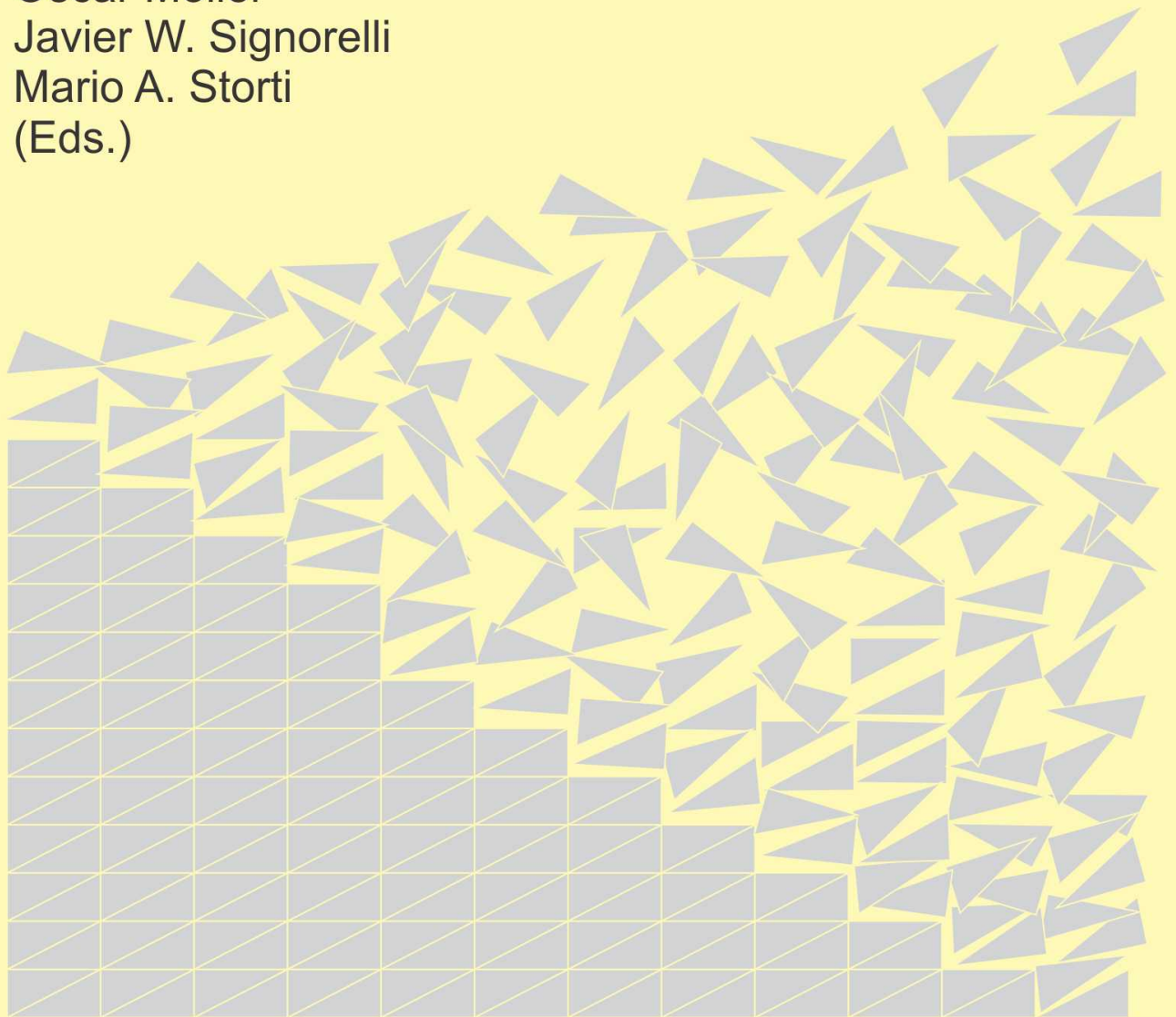


ISSN 1666-6070

MECÁNICA COMPUTACIONAL

Vol. XXX

Oscar Möller
Javier W. Signorelli
Mario A. Storti
(Eds.)



AMCA
AMCA

Asociación Argentina de
Mecánica Computacional

GOLPE DE ARIETE: SIMULACIÓN DEL TRANSITORIO AMORTIGUADO

Pablo G. Provenzano^a, Francisco J. Baroni^a y Roberto J. Aguerre^{a,b,c}

^a*Departamento de Tecnología, Universidad Nacional de Luján, (6700) Luján, Buenos Aires, Argentina E-mail: rjaguerre@gmail.com*

^b*Facultad de Agronomía y Ciencias Agroalimentarias, Universidad de Morón, (CONICET)*

^c*Departamento de Ciencias Básicas y Experimentales, Universidad Nacional del Noroeste de la Provincia de Buenos Aires, (6000) Junín, Buenos Aires, Argentina*

Palabras Clave: Golpe de Ariete, oscilación, Método de las Características, amortiguación.

Resumen. El Golpe de Ariete es un fenómeno conocido en todo sistema fluidodinámico por las oscilaciones, más o menos importantes, de la presión del fluido y de su velocidad como consecuencia de un cambio en las condiciones de flujo provocado por una perturbación (accidental o programada) aplicada al sistema. Estas oscilaciones producen deterioro en conducciones y accesorios de la instalación, dislocaciones y ruptura de conductos. Las variaciones de presión pueden ser tan amplias que invalidan las suposiciones de homogeneidad y continuidad del fluido.

La producción en investigación, en las últimas cuatro décadas, indica que los esfuerzos por mejorar la predicción del comportamiento de la presión transiente han sido puestos en la descripción de la atenuación del fenómeno. La bibliografía muestra que las simulaciones realizadas presentan discrepancias acumulativas tanto en amplitud como en fase.

En este trabajo se ha realizado el análisis del fenómeno en un sistema simple reservorio-conducción horizontal-válvula. Se ha modificado el modelo de Golpe de Ariete, introduciendo en el sistema de ecuaciones diferenciales hiperbólicas que lo representan, un término que incluye todos los efectos disipativos de interacción con las paredes de la conducción.

Se introdujo en el algoritmo la ley de cierre de válvula como condición de contorno dinámica (extremo donde se emplaza la válvula) y una condición de contorno estática, en el extremo opuesto (embocadura de conexión al tanque). La ley de cierre se ha modelado mediante una función potencial que relaciona el tiempo de cierre con la velocidad del fluido y permite simular el decrecimiento de la velocidad de flujo durante el cierre de válvula para una amplia gama de casos. Las curvas resultantes se discretizaron obteniéndose así poligonales que se utilizaron como condición de contorno para obtener las soluciones correspondientes a cada caso.

Se ha resuelto el modelo mediante el Método de las Características, lo que ha permitido predecir presiones y velocidades instantáneas del transitorio. También se ha obtenido la solución analítica del mismo modelo aplicando la Transformada de Laplace-Mellín y los postulados del Teorema de Cauchy. Los resultados de la simulación se han contrastado utilizando registros experimentales de laboratorio, observándose una buena concordancia tanto en fase como en amplitud entre las ondas de presión experimentales y predichas.

1 INTRODUCCION

La extensa bibliografía que comprende los últimos 50 años indica que los esfuerzos en el modelado del Golpe de Ariete han sido puestos mayoritariamente en la descripción de la atenuación del transitorio. La fricción es la principal causa de la atenuación del fenómeno y el grado de amortiguamiento está en relación directa con la magnitud de los esfuerzos cortantes. Aunque se conocen intentos anteriores (Schnyder, 1929; Bergeron, 1932; Angus, 1935; Wood, 1938) el modelo de Zielke (1968), merece especial mención puesto que permite una descripción acabada del fenómeno en régimen laminar: introduce la fricción en el modelo mediante un término que se compone del estacionario más uno agregado que integra los cambios de velocidad en instantes pasados incorporando una función de peso que retiene cada variación de velocidad del flujo para emplearla en la determinación de sucesivos valores de esa variable. Sin embargo, en régimen turbulento no se ha llegado aún a la obtención de una solución acabada como en el caso laminar puesto que el término de fricción es no lineal en este régimen, la fricción depende del cuadrado de la velocidad de flujo (Mataix Plana, 1983; Streeter y Wylie, 1988; Murga y Molina, 1997; Bergant y Tijsseling, 2001).

El modelo matemático de Golpe de Ariete está constituido por un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden, que se obtienen a partir de las expresiones de Continuidad y de Movimiento aplicadas a un elemento diferencial de flujo (Lai, 1961; Streeter y Wylie, 1988; Wylie y Streeter, 1993). Las ecuaciones que definen la propagación de transitorios de presión y sobrepresiones en un sistema de tuberías pertenecen a este grupo. La resolución de este tipo de ecuaciones puede ser abordada en forma analítica mediante aplicación de herramientas como la Transformada de Laplace, e incluyendo la ley de cierre de válvula como condición de contorno, logrando un buen ajuste en la amplitud y fase de la onda (Provenzano y col, 2011), no obstante el paso de antitransformación para la obtención del resultado en el campo temporal es un proceso complejo. Los métodos numéricos permiten resolver sistemas no lineales con razonable grado de aproximación.

El Método de las Características es una técnica particularmente apropiada para la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas (Abbott, 1966). El término que introduce la fricción en el modelo ha sido, tradicionalmente, tomado del término de fricción no lineal propio del sistema en régimen estacionario (modelo de la Teoría Clásica). Su resolución, aplicando el Método de las Características, da resultados aceptables en transientes suaves pero se observan discrepancias en la atenuación y fase en transientes rápidos. El primer pico de presión es descripto correctamente pero se observan discrepancias en amplitud de onda y en fase de los picos sucesivos (Streeter y Wylie, 1988; Bergant y Simpson, 2001; Bergant y Tijsseling, 2001). Este modelo es el más difundido, empleándose en cálculos de ingeniería y en paquetes de software.

Más reciente, el modelo de Fricción Transiente (Brunone y col., 2000) para régimen moderadamente turbulento incorpora un segundo término sumado al estacionario de fricción bajo la dependencia de un factor k obtenido empíricamente por prueba y error o analíticamente mediante el coeficiente de decaimiento de Vardy (desarrollado para conducciones lisas y suaves) mejorando notablemente el ajuste en la amortiguación del fenómeno (Brunone y col., 2000; Bergant y col., 2001; Bergant y Simpson, 2001).

Para todos estos modelos de ecuaciones del tipo hiperbólico el Método de las Características es una técnica sugerida. Ezekial y Paynter (1957), Abbott (1966) y Streeter (1967, 1969, 1972) con distintos colaboradores han encontrado útil trabajar con esta técnica. En Europa, Fox (1968), Evangelisti (1969) y Swaffield (1970) han sido los precursores en el uso de este Método aplicado a distintos casos.

En la actualidad, paralelamente, se está incursionando en el desarrollo y prueba de

herramientas como el Método de los Volúmenes Finitos.

El objetivo de este trabajo es:

Evaluar la performance del modelo de Fricción Transiente comparando con el modelo tradicional o de la Teoría Clásica, de uso común en aplicaciones hidráulicas.

Evaluar las cualidades de los métodos de resolución: de las Características y Analítico en la descripción del Golpe de Ariete.

2 FORMULACIÓN DEL MODELO

Se trabajó en el modelado del fenómeno en un sistema simple: tanque de abastecimiento-conducto-válvula. El análisis del Golpe de Ariete en sistemas presurizados se realiza bajo los siguientes supuestos:

- El flujo en la conducción es unidimensional, con velocidad y presión uniformes en la sección.
- La conducción esta llena y permanece en esa condición durante el transitorio.
- No se produce separación de columna durante el transitorio, es decir, la presión es mayor que la presión de vapor del líquido en todo instante.
- La cantidad de gas libre en el fluido es pequeña, por lo que la velocidad de propagación de la onda puede considerarse constante.
- El líquido y las paredes de la conducción se comportan como linealmente elásticas.
- Los cambios de presión debidos a la interacción con la estructura son pequeños comparados con la onda de presión del golpe de ariete.

2.1 Modelos de Golpe de Ariete

a) Teoría Clásica:

Partiendo de la ecuación de Continuidad

$$L_1 = \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + V \cdot \sin \theta = 0 \quad (1a)$$

y de la ecuación de Cantidad de Movimiento

$$L_2 = g \frac{\partial H}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{fV|V|}{2D} = 0 \quad (1b)$$

Donde a es celeridad de onda, V es la velocidad del fluido, H es la altura piezométrica, g es la aceleración de la gravedad, x es la coordenada axial y t es el tiempo.

b) Fricción Transiente:

Se utiliza la ecuación (1a) junto con la ecuación de Cantidad de Movimiento modificada:

$$L_2 = g \frac{\partial H}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} + f_q + \overbrace{\frac{k \cdot D \cdot A}{V \cdot |V|} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + a \cdot \text{sign}(V) \cdot \left| \frac{\partial V}{\partial t} \right| \right)}^{f_u} = 0 \quad (2)$$

Donde f_q es el componente del término de fricción tomado del estado estacionario y f_u es el correspondiente al estado transitorio, donde se contabilizan con la aceleración convectiva instantánea y la aceleración local instantánea del fluido en los instantes previos. La función

$sign(V) = V/|V|$ ha sido introducida en el modelo por Vitkowsky, donde $sign(V) = +1$ para $V \geq 0$ y -1 para $V < 0$ (Vitekowsky y col., 2000).

Donde $k = \sqrt{C}/2$, siendo $C = 0.0476$ para flujo laminar, y $C = 7.41/Re^{\log(14,3/Re^{0.05})}$ para flujo turbulento

Cuando se asigna valor cero al factor k , se anula el término f_u y solo subsiste el término f_q obteniéndose así la expresión del modelo de la Teoría Clásica.

2.2 Adecuación del Modelo

La obtención de los valores de $H(t)$ se logra al integrar las ecuaciones del modelo. Para tal fin, se aplicó el Método de las Características. Se trabajó con el modelo de Fricción Transiente, sistema de ecuaciones (1a) y (2):

La combinación lineal de las ecuaciones (1a) y (1b) también tiene la misma solución que dichas ecuaciones, luego $L = L_1 + \lambda L_2$.

$$L = \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{V \partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + V \sin \theta + \lambda \left[g \frac{\partial H}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} + f \frac{V|V|}{2D} + \frac{k \cdot D \cdot A}{V \cdot |V|} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + a \cdot sign(V) \cdot \left| \frac{\partial V}{\partial t} \right| \right) \right] = 0 \quad (3)$$

que pueden reordenarse obteniendo:

$$L = \left[\frac{\partial H}{\partial x} (V + \lambda g) + \frac{\partial H}{\partial t} \right] + \lambda \left[\left(\frac{a^2}{\lambda g} + V \right) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} \right] + V \sin \theta + \lambda \left[f \frac{V|V|}{2D} + \frac{k \cdot D \cdot A}{V \cdot |V|} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + a \cdot sign(V) \cdot \left| \frac{\partial V}{\partial t} \right| \right) \right] = 0 \quad (4)$$

Donde:

$$V + \lambda g = \frac{\partial x}{\partial t} \quad (5)$$

$$V + \frac{a^2}{\lambda g} = \frac{\partial x}{\partial t}$$

y se reemplazan esos factores por $\partial x / \partial t$ en la ecuación (4), ésta puede reescribirse en función de las derivadas totales:

$$L = \frac{dH}{dt} + \lambda \frac{dV}{dt} + V \sin \theta + \lambda f \frac{V|V|}{2D} + \lambda \frac{k \cdot D \cdot A}{V \cdot |V|} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + a \cdot sign(V) \cdot \left| \frac{\partial V}{\partial t} \right| \right) = 0 \quad (6)$$

obteniéndose una ecuación diferencial ordinaria que reemplaza a la ecuación (4), válida solamente a lo largo de las curvas $\pm \partial x / \partial t$.

Igualando las expresiones (5):

$$V + \lambda \cdot g = V + \frac{a^2}{\lambda g} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm \frac{a}{g} \quad (7)$$

Reemplazando los valores de λ hallados, en la ecuación (6) se tiene:

$$\frac{dH}{dt} + \frac{a}{g} \frac{dV}{dt} + V \sin \theta + a \cdot f \frac{V|V|}{2gD} + \frac{a}{g} \frac{k \cdot D \cdot A}{V \cdot |V|} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + a \cdot sign(V) \cdot \left| \frac{\partial V}{\partial t} \right| \right) = 0 \quad (7a)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{a}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + V \sin \theta + a \cdot f \frac{V|V|}{2gD} + \frac{a k \cdot D \cdot A}{g V \cdot |V|} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + a \cdot \text{sign}(V) \cdot \left| \frac{\partial V}{\partial t} \right| \right) = 0 \quad (7b)$$

Que es el sistema Modelo de Golpe de Ariete a resolver.

Las curvas $\pm \frac{\partial x}{\partial t}$: se obtienen asignando a λ el valor $+\frac{a}{g}$ y $-\frac{a}{g}$ en las expresiones (5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= V + a & (a) \\ \frac{\partial x}{\partial t} &= V - a & (b) \end{aligned} \quad (8)$$

Estas curvas se denominan $C+$ y $C-$, a lo largo de las cuales son válidas las ecuaciones (7a) y (7b) respectivamente.

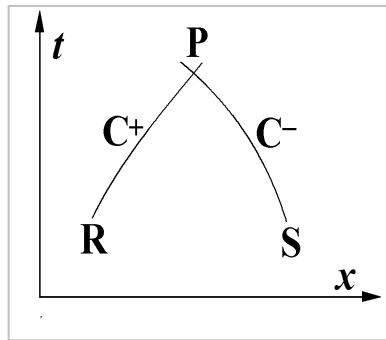


Figura 1: Curvas características

Cada ecuación, (7a) y (7b) contiene dos incógnitas, $H(t)$ y $V(t)$, para cualquier punto de las curvas $C+$ y $C-$ pero en el punto P , los valores de las incógnitas deben satisfacer ambas ecuaciones, por lo tanto pueden resolverse hallándose los valores de $H(t)$ y $V(t)$ (Streeter y Wylie, 1988; Abreu y col, 1995).

2.3 Modelo de Fricción Transiente

Se aplicó el Método de las Características en la resolución del modelo de Fricción Transiente, ecuaciones (7a) y (7b). El método permite determinar valores de las variables presión instantánea y caudal instantáneo en puntos equidistantes de la conducción y para intervalos de tiempo prefijados durante el transitorio. Se establece una grilla de la variable x (que representa la longitud de la conducción) en función del tiempo. Se divide la conducción en N segmentos de igual longitud (Δx). Los valores iniciales de $H(t)$ y $V(t)$ se conocen pues son los valores de esas variables en estado estacionario (condiciones iniciales). La determinación del incremento temporal (Δt) se fija teniendo en cuenta previamente que $a \gg V$, entonces la curva, entonces el paso temporal es, como consecuencia, las pendientes de las curvas $C+$ y $C-$ son a y $-a$ respectivamente, siendo ahora rectas. Tomando dos puntos R y S (figura 1), desde R se traza la curva $C+$ que responde a la Ecuación (8a) y desde S se extiende la curva $C-$ dada por la Ecuación (8b). Ambas se intersectan en P . Cada ecuación del modelo contiene dos incógnitas: $H(t)$ y $V(t)$, válidas a lo largo de las $C+$ y $C-$, respectivamente. Pero en el punto P ambas tienen la misma solución porque P es un punto común a las dos rectas. Así se obtienen los valores H_p y V_p .

El procedimiento se repite en nuevos puntos de intersección de las rectas C+ y C-. Se van hallando nuevos valores para H y V , para el mismo instante de tiempo y para tiempos posteriores, como muestra la siguiente grilla (figura 2):

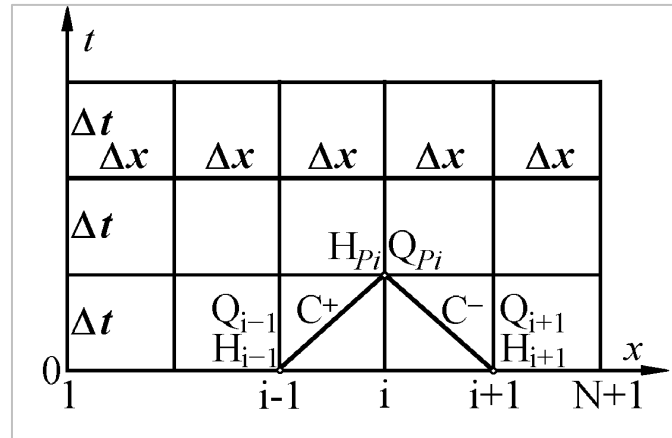


Figura 2: Grilla de cálculo

Integrando las ecuaciones (7a) y (7b) a lo largo de las rectas C+ y C- y expresando V como relación entre el caudal volumétrico y la sección del conducto, Q/A , se obtiene:

$$H_{pi} - H_{i-1} + \frac{a}{gA}(Q_{pi} - Q_{i-1}) + \frac{Q_{i-1}\Delta t}{A} \sin\theta + f \frac{\Delta x}{2gDA^2} Q_{i-1}|Q_{i-1}| + \frac{a \cdot k \cdot D \cdot A}{g Q_{i-1}|Q_{i-1}|} (Q_{i-1}|Q_{i-1}| + a \cdot \text{sign}(Q) \cdot Q_{i-1}|Q_{i-1}|) = 0 \quad (9a)$$

$$H_{pi} - H_{i+1} - \frac{a}{gA}(Q_{pi} - Q_{i+1}) + \frac{Q_{i+1}\Delta t}{A} \sin\theta + f \frac{\Delta x}{2gDA^2} Q_{i+1}|Q_{i+1}| - \frac{a \cdot k \cdot D \cdot A}{g Q_{i+1}|Q_{i+1}|} (Q_{i+1}|Q_{i+1}| + a \cdot \text{sign}(Q) \cdot Q_{i+1}|Q_{i+1}|) = 0 \quad (9b)$$

De donde, se obtiene:

$$H_{pi} = \frac{1}{2} \left\{ H_{i-1} + H_{i+1} - \frac{a}{gA}(Q_{i+1} - Q_{i-1}) - \frac{\sin\theta \Delta t}{A}(Q_{i-1} + Q_{i+1}) - f \frac{\Delta x}{2gDA^2} (Q_{i-1}|Q_{i-1}| - Q_{i+1}|Q_{i+1}|) + \frac{a \cdot k \cdot D \cdot A}{g Q_{i+1}|Q_{i+1}|} (Q_{i+1}|Q_{i+1}| + a \cdot \text{sign}(Q) \cdot Q_{i+1}|Q_{i+1}|) \right\} \quad (10)$$

Para obtener valores de la otra variable afectada, $Q(t)$, las ecuaciones (9a) y (9b) se restan y luego se procede de la misma manera que en el cálculo de $H(t)$, desarrollado a continuación.

El valor de H_{pi} corresponde a un instante posterior al de valores H_{i-1} y H_{i+1} empleados en la ecuación (10). Sucesivamente, tomando valores de $H(t)$ en pares, hallados para un instante de tiempo determinado se van determinando valores de $H(t)$ para el paso de tiempo inmediato posterior, obteniéndose un conjunto de datos de la variable estudiada, pertenecientes a cada punto discreto en que originalmente se dividió la conducción (Streeter y Wyllie, 1988; Abreu y col., 1995).

Para evaluar los valores de $H(t)$ y de $Q(t)$ en los nodos 1 y $N+1$ (Figura 2) que constituyen los extremos del conducto se requieren adicionalmente dos condiciones de contorno. Aguas arriba, en el nodo 1, empleando la ecuación (9b) junto con la condición de contorno $H_{p1} = H_0$ (presión hidrostática) en la embocadura conducto-tanque (extremo del conducto) se obtiene el valor Q_{p1} . La condición de contorno a aplicar en el otro extremo, donde se emplaza la válvula, es un valor de caudal Q_{PN+1} conocido, que, junto con la ecuación (9a) permite evaluar el valor

de H_{PN+1} . Se emplea, para este caso, la siguiente expresión:

$$Q_{PN+1} = C_d A_v \sqrt{2gH_{PN+1}} \quad (11)$$

que se obtiene representando la válvula como una obstrucción, por ejemplo un orificio de placa delgada.

La resolución del modelo de la Teoría Clásica se obtiene resolviendo el modelo de Fricción Transiente y asignando valor cero al coeficiente k que multiplica al término no estacionario, anulándose este término y quedando el término estacionario solamente. Luego, el modelo de la Teoría Clásica constituye un caso particular del modelo de Fricción Transiente.

2.4 Solución analítica

Se utiliza el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \delta \frac{\partial V}{\partial t} + FV = 0 \quad (12a)$$

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \delta \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (12b)$$

Donde δ es la densidad del fluido y p es la presión.

Se incluyó la fricción en el modelo mediante la adición del término FV que contempla todos los efectos disipativos que contribuyen a la atenuación del fenómeno.

Realizando algunos pasos algebraicos y aplicando la Transformada de Laplace se obtuvo:

$$\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} = \delta Q \left[- \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) - s(V) + s^2 \bar{V} \right] + FQ \left[- (V) + s\bar{V} \right] \quad (13)$$

Con las siguientes condiciones iniciales: para $t = 0$, $V = V_0$ y $\partial V_0 / \partial t = 0 = 0$. Entonces:

$$\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} = -QV_0 (\delta s + F) + Qs (\delta \bar{V}s + F\bar{V}) \quad (14)$$

resolviendo, se tiene:

$$\bar{V} = A \sinh \left(\beta \frac{x}{a} \right) + B \cosh \left(\beta \frac{x}{a} \right) + \frac{V_0}{s} \quad (15)$$

Derivando la expresión (15):

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial x} = A\beta \cosh \left(\beta \frac{x}{a} \right) + B\beta \sinh \left(\beta \frac{x}{a} \right) \quad (16)$$

Donde

$$\beta = \sqrt{\delta Q_s^2 + F Q_s} \quad (17)$$

La ecuación (15) es la solución general en el Campo de la Transformada. La solución particular se obtiene aplicando las condiciones de contorno:

$$\begin{array}{lll} 1^\circ & \text{en } t = \tau & V = V_0 \\ 2^\circ & \text{para } t > \tau & x = 0 \quad H = H_{\text{estática}} = \text{cte.} \\ 3^\circ & \text{para } 0 < t \leq \tau & x = L \quad V = 0 \end{array} \quad (18)$$

Aplicando estas condiciones de contorno se obtuvo la expresión de la presión en el campo de la Transformada

$$\bar{P} = \frac{V_0 \beta \sinh\left(\beta \frac{x}{a}\right)}{Q_s^2 \cosh\left(\beta \frac{L}{a}\right)} - \frac{F V_0 x}{s} + \frac{P_0}{s} \quad (19)$$

El proceso de antitransformación, en el Campo Complejo permitió obtener la solución:

$$p(x,t) = P_0 - V_0 F x + \frac{V_0 \cdot a}{Q L} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\left\{ \psi + \frac{F}{\delta} \right\} \cdot \sin\{\psi t\} \cdot \sin\left[(2n-1) \frac{\pi x}{2L}\right] \cdot \psi \left\{ \psi^2 + (1-\sqrt{2}) \left[\left(\frac{F}{\delta} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - \frac{1}{2} \right] \right\} e^{-\frac{1F}{2\delta} t}}{\psi \left\{ \psi^2 + (1-\sqrt{2}) \left[\left(\frac{F}{\delta} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - \frac{1}{2} \right] \right\}^2} \quad (20)$$

donde ψ es igual a $\left\{ \left[(2n-1) \pi a / 2L \right]^2 + (F/2\delta)^2 \right\}^{1/2}$.

La ecuación (20) que describe la presión durante el transitorio para todo punto de la conducción y para todo instante en que transcurre el fenómeno, para un cierre instantáneo o cuasi-instantáneo.

El caso que se analiza a continuación responde al Golpe de Ariete en un sistema simple, para un cierre cuasi-instantáneo, por lo tanto la solución (20) ha sido aplicada en el modelado analítico del fenómeno.

Para evaluar el Golpe de Ariete en los casos donde el cierre de válvula es gobernado por una ley no instantánea, por ejemplo, lineal, convexo, cosenoidal o cóncavo, se ha utilizado una ecuación o ley de cierre potencial,

$$V_i = (V_0 - V_\tau) \left[1 - \left(\frac{i\beta}{\tau} \right)^m \right] + V_\tau \quad (21)$$

que permite introducir una amplia gama de funciones de cierre en el algoritmo (Provenzano y col., 2011).

Los resultados del modelado mediante los modelos Fricción Transiente, de la Teoría Clásica y Analítico se exhiben en la Figura 3. Se observa una notable mejora en la descripción del comportamiento de la presión mediante el modelo de Fricción Transiente respecto de las discrepancias que exhibe el modelo Clásico, básicamente en la amplitud de los ciclos y en especial desde los ciclos medios a finales del transitorio.

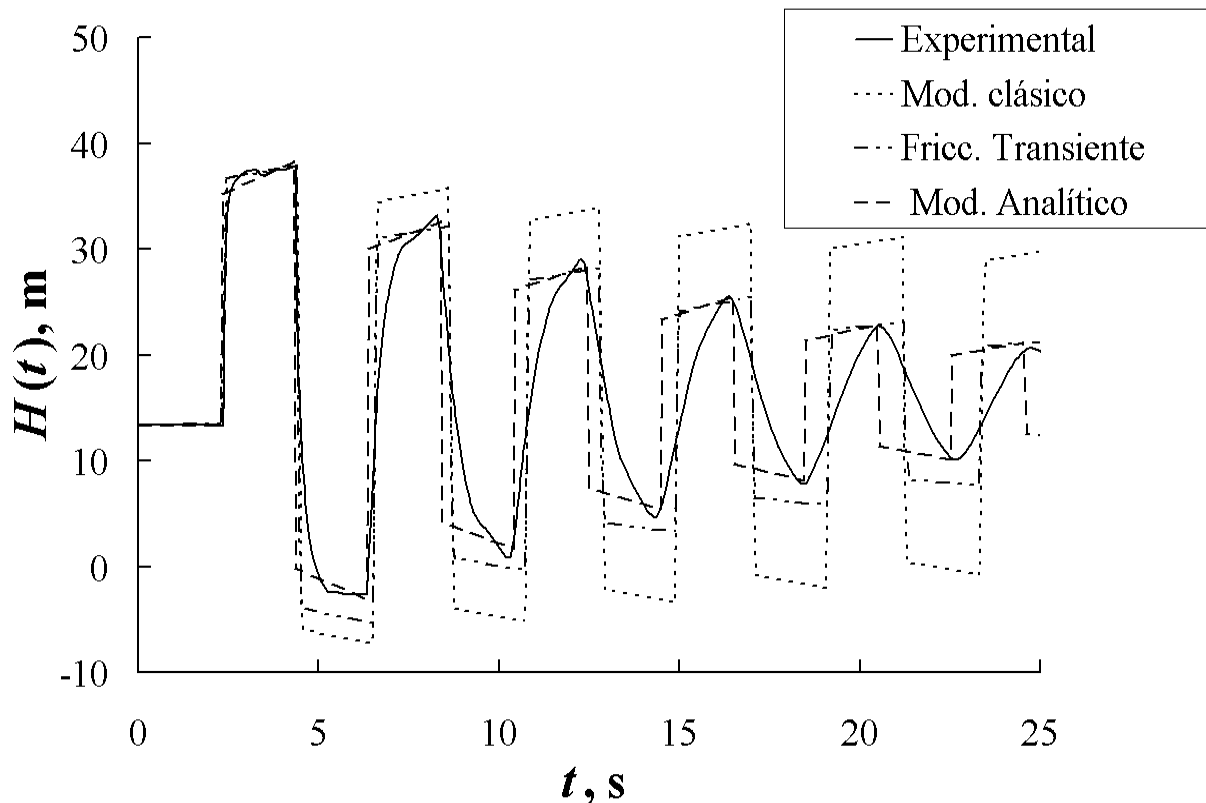


Figura 3: Amortiguación del golpe de ariete en una conducción de polietileno y su modelado. Características: $L = 352$ m, $D = 0.094$ m, $e = 0.008$ m, $V_0 = 0.729$ m/s, $t_c = 2.607$ s, $\tau = 0.06$ s, $a : 270$ m/s (Brunone y col., 2000)

El primer pico de presión es correctamente modelado. Persiste aún corrimiento de fase desde los ciclos medios a finales y desajuste por exceso en la descripción de los valles en los hemisiclos negativos, pero en grado menor.

El modelo analítico describe adecuadamente la amplitud de onda de cada ciclo y mantiene la fase en todos ellos.

Los dos primeros modelos, basados en el Método de las Características, como también el modelo analítico no describen el cambio progresivo de forma de la onda que se observa normalmente en los registros experimentales de Golpe de Ariete cuando el material del conducto presenta alta tendencia a la deformación, para esfuerzos de expansión y de contracción (por ejemplo materiales poliméricos). En el caso analizado el primer ciclo muestra una forma similar a la de onda cuadrada, con sesgo leve a la derecha, característico de funciones de cierre cuasi-instantáneos, pronunciadamente convexos y pronunciadamente cóncavos (Provenzano y col., 2011). Esta forma va evolucionando a trapezoidal desde el segundo ciclo para ir avanzando hacia un contorno triangular de la onda en los ciclos medios y finales. El cambio de forma observado se debería a la absorción selectiva de las armónicas superiores (altas frecuencias) que componen la onda, originalmente cuadrada o marcadamente trapezoidal. El material del conducto estaría actuando como filtro “pasabajos” absorbiendo en cada ciclo armónicas superiores, subsistiendo las frecuencias medias y bajas del conjunto que constituyen la onda cuadrada del primer ciclo.

3 CONCLUSIONES

El modelo de la Teoría Clásica es el más difundido para el cálculo de sobrepresiones en estructuras fluidodinámicas de todo tipo, sin embargo muestra notorias discrepancias por exceso en el modelado de la atenuación de la presión. El modelo de Fricción Transiente introduce un ajuste importante en la atenuación de picos como de valles de sobrepresión pudiendo afirmarse que el modelo de la Teoría Clásica queda superado en cuanto a sus prestaciones. Constituye un paso importante la inclusión de un término de fricción no estacionario que contempla los cambios instantáneos de la velocidad del fluido en aquel modelo.

El Método de las Características, por su parte, resulta una herramienta adecuada y versátil en la descripción de transientes rápidos, mostrando estabilidad, efectividad y sencillez relativa para la resolución de ecuaciones de clase hiperbólica en derivadas parciales de segundo grado.

Fricción Transiente, sin embargo, no corrige el desfase de onda progresivo observado en el modelo de la Teoría Clásica. Esto podría ser atribuible a una propagación de errores parcialmente acotada en la formulación de estos modelos.

Se incluyó un tercer desarrollo, de carácter analítico, que presenta un ajuste aún mayor en la atenuación y una eficiente performance en la fase de onda, que se mantiene sin desfase durante todos los ciclos del fenómeno. Este modelo ha sido empleado como referencia y elemento de comparación para el modelo numérico analizado. Los resultados obtenidos por Fricción Transiente son similares al del modelo Analítico en la atenuación del fenómeno indicando una performance adecuada para el análisis del transitorio. Su resolución por el método de las Características agrega sencillez en el tratamiento matemático respecto del algoritmo Analítico.

Ninguno de los tres modelos describe el cambio de forma de onda que muestra el registro experimental. Ello se atribuiría a la atenuación prematura de las armónicas de altas frecuencias durante el transitorio debido al retardo en la restitución de la energía potencial que se da cuando el material de la conducción presenta propiedades de deformación a esfuerzos menores (materiales poliméricos). Los modelos analizados no describen este aspecto. Este tema está en estudio por parte de los autores del presente trabajo.

4 REFERENCIAS

- Abbott, M., *An introduction to the Method of Characteristics*. American Elsevier, New York, 1966.
- Abreu, J; Guarga, R.; Izquierdo, J., *Transitorios y Oscilaciones en Sistemas de Impulsión*. Unidad Docente Mecánica de Fluidos, Dpto. Ing. Hidráulica y Medio Ambiente, Universidad Politécnica de Valencia – España, 1995.
- Angus, R., Simple Graphical Solution for Pressure Rise in Pipes and Pumps Discharge Lines. *Journal of Eng. Inst.*, Canada, 18: 72-81, 1935.
- Aguilar Rosas, J., *Análisis de las Energías en el Movimiento Oscilatorio Amortiguado*. Depto. de Matemáticas y Física, Universidad Nacional de Guadalajara, México, 2005.
- Bergant, A., Simpson, A., Developments in Unsteady Pipe Flow Friction Modelling. *Journal of Hydraulic Research*, 39: 249-257, 2001.
- Bergant, A., Tijsseling, A., *Parameters Affecting Water Hammer Attenuation: Shape and Timing*. 10th International Meeting of The Work Group of The Behaviour of Hydraulic Machinery Under Steady Oscillation Conditions, 2001.

- Bergant A, Vitkovsky J., Simpson A., Lambert M., *Valve Induced Transient Influenced by Unsteady Pipe Flow Friction*. 10th International Meeting of The Work Group of The Behaviour of Hydraulic Machinery Under Steady Oscillation Conditions, 2001.
- Bergeron, L., *Variations in Flow in Water Conduits*. Comptes rendres des travaux de la Soc. Hyd. de France, Paris, 1932.
- Brunone B., Golia U., Greco M., *Some Remarks on the Momentum equation for Fast Transient*. Meeting of Hydraulic Transient with Column Separation, 9th Round Table, IAHR , Valencia, Spain, 1991.
- Brunone B., Karney B., Mecarelli M., Ferrante M., *Velocity Profiles and Unsteady Pipe Friction in Transient Flow*. Journal of Water Resources Planning and Mannagement, 2000.
- Evangelisti, G., Waterhammer Analysis by the Method of Characteristics. *L'Energia Elettrica*, 46:673-692, 1969.
- Ezekial, F.D. y Paynter, H.M., Computer Representation of Engineering Systems Involving Fluid Transients. *Trans. ASME.*, 79: 1840-1850, 1957.
- Fox, J.A., *The Use of the Digital Computer in the Solution of Waterhammer Problems*. Proc. I.C.E., Vol 39, 127Á.,1968.
- Lai, Ch., *A Study of Water Hammer Including Efect of Hydraulic Losses*. Thesis, Department of Civil Engineering, University of Michigan, 1961.
- Martínez, C., *Generalidades Sobre Sistemas*. Facultad de Ciencias, Universidad de la República, Uruguay , 2003.
- Mataix Plana, C., *Mecánica de Fluidos y Máquinas Hidráulicas*. 2º edición, Oxford University Press, 1982.
- Mayer, O., *Vibraciones*. Mecánica Aplicada, Depto. Ing. Mecánica, UBA, Argentina, 2002.
- Mendiluche Rosich, E., *El Golpe de Ariete en Impulsiones*. Ed. Bellisco, 1987.
- Mitosek M. Chorzelsky M. Malesinska A., *Experimental Analysis of Natural Frequency of Water Column due to Water Hammer in Series Pipe Systems*. Warsaw, University of Technology, 1998.
- Murga, N., Molina, N., *Sistema de protección de bombas y cañerías en oleoductos sometidos a flujos transitorios*, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1997.
- Provenzano, P.; Baroni, F.; Aguerre, R., The Closing Function in the Water Hammer Modeling. *Latin American Applied Research*, 41: 43-47, 2011.
- Rich, R., Water Hammer Analysis by the Laplace–Mellin Transformation. *Transaction of the ASME*, 67: 361-376, 1945.
- Schnyder, O., Waterhammer in Pump Discharge Lines. *Schweizerische Bauzeitung*, 94: 22-23, 1929.
- Sotelo Avila, G., *El Golpe de Ariete en estaciones de bombeo*. Universidad Poitécnica de Catalunya, 1995.
- Streeter, V.L. y Wylie, E.B. *Mecánica de Fluidos*. McGraw-Hill, 1988.
- Swaffield J., *A Study of Column Separation Following Valve Closure in a Pipelline Carrying Aviation Kerosene*. Thermodynamic and Fluid Mechanic Convention, Steady and Unsteady Flows, 57 Proceeding I. Mech. Eng., Vol.184, 1970.
- Vardy, A.E., y Hwang, K.L., A characteristics model of transient friction in pipes. *Journal of Hydraulic Research*, 29: 669-684, 1991.
- Vitkovsky, A; Lambert, J; Simpson,A., Bergant, A., *Advances in unsteady friction modelling in transient pipe flow*. Pressure Surges. Safe design and Operation of industrial pipe systems, Anderson Ed., Profesional Engineering Publishing Ltd., Bury St. Edmunds, England 471 – 482, 2000.
- Wood, F.M., Application of Heaviside's operational calculus to the solution of waterhammer

- problems. *Trans. ASME.*, 59: 703-713, 1938.
- Wyllie, B., Streeter, V., *Fluid Transients in systems*. Prentice Hall Inc., 1993.
- Zielke, W., Frequency dependent friction in transient pipe flow. *Jour. Basic Eng., Trans. ASME.*, 90: 109-115, 1968.

5 NOMENCLATURA

a	celeridad de onda [m/s]
A	sección de la conducción [m ²]
C	coeficiente de Decaimiento de <i>Vardy</i>
D	diámetro del conducto [m]
e	espesor de pared del conducto [m]
E_M	módulo de elasticidad del conducto
E_w	módulo de compresibilidad del agua
f	factor de fricción de <i>Darcy – Weisbach</i>
F	factor disipativo
g	aceleración de la gravedad [m/ s ²]
H	altura piezométrica [m]
H_0	altura piezométrica del primer pico de presión sobrepresión [m]
H_{estat}	altura piezométrica estática [m]
L	longitud de la conducción [m]
p	presión [Pa]
Q	caudal [m ³ / s]
Re	número de Reynolds [adimensional]
s	variable en el campo de la Transformada de Laplace
t	tiempo [s]
t_c	tiempo crítico [s]
T_d	periodo real de la onda de presión transitoria en el sistema [s]
V	velocidad del fluido [m/s]
w_d	frecuencia real de la onda de presión transitoria en el sistema [s ⁻¹]
w_o	frecuencia natural de la onda de presión transitoria en el sistema [s ⁻¹].
x	coordenada axial [m]
δ	densidad del fluido [kg/m ³]
γ	factor de amortiguamiento (refleja el efecto de la fricción en w) [s ⁻¹].
λ	constante (s)
θ	ángulo de inclinación de la conducción [rad]
τ	tiempo de cierre de válvula [s]