brecha de banda para vibraciones flexo-torsionales es necesario diseñar muy meticulosamente la configuración de resonadores de la sección transversal. Por ejemplo, para la viga doble T que se muestra en la Figura 7, es posible obtener una brecha de banda de modos flexionales ubicando los resonadores en el alma (Sugino et al., 2016). Sin embargo, tal configuración no absorberá modos torsionales. Puede lograrse una banda de atenuación para modos torsionales y flexionales con resonadores descentrados similares a los del ejemplo anterior aunque no se podrá lograr brechas de banda. Para obtener estas últimas es posible agregar un resonador adicional como se muestra en la Figura 7. El análisis puede llevarse a cabo mediante una adaptación de la teoría presentada a este caso. Es inmediato observar que esta configuración de resonadores podrá trabajar para modos torsionales puros o flexionales puros. Las características de la viga de la Figura 7 son las siguientes:  $E = 4,5E10 Pa$ ,  $G = 1,8E10 Pa$ ,  $\rho = 2650 kg/m^3$ ,  $\alpha = 0,9$ ,  $h = 0,1m$ ,  $b = 0,04m$ ,  $t = 0,006m$ ,  $L = 2m$ ,  $d = 0,016m$ ,  $\omega_T = 9481,6 rad/s$ ,  $\omega_M = 0,98\omega_T = 9292,3 rad/s$ .

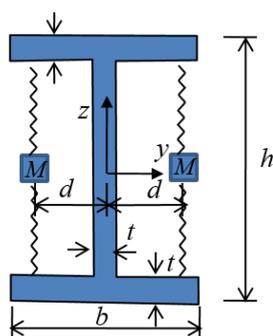


Figura 7: Perfil doble T.

En la Figura 8a se muestran las frecuencias naturales de dicho sistema para  $\omega_T = 9481,6 rad/s$ ,  $\omega_M = 0,98\omega_T = 9292,3 rad/s$ ,  $\alpha = 0,9$  y  $d = 0,016m$ . Como se puede observar existe brecha de banda para modos torsionales y flexionales en conjunto. Dicha brecha, de  $830 rad/s$ , se produce entre el valor menor de las frecuencias torsionales superiores  $\omega_{1S} = 10000 rad/s$ , y el mayor de los correspondientes a las frecuencias flexionales inferiores  $\omega_{12I} = 9170 rad/s$  (Figura 8b).

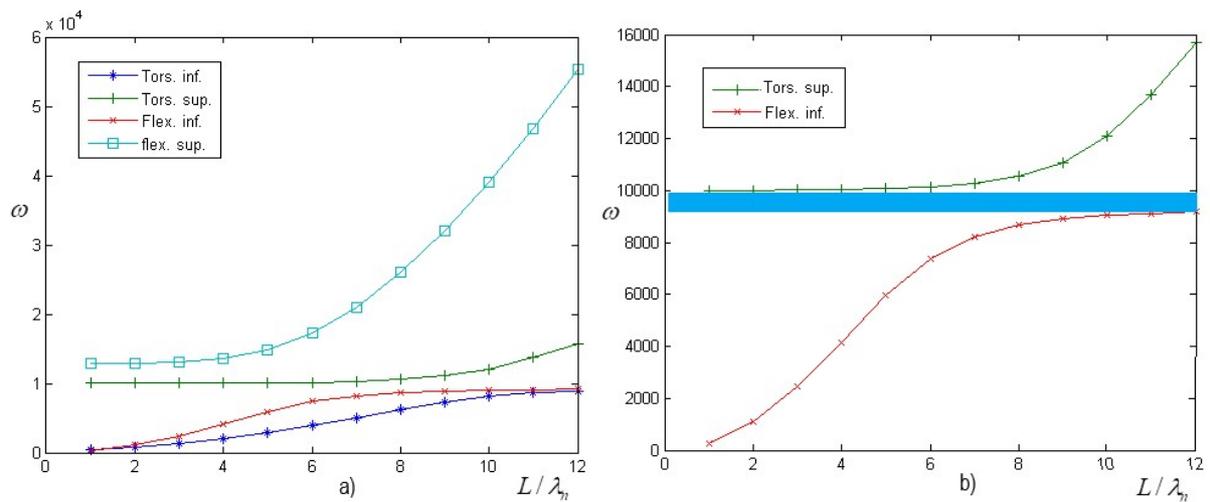


Figura 8: Perfil doble T: a) frecuencias naturales, b) brecha de banda.

## 5 CONCLUSIONES

Se ha explorado la posibilidad de atenuar vibraciones flexo-torsionales mediante la utilización de resonadores acoplados en vigas de paredes delgadas. Se ha obtenido una solución analítica para estudiar las bandas de atenuación en vigas simplemente apoyadas. Adicionalmente, tal enfoque puede utilizarse para analizar bandas de atenuación de frecuencias más altas en vigas con otras condiciones de borde. Si bien las bandas de atenuación pueden encontrarse para ciertas formas de la carga de excitación, no siempre es posible obtener brecha de banda para modos de vibración flexo-torsionales. El problema estudiado aquí puede ser de importancia para el estudio de nuevos enfoques de control de vibraciones en edificios sometidos a viento o sismos.

## REFERENCIAS

- Cveticanin, L. y Mester, G. Theory of Acoustic Metamaterials and Metamaterial beams: an overview, *Acta Polytechnica Hungarica* 13 (7), 2016.
- Cortínez, V.H., Dominguez, P. N. y Bender, N. G. Una generalización del modelo Timoshenko-Vlasov para el análisis dinámico de vigas no homogéneas, *Mecánica Computacional XXXIV*, 1327-1346, 2016.
- FlexPDE<sup>®</sup>, PDE Solutions Inc. [www.pdesolutions.com](http://www.pdesolutions.com), 2015.
- Sugino, C., Leadenham, S., Ruzzene, M. y Erturk, A. On the mechanism of bandgap formation in locally resonant finite elastic metamaterials, *Journal of Applied Physics* 120, 134501, 2016.
- Sugino, C. Xia, Y., Leadenham, S., Ruzzene, M. y Erturk, A., A general theory for bandgap estimation in locally resonant metastructures, *Journal of Sound and Vibration* 406, 104-123, 2017.
- Sun, H., Du, X. y Frank Pai, P. Theory of Metamaterial beams for Broadband Vibration Absorption, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 21, 1086-1101, 2010.
- Yu, D., Liu, Y., Zhao, H., Wang, G. y Qiu, J. Flexural vibration bandgaps in Euler-Bernoulli beams with locally resonant structures with two degrees of freedom, *Physical Reviews B* 73, 064301, 2006.