Investigación

La pedagogía de la investigación en la escuela secundaria y la implementación de recorridos de estudio e investigación en matemática

Otero, María Rita - rotero@exa.unicen.edu.ar
Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT), Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Tandil, Argentina. Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

Llanos, Viviana Carolina - vcllanos@exa.unicen.edu.ar
Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT), Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Tandil, Argentina. Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

Gazzola, María Paz - mpgazzola@gmail.com
Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT), Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Tandil, Argentina.

Resumen

En este trabajo se presentan resultados de una enseñanza por Recorridos de Estudio y de Investigación (REI) en la escuela secundaria, basada en la pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo, propuesta por Chevallard en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Se analizan protocolos para mostrar la actividad matemática del grupo de estudio. Se discuten algunos logros y se señalan ciertos obstáculos relativos a la implementación del REI y a la magnitud del cambio que es necesario realizar en la institución escuela secundaria.

Palabras clave: *Pedagogía de la Investigación y del cuestionamiento del mundo, Recorridos de Estudio y de Investigación (REI), TAD, matemática, escuela secundaria.*

Abstract

In this paper some results related to teaching based on pedagogy of research and world questioning using Paths of Study and Research (PSR) at secondary school are presented. The framework of the Anthropological Theory of Didactic (ATD) is used. Some protocols showing the mathematical activity of the study group are analyzed. Some achievements and obstacles related to the implementation of Paths of Study and Research (PSR) at secondary school are discussed, also, the challenges of the necessary changes in the secondary school are considered.

Keywords: *Pedagogy of research and world questioning, Paths of Study and Research (PSR), Anthropological Theory of Didactic (ATD), maths, secondary school.*

Introducción

En la actualidad, la enseñanza de la matemática se ha reducido al estudio de respuestas en lugar de cuestiones, lo que conduce al conocido fenómeno de la pérdida de sentido y monumentalización del saber (Chevallard, 2004, 2007). Este fenómeno didáctico consiste en enseñar obras matemáticas como objetos ya creados, transparentes e incuestionables, obras a las que precisamente por su carácter monumental, a lo sumo se las puede visitar.

Los Recorridos de Estudio e Investigación (REI) propuestos por Chevallard son dispositivos didácticos que consisten en el estudio de cuestiones *Q*, como punto de partida del saber matemático y en la construcción de posibles respuestas a dichas cuestiones, por parte de la comunidad de estudio. La enseñanza por REI, requiere ingresar en una pedagogía escolar radicalmente diferente a la tradicional, llamada *pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo*. La viabilidad de estos dispositivos depende de ciertas condiciones institucionales de las cuales usualmente carecemos, como por ejemplo, una organización didáctica escolar apropiada. Sin embargo, al menos en materia de investigación, es posible el intento de hacer vivir en la escuela, toda vez que sea posible, la *pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo*.

Recientemente, propusimos una enseñanza por REI que parte de la cuestión generatriz *Q0*: *¿Cómo operar con curvas cualesquiera si solo se dispone de la representación gráfica de las mismas y de la unidad en los ejes?* (Otero, Llanos, 2011). Las posibles respuestas a la cuestión *Q* involucran la tecnología del cálculo geométrico y generaron diferentes recorridos de estudio. Así, si se parte de la multiplicación de dos rectas, se genera un primer recorrido que permite reconstruir la Organización Matemática (OMFPD) relativa a la función polinómica de segundo grado (Llanos, Otero, 2011). Si se parte de varias rectas o combinaciones entre parábolas y rectas o entre parábolas, etc., se genera un recorrido de estudio que permite reconstruir la OMFP de las funciones polinómicas en el cuerpo de los reales (Llanos, Otero, Bilbao, 2011). Por último, si se trata de la división de rectas, o de rectas y parábolas, o parábolas y rectas, o entre parábolas, se genera un recorrido, que permite construir la OMFQ de las funciones racionales (Gazzola, Llanos, Otero 2011).

En este trabajo presentaremos algunos resultados sobre cómo se llevó adelante la pedagogía de la investigación en el aula de matemática de secundaria, centrándonos en la parte de la investigación referida al recorrido con el cual se estudiaron las funciones racionales.

Marco Teórico

Adoptamos como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Yves Chevallard (1999, 2004, 2007, 2009), que ha definido con precisión los fenómenos denominados: *monumentalización del saber* y *pérdida de sentido* de las cuestiones que se estudian en la escuela media y ha propuesto los Recorridos de Estudio e Investigación (REI) como dispositivos didácticos para enfrentar estos problemas. El fundamento de estas definiciones y constructos se encuentran en lo que Chevallard (2004) ha denominado *pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo*.

Para ingresar en la pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo, se requiere una modificación radical del contrato didáctico imperante en la escuela secundaria. Esta modificación no es exclusiva del ámbito pedagógico, sino que está enraizada con una manera de concebir la matemática en particular y los procesos de construcción de conocimiento en general. Es decir, se asume que el saber matemático es el producto de respuestas a cuestiones vivas, de interés para una cierta comunidad o grupo en un momento determinado, cuestiones que requieren de respuestas funcionales, útiles, que por su propia funcionalidad, se encuentran en permanente proceso de discusión y reformulación. Es decir, el saber que se construye, no es "la" respuesta, sino una respuesta posible y provisoria, adaptada a las necesidades y condiciones establecidas por la comunidad donde tiene lugar el proceso de estudio. Así, tanto en la comunidad matemática erudita de estudio, como en la comunidad escolar de estudio, se desarrolla un proceso de investigación, de búsqueda de respuestas, aunque claramente las respuestas no son ni pueden ser las mismas, ni se validan de la misma manera. El funcionamiento escolar del saber matemático no es el mismo que el del saber sabio; esta idea está en la base de lo que magistralmente Chevallard (1985) ha denominado transposición didáctica, y atraviesa toda su teorización hasta la Teoría Antropológica de lo Didáctico en sus sucesivas reformulaciones (Chevallard, 1999, 2004, 2007, 2011).

En este contexto, Chevallard (2004) formula la noción de REI, como un modelo general para el diseño y análisis de los procesos de estudio funcionales que permiten generar y desarrollar las organizaciones matemáticas.

Los Recorridos de Estudio e Investigación (REI)

El objetivo principal de los REI es introducir una nueva epistemología que otorgue sentido y funcionalidad al estudio escolar de la matemática (Chevallard, 2009) y que reemplace la pedagogía de "inventariar" los saberes. Los alumnos (*X*) investigan y estudian sobre una cuestión *Q* bajo la dirección de un profesor (*y*) o de un conjunto de profesores (*Y*) con el objetivo de aportar una respuesta *R* a la cuestión *Q*. Se coloca el exponente © en *R* para indicar que la respuesta a *Q* ha sido producida bajo determinadas restricciones y que "funciona" como respuesta a *Q* bajo esas restricciones, pues no existe respuesta universal y universalmente efectiva (Chevallard, 2009). Así, el sistema didáctico, representado como *S*(*X; Y; Q*), necesita instrumentos, recursos, obras, en definitiva, necesita un medio didáctico *M* que debe identificar, ordenar y aprender a utilizar con el objetivo de producir *R*©. Esto se simboliza como:

[*S*(*X; Y; Q*) Ì*M*] Ê *R*©

Es decir, el sistema didáctico construye y organiza (Ì) el medio *M* con el cual engendrará o producirá (Ê) una respuesta *R*©. El medio *M* contiene respuestas pre-construidas, aceptadas por la cultura escolar –por ejemplo un libro, la Web, el curso de un profesor, etc., representadas como *R*◊ ("*R* punzón")–, y por obras –por ejemplo, teorías, montajes experimentales, praxeologías, simbolizadas por *O*– consideradas útiles para deconstruir las respuestas *R*◊, decidir qué de lo que hay allí es necesario para construir la respuesta *R*©. Por consiguiente, el medio *M* se formula de la siguiente manera:

$$M = \{R_1^\Diamond, R_2^\Diamond, R_3^\Diamond, \ldots\ldots, R_n^\Diamond, O_{n+1}, \ldots\ldots, O_m\}$$

Chevallard (2004) define el REI como sigue:

[*S*(*X;Y;Q*) Ì$\{R_1^\Diamond, R_2^\Diamond, R_3^\Diamond, \ldots\ldots, R_n^\Diamond, O_{n+1}, \ldots\ldots, O_m\}$] Ê *R*©

En el inicio de un REI, se propone una cuestión *Q*, llamada *cuestión generatriz*, porque posee la propiedad de *generatividad*, es decir, permite la formulación de numerosas cuestiones derivadas, cuyo estudio llevará a la (re)construcción de un gran número de organizaciones matemáticas, que surgirán como respuesta a las cuestiones que han requerido de su construcción. Se establece así una cadena de cuestiones y de respuestas que son el corazón del proceso de estudio $P= (Qi;Ri)1 \leq i \leq n$, siendo *Qi* todas las cuestiones que habitan dicho corazón ♥ y *Ri* las respuestas a estas cuestiones (Chevallard, 2007). La gestión de los REI, exige a la comunidad de estudio, integrada por el director del proceso de estudio (el profesor) y los alumnos, una transformación de su relación con el saber, pues este deja de ser algo que se conoce de antemano, para volverse una construcción (o reconstrucción) de común acuerdo, en el transcurso de la clase.

Topogénesis, cronogénesis y mesogénesis

Los procesos de *cronogénesis*, *mesogénesis* y *topogénesis* son *funciones didácticas* o *funciones de producción* (Chevallard, 2009). La *mesogénesis* consiste en la "fabricación" del medio *M* por la clase, a partir de producciones diversas, tanto *externas* como *internas,* estas últimas incluyen particularmente a las respuestas *Rx*, es decir, las respuestas propuestas por los alumnos *x* a partir de su propia actividad. Diversos tipos de obras que pueden, *en principio*, venir a constituir el medio *M* de un REI, obras que en general están excluidas *por principio* de la enseñanza tradicional. El "trabajo" sobre el medio cambia interactivamente en la medida en que cambia su *naturaleza*. La condición *mesogenética* se acopla con la *topogenética*: la constitución del medio *M* es un producto de la clase [*X*, *y*], es decir, no solo de *y*. El *topos* de los alumnos se amplía considerablemente: no solo podrán aportar *su* respuesta personal *Rx*, sino también podrán introducir en *M* toda obra que deseen. A este cambio, corresponde un cambio importante en el *topos* del profesor, a quien se nombrará el *director del estudio* porque dirige el estudio de *Q*, o el *director de la investigación,* quien dirige la investigación sobre *Q*, es decir *y.* De igual manera, *y* podrá introducir en *M* cierta respuesta $R^{\lozenge}$, que no será necesariamente "su" respuesta personal *Ry*, en ningún caso un *media* tendrá el privilegio de ser *"creído bajo palabra"* (Chevallard, 2009).

La cronogénesis distingue fuertemente a un REI de los dispositivos didácticos usuales en la escuela: la constitución y el "trabajo" del medio *M* demandan *una dilatación del tiempo didáctico* es decir, *una extensión del tiempo de reloj requerido* (Chevallard, 2009). El trabajo realizado en *M* para producir una respuesta $R^{\heartsuit}$ comportará particularmente un estudio *más o menos provocado* de obras *Oj*, lo cual conduce una transformación momentánea de *S*(*X;Y;Q*) en un sistema didáctico del tipo "clásico" *S*(*X;Y; Oj*). El estudio de la obra *Oj* tiene por objetivo contribuir a la elaboración de $R^{\heartsuit}$ y puede requerir de una ampliación a otras obras *Ok*. Así, el estudio de diferentes obras *Oj* y de respuestas $R^{\lozenge}$ deben ser requeridas por la investigación en curso, más que introducidas por *y* de manera artificial.

Metodología

La investigación es de corte cualitativo, etnográfico y exploratorio. Se busca describir el ingreso a la pedagogía de la investigación a partir de la implementación de una enseñanza por REI. Si bien las investigaciones que desarrollan una enseñanza por REI en un curso habitual, sin la creación de dispositivos especiales o ajenos al ámbito escolar, son escasas, nuestro trabajo se realiza en una escuela que atiende sectores medios, específicamente en dos cursos de secundario

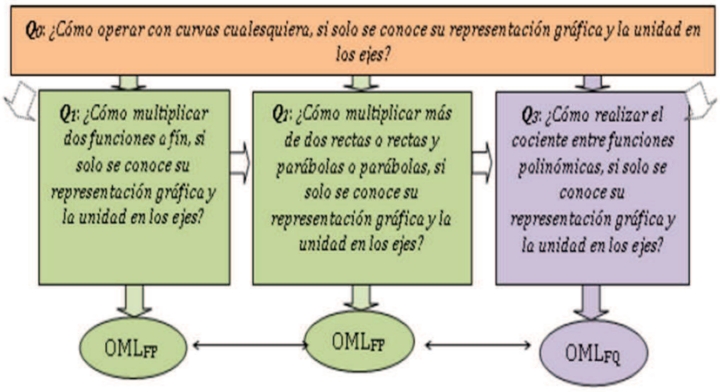

Figura 1. Posibles recorridos de investigación

seleccionados intencionalmente por el equipo de investigación (N=59 estudiantes de 5° Año).

Las implementaciones estuvieron a cargo de los investigadores, quienes realizaron observación participante y no participante. En la totalidad de las clases se obtuvieron todos los protocolos escritos de los estudiantes. Estos se retiran para ser escaneados y se devuelven en el encuentro siguiente, para garantizar a cada alumno la continuidad de trabajo y la disponibilidad de su producción personal. Se tomaron registros de audio "generales" en todas las clases, los cuales se completan con las notas de campo del profesor y de los observadores del equipo que no dirigen el proceso de estudio.

Las funciones racionales

Se parte de la cuestión generatriz *Q0*: *¿Cómo operar con curvas cualesquiera, si solo se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes?* La respuesta a tal cuestión ha originado diferentes recorridos y puede generar muchos otros, dependiendo de las funciones que se adopten y de la operación que se realice entre las mismas. Estas posibles respuestas a la cuestión generatriz se corresponden con posibles recorridos que paulatinamente aportan resultados parciales a $R^\heartsuit$ como resultado de todo el proceso. Los recorridos mencionados como emergentes del REI, pueden sintetizarse en el esquema que se presenta en la Figura 1, partiendo siempre del "germen" de la investigación que en este caso ha sido la cuestión generatriz *Q0* y las cuestiones derivadas $(Qi)1 \leq i \leq n$ sobre las cuales no nos explayaremos en este trabajo.

Desde un punto de vista mesogenético, puede decirse que el profesor tuvo al menos en el comienzo, mayor protagonismo en la construcción del medio y en la toma de decisiones que condujeron a una secuencia *Q1, Q2, Q3* y al encuentro de las organizaciones matemáticas que ellas permiten reencontrar. Esta investigación analiza el recorrido generado por la división de funciones polinómicas a partir de *Q3*, que identificamos como REIFQ. Desde el punto de vista de la ingeniería didáctica del REI, se analizan a priori algunas de las cuestiones que pueden desprenderse de Q3: *¿Cómo dividir dos funciones polinómicas, si solo se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes?*

Q3,1: *¿Cómo se dividen si son:*
- Q3,1.1*: dos rectas?*
- Q3,1.2*: una parábola y una recta, y a la inversa?*
- Q3,1.3*: dos parábolas?*
- Q3,1.4*: funciones que tienen ceros distintos?*
- Q3,1.5*: funciones que tienen ceros iguales?*

Q3,2.1*: ¿Qué produce la división geométrica de dos funciones polinómicas?*

Q3,2.2*: ¿Qué produce la división algebraica de funciones polinómicas?*

Q3,3: *¿Qué características tiene "esto" que se obtiene al dividir dos funciones polinómicas:*

Q3,3.1: desde un punto de vista geométrico?
Q3,3.2: desde un punto de vista algebraico?
Q3,3.3: desde un punto de vista funcional?

Q3,4.: *¿Qué características tiene la representación gráfica:*

Q3,4.*1: geométricamente?*
Q3,3.2: algebraicamente?

Q3,i*: …*

Se ingresa así en un camino alejado del tratamiento escolar tradicional de la función racional, donde la representación gráfica y la representación algebraica, las propiedades y las asíntotas se imponen por definición.

Inicialmente se proponen dos situaciones, en la primera, la gráfica de q resulta de la división geométrica de dos rectas, mientras que en la segunda se trata de una recta y una parábola. En ambos casos las cuestiones son: *¿Cuál podría ser la gráfica más razonable para q? ¿Qué características*...?

Los estudiantes obtienen la curva más razonable para q identificando en primera instancia los signos y los *puntos seguros* de q (para esto se valen de la identificación de los ceros, usan la unidad, el menos uno y utilizan el hecho de que en la intersección de las funciones graficadas, la ordenada de q vale uno, por tratarse de un cociente).

Para obtener otros *puntos seguros,* los estudiantes readaptan y modifican la técnica de la construcción geométrica que usaron en los recorridos anteriores. Construyen triángulos semejantes, aprovechando el dato de la unidad y formulando las proporciones que justifican cómo pueden obtener la ordenada del punto que representará el cociente que buscan, en cualquier abscisa. Es decir, que en este recorrido, se *trabaja la técnica* utilizada para la multiplicación de segmentos y se la adapta al cociente de los mismos. Como la multiplicación es conmutativa los estudiantes pueden utilizar indistintamente cualquier segmento para comenzar la construcción y obtener la multiplicación entre ellos, pero como la división no es conmutativa, es necesario repensar y validar una construcción diferente.

Surge además, la necesidad de estudiar una característica fundamental de las funciones racionales: el caso en que el divisor es cero. Entonces, se identifican los puntos donde la función divisor se hace

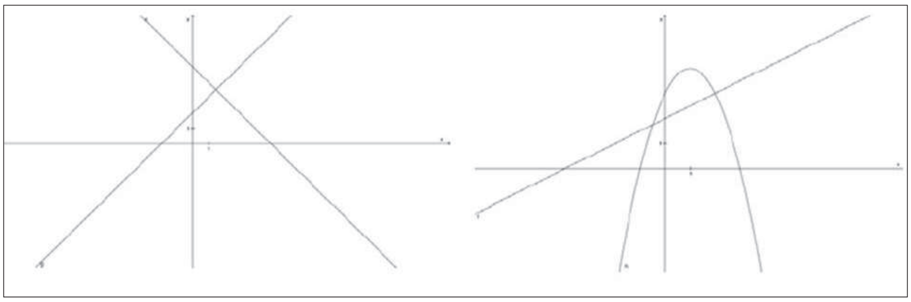

Figura 2. Gráficas correspondientes a las situaciones 1 y 2

cero y se analiza el posible comportamiento de la gráfica razonable para *q* en los puntos próximos al "cero del denominador", debido a que en este punto no se puede obtener la gráfica de *q*. Llegados a esta instancia, el grupo de estudio discute acerca de cómo representar este "problema" en la gráfica, así como las posibilidades que pueden presentarse: que el dividendo y el divisor sean cero simultáneamente, o que no lo sean; lo cual permite entre otras cosas analizar la existencia de *q* y sus asíntotas.

El estudio también deriva en analizar si la gráfica hallada para *q*, corresponde a la representación gráfica de una función o no. Para responder a esta cuestión, los estudiantes deciden volver sobre la definición de función, para concluir que dicha definición se cumple para cualquier punto, menos para aquel o aquellos donde la función denominador se hace cero, sin tener en cuenta, por el momento, lo que sucede en ese punto con la función numerador, situación que se analiza más adelante. De esta manera, la gráfica realizada se corresponde con la representación gráfica de una función, si se excluyen del dominio los valores que anulan al denominador.

Análisis de datos y discusión

A continuación presentamos el protocolo de A22, quien obtiene la representación gráfica de *q,* identifica los signos, los *puntos seguros* y realiza la construcción geométrica para la obtención de *nuevos puntos seguros*. A la derecha se ha expresado el cociente, para el caso $f=0$ y para el caso $g=0$. Se puede apreciar además, que el estudiante identifica la asíntota vertical – como una recta por la cual la función "no pasa"– pero como desconoce la noción él y su grupo colocan signos de pregunta. El protocolo muestra la construcción de triángulos semejantes y una preocupación por establecer las proporciones para validar la construcción. La técnica se usa correctamente, haciendo uso del segmento unidad de manera apropiada. En la Figura 4, el protocolo de A muestra un trabajo intenso de la técnica geométrica, que genera varios puntos y, además, cómo se ha agregado un trozo de hoja hacia la derecha, para poder trazar puntos próximos a la asíntota horizontal. Nuevamente se reconoce cómo el estudiante indica "no pasa" cuando se anula el divisor.

En la Figura 5, presentamos el protocolo de A24, referido a la situación dos, donde el cociente se realiza entre una función polinómica de grado dos, y otra, de grado uno.

Esta es la segunda clase del "problema del cociente", el protocolo muestra la solvencia con que se maneja la técnica geométrica, sin escribir, de una manera algorítmica, como permite inferir la cantidad de marcas de compás que se aprecian en la hoja, para trasladar los segmentos sobre el eje, así como la contundencia de la gráfica realizada por el estudiante. En todos los casos, los estudiantes utilizan los ceros para establecer los signos de la posible gráfica y se orientan luego con ellos, para realizar la construcción y trazar la gráfica aproximada.

Los estudiantes se preguntan por "fórmulas" que les permitan calcular los valores de *q*, como ya han hecho en los REI precedentes; el grupo de estudio formula entonces la cuestión *Q3.2*: *¿Qué posible representación algebraica resulta del cociente de funciones polinómicas?*

Para abordarla, el profesor propone las situaciones 3 y 4, en las cuales se retoman las representaciones gráficas de las situaciones 1 y 2, pero se proporciona la escala de los ejes y se proponen

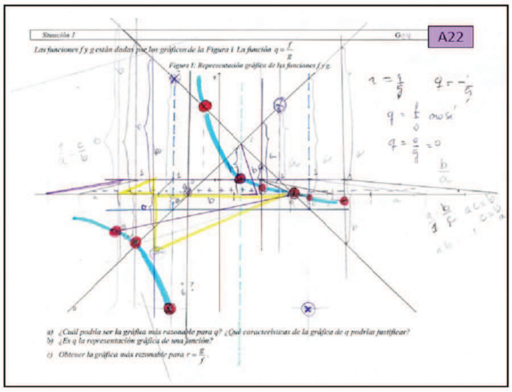

Figura 3. Protocolo correspondiente a A22

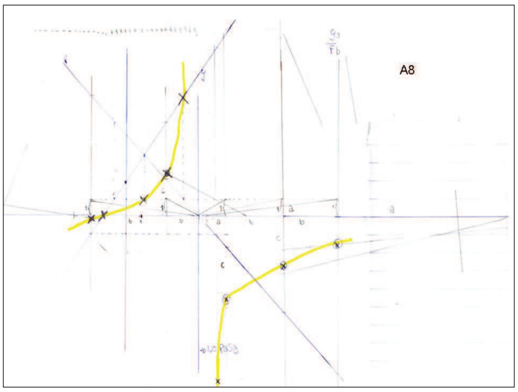

Figura 4. Protocolo correspondiente a A8

algunos puntos que pertenecen a las funciones representadas gráficamente.

Las cuestiones a responder son ahora: *¿Cuál es la expresión algebraica de q?*, *¿es q una función?*

En la Figura 6 se muestran las situaciones 3 y 4, a partir de las cuales el grupo de estudio ingresa al marco algebraico-funcional.

A pesar de que se ha suministrado información para ingresar al marco algebraico, el siguiente protocolo de A9 muestra hasta qué punto los estudiantes dominan la técnica geométrica y la emplean para realizar inferencias sobre los signos, las asíntotas y la gráfica. Es interesante la notación que utilizan, y cómo vuelven a analizar signos, ceros, unos y asíntotas, además de responder a la pregunta de si *q* es o no función.

Otros estudiantes determinan primero las representaciones algebraicas de las curvas individuales, según se aprecia en la Figura 8, siendo esta una tarea integrada al medio M y con la que están familiarizados, merced a los recorridos precedentes. Así, identifican a partir de las gráficas de qué función se trata y como conocen su representación algebraica general, obtienen los parámetros sin

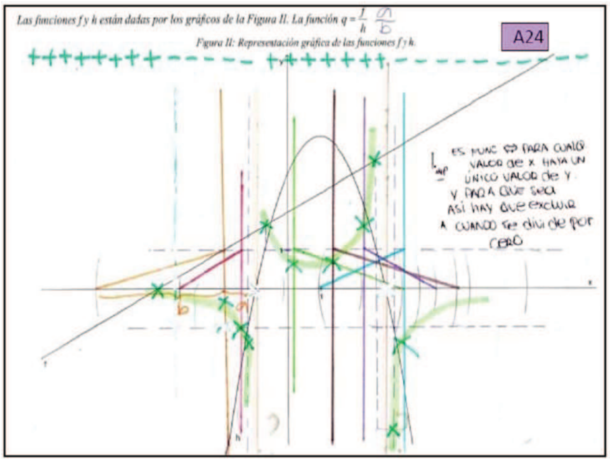

Figura 5. Protocolo correspondiente a A24

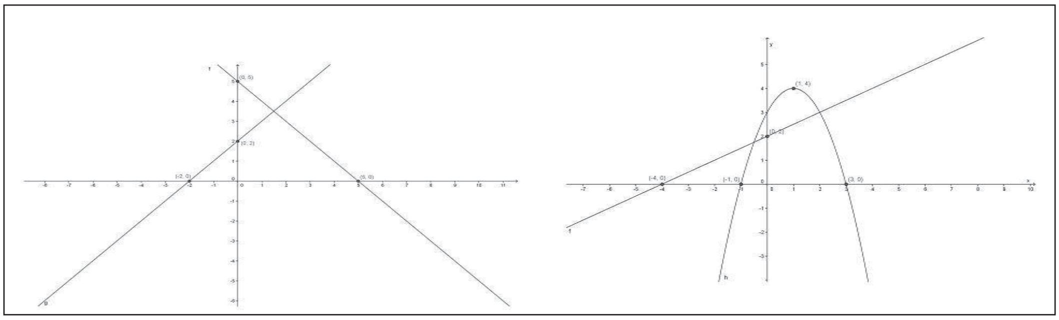

Figura 6. Gráficas correspondientes a las situaciones 3 y 4.

que se aprecien grandes dificultades para hacerlo, tal como se observa a continuación.

Pero la mesogénesis no se detiene, y los estudiantes deciden realizar el cociente de los polinomios, empleando diferentes técnicas que los colocan frente a dos obstáculos: en la situación 3, la división no es exacta, y los estudiantes no saben cómo proceder con el resto –expresan esto con signos de pregunta–; en cambio, en la situación 4, la división no puede realizarse, pues se trata del cociente de una función polinómica de primer grado por una función polinómica de grado dos.

Vemos en la Figura 9 el trabajo de dos estudiantes, A39 y A49, que expresan q como el cociente de las funciones cuyas representaciones algebraicas determinaron anteriormente y deciden que a lo sumo, pueden obtener las expresiones de las funciones polinómicas r y s y expresarlas como $q = \frac{r}{s}$.

El profesor incita a retomar el problema de si la expresión de q corresponde a una función o no, lo cual conduce a los estudiantes a establecer un dominio de validez para que q resulte una función. Una vez realizada la institucionalización de la función racional y de sus condiciones de existencia, se ingresa al problema de las asíntotas y los ceros. En la Figura 10 se presenta la representación gráfica de q correspondiente a la situación 4 y el análisis del dominio antes mencionado.

El REI continúa y se retoma el análisis de los ceros de las funciones racionales, también se analizan las asíntotas (horizontales y verticales)

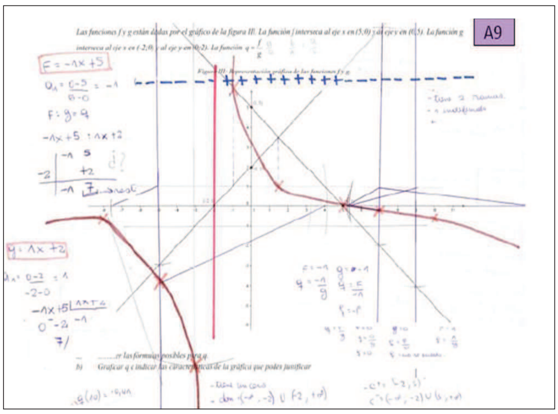

Figura 7. Protocolo correspondiente a A9

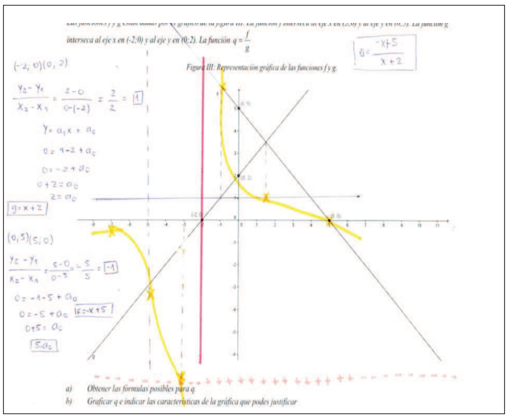

Figura 8. Protocolo correspondiente a A54

y los puntos de discontinuidad, junto con un estudio de los casos de simplificación. El recorrido también transita por construir, explicar y justificar una técnica para realizar las operaciones con funciones racionales, tanto en el marco algebraico como analítico funcional, ingresando también en el estudio de las ecuaciones e inecuaciones racionales.

Un punto a destacar es que el grupo de estudio no ingresó al tratamiento de las asíntotas oblicuas, a pesar de que algunos estudiantes lo señalaron gráficamente, pero el profesor fue “tomado por sorpresa” y no gestionó bien este momento, donde la construcción alternativa de representaciones algebraicas del cociente, hubiera permitido, aun sin ingresar en la OM del límite infinito, proporcionar alguna interpretación y obtener la expresión algebraica de las asíntotas oblicuas. Esta dificultad del profesor solo fue advertida a posteriori, y si bien fue subsanada, ha quedado marcada para una futura implementación. Este es un problema de nivel topogenético, y constituye una de las grandes dificultades a vencer; el profesor tiene que poder tomar el riesgo de seguir el curso de acción de los acontecimientos, en lugar de abortar un problema, por miedo a “perder el control” o a una excesiva dilatación del tiempo escolar que la institución no permite, pues hay un programa que “cumplir”. Aun cuando en este caso, se trata de un investigador y de un profesor experimentado, podemos ver hasta qué punto esta puede ser una dificultad importante, en el caso de docentes poco familiarizados con la gestión de REI y con la pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo.

Conclusiones

Las implementaciones realizadas en los dos cursos de 5to Año de la escuela secundaria, muestran algunos resultados auspiciosos, tanto por el conjunto de OM que se han reencontrado, como desde el punto de vista didáctico, relacionado con enseñanza por REI y con la gestión de este dispositivo. Así, se recuperaron algunas técnicas construidas en los recorridos precedentes que se adaptaron a las nuevas situaciones y evolucionaron para completar la OM relativa a las funciones racionales. La implementación del REI ha permitido obtener la gráfica de q en el marco geométrico-gráfico utilizando la

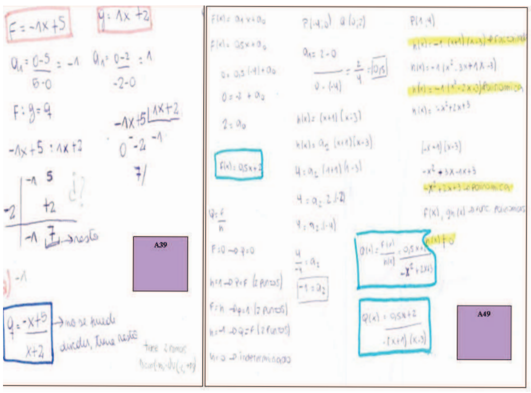

Figura 9. Protocolos correspondientes a los alumnos A39 y A49 respectivamente.

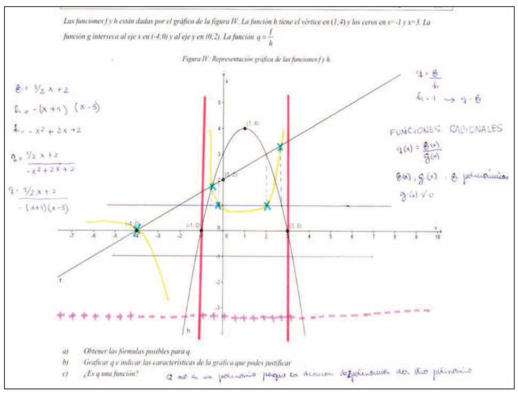

Figura 10. Protocolo correspondiente a A10

técnica del cálculo geométrico, identificando los puntos notables, los signos, y analizando lo que ocurre en los puntos próximos a las asíntotas tanto verticales como horizontales.

Con relación al marco algebraico-funcional, se obtienen posibles representaciones para q mediante el cálculo algebraico del cociente de polinomios. Esto, no presentó problemas a los estudiantes, pues obtienen representaciones algebraicas en forma polinómica de las funciones representadas gráficamente, y si es posible, la forma factorizada, además de otras posibles representaciones algebraicas de q.

Los resultados han ganado viabilidad por los recorridos precedentes, aunque estos no son imprescindibles, pero si no existieran, la cronogénesis y la topogénesis que han sido los procesos más críticos, resultarían aún más menguadas.

En lo referente a la organización didáctica, una enseñanza por REI exige cambios radicales en el contrato de estudio vigente en las instituciones escolares, con implicaciones fuertes en la topogénesis y en la cronogénesis. El REI demanda a los estudiantes generar el medio, producir respuestas, estudiar su validez, además de decidir cómo y por dónde seguir. Esto a su vez, requiere resistir la frustración que se origina en la incertidumbre relativa al saber, sobre todo si el profesor, devenido en director del proceso de estudio, adopta una postura que lo convierte en un medio más, alguien dispuesto a relegar una posición dominante, que le impone un papel de garante del saber y de "conocedor universal".

Es difícil para el profesor permanecer en este nuevo lugar y resistir la presión y la demanda de aprobación por parte de los alumnos, a quienes la institución ha habituado, desde el contrato didáctico tradicional, a ser continuamente "motivados" y reforzados positivamente. Esto es visible al comienzo del REI cuando los estudiantes organizados en grupos, recurren individualmente y de manera incesante a la aprobación del profesor, sin la cual no consiguen avanzar. La pedagogía de inventariar los saberes no promueve en los estudiantes la autonomía necesaria para hacer vivir plenamente la pedagogía de la investigación. Por otro lado, en el nivel en que nos encontramos, la conquista de la autonomía debería ser un objetivo a lograr, en ningún caso, algo que puede suponerse pre-dado y menos aún como de hecho ocurre, obstaculizado en sus distintos componentes. Particularmente, en los cursos donde se realizó la implementación, la dirección y el equipo psicopedagógico determinan por razones disciplinarias, dónde y junto a quién debe sentarse cada uno de estos alumnos de 16 años. Esto no fue así en la clase de matemática, donde tampoco existieron en todo el año que duró el trabajo de campo, problemas de disciplina, pues la libertad es parte del contrato.

Además de estos aspectos topogenéticos atribuibles a la institución, están las limitaciones personales del profesor para sostener y conquistar su nuevo lugar, y para enfrentar las restricciones que derivan del fenómeno cronogenético de la dilatación del tiempo didáctico. Es difícil renunciar al "valor" de completar el programa. Podría decirse que la enseñanza por REI permite de manera relativamente sencilla que los estudiantes ingresen en el cuestionamiento del mundo, más difícil resulta que se desarrollen actitudes genuinas de investigación autónoma, sobre todo en este caso, donde la clase de matemática es una isla perdida en la inmensidad de la pedagogía tradicional.

Referencias bibliográficas

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: La pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1999). "El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico". Recherches en Didactique des Mathématiques, 19 (2), pp. 221-266.

Chevallard, Y. (2004). "Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire". Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr

Chevallard, Y. (2007). "Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique". Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/rubrique.php3?id_rubrique=8

Chevallard, Y. (2009). "La notion de PER: problèmes et avancées". Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2011). "Quel programme pour l´avenir de la recherche en TAD?" Disponible en http://www.crm.es/Publications/Documents/Documents_10.pdf.

Gazzola, M.P.; Llanos V.C.; Otero, M.R. (2011). "Funciones Racionales en la secundaria: primeros resultados de una actividad de estudio e investigación (AEI)". Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM) y del II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (II ENEM). NIECyT, Facultad de Ciencias Exactas. UNCPBA. pp. 494-500. Disponible en: http://iciecymiienem.sites.exa.unicen.edu.ar/actas

Llanos, V. C; Otero, M. R. (2011). "Evolución de una AEI como producto de investigación al cabo de seis implementaciones consecutivas". Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM) y del II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (II ENEM). NIECyT, Facultad de Ciencias Exactas. UNCPBA. pp. 501-508. ISBN 978-950-658-284-5

Llanos, V. C.; Otero, M. R.; Bilbao, M. P. (2011). "Funciones Polinómicas en la Secundaria: primeros resultados de una Actividad de Estudio y de Investigación (AEI)". *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*. Año 6 nº1, pp. 102-112. Argentina. Disponible en http://www.exa.unicen.edu.ar/reiec/.

Otero, M. R.; Llanos, V. C. (2011). "Enseñanza por REI en la Escuela Secundaria: desafíos, incertidumbres y pequeños logros al cabo de seis implementaciones". Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM) y del II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (II ENEM). NIECyT, Facultad de Ciencias Exactas. UNCPBA. pp. 15-23. Disponible en http://iciecymiienem.sites.exa.unicen.edu.ar/actas.