

# Adaptive Neural Dynamic Compensator for Mobile Robots in Trajectory Tracking Control

F. G. Rossomando, C. Soria, and R. Carelli, *Senior, IEEE*

**Abstract**— In the present paper, it will be reported original results concerning the application of Neural Networks (NN) in mobile robot in trajectory tracking control. This work combines a feedback linearization based on a nominal model and an NN adaptive dynamic compensation. In mobile robot with uncertain dynamic parameters, two controllers are implemented separately: a kinematic controller and an inverse dynamic controller. The uncertainty in the nominal dynamic model is compensated by a neural adaptive feedback controller. The resulting adaptive controller is efficient and robust in the sense that it succeeds to achieve a good tracking performance with a small computational effort. The learning laws were deduced by Lyapunov stability analysis. Finally, the performance of the control system is verified through experiments.

**Keywords**— subspace, adaptive inverse control, system identification, RBF neural nets, mobile robot control, Lyapunov theory.

## I. NOMENCLATURA

Variable	Descripción
$v$	Velocidad lineal del robot móvil.
$\omega$	Velocidad angular del robot móvil.
$\mathbf{v}$	Vector de velocidad del robot móvil.
$x, y$	Coordenadas cartesianas del robot (punto $\mathbf{h}$ ) en el plano XY
$\mathbf{h}$	Vector con coordenadas $x, y$ en el plano XY
$G$	Centro de masas del robot.
$C$	Posición de la rueda castor.
$\boldsymbol{\theta}$	Vector de parámetros del robot.
$\theta_i$	Elementos del vector de parámetros, $i=1, \dots, 6$
$\alpha$	Angulo de orientación del robot
$\delta$	Vector de incertidumbres del modelo de robot.
$a$	Distancia entre el punto de interés y punto central del eje virtual de las ruedas de tracción.
$\mathbf{D}$	Matriz diagonal $\text{diag}(\theta_1, \theta_2)$
$n$	Orden del sistema
$m$	Numero de neuronas.
$j$	Numero de entradas de control
$c^*$	Centros óptimos de la función RBF
$\mu^*$	Anchos óptimos de la función RBF
$\mathbf{w}$	Vector de pesos de salida de la red RBF

$\tilde{\mathbf{w}}$	Vector de error de pesos de salida
$\mathbf{w}^*$	Vector de pesos óptimos de salida red RBF
$\xi_i(\cdot)$	Funciones RBF
$\xi^T(\cdot)$	vector de funciones RBF
$\mathbf{v}_N$	Vector de salida de la red neuronal RBF
$\mathbf{v}_{ref}^c$	vector de salida del controlador cinemático
$\mathbf{v}_{ref}$	Acción de control de la dinámica del robot.
$\mathbf{v}_{ref}^d$	vector de salida del controlador dinámico
$e_{v, \omega}$	Error de velocidad para $v$ y $\omega$ respectivamente
$\mathbf{e}$	vector de error de velocidad del robot.

## II. INTRODUCCIÓN

VARIOS estudios han sido publicados indicando el diseño de controladores de seguimiento de trayectorias para los robots móviles. Debido a perturbaciones, deslizamiento, errores de sensado, etc., no hay una buena atenuación de los errores entre la posición deseada y la posición real del robot.

Las estrategias de control que han sido propuestas para seguimiento de trayectorias están basadas en el modelo cinemático y/o dinámico de los robots móviles [1], dependiendo de la velocidad de operación y de la precisión del modelo dinámico, respectivamente [2]. Se han desarrollado diferentes estructuras de control para estos sistemas; los controladores basados únicamente en la cinemática [3], [4] y [5]; donde en este último trabajo el diseño del controlador se realiza usando coordenadas polares. En [6] se utiliza el controlador propuesto por [7] para alimentar las entradas del controlador de velocidad, haciendo que el sistema sea asintóticamente estable; de esta forma se diseña un controlador para robots móviles para seguir la velocidad de referencia deseada. El trabajo [8] extiende el diseño propuesto por [6], considerando que el modelo paramétrico es desconocido. En [9] se propone un controlador adaptable que tiene en cuenta las incertidumbres paramétricas y las perturbaciones externas del robot para garantizar un seguimiento perfecto de velocidad. La referencia de velocidad es obtenida usando el controlador propuesto en [7].

Otros trabajos presentan el diseño de controladores que compensan la dinámica del robot usando técnicas de inteligencia artificial. En [10] se muestra un controlador adaptable basado en lógica fuzzy donde la incertidumbre del sistema, que incluye la variación de parámetros y no linealidades desconocidas, es estimada por un sistema de lógica fuzzy y sus parámetros son ajustados en línea. Otro tipo de controladores de seguimiento de trayectorias basados en la dinámica del robot son desarrollados por [11], [12], [13], [14],

F. G. Rossomando, Gobierno de la Provincia de San Juan, San Juan, Argentina, frossomando@sanjuan.gov.ar

C. Soria, Universidad Nacional de San Juan, San Juan, Argentina, csoria@inaut.unsj.edu.ar

R. Carelli, Universidad Nacional de San Juan, San Juan, Argentina, rcarelli@inaut.unsj.edu.ar

[15] y [10], mostrando resultados basados sólo en simulaciones.

En [16] se propone un controlador adaptable robusto dividido en dos partes. El primer controlador está basado en la cinemática del robot y es la responsable de generar las referencias para el segundo controlador, que compensa la dinámica modelada. Sin embargo, los parámetros obtenidos no son los parámetros reales del robot. En el trabajo no se muestran resultados experimentales, y las acciones de control están dadas en términos de torques, cuando los robots comerciales aceptan comandos de velocidad. En [17], se presenta un observador de estados basados en la teoría de Kalman para el diseño de un controlador de seguimiento de trayectorias para robots móviles. El trabajo no muestra análisis de estabilidad y los resultados se basan en simulaciones. En [18] se muestra el uso de una Red neuronal (*RBF*) diseñada en tiempo discreto, en el cual los pesos son ajustados usando un algoritmo basado en el filtro de Kalman extendido (*EKF*). Esta red estima la dinámica directa completa del robot móvil, obteniendo un funcional sobre el que se desarrolla el controlador. Los autores muestran simulaciones y no presenta análisis de estabilidad.

En [19] se presentan dos controladores basados en una *RBF-NN* para la compensación de las incertidumbres tanto en la cinemática como en la dinámica del robot móvil, en el cual solo se muestran resultados de simulación.

En [20] se presenta una parametrización lineal de un robot móvil tipo unicycle y el diseño de un controlador de seguimiento de trayectorias que se basa en el modelo conocido completo del robot. Una de las ventajas de este controlador es que sus parámetros están directamente relacionados con los parámetros físicos del robot. Sin embargo, si los parámetros no se identifican correctamente o cambian con el tiempo debido, por ejemplo, a una variación de la carga, el desempeño del controlador se verá afectado. En [21] se presenta un controlador de trayectorias adaptable basado en el modelo de [20], con análisis de estabilidad basada en Lyapunov.

En este trabajo se presenta el diseño de un controlador adaptable para el seguimiento de trayectorias basado en la dinámica nominal del robot sobre el cual se desarrolla una compensación neuronal. Esta compensación muestra la capacidad adaptable de aprender la diferencia entre la dinámica nominal y la actual del robot. El sistema de control completo está diseñado en dos partes: una que incluye el controlador cinemático y otra con un controlador dinámico, similar a lo hecho por [16] y [22] en que los controladores se ajustan a la dinámica completa del robot.

El controlador dinámico diseñado está basado en el modelo nominal y un controlador neuronal de compensación, con la capacidad de aprender la diferencia de dinámica entre la nominal y la real del robot. Como la red neuronal compensa sólo el error de dinámica del modelo nominal, se reduce el costo computacional en comparación de aprender la dinámica completa del robot.

Se realiza un análisis para estudiar los efectos del error de aproximación de la red neuronal en el error de control para todo el sistema, cuando los controladores cinemático y dinámico adaptable trabajan simultáneamente realizando las tareas de control de seguimiento.

El artículo está organizado de la siguiente manera: en la

Sección III. se presenta el modelo de un robot tipo unicycle, sobre el cual se desarrolla el diseño de los controladores. En la Sección IV. se desarrolla el diseño del controlador cinemático y en la Sección V. el correspondiente al controlador dinámico junto con el compensador neuronal, incluyendo los análisis de estabilidad y de errores de control, como así también el análisis de robustez del método propuesto. La Sección VI. contiene algunos resultados experimentales que muestran el desempeño del compensador adaptable y además se analizan los errores de experimentación para diferentes propuestas de control. Por último, la Sección VII. contiene las conclusiones del presente trabajo.

### III. MODELO DE ROBOT MÓVIL NO HOLONÓMICO

En este trabajo se considera robots móviles con estructura cinemática denominada de tipo unicycle. Este tipo de robots posee dos ruedas motrices independientes y otra rueda libre que no influye en la cinemática del vehículo y solo sirve para equilibrar la plataforma móvil. Estos robots presentan una restricción del tipo no-holónica que limita la dirección del movimiento [23]. En esta sección se revisa el modelo del robot móvil tipo unicycle cuya representación esquemática se muestra en la Figura 1, con indicación de los parámetros y variables de interés. Las variables  $v$  y  $\omega$  son las velocidades lineal y angular desarrolladas por el robot,  $G$  es el centro de masa del robot,  $c$  es la posición de la rueda libre,  $h$  es el punto de interés con coordenadas  $x$ ,  $y$  en el plano  $XY$ ,  $\psi$  es la orientación del robot,  $a$  es la distancia entre el punto de interés y el punto central del eje virtual vinculado a las ruedas de tracción. La representación matemática del modelo completo [20], está dada por:

Modelo Cinemático

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -a \sin \psi \\ \sin \psi & a \cos \psi \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Modelo Dinámico

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_3 \omega^2 - \theta_4 v \\ \theta_1 \omega - \theta_2 v \\ -\theta_5 v \omega - \theta_6 \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \theta_1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_v \\ \delta_\omega \end{bmatrix} \quad (2)$$

El vector de parámetros identificados y el vector de parámetros de incertidumbres asociados al robot móvil son, respectivamente,

$$\theta = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4 \quad \theta_5 \quad \theta_6]^T$$

$$\delta = [\delta_x \quad \delta_y \quad 0 \quad \delta_v \quad \delta_\omega]^T$$

El vector de parámetros está definido en el Apéndice. Los elementos del vector de incertidumbres  $\delta_x$  y  $\delta_y$  son funciones de la velocidad de deslizamiento y de la orientación del robot,  $\delta_v$  y  $\delta_\omega$  son funciones de los parámetros físicos como la masa,

la inercia, diámetros de las ruedas y parámetros de los servos, fuerzas aplicadas sobre las ruedas, y otros factores son considerados como perturbaciones. En el apéndice se hace una descripción de los parámetros del robot móvil y el valor de cada uno de ellos para cada robot.

Dado que el modelo de robot se divide en parte cinemática y dinámica, se implementarán dos controladores basados en la linealización por realimentación tanto para el modelo cinemático como para el dinámico.

#### IV. CONTROLADOR CINEMÁTICO

En esta sección se describe el diseño del controlador de cinemática inversa basado en el modelo cinemático del robot.

El controlador propuesto está dado por:

$$\begin{bmatrix} v_{ref}^c \\ \omega_{ref}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\frac{1}{a} \sin \psi & \frac{1}{a} \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_d + l_x \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x}\right) \\ \dot{y}_d + l_y \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y}\right) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Donde  $\dot{x}_d(t)$ ,  $\dot{y}_d(t)$  son las velocidades deseadas,  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  son los errores de trayectoria, las funciones de tangente hiperbólica  $\tanh(\cdot)$  se incluyen para evitar la saturación de las velocidades deseadas,  $l_x$ ,  $l_y$ ,  $k_x$ ,  $k_y$  son parámetros de diseño de valores positivos.

Sustituyendo (3) en (1) bajo el supuesto de seguimiento perfecto de velocidad  $v_{ref}^c(t) \equiv v(t)$  y  $\omega_{ref}^c(t) \equiv \omega(t)$ , la ecuación de lazo cerrado resulta,

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_x & 0 \\ 0 & l_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x}\right) \\ \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Definiendo el vector de error de salida  $\tilde{h} = [\tilde{x} \ \tilde{y}]^T$ , la ecuación (4) puede ser reescrita como:

$$\dot{\tilde{h}} = - \begin{bmatrix} l_x \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x}\right) & l_y \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y}\right) \end{bmatrix}^T \quad (5)$$

Escogiendo una función candidata de Lyapunov como  $V = \tilde{h}^T(t) \tilde{h}(t)$  se puede concluir que  $\tilde{h}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

En la Sección V. D. se completa el análisis abandonando la suposición de seguimiento perfecto de velocidad.

#### V. CONTROLADOR DINÁMICO

En esta sección se desarrollara el controlador dinámico basado en la dinámica inversa del modelo nominal y el compensador neuronal adaptable que deberá aprender las variaciones de la dinámica del robot, incluyendo el análisis de estabilidad de la cual se obtienen las leyes de ajuste de los parámetros de la red neuronal y un análisis de robustez del

sistema de control propuesto.

##### A. Controlador dinámico no lineal

El controlador dinámico recibe las referencias de velocidad lineal y angular las cuales son generadas por el controlador cinemático, y genera otro par de comandos de velocidades lineal y angular para ser enviados a los servos del robot, como se muestra en la Figura 2.

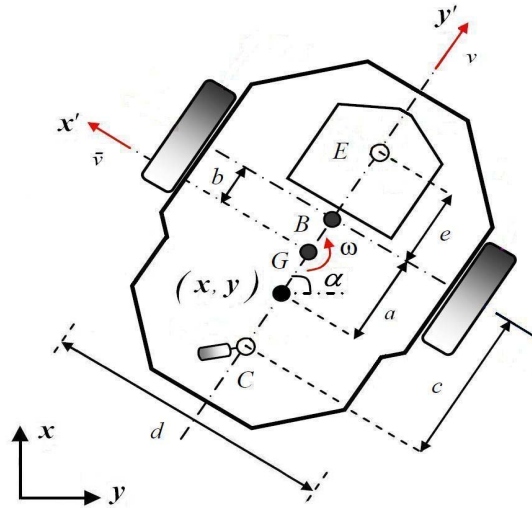


Figura 1. Representación esquemática del robot móvil tipo unicyclo.

El diseño del controlador dinámico está basado en la dinámica nominal del robot móvil. Esta dinámica nominal representa un valor estimado de la dinámica del robot. La dinámica inversa del robot basado en la ec. (2) y sin considerar las incertidumbres se puede escribir en forma paramétrica como se indica a continuación,

$$\begin{bmatrix} v_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v} & 0 & -\dot{\omega} & v & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\omega} & 0 & 0 & v\omega & \omega \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \end{bmatrix}^T \quad (6)$$

La cual puede ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} v_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \dots \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dot{\omega} & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v\omega & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \end{bmatrix}^T \quad (7)$$

O en forma compacta

$$\mathbf{v}_{ref} = \mathbf{D}\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\eta} \quad (8)$$

donde  $\mathbf{v}_{ref} = [v_{ref} \ \omega_{ref}]^T$ ,  $\mathbf{v} = [v \ \omega]^T$ ,

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\omega^2 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v\omega & \omega \end{bmatrix} [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6]^T,$$

y  $\mathbf{D} = \text{diag}(\theta_1, \theta_2)$ .

La ley de control propuesta basada en la dinámica inversa es:

$$\mathbf{v}_{ref}^d = \mathbf{G} (v, \omega, v_{ref}^c, \omega_{ref}^c, \dot{v}_{ref}^c, \dot{\omega}_{ref}^c) \boldsymbol{\theta} \quad (9)$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & -\omega^2 & v & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & v\omega & \omega \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\sigma_1 = \dot{v}_{ref}^c + k_v (v_{ref}^c - v)$$

$$\sigma_2 = \dot{\omega}_{ref}^c + k_\omega (\omega_{ref}^c - \omega)$$

y

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6]^T \quad (11)$$

La ec. (9) puede ser expresada como:

$$\mathbf{v}_{ref}^d = \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\eta} \quad (12)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2)$ .

De (11),  $\boldsymbol{\theta}$  es el vector de parámetros, el cual es constante. Debido a las incertidumbres en el modelo nominal (dinámica no modelada y errores paramétricos) se propone el uso de una compensación neuronal basada en funciones de base radial (*RBF-NN*). La ley de control completa puede ser expresada como:

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}_{ref}^c, \boldsymbol{\omega}_{ref}^c]^T &= [\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\eta}] - \mathbf{v}_N (v, \omega, v_{ref}^c, \omega_{ref}^c, \dot{v}_{ref}^c, \dot{\omega}_{ref}^c) \\ \mathbf{v}_{ref} &= \mathbf{v}_{ref}^d - \mathbf{v}_N \end{aligned} \quad (13)$$

donde:

$\mathbf{v}_{ref}^c = [v_{ref}^c, \omega_{ref}^c]^T$  es la salida del controlador cinemático;  $\mathbf{v}_{ref}^d = [v_{ref}^d, \omega_{ref}^d]^T$  es la salida del controlador dinámico;  $\mathbf{v}_N = [v_N, \omega_N]^T$  es la compensación neuronal adaptable encargada de compensar la diferencia entre el modelo dinámico nominal y el real del robot móvil. La estructura completa de control se muestra en la siguiente figura:

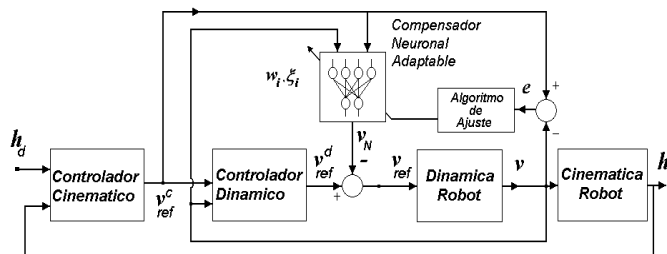


Figura 2. Estructura de control Adaptable.

### B. Compensador neuronal adaptable

La ley de control de la ec. (9) puede ser expresada como:

$$\mathbf{v}_{ref}^d = \mathbf{G}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{G}\tilde{\boldsymbol{\theta}} \quad (14)$$

donde  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  es el error paramétrico. De la ec. (8), el modelo dinámico que incluye las incertidumbres  $\boldsymbol{\delta}$  es:

$$\mathbf{v}_{ref} = \mathbf{D}\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\delta} \quad (15)$$

La ley de control con compensación neuronal puede expresarse por:

$$\mathbf{v}_{ref} = \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{G}\tilde{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\eta} - \mathbf{v}_N \quad (16)$$

Igualando (15) y (16) el sistema de lazo cerrado resulta:

$$\mathbf{D}\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\delta} = \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\eta} + \mathbf{G}\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{v}_N \quad (17)$$

pudiéndose reescribir como:

$$\mathbf{D}(\dot{\mathbf{v}} - \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{G}\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\delta} - \mathbf{v}_N \quad (18)$$

Considerando que  $\boldsymbol{\sigma} - \dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}\mathbf{e}$ , siendo  $\mathbf{e} = \mathbf{v}_{ref}^c - \mathbf{v}$ , con  $\mathbf{K} = \text{diag}(k_v, k_\omega)$ , resulta

$$-\mathbf{D}(\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}\mathbf{e}) = \mathbf{G}\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\delta} - \mathbf{v}_N \quad (19)$$

La compensación neuronal está determinada por los parámetros de la red neuronal. Definiendo el vector de entradas a la red neuronal como  $\zeta$  donde  $\xi = [v, \omega, v_{ref}^c, \omega_{ref}^c, \dot{v}_{ref}^c, \dot{\omega}_{ref}^c]^T$ ,  $\mathbf{v}_N$  puede ser aproximada por una red neuronal (*RBF*) a través de un entrenamiento en línea,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_N &= \sum_{i=1}^m w_i^{*T} \exp(-\eta_i^{*2} \|\zeta - \mathbf{c}_i^*\|^2) + \varepsilon_n \\ &= \mathbf{w}^{*T} \boldsymbol{\xi}^*(\zeta, \mathbf{c}^*, \boldsymbol{\eta}^*) + \varepsilon_n \end{aligned} \quad (20)$$

donde  $\mathbf{w}^*$  ( $m \times j$ ) y  $\boldsymbol{\xi}^*$  ( $m \times 1$ ) son los vectores de parámetros óptimos de los pesos  $\mathbf{w}$  y de las funciones de base radial  $\boldsymbol{\xi}$  respectivamente; siendo  $\mathbf{c}^*$  y  $\boldsymbol{\eta}^*$  los vectores que contienen los centros  $\mathbf{c}$  y aperturas  $\eta$  de las RBF, respectivamente, y  $\varepsilon_n$  es el error de aproximación.

Sin embargo, los vectores de parámetros óptimos son desconocidos, por lo que es necesario estimar los valores. Para la aplicación de esta técnica de control se utiliza una función estimativa de la acción de compensación neuronal  $\hat{\mathbf{v}}_N$ .

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}_N &= \sum_{i=1}^m \hat{w}_i^T \exp(-\hat{\eta}_i^2 \|\zeta - \hat{\mathbf{c}}_i\|^2) + \varepsilon_n \\ &= \hat{\mathbf{w}}^T \hat{\boldsymbol{\xi}}(\zeta, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) + \varepsilon_n \end{aligned} \quad (21)$$

donde  $\hat{\mathbf{w}}$  y  $\hat{\boldsymbol{\xi}}$  son vectores de parámetros estimados de  $\mathbf{w}$  y  $\boldsymbol{\xi}$ , respectivamente; y  $\hat{\mathbf{c}}$  y  $\hat{\boldsymbol{\eta}}$  son vectores de parámetros estimados de  $\mathbf{c}$  y  $\boldsymbol{\eta}$ , respectivamente.

Definiendo  $\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{w}^* - \hat{\mathbf{w}}$  y  $\hat{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\xi}^* - \hat{\boldsymbol{\xi}}$ , la acción  $\hat{\mathbf{v}}_N$  puede ser expresada como:

$$\hat{\mathbf{v}}_N = \hat{\mathbf{w}}^T \hat{\boldsymbol{\xi}} + \tilde{\mathbf{w}}^T \hat{\boldsymbol{\xi}} + \hat{\mathbf{w}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}} + \tilde{\mathbf{w}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}} + \varepsilon_n \quad (22)$$

donde  $\tilde{\mathbf{w}}^T \hat{\boldsymbol{\xi}} + \hat{\mathbf{w}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}$  representa el error de aprendizaje  $\psi_l$  y considerando  $\tilde{\mathbf{w}}^T \hat{\boldsymbol{\xi}}$  dentro de  $\varepsilon_n$ . Haciendo  $\hat{\mathbf{w}}^T \hat{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{G}\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\delta}$  la ec. (19) es equivalente a

$$\begin{aligned} -\mathbf{D}(\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}\mathbf{e}) &= -(\tilde{\mathbf{w}}^T \hat{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{w}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}} + \varepsilon_n) \\ \dot{\mathbf{e}} &= -\mathbf{K}\mathbf{e} + \mathbf{D}^{-1}(\tilde{\mathbf{w}}^T \hat{\boldsymbol{\xi}} + \hat{\mathbf{w}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}} + \varepsilon_n) \end{aligned} \quad (23)$$

Usando una aproximación para la función  $\hat{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\xi}^*(\zeta, \mathbf{c}^*, \boldsymbol{\eta}^*) - \hat{\boldsymbol{\xi}}(\zeta, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\boldsymbol{\eta}})$ . Para trabajar con  $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ , se realiza la expansión en serie de Taylor de  $\boldsymbol{\xi}^*$  analizando sobre los valores de  $\mathbf{c}^* = \hat{\mathbf{c}}$  y  $\boldsymbol{\eta}^* = \hat{\boldsymbol{\eta}}$ .

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}(\zeta, \mathbf{c}^*, \boldsymbol{\eta}^*) = \hat{\boldsymbol{\xi}}(\zeta, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) + \boldsymbol{\Xi}^T \tilde{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\Phi}^T \tilde{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{O}(\zeta, \tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) \quad (24)$$

Donde  $\mathbf{O}$  indica los términos de orden elevado en la expansión de la serie de Taylor  $\boldsymbol{\Xi}$  y  $\boldsymbol{\Phi}$  son las derivadas de  $\boldsymbol{\xi}^*(\zeta, \mathbf{c}^*, \boldsymbol{\eta}^*)$  con respecto a  $(\hat{\mathbf{c}}, \hat{\boldsymbol{\eta}})$ . Estas derivadas pueden ser representadas como:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Xi}^T = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\xi}}(\zeta, \mathbf{c}^*, \boldsymbol{\eta}^*)}{\partial \mathbf{c}^*} \Big|_{\substack{\mathbf{c}^* = \hat{\mathbf{c}} \\ \boldsymbol{\eta}^* = \hat{\boldsymbol{\eta}}} \\ \boldsymbol{\Phi}^T = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\xi}}(\zeta, \mathbf{c}^*, \boldsymbol{\eta}^*)}{\partial \boldsymbol{\eta}^*} \Big|_{\substack{\mathbf{c}^* = \hat{\mathbf{c}} \\ \boldsymbol{\eta}^* = \hat{\boldsymbol{\eta}}} \end{cases} \quad (25)$$

La ecuación (24) puede expresarse como

$$\hat{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\Xi}^T \tilde{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\Phi}^T \tilde{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{O}(\zeta, \tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) \quad (26)$$

De (24), el término de orden elevado  $\mathbf{O}$  está acotado por

$$\begin{aligned} \|\mathbf{O}(\zeta, \tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}})\| &= \|\tilde{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\Xi}^T \tilde{\mathbf{c}} - \boldsymbol{\Phi}^T \tilde{\boldsymbol{\eta}}\| \\ &\leq \|\tilde{\boldsymbol{\xi}}\| + \|\boldsymbol{\Xi}^T \tilde{\mathbf{c}}\| + \|\boldsymbol{\Phi}^T \tilde{\boldsymbol{\eta}}\| \\ &\leq \kappa_1 + \kappa_2 \|\tilde{\mathbf{c}}\| + \kappa_3 \|\tilde{\boldsymbol{\eta}}\| \end{aligned} \quad (27)$$

donde  $\kappa_1, \kappa_2$ , y  $\kappa_3$  son algunas constantes acotadas debido al hecho de que la RBF y sus derivadas son siempre limitadas por las constantes (la prueba se omite aquí para ahorrar espacio).

Sustituyendo (26) en (23), queda representada por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= -\mathbf{K}\mathbf{e} + \mathbf{D}^{-1}[\tilde{\mathbf{w}}^T \hat{\boldsymbol{\xi}} + \hat{\mathbf{w}}^T (\boldsymbol{\Xi}^T \tilde{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\Phi}^T \tilde{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{O}) + \varepsilon_n] \\ \dot{\mathbf{e}} &= -\mathbf{K}\mathbf{e} + \mathbf{D}^{-1} \tilde{\mathbf{w}}^T \hat{\boldsymbol{\xi}} + (\mathbf{D}^{-1} \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\Xi}^T \tilde{\mathbf{c}} + \mathbf{D}^{-1} \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\Phi}^T \tilde{\boldsymbol{\eta}}) + \mathbf{D}^{-1} \varepsilon \end{aligned} \quad (28)$$

Donde los errores de aproximación se toman como  $\varepsilon = (\tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{O} + \varepsilon_n)$ ; es razonable suponer que  $\varepsilon$  es acotada por una constante  $\varepsilon_H$ ,

$$\varepsilon_H = \sup_{t \in \mathcal{R}^+} |\varepsilon(t)| \quad (29)$$

### C. Análisis de estabilidad y ajuste de los parámetros neuronales

Para obtener las leyes de ajuste de los parámetros, se considera la función candidata de Lyapunov de la siguiente forma,

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{\mathbf{w}}^T \Theta \tilde{\mathbf{w}}) + \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{c}}^T \Lambda_1 \tilde{\mathbf{c}} + \tilde{\boldsymbol{\eta}}^T \Lambda_2 \tilde{\boldsymbol{\eta}}) \quad (30)$$

donde  $\mathbf{P}$  es una matriz diagonal definida positiva de dimensión  $n \times n$ , y  $\Theta$  de dimensión  $m \times m$ , definida positiva.  $\Lambda_{1,2}$  son matrices de dimensión  $\dim(\zeta) \times \dim(\zeta)$  y  $m \times m$  respectivamente, ambas no negativas. Donde  $n=2, m=5$  y  $j=2$ . La derivada de la función candidata de Lyapunov está dada por:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{e}}] + \text{tr}(\dot{\tilde{\mathbf{w}}}^T \Theta \tilde{\mathbf{w}}) + \dot{\tilde{\mathbf{c}}}^T \Lambda_1 \tilde{\mathbf{c}} + \dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}}^T \Lambda_2 \tilde{\boldsymbol{\eta}} \quad (31)$$

Sustituyendo (28) en (31), y considerando que  $\mathbf{D}^{-1} = (\mathbf{D}^{-1})^T$  y  $\mathbf{K}^T \mathbf{P} = (\mathbf{K}^T \mathbf{P})^T$  y haciendo  $\mathbf{Q} = 2\mathbf{K}^T \mathbf{P}$ , (31) puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{D}^{-1} \tilde{\mathbf{w}}^T \hat{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{D}^{-1} \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\Xi} \tilde{\mathbf{c}} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{D}^{-1} \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\Phi} \tilde{\boldsymbol{\eta}} \\ &\quad + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{D}^{-1} \varepsilon + \text{tr}(\dot{\tilde{\mathbf{w}}}^T \Theta \tilde{\mathbf{w}}) + \dot{\tilde{\mathbf{c}}}^T \Lambda_1 \tilde{\mathbf{c}} + \dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}}^T \Lambda_2 \tilde{\boldsymbol{\eta}} \end{aligned} \quad (32)$$

Agrupando términos en (31), usando la igualdad  $v^T u = \text{tr}(vu^T)$  para los vectores  $v, u$  de igual dimensión y teniendo en cuenta que  $\mathbf{P} = (\mathbf{P})^T$ , escribimos la ec. (32) como:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{D}^{-1} \varepsilon + (\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{D}^{-1} \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\Xi} + \Lambda_1 \dot{\tilde{\mathbf{c}}}^T) \tilde{\mathbf{c}} + \dots \\ &\quad + (\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{D}^{-1} \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\Phi} + \Lambda_2 \dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}}^T) \tilde{\boldsymbol{\eta}} + \text{tr}(\mathbf{D}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{e}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}}^T + \dot{\tilde{\mathbf{w}}}^T \Theta) \tilde{\mathbf{w}} \end{aligned} \quad (33)$$

donde  $\dot{\tilde{\mathbf{w}}}_i$  es la  $i$ -ésima fila de la matriz  $\dot{\tilde{\mathbf{w}}}$ ,  $\mathbf{D}_i$  es la  $i$ -ésima fila de la matriz  $\mathbf{D}$ . Si  $\dot{\tilde{\mathbf{c}}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}}$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{w}}}_i$  son seleccionadas como,

$$\dot{\tilde{\mathbf{w}}}_i^T = -(\mathbf{D}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{e}^T)_i \dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}^T \Theta^{-1} \quad i=1, \dots, j \quad (34)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{c}}}^T = -\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{D}^{-1} \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\Phi} \Lambda_1^{-1} \quad (35)$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}}^T = -\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{D}^{-1} \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\Xi} \Lambda_2^{-1} \quad (36)$$

Entonces (30) se reescribe como,

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (37)$$

para demostrar que  $\dot{V}$  es negativa se aplica norma a la ec. (39)

$$\frac{1}{2} \lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\mathbf{e}\|^2 \geq \frac{\|\mathbf{e}\| \|\Phi\| \varepsilon_H}{\lambda_{\min}(\mathbf{D})} \quad (38)$$

Puede deducirse que  $\dot{V}$  es negativa cuando

$$\|\mathbf{e}\| \geq \frac{2\|\mathbf{P}\| \varepsilon_H}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q} \mathbf{D})} = \Gamma_a \quad (39)$$

De (34), (35) y (36) y haciendo  $\dot{\tilde{w}}_i = \dot{w}_i^* - \dot{w}_i$ ,  $\dot{\tilde{c}} = \dot{c} - \dot{c}^*$ ,  $\dot{\tilde{\eta}} = \dot{\eta} - \dot{\eta}^*$  y  $\dot{w}_i^* = 0$ ,  $\dot{c}^* = 0$ ,  $\dot{\eta}^* = 0$ , las reglas de ajuste quedan expresadas por,

$$\dot{\mathbf{w}}_i^T = -(\mathbf{D}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{e}^T)_i \hat{\xi}^T \Theta^{-1} \quad i=1, \dots, j \quad (40)$$

$$\dot{\mathbf{c}}^T = -\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{D}^{-1} \hat{\mathbf{w}}^T \Phi \Lambda_1^{-1} \quad (41)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}^T = -\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{D}^{-1} \hat{\mathbf{w}}^T \Xi \Lambda_2^{-1} \quad (42)$$

La ec. (39) indica la cota en términos del error de aproximación de la red neuronal.

Haciendo un nuevo análisis del error de control  $\tilde{\mathbf{h}}$ , abandonando la hipótesis de seguimiento de velocidad indicado en la Sección IV. , la ec. (4) se reescribe como,

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_x & 0 \\ 0 & l_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x}\right) \\ \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Donde el vector de error  $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2]^T$  es el error de velocidad de seguimiento previamente definido como  $\mathbf{H}\mathbf{e}(t)$ .

Reescribiendo la ec. (43) en forma compacta,

$$\dot{\tilde{\mathbf{h}}} + L(\tilde{\mathbf{h}}) = \mathbf{H}\mathbf{e} \quad (44)$$

donde

$$L(\tilde{\mathbf{h}}) = \begin{bmatrix} l_x & 0 \\ 0 & l_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tanh\left(\frac{k_x}{l_x} \tilde{x}\right) \\ \tanh\left(\frac{k_y}{l_y} \tilde{y}\right) \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\mathbf{H}\mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix} \cos \psi(t) & -a \sin \psi(t) \\ \sin \psi(t) & a \cos \psi(t) \end{bmatrix} \mathbf{e}(t)$$

Se considera la función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{h}}^T \tilde{\mathbf{h}} > 0 \quad (46)$$

y su derivada temporal,

$$\dot{V} = \tilde{\mathbf{h}}^T \dot{\tilde{\mathbf{h}}} = -\tilde{\mathbf{h}}^T L(\tilde{\mathbf{h}}) + \tilde{\mathbf{h}}^T \mathbf{H}\mathbf{e} \quad (47)$$

Una condición suficiente para  $\dot{V} \leq 0$  puede ser expresada como

$$\tilde{\mathbf{h}}^T L(\tilde{\mathbf{h}}) > \|\tilde{\mathbf{h}}^T \mathbf{H}\mathbf{e}\| \quad (48)$$

Para pequeños valores de error de control  $\tilde{\mathbf{h}}$  en la zona lineal de la función  $\tanh(\cdot)$  de saturación,

$$\tilde{\mathbf{h}}^T L(\tilde{\mathbf{h}}) \approx \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{h}}\|^2 \quad (49)$$

Entonces, la condición suficiente para  $\dot{V} \leq 0$  es:

$$\|\tilde{\mathbf{h}}\| > \frac{\|\mathbf{H}\| \|\mathbf{e}\|}{\min(k_x, k_y)} \quad (50)$$

De la ec. (39)  $\psi_e = 2\|\mathbf{P}\| \varepsilon_H / [\lambda_{\min}(\mathbf{Q} \mathbf{D})]$  lo que demuestra que  $\tilde{\mathbf{h}}$  se encuentra acotado por

$$B_{\tilde{h}} = \frac{2\|\mathbf{H}\| \|\mathbf{P}\| \varepsilon_H}{\min(k_x, k_y) \lambda_{\min}(\mathbf{Q} \mathbf{D})}$$

Lo que implica que  $\dot{V} < 0$ . Asegurando que  $\tilde{\mathbf{h}} \rightarrow B_{\tilde{h}}$ . El error de control esta acotado en términos de la aproximación del error de la red neuronal (*RBF*).

#### D. Análisis de robustez

De las ecuaciones. (39) y (50), se puede deducir que usando el método propuesto, la matriz  $\mathbf{D}$  no necesita conocerse exactamente para obtener la estabilidad del sistema. Sin embargo las reglas de ajuste obtenidas involucran un conocimiento previo de la matriz  $\mathbf{D}$ , la robustez de las reglas de ajuste, deben ser analizadas en caso de que  $\mathbf{D}$  sea parcialmente conocida o desconocida. Estas incertidumbres de la matriz  $\mathbf{D}$  es producida por las variaciones en la dinámica del robot, ya sea por la carga del robot, deslizamientos, desplazamiento del centro de masa del robot, etc.

Si  $\mathbf{D}^{-1}$  es desconocida y puede ser representada por un valor nominal más un valor desconocido que indica su variación,  $\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}_0^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{A})$ . Considerando que  $\|\mathbf{A}\| \leq \Omega$ , donde  $\Omega$  es la cota superior de la incertidumbre, entonces la derivada de la función de Lyapunov de la ec. (32) es de nuevo analizada y está indicada por,

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{D}_0^{-1} (\mathbf{I} + \Delta) \boldsymbol{\varepsilon} + \\
& + \left( \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{D}_0^{-1} (\mathbf{I} + \Delta) \hat{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\Xi} + \Lambda_1 \dot{\hat{\mathbf{c}}}^T \right) \tilde{\mathbf{c}} + \dots \\
& + \left( \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{D}_0^{-1} (\mathbf{I} + \Delta) \hat{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\Phi} + \Lambda_2 \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}^T \right) \tilde{\boldsymbol{\eta}} + \dots \\
& + tr \left( \mathbf{D}_0^{-1} (\mathbf{I} + \Delta) \mathbf{P} \mathbf{e}^T \hat{\boldsymbol{\xi}}^T + \dot{\hat{\mathbf{w}}}^T \boldsymbol{\Theta} \right) \tilde{\mathbf{w}}
\end{aligned} \quad (51)$$

Reescribiendo las reglas de ajuste de los pesos y de los parámetros  $\mathbf{c}$  y  $\boldsymbol{\eta}$  usando  $\mathbf{D}_0^{-1}$

$$\dot{\hat{\mathbf{w}}}_i^T = -(\mathbf{D}_0^{-1} \mathbf{P} \mathbf{e}^T)_i \hat{\boldsymbol{\xi}}^T \boldsymbol{\Theta}^{-1} \quad i = 1, \dots, j \quad (52)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{c}}}^T = -\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{D}_0^{-1} \hat{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\Phi} \Lambda_1^{-1} \quad (53)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}^T = -\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{D}_0^{-1} \hat{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\Xi} \Lambda_2^{-1} \quad (54)$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{D}_0^{-1} (\mathbf{I} + \Delta) \boldsymbol{\varepsilon} + \dots \\
& + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{D}_0^{-1} \Delta (\hat{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\Xi} \tilde{\mathbf{c}} + \hat{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\Phi} \tilde{\boldsymbol{\eta}} + \hat{\mathbf{w}}^T \hat{\boldsymbol{\xi}} + \hat{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\Theta})
\end{aligned} \quad (55)$$

Para que  $\dot{V}$  sea negativa, se debe cumplir,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\mathbf{e}\|^2 \geq & \|\mathbf{e}\| \|\mathbf{P}\| \|\mathbf{D}_0^{-1}\| \|\mathbf{I} + \Delta\| \varepsilon_H + \dots \\
+ & \|\hat{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\Xi} \tilde{\mathbf{c}} + \hat{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\Phi} \tilde{\boldsymbol{\eta}} + \hat{\mathbf{w}}^T \hat{\boldsymbol{\xi}} + \hat{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\Theta}\| \|\mathbf{D}_0^{-1}\| \|\Delta\| \|\mathbf{P}\| \|\mathbf{e}\|
\end{aligned} \quad (56)$$

Siendo  $\|\mathbf{I} + \Delta\| \varepsilon_H \leq \delta_{\varepsilon_H}$  y definiendo  $\|\hat{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\Xi} \tilde{\mathbf{c}} + \hat{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\Phi} \tilde{\boldsymbol{\eta}} + \hat{\mathbf{w}}^T \hat{\boldsymbol{\xi}} + \hat{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\Theta}\| \|\mathbf{P}\| = \rho(\tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\mathbf{w}})$ ,  $\dot{V}$  es negativa cuando

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{e}\| \geq & \frac{2 \|\mathbf{P}\|}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q} \mathbf{D}_0)} \delta_{\varepsilon_H} + \dots \\
+ & \frac{2 \|\mathbf{P}\|}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q} \mathbf{D}_0)} \rho(\tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\mathbf{w}}) \|\Delta\| = \Gamma_a + \Gamma_{lm}
\end{aligned} \quad (57)$$

En la ecuación anterior, el error de aproximación  $\Gamma_a$  está relacionado con el número de neuronas usadas en la red de compensación neuronal (*RBF*). Si  $\varepsilon_H \rightarrow 0$  entonces  $\Gamma_a$  converge a un número muy pequeño.

En el segundo término el error  $\Gamma_{lm}$  es una combinación del error de aproximación y del error de modelo. El producto de  $\rho(\tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\mathbf{w}})$  y  $\Delta$  indica que alguna variación elevada de  $\Delta$ , si la red neuronal (*RBF*) se ajusta a los valores próximos de  $\mathbf{w}^*$  y  $\mathbf{c}^*$ ,  $\boldsymbol{\eta}^*$ ,  $\Gamma_{lm}$  será muy pequeño.

## VI. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Para realizar la experimentación se utilizó un robot móvil Pioneer 2-DX. Éste posee una PC Pentium III de 800MHz y 512Mb de memoria RAM. (Figura 3), los algoritmos de control propuesto se aplicaron en dicho robot que admite velocidades lineales y angulares, como las señales de entrada de referencia. El controlador fue inicializado con los parámetros dinámicos del robot Pioneer 3-DX y se usaron

cinco neuronas RBF ( $m=5$ ). Los parámetros dinámicos fueron obtenidos a través de la identificación, según lo propuesto por [20].



Figura 3. Robot Móvil Pioneer 2DX.

El objetivo del experimento es demostrar que para distintas velocidades y distintas trayectorias el robot móvil siga lo más fielmente posible la trayectoria de referencia con el menor error. En dicho experimento el robot debe seguir una trayectoria indicada por:

$$\begin{cases} x_d = 0.8 \sin(0.04\pi t) \\ y_d = 0.8 \cos(0.04\pi t) \end{cases} \quad (58)$$

En el experimento, el robot comienza en la posición  $\mathbf{h}=(x,y) = (0,0)$  m, el robot sigue una trayectoria de referencia en forma de círculos concéntricos ec. (58) que después de 100 segundos la trayectoria pasa a un círculo de radio menor. El experimento se realizó usando el algoritmo de compensación neuronal y se comparó con otro experimento sin usar el algoritmo de compensación, los resultados se describen a continuación.

La Figura 4 y la Figura 5 describen las velocidades y acciones de control del compensador neuronal RBF como también, las referencias y las variables de posición del robot móvil, respectivamente.

La Figura 6 muestra la trayectoria seguida por el robot móvil, sin compensación y con el compensador neuronal adaptable para el seguimiento de la trayectoria deseada. Se observa claramente en dicha figura que el robot con compensador neuronal sigue más fielmente la trayectoria deseada,

La Figura 7 muestra la norma del error de trayectoria de los controladores con y sin compensación. El error de trayectoria se define como la distancia instantánea entre la referencia y la posición del robot, la Figura 7 muestra también que el error con compensador neuronal es menor cuando los parámetros dinámicos no son los correctos, debido a que estos han variado producto de perturbaciones externas.

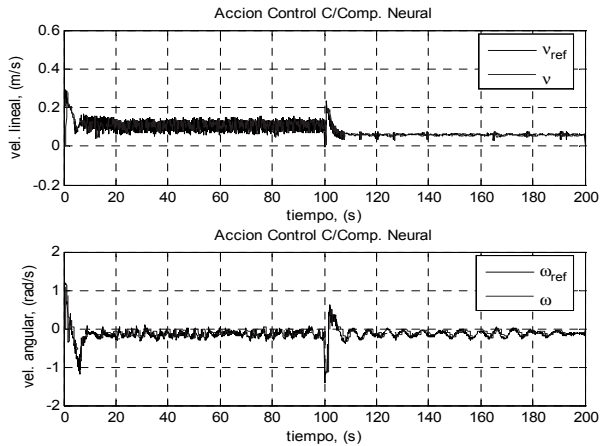


Figura 4. Velocidades lineal y angular del robot y acciones de control del controlador con compensador neural.

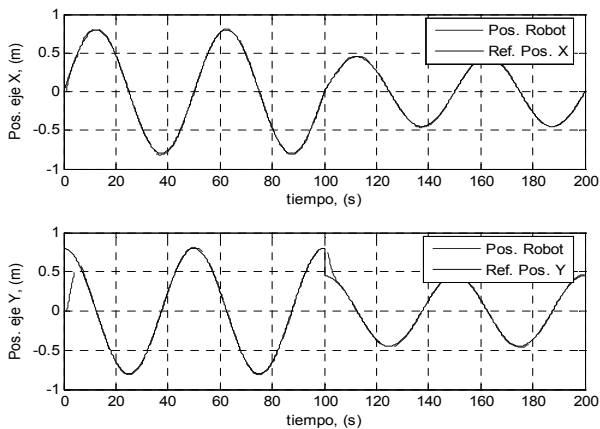


Figura 5. Referencia de posición y posición instantánea del robot móvil.

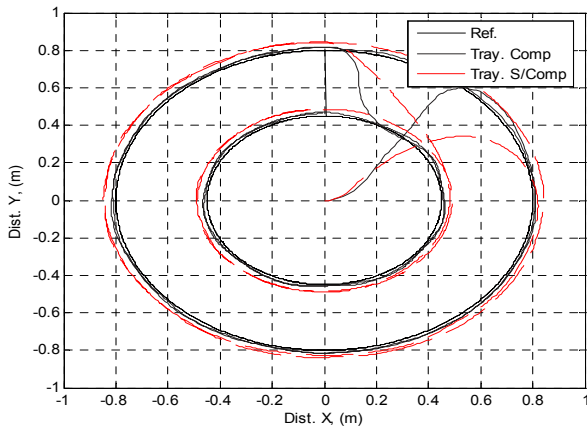


Figura 6. Trayectoria de referencia y posición instantánea del robot en el plano de coordenadas X-Y.

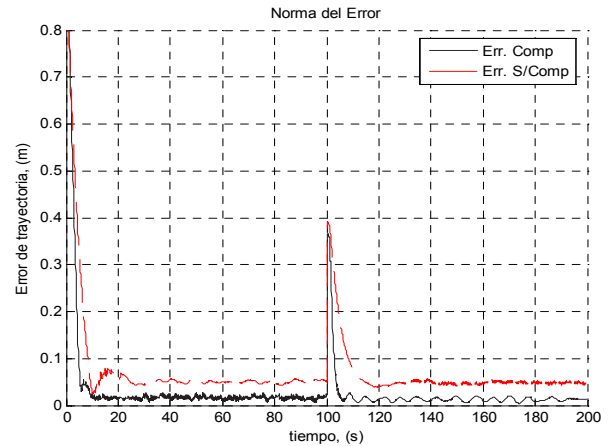


Figura 7. Norma del error de distancia con compensador neural. El error graficado con línea de trazo indica sin compensación, en línea continua con compensación neural.

## VII. CONCLUSIONES

En este trabajo se propuso un controlador de compensación neural adaptable RBF para seguimiento de trayectorias de un robot móvil del tipo unicyclo, este compensador junto al controlador no lineal es capaz de generar los comandos de velocidad con mínimo error para la dinámica del robot. Se demostró que los errores de control de seguimiento están acotados, y los límites son calculados en función del error de aproximación de la red neuronal RBF.

El compensador neural adaptable RBF aprende la diferencia entre una dinámica nominal conocida y la dinámica real del robot para su posterior compensación. Por lo tanto, el esfuerzo computacional es significativamente menor que un modelo completo de red neuronal inversa que tuviera que aprender toda la dinámica del robot. Los resultados experimentales muestran el buen desempeño del controlador de seguimiento propuesto y su capacidad para adaptarse a la dinámica de robots reales.

## APÉNDICE: DESCRIPCIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL ROBOT MÓVIL

Los parámetros identificados del robot indicados en la Sección III. se pueden describir por:

$$\theta_1 = \left( \frac{\left( \frac{R_a}{k_a} (MR_t r + 2I_e) + 2rk_{DT} \right)}{2rk_{PT}} \right)$$



$$\theta_2 = \left( \frac{\left( \frac{R_a}{k_a} (I_e d^2 + 2R_t r (I_z + Mb^2)) + 2rdk_{DR} \right)}{2rdk_{PR}} \right)$$

$$\theta_3 = \left( \frac{\frac{R_a}{k_a} MbR_t}{2k_{PT}} \right); \theta_4 = \left( \frac{\frac{R_a}{k_a} \left( \frac{k_a k_b}{R_a} + B_e \right)}{rk_{PT}} + 1 \right) \quad (59)$$

$$\theta_5 = \left( \frac{\frac{R_a}{k_a} MbR_t}{dk_{PR}} \right); \theta_6 = \left( \frac{\frac{R_a}{k_a} \left( \frac{k_a k_b}{R_a} + B_e \right) d}{2rk_{PR}} + 1 \right)$$

Donde  $M$  es la masa del robot;  $r$  es el radio de las ruedas izquierda y derecha;  $k_b$  es igual a la constante electromotriz multiplicada por la relación de transmisión;  $R_a$  es la resistencia eléctrica;  $k_a$  es la constante de torque multiplicada por la relación de transmisión;  $k_{PR}$ ,  $k_{PT}$ , y  $k_{DT}$  son constantes positivas;  $I_e$  y  $B_e$  representan el momento de inercia y el coeficiente de fricción viscosa de la combinación rotor del motor, caja de reducción y rueda, y  $R_t$  es el radio nominal de la rueda [20].

TABLA I: PARÁMETROS DINÁMICOS DE LOS ROBOTS

Parámetro	Pioneer 3DX	Pioneer 2DX	Pioneer 2DX c/carga (4Kg.)	unidades
$\theta_1$	0.24089	0.3037	0.1992	s
$\theta_2$	0.2424	0.2768	0.13736	s
$\theta_3$	$-9.3603e^{-4}$	$-4.018e^{-3}$	$-1.954e^{-3}$	s.m/rad <sup>2</sup>
$\theta_4$	0.99629	0.9835	0.9907	
$\theta_5$	$-3.7256e^{-3}$	$-3.818e^{-3}$	$-1.554e^{-2}$	s/m
$\theta_6$	1.0915	1.0725	0.9866	

## REFERENCIAS

- [1] T. Lee, K. Song, C. Lee, C. Teng.. "Tracking Control of Unicycle-Modeled Mobile Robots Using a Saturation Feedback Controller". *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, vol.9, no 2, pp 305 - 318. 2001.
- [2] K. D. Do, J. Pan. "Global output-feedback path tracking of unicycle-type mobile robots". *Rob. and Comp-Int Manufact* 22, pp. 166-179. 2006.
- [3] L. Gracia and J. Tornero. "Kinematic Control of Wheeled Mobile Robots". *Latin American Applied Research*. Vol 38 pp 7-16. 2008.
- [4] F. Kühne, J. Gomes and W. Fetter, "Mobile Robot Trajectory Tracking Using Model Predictive Control", *II IEEE Latin-American Robotics Symposium*, São Luis, Brazil, 2005.
- [5] D. Chwa. "Sliding-Mode Tracking Control of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots in Polar Coordinates". *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, vol. 12, no. 4, pp. 637-644. 2004.
- [6] R. Fierro, F. Lewis. "Control of a nonholonomic mobile robot: backstepping kinematics into dynamics". Proc. 34th Conf. on Dec & Cont, New Orleans, pp. 3805-3810, vol.4. 1995.
- [7] Y. Kanayama, Y. Kimura, F. Miyazaki, T. Noguchi, "A Stable Tracking Control Method for an Autonomous Mobile Robot", *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 384-389. 1990.
- [8] T. Fukao, H. Nakagawa, N. Adachi., "Adaptive tracking control of a nonholonomic mobile robot" *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, pp. 609-615, vol. 16, No 5. 2000.
- [9] Young-Hoon Kim, In-Joongha Ha, "Asymptotic state tracking in a class of nonlinear systems via learning-based inversion", *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 45, pp.2011-2027. 2000.

- [10] T. Das and I. N. Kar, "Design and Implementation of an Adaptive Fuzzy Logic-Based Controller for Wheeled Mobile Robots," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 14, no. 3, May 2006.
- [11] S. Liu, H. Zhang, S. X. Yang and J. Yu, "Dynamic Control of a Mobile Robot Using an Adaptive Neurodynamics and Sliding Mode Strategy," *Proceedings of the 5th World Congress on Intelligent Control and Automation*, Hangzhou, China, pp. 5007-5011. 2004.
- [12] W. Dong and Y. Guo, "Dynamic tracking control of uncertain mobile robots," *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 2774-2779. 2005.
- [13] C. Oh, M.S.Kim, J.Y. Lee and J.J. Lee, "Control of Mobile Robots using RBF Network" Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intel Robots and Systems, pp. 3528-3533, 2003.
- [14] Y. Liyong y X. Wei, "An Adaptive Tracking Method for Non-holonomic Wheeled Mobile Robots". Proceedings of the 26th Chinese Control Conference, July 26-31, Zhangjiajie, Hunan, China, 2007.
- [15] V. S. K. Chaitanya and P. K. Sarker. "A Neural Network Algorithm for the Error Optimization in the Path Tracking Control of a Mobile Robot". *International Joint Conference on Neural Networks Sheraton Vancouver Wall Centre Hotel, Vancouver, BC, Canada July 16-21, 2006*.
- [16] M.S. Kim, J. H. Shin and J. J. Lee, "Design of a Robust Adaptive Controller for a Mobile Robot," *proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 1816-1821, 2000.
- [17] P. Coelho, and U. Nunes, "Path-Following Control of Mobile Robots in Presence of Uncertainties," *IEEE Trans. Robotics*, 21(2):252-261, 2005.
- [18] M.K. Bugeja, S.G. Fabri, L. Camilleri, "Dual adaptive dynamic control of mobile robots using neural networks" *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*. Volume 39, Issue 1, February, Pages: 129-141, 2009.
- [19] N. A. Martins, D. Bertol, W. C. Lombardi, E. R. Pieri, M. M. Dias, "Neural Control Applied to the Problem of Trajectory Tracking of Mobile Robots with Uncertainties", *10th Brazilian Symposium on Neural Networks*. pp.117-122, 2008.
- [20] C. De La Cruz and R. Carelli, "Dynamic Modeling and Centralized Formation Control of Mobile Robots", *32nd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society IECON*, Paris, 2006.
- [21] F. N. Martins, W. C. Celeste, R. Carelli, M. Sarcinelli Filho, & Bastos Filho, T. F. . An adaptive dynamic controller for autonomous mobile robot trajectory tracking. *Control Engineering Practice*, 16, 1354- 1363, 2008.
- [22] F.G. Rossomando, C. Soria, and R. Carelli, "Control de Robots Móviles con Incertidumbres Dinámicas usando Redes de Base Radial", *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, ISSN 1697-7912, Vol. 7, Num. 4, pp. 28-35, 28 Oct.2010.
- [23] C. Canudas de Wit, B. Siciliano, G. Bastin, "Theory of Robot Control", Springer-Verlag. 1997.
- [24] S. Haykin, *Neural Networks: A Comprehensive Foundation* (2nd Edition), Prentice Hall ISBN 0132733501, 2001.



**Francisco Guido Rossomando**, nació en San Juan, Argentina en 1969. se graduó en ingeniería eléctrica y magister en ingeniería de sistemas de control en la Universidad Nacional de San Juan (UNSJ), Argentina, en 1997 y 2002 respectivamente. Obtuvo el grado de Doctor en ingeniería eléctrica en la Universidad Federal de Espírito Santo, ES, Brasil, en 2006. Realizo su post-doctorado en la UNSJ en 2008, a través de una beca posdoctoral del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICET, Argentina); Actualmente es director de Ciencia y Técnica, del gobierno de la provincia de San Juan. Sus áreas de investigación son control de robots, control adaptable, identificación y control de procesos industriales.



**Carlos Miguel Soria**, nació en Tucumán, Argentina en el 27 de Noviembre de 1970. Se graduó como ingeniero eléctrico en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Tucumán (UNT) in 1996. En 2000 se graduó como magister en Ingeniería de sistemas de Control en la facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de San Juan (UNSJ). Obtuvo el grado de doctor en Ingeniería en Sistemas de Control en la misma Universidad. Durante el periodo de 1997 a 2000 fue becario del programa FOMEC (Fondo para la Mejora en la Educación) para concluir los estudios de Maestría y durante el periodo 2001 a 2004 fue becario del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICET). Actualmente es Profesor en la Universidad Nacional de San Juan e Investigador del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICET, Argentina).



**Ricardo O. Carelli** (M'76–SM'98) nació en San Juan, Argentina en 1952. Se graduó en ingeniería eléctrica en la Universidad Nacional de San Juan, Argentina, y recibió el grado de Doctor en ingeniería eléctrica en la Universidad Nacional de México (UNAM). Actualmente es profesor dedicación exclusiva en la Universidad Nacional de San Juan e investigador independiente en el Consejo nacional de investigaciones científicas y tecnológicas (CONICET, Argentina). Actualmente es Director del Instituto de Automática, Universidad Nacional de San Juan. También coordina los programas de maestría y de doctorado. en Ingeniería de Sistemas de Control en la misma universidad. Sus áreas de interés son robótica, sistemas de manufacturas, control adaptable e inteligencia artificial aplicada al control automático. El Prof. Carelli es senior member de la IEEE y miembro de la Asociación Argentina de Control Automático (AADECA-IFAC).