PEL Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educacional Latinoamericana
2012, 49(1), 40-52

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Educación

La incómoda relación entre matemática y didáctica de la matemática. Notas sobre la formación de profesores en Argentina

The Awkward Relationship between Mathematics and Didactics of Mathematics. Notes about Teachers Training in Argentina

Antonio Cafure

Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina

Resumen

En este artículo proporcionamos algunos detalles sobre el modo en que ha tenido y tiene lugar la formación de profesores de matemática en Argentina, los aciertos y las limitaciones de tal formación y los papeles desempeñados por matemáticos y por docentes de la matemática. Señalamos también algunas perspectivas de relevancia que se desprenden de nuestra experiencia concreta en las materias que dictamos. La más alta, como la más baja forma de crítica, es siempre una suerte de autobiografía.

Palabras clave: formación de profesores, política educativa, polinomios, algoritmos

Abstract

We provide some details about the training of mathematics teachers in Argentina, the strengths and the limitations of such training and the roles played by mathematicians and by mathematics educators. We also point out some prospects of relevance arising as a consequence of our concrete experience.

Keywords: teachers training, education policy, polynomials, algorithms

Correspondencia a:
Antonio Cafure
Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina
Juan María Gutiérrez 1150, Los Polvorines (B1613GSX), Buenos Aires, Argentina
Correo electrónico: acafure@ungs.edu.ar
El autor cuenta con el subsidio del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), PIP 11220090100421, Buenos Aires, Argentina.

© 2012 PEL, http://www.pensamientoeducativo.org - http://www.pel.cl

ISSN: 0719-0409 DDI: 203.262, Santiago, Chile

Entendemos que cualquier intento serio, profundo, genuino de reforma de la formación de profesores de matemática requiere reflexionar sobre los modos pasados y actuales en los que se ha desenvuelto la misma. Diversos actores han tenido a cargo dicha formación, y es cuando menos necesario (cuando no urgente) que formulen una autocrítica sobre el papel asumido y desempeñado. De todos los actores que se han involucrado, que se involucran y que deberían involucrarse activamente, al menos en Argentina, acaso los menos preocupados por hacerlo —a lo largo de los años— sean los matemáticos[1]. Si bien pueden esgrimirse diversas razones (algunas evidentes, otras quizá no tanto) con el fin de avalar esta falta de preocupación, pensamos que no son suficientes para justificar el hecho de no haber participado en las sucesivas reformas; de no haber colaborado en la toma de decisiones acerca de los contenidos matemáticos adecuados para la formación de un futuro profesor; y de haber delegado, casi completamente, toda participación en la formación continua de los profesores.

Pensamos que abandonar esta actitud elusiva de la relevancia de la cuestión y contribuir a la reflexión aludida es una tarea impostergable de los matemáticos. El siguiente postulado constituye nuestro punto de partida: existe en la educación matemática un espacio de relevancia que puede y debe ser ocupado por los matemáticos.

Este postulado nos coloca (a los matemáticos) ante una posibilidad no usual de repensar los modos de producción y transmisión del conocimiento matemático, los abordajes de las diferentes áreas; de establecer un vínculo duradero con los educadores; de servirnos de nuestra propia experiencia y no desaprovechar la ocasión de ser profundamente críticos con nuestra propia praxis.

En consecuencia, proponemos una profunda discusión sobre el papel que cabría a los matemáticos en la educación matemática argentina y, por añadidura, proponemos reflexionar acerca de la educación matemática en toda su extensión, con la intención de estimular reformas en la formación de profesores. En particular, en este artículo bosquejamos nuestras ideas, señalando ciertas pautas, ciertos aspectos que consideramos que no son lo suficientemente discutidos y desde los cuales los matemáticos podemos realizar una gran aportación a la educación matemática: nuestro trabajo en investigación constituye un insumo valiosísimo para nuestra tarea docente. Las reflexiones plasmadas a lo largo del texto son fruto tanto de nuestra experiencia docente en diferentes niveles de educación[2] como de nuestra experiencia en investigación en el área de la geometría algebraica y del álgebra computacional. Señalemos, de paso, que la propuesta que aquí se esboza no corresponde al ámbito de la didáctica de la matemática, ya que ese no es nuestro campo (aunque valoraríamos positivamente poder aportar algunas ideas). Detallamos brevemente el contenido de este artículo. Comenzamos describiendo el contexto en que tiene lugar la formación de profesores en Argentina; esta descripción nos permitirá señalar algunas razones que explican la ausencia de matemáticos en las instancias de decisión de política educativa. Comentamos, luego, algunas iniciativas llevadas a cabo por las autoridades educativas para mejorar la formación de profesores. Finalmente, exhibimos algunas líneas de trabajo en las cuales hemos comenzado a dirigir nuestros esfuerzos en tanto matemáticos que intervienen en forma concreta: el diseño de cursos que dictamos a futuros profesores de matemática.

La formación de profesores en Argentina

Bien sabemos que la formación de profesores de matemática es un tema particularmente delicado por las consecuencias escolares de la misma. El fracaso escolar en matemática —notorio en comparación con otras disciplinas— es una de las caras más visibles que ponen en jaque, que cuestionan ostensiblemente la formación. Pensar, analizar los motivos del fracaso escolar, interpretar desde diversas teorías didácticas los modos en que la matemática se ha enseñando y se enseña, es una tarea de máxima importancia y es la que convoca a los varios grupos de investigación en educación matemática de las universidades. Estas reflexiones sobre el conocimiento matemático y las posibilidades de su transmisión comenzaron a cuestionar las ideas de los matemáticos y mostraron las insuficiencias de pensar la enseñanza desde una

[1] A lo largo de este artículo utilizaremos el término *matemáticos* para referirnos a aquellos investigadores que desarrollan sus actividades de investigación en el campo de la matemática.

[2] Debo señalar —tal vez contribuya a entender la posición desde la cual escribo estas líneas— que si bien soy matemático mi primer título de grado es, justamente, el de profesor de enseñanza media y superior en Matemática. Esto me ha permitido desempeñarme en aulas de escuela primaria y secundaria, en la formación de docentes en sus diversos niveles, etc.

perspectiva meramente conceptual. Obviamente, se comenzaron a generar tensiones al interior de las universidades entre los matemáticos y los docentes de matemática sobre cuál es la mejor manera de formar a las futuras generaciones de profesores de matemática. Muchas de estas discusiones pasadas y actuales —porque convengamos en que esta situación está lejos de saldarse— y varios de los aportes de los diferentes grupos están bien documentados en diferentes textos (Gavosto, Krantz & McCallum, 1999; Krantz, 1999). La revista *Notices*, publicación mensual editada por la American Mathematical Society, exhibe un gran interés por estas cuestiones a lo largo de los años; en particular, su edición de marzo de 2011 estuvo destinada a este tema (Krantz, 2011).

La formación de profesores en Argentina no escapa a la descripción anterior, aunque, como indicamos, casi sin la presencia de matemáticos. Además, como suele suceder (es natural que así sea), está sujeta a los vaivenes de la política educativa. Las diversas reformulaciones de los planes de estudio, las diversas reformas implementadas —con el objeto concreto de mejorar la enseñanza y la formación de los profesores de matemática— en los últimos años por las autoridades educativas, no han tenido el impacto esperado; si nos atenemos a la evidencia proporcionada por diferentes indicadores, asistimos a un deterioro cada vez mayor de las competencias matemáticas tanto de alumnos como de docentes. Una posible explicación —en realidad, no es que dudemos, es que preferimos atenuar nuestra afirmación otorgándole el carácter de posible— para esta situación es que ante cada nueva reforma, las instituciones se pliegan a las mismas (tal vez no del todo convencidas) y se reconfiguran en función de estas nuevas directivas. Independientemente de las virtudes, de las ventajas que podría acarrear la reforma, al no haberse realizado un trabajo de base genuino, al no haberse modificado radicalmente los modos de comprensión de las disciplinas, la reforma termina fracasando, esperando una nueva reforma que venga a subsanar los efectos negativos de la anterior y así, en un círculo vicioso.

Todo esto se profundiza debido a las peculiaridades del sistema de formación docente en Argentina: la formación también tiene lugar fuera del ámbito universitario. En efecto, en Argentina asistimos a lo que suele denominarse un doble sistema de formación: por un lado, como señalamos, las universidades; por el otro, instituciones no universitarias específicamente creadas por el Estado Nacional o por los estados provinciales para la formación de profesores de enseñanza media, los denominados Institutos Superiores de Formación Docente (ISFD). La costumbre ha llevado a distinguirlos como *profesorados universitarios* y *profesorados terciarios*. La formación de profesores en los ISFD tiene una historia de más de cien años. Es más: en muchas regiones del país la presencia de un ISFD es anterior a la fundación de una universidad. A su vez, existen dos tipos de ISFD: los de gestión estatal, o sea, públicos, y los de gestión privada, solventados en parte por el Estado Nacional o los gobiernos provinciales y por los aportes de los propios alumnos.

Algunas cifras

Un aspecto preocupante de este doble sistema de formación y titulación de profesores de matemática es la ausencia de colaboración entre las universidades y los ISFD, por lo demás llamativa teniendo en cuenta que ambas comparten una meta: la excelencia en la formación de profesores. Los ISFD no son espacios donde se desarrollen actividades de investigación en matemática —es atendible el planteo de si es necesario llevar a cabo investigación en matemática si de formación de profesores se trata, motivo por el cual no resultan ser el espacio propicio para un matemático típico—. Sin embargo, una situación paradójica, aun cuando los ISFD se consideran como los únicos ámbitos donde se pueden formar profesores con una solidez pedagógica adecuada, tampoco poseen grupos de investigación en educación matemática. Podríamos señalar —el margen de error de una afirmación tan osada sería escasísimo— que los grupos de investigación en educación matemática se desempeñan en su totalidad en aquellas universidades que ofrecen una carrera de profesor en Matemática.

Algunos números ayudan a comprender la situación de la enseñanza de la matemática, la formación de profesores y las relaciones entre universidades e ISFD.

- De acuerdo con la página web de la Secretaría de Políticas Universitarias (2011), dependiente del Ministerio de Educación de Argentina, hay 31 universidades públicas y 1 universidad privada que ofrecen una carrera de profesor en matemáticas. En la página del Consejo Universitario de Ciencias Exactas y Naturales (2009) se presenta un listado desagregado de las universidades públicas. Al mismo

tiempo, existen al menos 209 ISFD (160 públicos y 49 privados).
- Solo en el Gran Buenos Aires hay más de 39 ISFD, pero solamente dos universidades públicas y la única privada de la lista.
- La mayor parte de los profesores de matemáticas que enseñan en escuelas secundarias y forman, a su vez, a los futuros profesores de matemática en los ISFD, son graduados de los ISFD.

La magnitud de estas cifras lleva a que la mayoría de las decisiones concernientes a formación de profesores se elaboren y se decidan en el seno de los ISFD y las jurisdicciones educativas provinciales y nacionales. Las decisiones rara vez han involucrado a matemáticos. Podemos formular, con toda razón, las siguientes preguntas: ¿cómo resulta la formación matemática de los futuros profesores de matemática? ¿Quiénes son los que inciden de manera definitiva en la educación matemática?

Algunas iniciativas oficiales

En 2007, como consecuencia de la Ley de Educación Nacional, se crea en el ámbito del Ministerio de Educación el Instituto Nacional de Formación Docente (INFD). Su creación es el punto de partida de un proceso de mejora de la formación inicial y continua de profesores en Argentina (Ministerio de Educación de la Nación s. f.), donde se desagregan los artículos de la ley específicamente vinculados a la creación del INFD y sus atribuciones.

Desde su propia creación el INFD ha promovido el desarrollo de actividades de investigación en los ISFD. Con el plan "Conocer para incidir sobre las prácticas pedagógicas" se realizaron, entre 2007 y 2010, cuatro convocatorias a los ISFD de gestión estatal para financiar proyectos de investigación centrados en los problemas de la práctica docente. Estos proyectos fueron evaluados por un comité externo, tras lo cual se financiaron los proyectos aceptados y, en algunos casos, también la publicación de los informes correspondientes.

También, a través de su Centro de Documentación Virtual, se puede acceder a diversos documentos en los que se estudian y analizan diferentes aspectos de la formación docente. En el caso concreto de la matemática, los documentos disponibles han sido elaborados por grupos de investigación en educación matemática que se desempeñan en diferentes universidades. Un ejemplo interesante, aún en versión preliminar, es el documento *La formación en las carreras de profesorado en Matemática* (Sessa, 2011).

Como una iniciativa realmente encomiable, con el Proyecto de Mejora para la Formación Inicial de Profesores para el Nivel Secundario el INFD lanzó un programa de revisión de las prácticas de formación docente para el nivel secundario o la renovación de sus diseños curriculares. Para llevar adelante esta tarea se constituyeron comisiones disciplinares (en particular, una de matemática) que produjeron documentos señalando ciertas direcciones hacia las cuales la educación de los futuros profesores debería encaminarse.

Para la producción del documento del área de matemática, la Secretaría de Políticas Universitarias y el INFD convocaron de manera conjunta —y este es un punto interesante— a las instituciones formadoras (universidades e ISFD de todo el país) a que presentaran especialistas disciplinares para la conformación de los equipos. La comisión, que a su vez seleccionó a los integrantes, tuvo en cuenta no solo que sus perfiles fuesen acordes a la convocatoria sino que hubiese pluralidad de voces, experiencias y pertenencias institucionales. En este proceso, fue muy importante el apoyo del Consejo Universitario de Ciencias Exactas y Naturales (CUCEN, una agrupación de decanos de facultades argentinas que dictan carreras de ciencias exactas y naturales; esto también incluye a decanos de facultades de humanidades ya que en muchos casos estas unidades académicas tienen a su cargo el dictado de los profesorados) y de las Direcciones de Educación Superior de las provincias.

Esta iniciativa se erige como una declaración de principios hacia una genuina interacción entre universidades e ISFD. Con todo, más allá de los aspectos positivos de la experiencia y de lo interesante del enfoque planteado en ciertas partes del documento, el mismo padece de las debilidades y limitaciones usualmente presentes en estas iniciativas cuando son promovidas desde ámbitos exclusivamente dedicados a la investigación en educación matemática: su fragilidad matemática. Se sugieren ejemplos de actividades orientadoras que podrían desarrollarse con los futuros profesores, con la idea de mostrar y discutir enfoques, pero lo que ocurre finalmente es que algunas de estas actividades terminan reflejando una gran distancia entre las loables intenciones pedagógicas y el conocimiento matemático, fundamentalmente necesario, para llevar aquellas a buen puerto (Ministerio de Educación de la Nación, s. f.). Sin entrar en más juicios de valor, lo que sí debemos señalar como un hecho objetivo es que entre los integrantes de la comisión de matemática solo encontramos un matemático.

Por otro lado, el CUCEN (2009) ha establecido comisiones disciplinares cuya misión es la elaboración de estándares para los profesorados universitarios con vistas a la acreditación de los mismos ante la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria, organismo descentralizado que funciona en jurisdicción del Ministerio de Educación.

Nuevamente, la mayor parte de los integrantes de esta comisión desarrollan actividades de investigación en educación matemática, siendo ínfimo el número de matemáticos participantes[3]. Esto generó tensiones, puntos de vista encontrados y miradas diferentes sobre lo que se estaba tratando. Es de lamentar la ausencia de matemáticos, pues sabemos fehacientemente que tenían la oportunidad de participar.

Concluyamos esta sección señalando que desconocemos cómo habrán de conciliarse el documento del INFOD y el documento de estándares del CUCEN. Por el momento, es patente la falta de un proyecto común, de una visión superadora de la formación de profesores.

Cómo explicar el sucesivo fracaso de las sucesivas reformas

Entendemos que la situación descrita en las líneas anteriores ilustra la situación de la formación de profesores en Argentina y explica en parte el fracaso de las sucesivas reformas. Este doble sistema de formación de profesores imperante en Argentina —acaso la coexistencia de dos sistemas no sea, en sí, un obstáculo si no fuera por las concepciones y perspectivas tan profundamente divergentes de cada uno de estos sistemas— ha llevado a una situación que urge modificar.

Un relevamiento de diferentes propuestas de mejoramiento de la formación docente que abarque instituciones universitarias y terciarias exhibe, con algunas diferencias de forma, los mismos objetivos, contenidos y perfiles enunciados a lo largo de los años. Las excepciones están vinculadas a las modificaciones introducidas por las nuevas tecnologías y los consiguientes nuevos escenarios de enseñanza, la ampliación de los ámbitos de enseñanza que incluyen espacios de educación no formal, etc. Si notamos entonces una presencia pertinaz de ciertos enunciados, ¿a qué atribuir los sucesivos fracasos de las sucesivas reformas? ¿Cómo establecer las claves de la insistencia en esperar ciertas competencias? Una respuesta inocente, o mejor, una respuesta elusiva de la relevancia de la cuestión es que los objetivos y perfiles no son los adecuados. Una respuesta menos inocente, o mejor, más comprometida políticamente, no debería eludir la cuestión de fondo: la formación docente no es algo que pueda definirse solamente mediante objetivos presentes en sucesivas reformas. Las intenciones pueden ser muy loables, pero, ¿estamos en condiciones de llevarlas a cabo más allá de lo enunciativo?

Y a la luz de lo que hemos descrito, la conclusión es que los matemáticos tienen pocas oportunidades para involucrarse en asuntos de educación. Un motivo es la propia dinámica del sistema científico; aun cuando tuvieran intenciones de hacerlo —las tensiones de un matemático preocupado por la enseñanza están muy bien descritas en el libro de Kline (1978)— esto implicaría menos tiempo para tareas de investigación en un sistema científico que mide la productividad en términos del número de artículos publicados. Esto no se contrapone, necesariamente, con el hecho de que, para un gran número de matemáticos, las cuestiones vinculadas a la formación de profesores resultan de la más absoluta irrelevancia.

Pero también hay que decir que, debido al número de ISFD, las universidades —y por ende los matemáticos— se encuentran en una situación de desventaja. Las decisiones concernientes a la formación de profesores son diseñadas y tomadas por las autoridades educativas pero teniendo como interlocutores a los ISFD. Recordemos que, allí, no solo la presencia de matemáticos es casi nula, sino también la presencia de grupos de educación matemática. Respondiendo a lo afirmado más arriba, y dejando de lado toda ingenuidad, la posibilidad de trascender lo meramente enunciativo radica en decisiones de

[3] Volviendo a la primera persona del singular, he participado de la Comisión de Matemática en representación de la Universidad Nacional de General Sarmiento.

estricta índole política. A modo de ejemplo, cabe mencionar que en 1962 un grupo de matemáticos notorios (Ahlfors, Bellman, Courant, Coxeter, Kac, Lax, Morse, Polya y Weil, entre otros) suscribió un documento en el cual advertía el error de confeccionar un currículo escolar que privilegiara la abstracción en desmedro de las conexiones de la matemática con las otras ciencias. El documento en cuestión fue publicado en *The Mathematics Teacher* y en el *American Mathematical Monthly* (Ahlfors et al., 1962), y aún hoy es un placer leerlo por la vigencia absoluta de sus planteos; pero, al mismo tiempo, resulta inquietante que matemáticos (y educadores) de este calibre no lograran siquiera que se tuvieran en cuenta sus consideraciones.

De todos modos, el diagnóstico no debería ser pesimista. Los tiempos cambian y las lecciones del pasado se aprenden. Mirando un poco alrededor, tratando de comprender la experiencia ajena —pero no en tanto fórmula para replicar, experiencia para reproducir sin más, sino asentándose en el carácter ejemplificador que posee la misma, en cómo interpretarla desde nuestra realidad— vemos que en varios países (Brasil, Chile y Estados Unidos, entre otros) la formación inicial y continua de profesores de matemática involucra activamente a las organizaciones profesionales de matemáticos. Estas experiencias sugieren y estimulan modos de intervención de los matemáticos.

Algunas convicciones

La convicción es que la experiencia que un matemático obtiene de su investigación puede resultar muy provechosa para reflexionar, replantear y acompañar (junto a los educadores) la educación de los futuros profesores. Es decir, la reflexión sobre la educación matemática no puede prescindir de este aspecto que, naturalmente, proporcionan los matemáticos. En este punto es necesario detenerse, ya que es posible que ante esta afirmación surjan una serie de reparos: no estamos diciendo que todo lo que se investiga en el campo de la matemática deba ser incluido en la formación de un profesor. Lo que pretendemos plantear tal vez quede mejor expresado a partir de un ejemplo.

Desde fines de los cincuenta y durante la década de los sesenta tuvo lugar una profunda abstracción y generalización de muchas áreas de la matemática. El resultado fue la introducción de la “matemática moderna” en las escuelas. El libro de Morris Kline (1994) *El fracaso de la matemática moderna* es una referencia ineludible para comprender los pormenores de esta reforma en Estados Unidos. Sin embargo, simultáneamente, otros campos como el análisis numérico y el álgebra computacional, por ejemplo, comenzaban a consolidarse como campos de relevancia dentro de la matemática, dando lugar, nuevamente, a una profunda realgoritmización de la matemática y promoviendo un cambio de —por qué no expresarlo en estos términos— paradigma.

La formación de profesores en Argentina permaneció ajena a todas estas discusiones, al surgimiento de estas ideas: los matemáticos no se involucraron, los ISFD no estaban en condiciones de dar cauce a estas ideas y podemos asegurar que, a pesar de varios esforzados intentos por repensar la educación matemática, hasta bien entrada la década de los noventa, la formación de profesores y la matemática que se impartía en las escuelas secundarias continuaban bajo el influjo de la matemática moderna. Es más, aún hoy observamos ciertas visiones anquilosadas de la matemática que permanecen en los ámbitos de formación docente tanto universitarios como terciarios[4].

En suma, una pluralidad de voces (profesionales con miradas diferentes, proviniendo de diferentes campos de trabajo) es absolutamente necesaria para acordar, para tomar decisiones de relevancia en la formación de profesores. Desde esta perspectiva, los matemáticos deben participar, discutir, blandir sus argumentos y ser capaces de dejar de lado sus propias concepciones, de transigir en pos del beneficio colectivo.

[4] Aunque parezca inaudito, el Profesorado en Enseñanza Media y Superior de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires no tiene en su plan de estudios un curso obligatorio de cálculo numérico. El curso Elementos de Cálculo Numérico, obligatorio para la Licenciatura en Matemática, solo es optativo para los estudiantes de profesorado.

Ideas para cursos de álgebra

En el prólogo a la tercera edición de su libro *Linear algebra and its applications*, Gilbert Strang (1988) afirma:

> This book (...) aims to recognize what the computer can do (without being dominated by it). Solving a problem no longer means writing down an infinite series, or finding a formula like Cramer's rule, but constructing an effective algorithm. That needs good ideas: mathematics survives! (…). In short, a book is needed that will permit the applications to be taught successfully, in combination with the underlying mathematics. That is the book I have tried to write (p. 21).

Estamos convencidos de que dichas palabras, expresadas más de veinte años atrás, cobran una absoluta relevancia y que deben modificar no solo nuestra visión de la matemática sino también nuestras perspectivas pedagógicas. Justamente, teniendo como norte estas perspectivas, nuestra experiencia en el campo del álgebra computacional nos ha llevado a concebir cursos de álgebra donde intentamos llevar adelante una doble tarea: proporcionar una matemática rigurosa, profunda, actual (la que estudiamos) y, a la vez, pensar en qué matemática debe conocer un futuro profesor de secundaria.

Nuestra tarea se desarrolla en la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS), situada en el Gran Buenos Aires. Es una universidad pública —esto significa completamente gratuita— y relativamente joven (comenzó sus actividades en 1995). La particularidad es que la única carrera vinculada con la matemática que ofrece la UNGS es el Profesorado de Matemática.

Vamos a describir entonces ciertas modificaciones, ciertos modos de intervención en un curso de Álgebra (el penúltimo curso de matemática de la carrera) a partir de nuestra experiencia tanto en docencia como en investigación. Los contenidos son los típicos de cursos de álgebra. Lo que consideramos de relevancia en tanto materias destinadas a futuros profesores de matemática (en realidad, el enfoque que planteamos también es posible desarrollarlo en cursos de licenciatura, pero es mucho más difícil intentar cambios en medio de estructuras largamente establecidas), es la identificación de un problema concreto que sirve como eje del trabajo. El problema alrededor del cual se van desarrollando los contenidos algebraicos es clásico, y su formulación, sencilla: resolver la ecuación $f(t) = 0$, con f un polinomio. La aparente vaguedad de la formulación es intencional: por un lado, recoge la vaguedad con la que se trata este problema en los cursos usuales de álgebra de formación docente; por el otro, esta vaguedad es la que permite comenzar a discutir qué es lo que entraña la resolución del problema. ¿Qué quiere decir resolver? ¿Qué tipo de coeficientes tiene el polinomio? ¿Qué tipo de soluciones buscamos?, etc. Lo que nos interesa es que este enunciado cobre sentido con el propio trabajo que desarrollamos. La teoría de ecuaciones puede proporcionar un enfoque integrado de la matemática que necesitan nuestros alumnos en tanto futuros y actuales docentes de matemática. Por un lado, tiene una componente algorítmica que requiere de manipulación algebraica. A la vez, permite ir desde lo concreto hacia una gradual apreciación de la relevancia de las estructuras algebraicas y la noción de *cociente*. El libro *Polynomials* de Barbeau (1989) ha representado una gran confirmación de que este enfoque no es desacertado. Al mismo tiempo, ya es numerosa la bibliografía que propone un abordaje del álgebra desde una perspectiva algorítmica. A modo de ejemplo, entre tantos textos, elegimos mencionar: *Mathematics for computer algebra* (Mignotte, 1992), *Modern Computer Algebra* (Gathen & Gerard, 2003) y *Ideals, varieties and algorithms* (Cox, Little & O'Shea, 2007).

Algunas consideraciones de índole didáctica

Estaríamos siendo profundamente contradictorios si nuestro enfoque solo se centrara en la elección de un texto y en la selección de contenidos. Debemos considerar también el punto de vista de los estudiantes; debemos realizar un esfuerzo por entender sus ideas y que las mismas nos permitan replantear nuestro curso, si fuera necesario. Es nuestra tarea reflexionar sobre lo que enseñamos, sobre nuestras lecturas, sobre lo que aprendemos en nuestra investigación cotidiana, y no debemos perder de vista que los planteos de los estudiantes contribuyen de manera definitiva a nuestra comprensión de la matemática que enseñamos.

El discurrir de nuestro curso no sigue la típica estructura de una clase de matemática: definición-teorema-demostración-ejemplo; más bien la invierte. El trabajo permanentemente procede de ejemplos, pero no el ejemplo como una mera consecuencia del desarrollo teórico: por el contrario, el ejemplo como aquel que está en diálogo permanente con la teoría, como aquel que la interpela, le marca límites y permite que siga creciendo. De aquí que la presentación inicial de algunas ideas no siempre sea la definitiva, la más general; una versión parcial de un teorema puede ser mucho más ilustrativa de una situación, puede permitir que el propio alumno se plantee los alcances de la misma y considere la posibilidad de su validez en un contexto más amplio. Por este motivo, si bien es numerosa la bibliografía que proporcionamos, escribimos las notas del curso intentando imprimirle el enfoque que pregonamos.

Otra de las particularidades del sistema educativo argentino es que contempla la posibilidad de que un estudiante, con pocas materias aprobadas de su plan de estudios, pueda ejercer como docente. Por este motivo, la mayoría de nuestros estudiantes ya están desempeñándose como profesores en escuelas secundarias. En lo que concierne a nuestro trabajo en el curso esto tiene muchas consecuencias positivas. Los *estudiantes-profesores* constantemente plantean problemas, traen experiencias reales de su trabajo en las escuelas e intentan interpretarlas en términos de lo que están aprendiendo.

Polinomios, números reales y complejos

Debido a la ubicación del curso en el plan de estudios, hay oportunidades para retomar ciertas ideas que los alumnos ya poseen y tratar de mostrar cómo las mismas pueden dar lugar a discusiones inusuales sobre los objetos matemáticos. Así, en una primera instancia, trabajamos con polinomios sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$, sin necesidad de justificarlos ni preocuparnos por el hecho de que sean objetos de naturaleza analítica.

Resumimos algunas ideas que nos interesa transmitir sobre aspectos relegados en los cursos de álgebra de profesorados. En muchos ámbitos, la noción de polinomio se reduce a manipularlos algebraicamente, desvirtuando la esencia y la riqueza conceptual que dicha noción representa.

1. Argumentando con respecto al tipo de soluciones que buscamos es que comenzamos a determinar la estructura de los *conjuntos numéricos* usuales: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.
2. Un cambio de variables adecuado permite simplificar una ecuación. Por ejemplo, toda ecuación cúbica se reduce a una del tipo t^3+at+b (en particular, presentamos las fórmulas para las ecuaciones de grado 3 y 4 con la finalidad de generar cierto convencimiento acerca de la complejidad creciente de las mismas y de que podrían no ser del todo útiles).

   Otro ejemplo está dado por la sustitución $t = x + 1/x$ que nos permite tratar los denominados *polinomios recíprocos*, como, por ejemplo, $t^4+t^3+t^2+t+1$, que se factoriza en $\mathbb{R}[t]$ como producto de dos cuadráticas irreducibles. Traer a colación este ejemplo no es desatinado, sino más bien ilustrativo: el *sexto caso de factoreo* (así enseñado en las escuelas argentinas) proporciona la siguiente factorización:

   $$t^5-1 = (t-1)\,(t^4+t^3+t^2+t+1)$$

   Cualquier discusión acerca de qué ocurre con la factorización de $t^4+t^3+t^2+t+1$ está completamente ausente.
3. Un aspecto de importancia, aunque completamente relegado: la evaluación de un polinomio. Generalmente, se enseña la regla de Ruffini con el objeto de enunciar lo que se conoce como teorema del resto: el resto de la división de $f(t)$ por $t - a$ es igual a $f(a)$. Cabe la pregunta: ¿por qué uno querría conocer el resto de la división? Se invierte el interés del resultado y se pone el énfasis donde no corresponde. Importa menos calcular el resto de la división que evaluar el polinomio. Y, por este motivo, la regla de Ruffini no es más que un dispositivo para evaluar; sin embargo, siendo más estricto, se desconoce que cuando se aplica la regla de Ruffini no estamos haciendo otra cosa que evaluar un polinomio mediante la regla de Horner.
4. La idea de poder determinar si dos polinomios tienen una raíz en común nos lleva naturalmente a la noción de resultante.
5. La identificación entre polinomio y función polinómica, utilizada en los hechos pero nunca del todo justificada. Diversas justificaciones de este hecho permiten recuperar diferentes contenidos matemáticos. Indicamos que la identificación es coherente si trabajamos con cuerpo de característica 0, aunque no lo expresamos en estos términos. Será interesante observar las limitaciones de las demostraciones proporcionadas cuando consideremos polinomios sobre anillos como $\mathbb{Z}_n$.

Resolución de ecuaciones en $\mathbb{Z}$

El objetivo es proporcionar métodos efectivos para calcular las soluciones enteras de la ecuación $f(t) = 0$, con *f un polinomio con coeficientes enteros.* Teóricamente, dicho problema está completamente resuelto: evaluamos en cada uno de los divisores de $f(0)$ y determinamos cuáles son soluciones de la ecuación. Sabemos que no es un método eficiente ya que involucra la factorización de enteros y pone de manifiesto la necesidad de refinarlo o de buscar otras ideas, otros métodos alternativos.

Nos interesa que antes de comenzar la búsqueda de raíces consideremos que la existencia de las mismas no involucra necesariamente la evaluación ni el despeje. Por ejemplo, que el polinomio $f(t) = 2t^4+4t^3-3t^2+55t-441$ no posee raíces enteras, se deduce de que $f(k)$ es impar para todo entero k. Es posible continuar de esta manera, añadiendo ejemplos que requieran pensar en las posibles raíces de acuerdo con el resto que deja $f(k)$ al dividirlo por 3, por 5, etc. No estamos más que recuperando la noción de congruencia. Y la recuperación de esta noción permite mostrar su gran potencial para resolver el problema de encontrar las raíces enteras de $f \in \mathbb{Z}[t]$. Describimos a continuación esta idea.

A partir de las soluciones de la ecuación $f(t) \equiv 0$ mód p, con p un número primo, es posible obtener, de manera eficiente, las soluciones de la ecuación $f(t) \equiv 0$ mód p^k, mediante el método de Newton-Hensel (no es más que el equivalente simbólico del método de Newton de análisis numérico). En este caso, debe requerirse que la derivada de f sea inversible módulo p. Combinando estos métodos con el teorema chino del resto podemos resolver entonces cualquier ecuación del tipo $f(t) \equiv 0$ mód $p_1^{k_1}, \dots, p_n^{k_n}$, con $p_1, \dots, p_n$ primos arbitrarios. En definitiva, lo que cuenta es poder resolver ecuaciones de congruencia módulo un primo.

Volviendo al problema inicial, sabemos que $M = |f(0)|$ es una cota para las raíces enteras de f; es decir, si $r \in \mathbb{Z}$ es raíz de f resulta que $-M \leq r \leq M$. Eligiendo una cantidad adecuada de primos $p_1, \dots, p_n$ (impares para simplificar) de modo que $m = p_1 \dots p_n$ sea mayor que $2M$, eligiendo el sistema de representantes módulo m dado por

$$\left\{-\frac{m-1}{2},\dots,\frac{m-1}{2}\right\}$$

entre las soluciones de la ecuación $f(t) \equiv 0$ mód m, deben estar las raíces enteras de f.

Este algoritmo no es el más eficiente, por cierto, pero sí pone de manifiesto un modo de proceder con cualquier tipo de cálculo que involucre números enteros (factorización y cálculo del máximo común divisor de polinomios con coeficientes en $\mathbb{Z}$, cálculo de determinantes de matrices con entradas enteras). En efecto, es un caso simple de los denominados *métodos modulares*, y la idea que subyace es una idea actual y fructífera que se aplica en la mayoría de los algoritmos para abordar estos problemas.

A la vez, el método de Newton-Hensel citado es válido en un contexto más general de anillos íntegros donde las congruencias se toman módulo un ideal arbitrario. Es la herramienta utilizada en la mayoría de los algoritmos de factorización de polinomios sobre un anillo de polinomios $K[X_1, \dots, X_n]$, sobre un cuerpo K. El texto de Gathen y Gerard (2003) proporciona un estudio amplio de los métodos modulares y la utilización del método de Newton-Hensel. Es decir, dentro de las posibilidades que proporciona el curso, los estudiantes se encuentran con que la resolución de ecuaciones de congruencia tiene aplicaciones concretas y reales, acaso inesperadas.

La noción de cociente y el anillo $\mathbb{Z}_n$

La resolución de ecuaciones de congruencia es el punto de partida para señalar ciertas diferencias con lo que nos resultaba familiar: no es claro qué significa, en este contexto, "pasar dividiendo"; nos encontramos con polinomios que tienen más raíces que el grado. Un producto de "números" puede dar 0 y ninguno de ellos es 0, etc.

Los alumnos están familiarizados con la noción de relación de equivalencia, aunque esta familiaridad generalmente se acaba en la mera verificación de las propiedades que tal relación satisface. La consiguiente caracterización del conjunto cociente (tarea harto difícil aunque ausente, o aun cuando se lleva a cabo se soslaya su dificultad) nos coloca en una posición en la cual nuestra comprensión del problema tratado se cuestiona. Teniendo en cuenta esta dificultad, y utilizando el trabajo previo con congruencias, decidimos no tratar la noción de cociente con toda generalidad, sino a partir de un caso concreto: el anillo cociente $\mathbb{Z}_n$.

La buena definición de las operaciones de suma y producto en $\mathbb{Z}_n$ resulta ilustrativa de una forma de proceder en matemática: sabemos sumar y multiplicar enteros; ¿cómo sumar y multiplicar los elementos de $\mathbb{Z}_n$? Consideramos de un gran valor formativo desarrollar estas ideas de la manera en que lo hacemos.

Posteriormente, emprendemos la caracterización de los elementos de $\mathbb{Z}_n$ (unidades o divisores de 0) pensando en términos de ecuaciones en $\mathbb{Z}_n$ (la posibilidad de llevar a cabo un despeje está vinculada a la existencia de inverso aditivo o multiplicativo en el grupo o anillo). Más aún, presentamos el anillo de polinomios $\mathbb{Z}_n[t]$ y mostramos las contradicciones con ciertas ideas previas que tratamos al inicio de la materia: un polinomio tiene tantas raíces como el grado, identificación entre polinomio y función polinómica, etc.

El tratamiento del grupo de unidades $\mathbb{Z}_n^*$ constituye el primer intento de presentar un grupo con algunas características interesantes. Los teoremas de Fermat y Euler (Childs, 2009), son tratados en este contexto como teoremas que proporcionan información sobre el orden de los elementos de $\mathbb{Z}_n^*$.

La ecuación $t^n - a$ y la manipulación de radicales

Alumnos y profesores de escuela media están muy familiarizados con los radicales $\sqrt[n]{a}$ y con el hecho de que, usualmente, son números irracionales. Es fácil mostrar que lo son apelando, por ejemplo, al teorema fundamental de la aritmética. Bien, pero, ¿cómo sabemos si $\cos(2\pi/9)$ es irracional? Este no es un problema sencillo. Cada semestre formulamos la misma pregunta a nuestros alumnos: ¿qué números irracionales conocen? Las respuestas son siempre las mismas: los diversos radicales, π y e. Excepto por π y e, que son números omnipresentes, los restantes son números algebraicos.

Los libros de texto de escuela secundaria merecen una referencia especial. Cuando tratan estos aspectos se aprecia que, por el modo en que se presentan las nociones y por las actividades que se proponen para comprender tales ideas, nunca plantean la irracionalidad como un problema. En la escuela secundaria los alumnos aprenden a sumar y multiplicar todo tipo de radicales, pero solo los dividen en el caso de raíces cuadradas (son escasos los ejemplos donde puede aparecer una expresión con raíces cúbicas). De hecho, aprenden a racionalizar un denominador de la forma $a+b\cdot\sqrt{d}$ multiplicando por su conjugado $a-b\cdot\sqrt{d}$. Esta presentación promueve la idea entre los alumnos (con absoluta razón) de que calcular el conjugado de una expresión consiste en cambiar el signo del radical.

Pero, ¿qué ocurre si uno quiere racionalizar una expresión de la forma

$$\frac{1}{2+\sqrt[3]{3}-5\sqrt[3]{9}}$$

¿Cuál sería la noción de conjugado en este caso? ¿Qué es lo que impide que los libros presenten este ejercicio? ¿Por qué sumar y multiplicar pero no dividir?

La gran cuestión que planteamos es la siguiente: si nuestro interés es resolver la ecuación $t^2-2=0$, ¿no es suficiente agregar $\sqrt{2}$ a $\mathbb{Q}$? ¿Por qué razón es necesario tratar con $\mathbb{R}$? Una discusión de este tenor supera con creces el ámbito escolar, pero no corresponde que no se plantee en alguna instancia de la formación de un profesor.

Esta es nuestra motivación, y consideramos favorable el contexto para introducir los conceptos de *extensiones de cuerpos*, *polinomios minimales*, *conjugados*, etc. Intentamos mostrar que cualquier operación que llevemos a cabo con radicales involucra, indefectiblemente, a sus polinomios minimales.

Nos servimos entonces de esta situación para ampliar el catálogo disponible de cuerpos y exhibir la estructura de $\mathbb{Q}$—espacio vectorial subyacente—, la que sustenta todas las operaciones que se realizan en el ámbito escolar.

Proporcionamos un método para calcular polinomios minimales a partir del polinomio característico de una cierta homotecia. Más en general, presentamos la noción de número algebraico y discutimos que, desde una perspectiva algebraica, todas las operaciones que los involucran vienen dadas por su polinomio minimal. Es decir, que considerados desde $\mathbb{Q}$, no es posible distinguir, por ejemplo, $\sqrt{2}$ de $-\sqrt{2}$. Esto propicia la discusión acerca de la noción de conjugado en términos más generales que la de considerar solamente extensiones cuadráticas de $\mathbb{Q}$.

Observamos que la adjunción de una raíz de un polinomio no siempre ofrece un cuerpo que contenga todas las raíces del mismo. Con estos ejemplos, estamos en condiciones de definir el cuerpo de descomposición de un polinomio f con coeficientes racionales, no con toda generalidad pero la suficiente como para hacer accesible la noción.

El método de Kronecker y la invención de raíces

Una de las ventajas que nos ofrece el trabajo anterior radica en que, o bien conocemos las raíces del polinomio, o bien es sencillo calcularlas mediante ciertos métodos *ad hoc*. Esta situación esconde la naturaleza ardua del problema de encontrarlas; cómo proceder cuando no es evidente cómo despejar. Es decir, la respuesta al problema general de encontrar las raíces de un polinomio arbitrario con coeficientes racionales sigue sin encontrarse.

El matemático italiano Teo Mora (2003) afirma, osadamente, en su libro *Solving polynomial equation systems I*: "While the Fundamental Theorem of Algebra informed us that there is a field ($\mathbb{C}$) which contains all the roots of a polynomial $f \in \mathbb{Q}[t]$, this result is at the same time useless and tantalizing" (p. 77). Se desprende entonces el siguiente problema: argumentando solo en términos de números racionales y de polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q}$, ¿es posible calcular una raíz de $f \in \mathbb{Q}[t]$?

La respuesta afirmativa a esta cuestión la proporcionó Leopold Kronecker (1882). Su propuesta consistió en establecer una reinterpretación de lo que significa "resolver" una ecuación.

Dado un polinomio $f \in \mathbb{Q}[t]$ arbitrario, consideramos el anillo cociente $E= \mathbb{Q}[t]/(g(t))$, donde $g \in \mathbb{Q}[t]$ es un factor irreducible de f, con lo cual E resulta ser un cuerpo. La clase $[t]_{f(t)}$ es una "raíz" de f en E.

Este resultado suele presentarse en los cursos de teoría de cuerpos como un teorema más entre tantos, sin hacer hincapié en la importancia de la proposición de Kronecker. Su propuesta, asentándose solo en la posibilidad de calcular en el cuerpo $\mathbb{Q}[t]=(g(t))$, garantizada por el algoritmo de división, introdujo tanto una técnica (la construcción de un cuerpo K que contenga las raíces de un polinomio $f \in \mathbb{Q}[t]$) como las nociones de extensión finitamente generada y de cuerpo de descomposición.

Nuevamente, cobra relevancia la noción de irreducibilidad, ya que el cociente $\mathbb{Q}[t]=(g(t))$ es un cuerpo si, y solo si, el polinomio es irreducible. Lo profundo de esta construcción se puede percibir en que, a pesar de no poder despejar, igualmente podemos obtener una solución de una ecuación y llevar adelante todas las operaciones aritméticas esperadas. La noción de congruencia módulo un polinomio cobra su sentido junto a la de anillo cociente, y reiteramos la importancia de estudiar la irreducibilidad de un polinomio.

Estamos en condiciones de darle sentido, en particular, a los radicales $\sqrt[n]{a}$. Hasta ahora, el trabajo se centró en aceptarlos como algo con entidad propia; si estamos dando por sentado que conocemos $\mathbb{R}$, ¿por qué no habrían de tenerla? Procediendo de este modo (el mismo modo en que se procede en la mayoría de los ámbitos de formación docente), estaríamos clausurando toda discusión. Lo que nos interesa sobremanera transmitir es que la construcción de Kronecker nos permite obtener un objeto (la clase de t módulo t^n-a) que es solución de la ecuación $t^n-a = 0$. Y para construirlo solo necesitamos los racionales. Esto es de una importancia sobresaliente. Intentamos mostrar entonces que, para el trabajo que se lleva a cabo en las escuelas y en los cursos de formación docente, la noción de número algebraico reviste una importancia muchas veces relegada.

Discusión

Las líneas precedentes intentaron describir las singularidades de la formación de profesores de matemática en Argentina, las dificultades que entraña el doble sistema de formación y la falta de comunicación entre los diferentes actores. Estas cuestiones, de alcances políticos que tal vez no percibimos, escapan, naturalmente, a nuestras posibilidades de intervención, al menos en lo inmediato. Sin embargo, a pesar de la situación actual, hemos intentado mostrar posibles espacios en los cuales pueden intervenir los matemáticos junto a los investigadores en educación matemática. Es nuestra tarea contribuir a una redefinición de ciertos modos de presentar el conocimiento matemático. Una redefinición que tenga en cuenta la evolución del mismo, sus limitaciones y sus alcances, y que permita vislumbrar las posibilidades de incidir positivamente en la formación de las futuras generaciones de profesores de matemática.

El artículo original se recibió el 31 de enero de 2012
El artículo revisado se recibió el 26 de marzo de 2012
El artículo fue aceptado el 5 de abril de 2012

Referencias

Ahlfors, L., Courant, R., & Coxeter, H. (1962). On the mathematics curriculum of the high school. *American Mathematical Monthly*, *69*(3), 189-193.
Barbeau, E. (1989). *Polynomials*. New York: Springer-Verlag.
Childs, L. (2009). *A concrete introduction to higher algebra* (3a ed.). New York: Springer-Verlag.
Consejo Universitario de Ciencias Exactas y Naturales (CUCEN) (2009). *Profesorados de Matemática*. Recuperado de: http://www.cucen.org.ar/archivosCucen/documentos//profesorados/Listado de Profesorados en Matematica.pdf
Cox, D., Little, J., & O' Shea, D. (2007). *Ideals, varieties and algorithms*. New York: Springer-Verlag.
Gathen, J., & Gerhard, J. (2003). *Modern computer algebra* (2a ed.). Cambridge: Cambridge University Press.
Gavosto, E., Krantz, S., & McCallum, W. (1999). *Contemporary issues in mathematics education*. Cambridge: Mathematical Sciences Research Institute Publications.
Kline, M. (1978). *Why the professor can't teach: mathematics and the dilemma of university education*. New York: St. Martin's Press.
Kline, M. (1994). *El fracaso de la matemática moderna. Por qué Juanito no sabe sumar*. Madrid: Siglo XXI editores.
Krantz, S. (1999). *How to teach mathematics* (2a ed.). USA: American Mathematical Society.
Krantz, S. (Ed.) (2011). Special Number on mathematics education. *Notices of the American Mathematical Society, 58*(03), 367-416. Recuperado de http://ams.org/notices/201103/index.html
Kronecker, L. (1882). Grundzüge einer Arithmetischen Theorie der Algebraischen Grössenn. *Crelle's Journal*, *92*, 1-122.
Mignotte, M. (1992). *Mathematics for Computer Algebra*. New York: Springer-Verlag.
Ministerio de Educación de la Nación (s. f.). *Ley de Educación Nacional (Nº 26.206). Extracto de la Ley: artículos referidos al Instituto Nacional de Formación Docente*. Recuperado de http://www.me.gov.ar/infod/documentos/leyeducacion.pdf.
Mora, T. (2003). *Solving polynomial equation systems I. The Kronecker-Duval philosophy.* Cambridge: Cambridge University Press.
Secretaría de Políticas Universitarias (2011). *Autoridades universitarias.* Recuperado de http://www.me.gov.ar/spu/Servicios/Autoridades_Universitarias/autoridades_universitarias.html
Sessa, C (2011). *Informe acerca de la "Encuesta para los formadores de los Institutos de Formación Docente de las carreras de profesorado en Matemática"*. Recuperado de http://cedoc.infd.edu.ar/upload/Informe_mate_media_OCT_20111.pdf
Strang, G. (1988). *Linear algebra and its applications* (3a ed.). Filadelfia: Harcourth Brace Jovanovich.