

## ANÁLISIS DE LA PÉRDIDA DE SINTONÍA EN METAESTRUCTURA PIEZOELÉCTRICA CURVA MEDIANTE ENFOQUE PROBABILÍSTICO PARAMÉTRICO

### LOSS-OF-TUNE ANALYSIS IN CURVED PIEZOELECTRIC METASTRUCTURE THROUGH PARAMETRIC PROBABILISTIC APPROACH

Lucas E. Di Giorgio<sup>a</sup> y Marcelo T. Piovan<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional,  
Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina,  
ldigiorgio@frbb.utn.edu.ar, [www.frbb.utn.edu.ar](http://www.frbb.utn.edu.ar)*

<sup>b</sup>*CONICET, [mpiovan@frbb.utn.edu.ar](mailto:mpiovan@frbb.utn.edu.ar), [www.frbb.utn.edu.ar](http://www.frbb.utn.edu.ar)*

**Palabras clave:** Metaestructura, viga curva, piezoeléctrico, incertidumbre, bandgap.

**Resumen.** La dinámica de una metaestructura posee la particularidad de atenuar vibraciones mecánicas en pequeñas bandas de frecuencia, conocidas como bandgaps. Esta dinámica particular se logra a través de una serie de resonadores constituidos en la metaestructura, perfectamente sintonizados a una frecuencia en particular. El objetivo del presente trabajo es el análisis de la pérdida de sintonía de los resonadores de una metaestructura piezoeléctrica curva, y como dicha pérdida se traduce al bandgap. El estudio se realiza por medio de un modelo estocástico paramétrico, considerando la incerteza en los parámetros que constituyen a los resonadores. El modelo estocástico se genera mediante el Método de Monte Carlo, a partir de un modelo determinístico de la estructura realizado en elementos finitos 1D, derivado de la teoría de elasticidad lineal y piezoelectricidad general, obtenido a través del Principio de Hamilton para sistemas electromecánicos.

**Keywords:** Metastructure, curved beam, piezoelectric, uncertainty, bandgap.

**Abstract.** Metastructures have the ability of attenuating mechanical vibrations in small frequency bands, known as bandgaps. This particular dynamic is obtained by means of a series of resonators built into the metastructure, perfectly tuned to a particular frequency. The objective of the present work is to perform a loss-of-tune analysis on a curved piezoelectric metastructure, and how this loss spreads to the response. The study is carried out by means of a parametric stochastic model, considering the uncertainty in the parameters that constitute the resonators. The stochastic model is generated using the Monte Carlo Method, from a finite element 1D deterministic model of the structure, derived from the theory of linear elasticity and general piezoelectricity, obtained through the Hamilton's Principle for electromechanical systems.

## 1. INTRODUCCIÓN

Uno de los conceptos más utilizados en la construcción de metaestructuras es el fenómeno de resonancia local, el cual se basa en el uso de resonadores distribuidos a lo largo de la estructura. Varios autores han realizado estudios sobre distintos tipos de metaestructuras de resonancia local puramente mecánicas (Dal Poggetto y Serpa, 2020; Miranda Jr et al., 2020; Gnawali et al., 2020; Zhu et al., 2014; Baravelli y Ruzzene, 2013; Matlack et al., 2016; Nouh et al., 2015; Oudich et al., 2011; Wang et al., 2014). Otros investigadores han explorado últimamente el uso de elementos piezoeléctricos, derivados a circuitos resonantes, logrando así una reducción significativa en el requisito de masa de los mismos (Airoidi y Ruzzene, 2011; Bergamini et al., 2015; Casadei et al., 2009; Jin et al., 2014; Senesi y Ruzzene, 2011; Sugino et al., 2017).

Este trabajo tiene como objetivo analizar la propagación de incertidumbre presente en las inductancias eléctricas de los resonadores de una metaestructura piezoeléctrica curva, con el fin de evaluar la pérdida de sintonía de la misma. Dicho estudio se realiza utilizando un modelo dinámico 1D formulado previamente en elementos finitos. Mediante un enfoque paramétrico probabilístico (Soize, 2005; Sampaio y Cataldo, 2011) se crea el modelo estocástico, incorporando la incertidumbre a los parámetros inductivos, convirtiéndolos en variables aleatorias cuyas funciones de densidad de probabilidad se deducen del Principio de Máxima Entropía (Jaynes, 1957). Finalmente, se utiliza el método de Monte Carlo para realizar el análisis estadístico, donde los resultados se presentan en diferentes gráficos.

## 2. MODELO DETERMINÍSTICO

### 2.1. Descripción de la metaestructura propuesta

La Figura 1 representa un esquema de la metaestructura curva propuesta, la cual consiste en un par de piezoeléctricos en configuración bimorfo, donde el plano de curvatura es normal a las capas del bimorfo. Los electrodos de los piezoeléctricos están seccionados y aislados eléctricamente en segmentos de longitud  $\Delta x$ , formando bloques electromecánicos de esa longitud llamados *bloques resonadores*. La interconexión eléctrica de los bloques es paralelo, cada uno de ellos realimentado mediante una inductancia eléctrica  $L_k$ . El modelo teórico se basa en las siguientes hipótesis:

- La curvatura de se ubica sobre el plano  $xy$  y su radio de curvatura  $R$  es constante.
- La sección transversal es regular y rígida en su propio plano.
- Se consideran pequeños desplazamientos y elasticidad lineal.
- Se considera el esfuerzo cortante producido por flexión y torsión.
- Se define una función de alabeo referida al centroide.

De las hipótesis se desprende el siguiente campo de desplazamientos en coordenadas curvilíneas (Piovan y Cortinez, 2007):

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{xc} - \omega \phi_w \\ u_{yc} \\ u_{zc} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 0 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (1)$$

donde

$$\phi_x = \theta_x, \phi_y = \theta_y, \phi_z = \theta_z - \frac{u_{xc}}{R}, \phi_w = \theta_w + \frac{\theta_y}{R} \quad (2)$$

siendo  $\{u_{xc}, u_{yc}, u_{zc}\}$  los desplazamientos del centro de referencia,  $\{\theta_y, \theta_z\}$  los parámetros de flexión,  $\theta_x$  el ángulo de torsión y  $\theta_w$  la intensidad de alabeo. La función de alabeo para una viga curva puede ser aproximada con la siguiente expresión (Yang y Kuo, 1987; Piovan et al., 2012):

$$\omega = \bar{\omega}\mathcal{F} \quad \text{donde} \quad \mathcal{F} = \frac{R}{R+y} \quad (3)$$

siendo  $\bar{\omega}$  la función de alabeo deducida del problema de torsión pura de Saint Venant (Piovan et al., 2012).

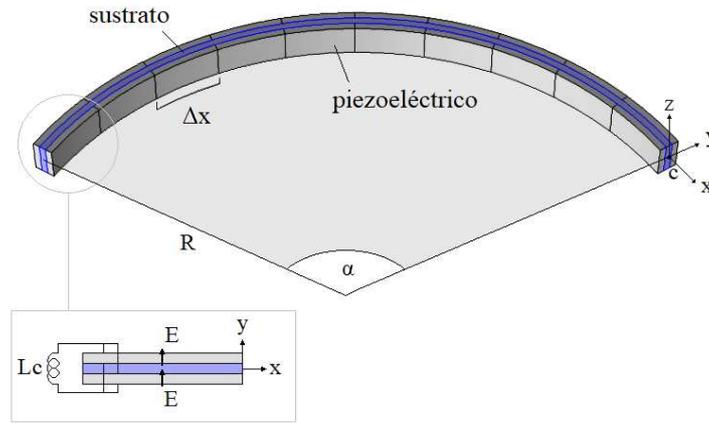


Figura 1: Esquema de la metaestructura curva.

## 2.2. Ecuaciones constitutivas y campo de deformaciones

Considerando que los ejes cristalográficos coinciden con los ejes cartesianos, siendo  $y$  el eje de polarización, y teniendo en cuenta que  $S_{yy} = S_{zz} = S_{yz} = 0$ , las ecuaciones constitutivas del piezoeléctrico se expresan como sigue:

$$\begin{bmatrix} T_{xx} \\ T_{xy} \\ T_{xz} \\ D_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11}^E & 0 & 0 & -\bar{e}_{31} \\ 0 & \bar{c}_{55}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c}_{66}^E & 0 \\ \bar{e}_{31} & 0 & 0 & \bar{\epsilon}_{33}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{xx} \\ S_{xy} \\ S_{xz} \\ E_y \end{bmatrix} \quad (4)$$

siendo  $\{\bar{c}_{11}^E, \bar{c}_{55}^E, \bar{c}_{66}^E\}$   $[N/m^2]$  las constantes de elasticidad longitudinal y trasversal evaluadas a campo eléctrico constante,  $\bar{e}_{31}$   $[Cb/m^2]$  la constante de acoplamiento y  $\bar{\epsilon}_{33}^S$   $[F/m]$  la constante de permisividad eléctrica evaluada a deformación constante.

El campo de deformaciones correspondiente al campo de desplazamientos de la Ec.(1) se expresa mediante la siguiente expresión matricial:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F} \mathbf{G} \mathbf{B} \mathbf{U} \quad (5)$$

donde

$$\mathbf{S}^T = \{S_{xx}, S_{xy}, S_{xz}\}, \quad \mathbf{U}^T = \{u_{xc}, u_{yc}, \theta_z, u_{zc}, \theta_y, \theta_x, \theta_w\} \quad (6)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & z & -y & -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} & -(z + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} & (y - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z}) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \partial_x & 1/R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_x & -1/R & 0 & 0 \\ -\partial_x/R & 0 & \partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_x/R & 0 & \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_x & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R & \partial_x & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

### 2.3. Discretización en elementos finitos

La formulación débil de las ecuaciones dinámicas que rigen la dinámica de la metaestructura se obtienen mediante el Principio de Hamilton para sistemas electromecánicos, a partir del siguiente indicador variacional:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(K^* + W_{em}^*) + \delta W_{nc}] dt = 0 \quad (9)$$

donde  $K^* + W_{em}^*$  son los términos del Lagrangiano:

$$K^* = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} \frac{d\Omega}{\mathcal{F}} \quad (10)$$

$$W_{em}^* = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{E}^T \varepsilon \mathbf{E} + 2 \mathbf{S}^T \mathbf{e} \mathbf{E} - \mathbf{S}^T \mathbf{c} \mathbf{S}) \frac{d\Omega}{\mathcal{F}} \quad (11)$$

y  $\delta W_{nc}$  simboliza el trabajo de las fuerzas externas correspondiente al desplazamiento de cargas eléctricas hacia los electrodos, dado por:

$$W_{nc} = \frac{1}{2} Q_k v_k \quad (12)$$

Reemplazando Ec.(10), Ec.(11) y Ec.(12) en Ec.(9) se obtiene la expresión de la formulación débil de la dinámica de la metaestructura:

$$\int_{\Omega} (\delta \mathbf{E}^T \varepsilon \mathbf{E} + \delta \mathbf{E}^T \mathbf{e}^T \mathbf{S} + \delta \mathbf{S}^T \mathbf{e} \mathbf{E} - \delta \mathbf{S}^T \mathbf{c} \mathbf{S} - \rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}}) \frac{d\Omega}{\mathcal{F}} + Q_k \delta v_k = 0 \quad (13)$$

donde el trabajo mecánico externo no es considerado, debido a que la excitación mecánica se realiza por medio de las condiciones de borde del modelo.

La formulación en elementos finitos se obtiene mediante la discretización de la Ec.(13), considerando el campo eléctrico  $\mathbf{E} = v_k/h_p$ , donde  $h_p$  es la altura del piezoeléctrico. La discretización se realiza mediante elementos isoparamétricos de 3 nodos y funciones de forma cuadráticas (Piovan y Cortinez, 2007). El vector de las variables de desplazamiento se expresa de la siguiente manera:

$$\bar{\mathbf{U}}_e = \{ \bar{\mathbf{U}}_e^{(1)}, \bar{\mathbf{U}}_e^{(2)}, \bar{\mathbf{U}}_e^{(3)} \}, \quad \bar{\mathbf{U}}_e^{(j)} = \{ u_{xcj}, u_{ycj}, \theta_{zj}, u_{zcyj}, \theta_{yj}, \phi_{xj}, \theta_{xj} \}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (14)$$

El método de elementos finitos deriva en la siguiente ecuación matricial correspondiente a la dinámica de estado estacionario:

$$\widehat{U} = \left[ K - \omega^2 M + j\omega C + \sum_{k=1}^{N_b} j\omega T_k \left( j\omega C + \frac{1}{j\omega L_k} \right)^{-1} \right]^{-1} \widehat{F} \quad (15)$$

donde  $K$  y  $M$  son las matrices de rigidez y masa,  $C = \eta_1 M + \eta_2 K$  es la matriz de amortiguamiento de Rayleigh y Strutt (1945),  $T_k$  la matriz de acoplamiento de cada uno de los bloques,  $\widehat{U}$  la transformada de Fourier de los desplazamientos y  $\widehat{F}$  la transformada de Fourier la fuerza distribuida equivalente al movimiento armónico desde la base.

### 3. MODELO ESTOCÁSTICO

El modelo estocástico se construye a partir de la formulación de elementos finitos del modelo determinístico, donde las variables aleatorias se desprenden de los parámetros considerados inciertos, en este caso, el valor de las inductancias asociadas  $L_k$ . Estas variables aleatorias son representadas por funciones de densidad de probabilidad (PDF) obtenidas mediante el principio de Máxima Entropía (Jaynes, 1957).

Las variables aleatorias  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  se consideran acotadas, cuyos valores límites son conocidos. Se asume que el valor medio de las mismas coincide con el valor determinístico de cada parámetro con el fin de chequear convergencia. Además, al no existir correlación o dependencia entre las mismas, se asumen variables aleatorias independientes. De lo anterior, las PDFs de las variables pueden ser expresadas de la siguiente manera:

$$p_{V_i}(V_i) = \mathcal{S}_{[L_{V_i}, U_{V_i}]}(V_i) \frac{1}{U_{V_i} - L_{V_i}} = \mathcal{S}_{[L_{V_i}, U_{V_i}]}(V_i) \frac{1}{2\sqrt{3} \underline{V}_i \delta_{V_i}}, \quad i = 1, \dots, k \quad (16)$$

donde  $\mathcal{S}_{[L_{V_i}, U_{V_i}]}(v_i)$  es el soporte,  $L_{V_i}$  y  $U_{V_i}$  cotas inferior y superior,  $\underline{V}_i$  el valor esperado y  $\delta_{V_i}$  el coeficiente de variación, todos pertenecientes a la variable  $V_i$ .

Mediante el modelo de elementos finitos de la Ec.(15), a través del método de Monte Carlo, con las PDFs definidas en Ec.(16) el modelo estocástico puede definirse mediante la siguiente expresión:

$$\widehat{U}(\omega) = \left[ K - \omega^2 M + j\omega C + \sum_{k=1}^{N_b} j\omega T_k \left( j\omega C + \frac{1}{j\omega L_k} \right)^{-1} \right]^{-1} \widehat{F} \quad (17)$$

donde la tipografía negrita de pizarra indica que las entidades son estocásticas. La convergencia del método es analizada bajo un criterio de media cuadrática mediante la siguiente expresión:

$$conv(N_S) = \sqrt{\frac{1}{N_{MS}} \sum_{j=1}^{N_{MS}} \int_W \left\| \widehat{U}_j(\omega) - \widehat{U}(\omega) \right\|^2 d\omega} \quad (18)$$

siendo  $N_S$  el número de iteraciones de Monte Carlo y  $W$  la banda de frecuencia del análisis.

## 4. ESTUDIOS COMPUTACIONALES

### 4.1. Verificaciones preliminares

Esta sección se compara inicialmente el modelo numérico 1D propuesto en el presente trabajo con el modelo analítico propuesto por Sugino et al. (2017). Para este estudio, ambas metaestructuras se componen de material piezoeléctrico PZT-5A y sustrato de aluminio, cuyas

dimensiones son  $l = 100mm$ ,  $b = 10mm$ ,  $h_{pz} = 0,3mm$ , y  $h_s = 0,1mm$ . ambas sintonizadas a una frecuencia  $\omega_t = 100\omega_1$ . Para ello es necesario inicialmente definir la propagación vibratoria como el cociente entre el desplazamiento de un punto del extremo libre  $x_L = (L, y, z)$  y un punto del extremo empotrado a la base  $x_0 = (0, 0, 0)$ , cuando la estructura es excitada mediante un movimiento armónico desde la base, es decir:

$$Propagación(\omega) = \left| \frac{u(x_L)}{u(x_0)} \right| = \left| \frac{u_L}{u_0} \right|. \quad (19)$$

La Figura 2 muestra en comparación las respuestas de propagación vibratoria del modelo de Sugino (a) con el modelo numérico 1D (b) para diferente número de bloques resonadores  $N_b$ . En la misma puede observarse claramente la similitud entre las respuestas dinámicas de ambos modelos, no solo en la zona de bandgap (sección en tonos de azul), sino también en el resto de las frecuencias.

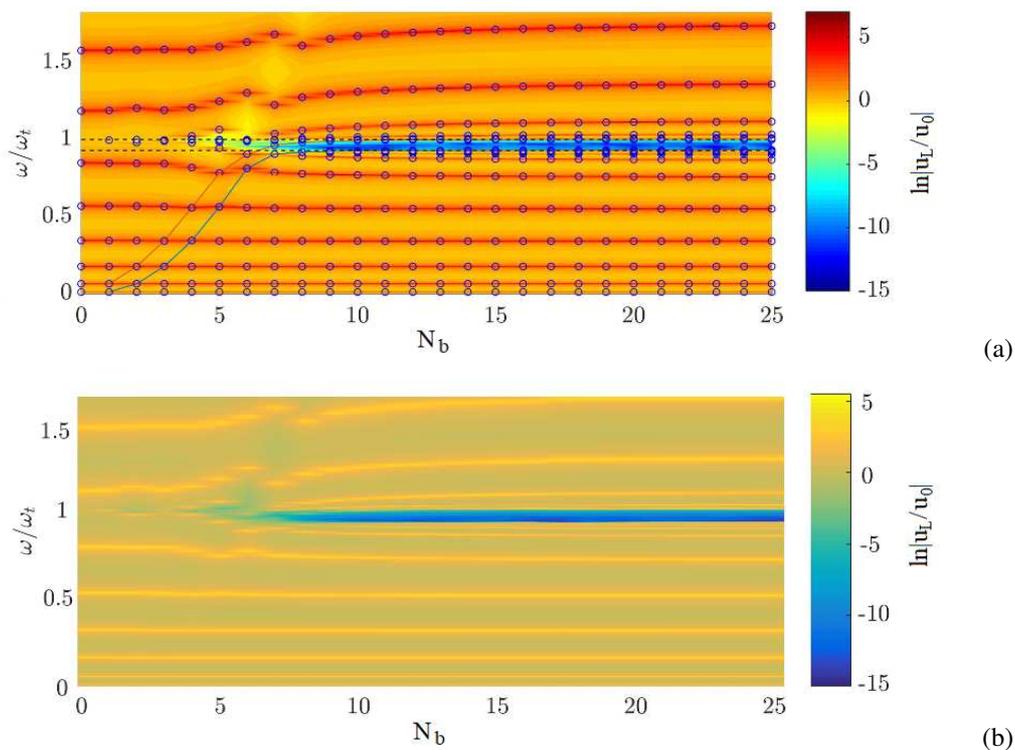


Figura 2: Propagación y frecuencias vs  $N_b$ . (a) Modelo Sugino, (b) Modelo numérico 1D.

La Figura 3.a muestra la propagación para distintos valores de  $R$  de una metaestructura de material piezoeléctrico PZT-5A y sustrato de aluminio, cuyas dimensiones son  $l = 100mm$ ,  $b = 10mm$ ,  $h_{pz} = 1mm$ , y  $h_s = 0,5mm$ . En la misma puede apreciarse el efecto de las frecuencias naturales en tanto  $R$  decrece, sin embargo, la ubicación en frecuencia de la zona de bandgap permanece inalterable, mostrando su independencia en posición al radio de curvatura. La Figura 3.b muestra el verdadero efecto de la curvatura coincidente con el plano de acción de los resonadores, que implica la pérdida de atenuación en la zona de bandgap en tanto  $R$  decrece, al mismo tiempo que corrobora la ubicación en frecuencia de la zona de bandgap. Esta verificación es muy importante ya que permite independizarnos de la curvatura de la metaestructura en cuanto a sintonía se refiere.

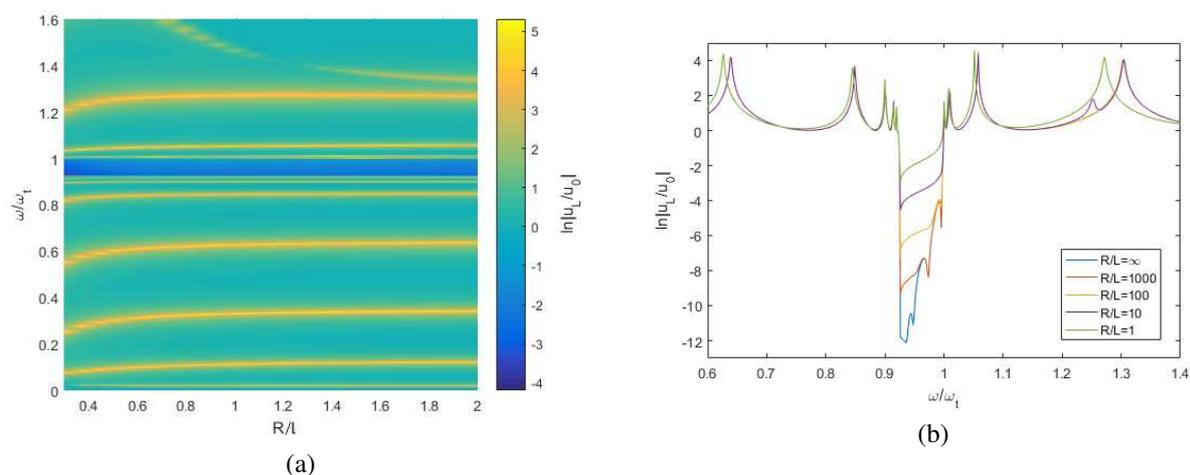


Figura 3: Propagación y frecuencias vs  $R/l$ . (a) Gráfico 3D, (b) Gráfico 2D.

## 4.2. Cuantificación de incertidumbre en la respuesta dinámica

El siguiente estudio estadístico analiza la propagación de incertidumbre en el valor de las inductancias asociadas a cada resonador hacia la respuesta dinámica del modelo. La metaestructura modelada se compone de 10 resonadores, los cuales generan 10 parámetros inductivos inciertos  $\{L_1, L_2, \dots, L_{10}\}$ , cuyos valores determinísticos coinciden en  $L_k = 0,67H$ . La metaestructura se considera recta, de material piezoeléctrico PZT-5A y sustrato de aluminio, cuyas dimensiones son  $l = 100mm$ ,  $b = 10mm$ ,  $h_{pz} = 1mm$ , y  $h_s = 0,5mm$ , sintonizada a  $f_t = (2\pi\sqrt{LC})^{-1} = 5968Hz$ , sujeta a un movimiento de excitación desde la base del tipo  $u_y(\omega) = 1e^{j\omega t} mm$ . El presente estudio considera todos los valores inductivos inciertos en simultaneo para distintos Coeficientes de Variación (CV), los cuales son  $CV=\{0,01- 0,03- 0,05\}$ . En la Figura 4 puede observarse como las diferentes realizaciones convergen de manera estable a partir de las 500 iteraciones.

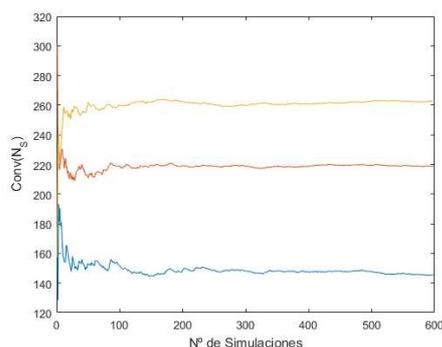


Figura 4: Convergencia de las distintas simulaciones. En azul  $CV=0,01$  - rojo  $CV=0,03$  - amarillo  $CV=0,05$ .

La Figura 5 muestra las gráficas de respuesta del modelo para un  $CV=0,03$ , donde puede apreciarse como la incertidumbre de los parámetros se propaga únicamente hacia la zona de bandgap, incluidas las frecuencias naturales de frontera, aumentando la dispersión con el aumento de incertidumbre paramétrica. Se observa además, que el intervalo de confianza no acompaña completamente a la respuesta determinística, producto de la pérdida de sintonía de la metaestructura. Definiendo Ancho de Bandgap (AB) como la medida en frecuencia de la zona de atenuación en la propagación vibratoria, los histogramas de la Figura 6 muestran que el AB

medio supera su valor determinístico para un  $CV=0,01$ . Esto se debe a que el valor de frecuencia de corte inferior está por debajo de su valor determinístico. Sin embargo, debido a la dispersión de ambas frecuencias de corte, el AB efectivo se reduce por debajo de su valor determinístico, indicando el deterioro del bandgap. La dispersión en la frecuencia superior indica alta sensibilidad de la sintonía a variaciones de  $L_k$ , tal como era previsible, debido a la importancia de este parámetro en la sintonía de la metaestructura. Finalmente, la Figura 7 muestra la gráfica de dispersión de la respuesta para las diferentes simulaciones y sus valores máximos. En la misma se observa que la respuesta es sensible a variaciones de las inductancias pura y exclusivamente en la zona de bandgap, con una dispersión uniforme en toda esta zona.

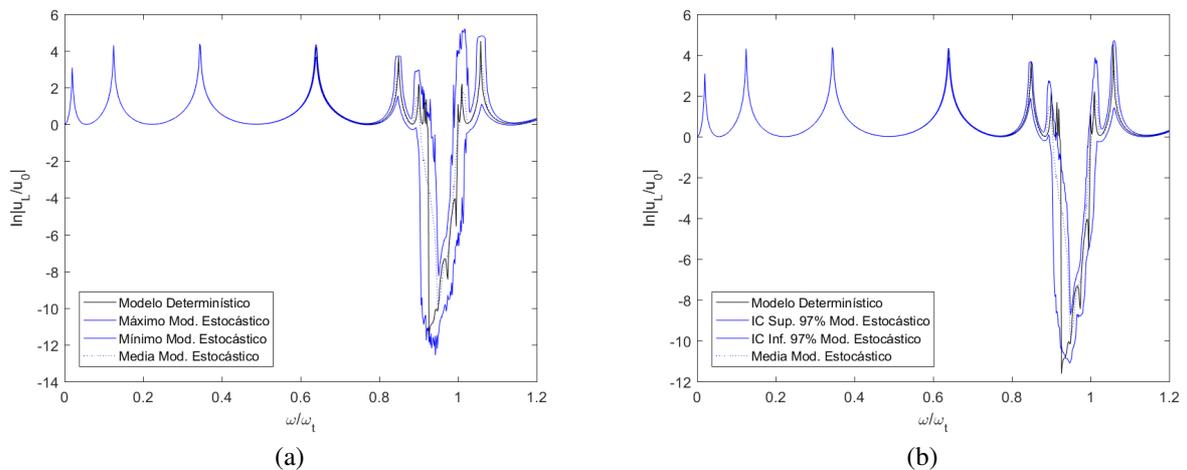


Figura 5: Respuesta del modelo estocástico para  $CV=0,03$ . (a) Máximo y mínimo, (b) Intervalo de confianza.

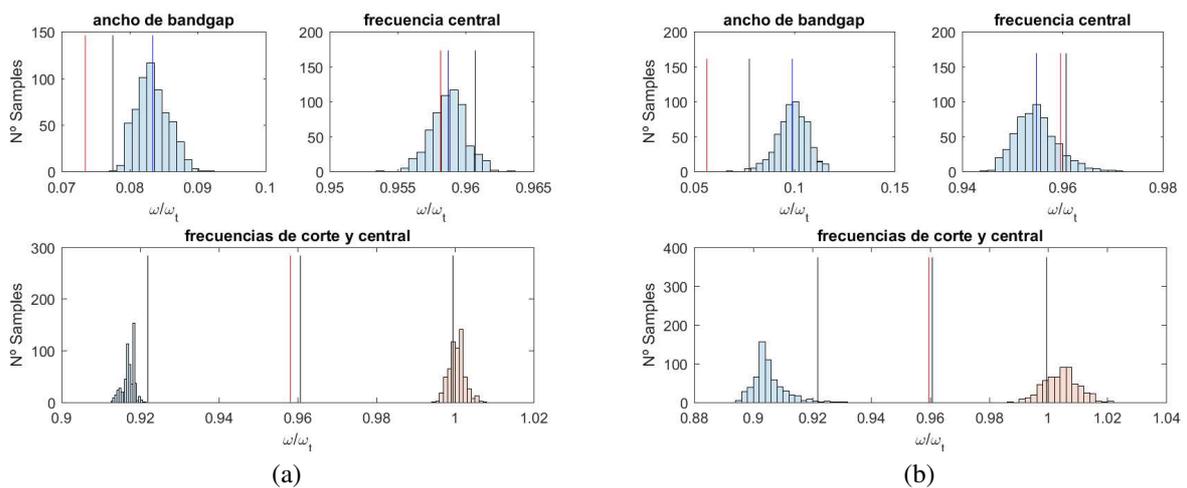


Figura 6: Histogramas del bandgap, la línea negra indica valor determinístico, línea azul valor medio y línea roja valor efectivo. (a)  $CV=0,01$ , (b)  $CV=0,03$ .

## 5. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se evaluó la propagación de incertidumbre de los valores inductivos de una metaestructura piezoeléctrica curva mediante su modelo dinámico computacional 1D. Como conclusión previa se obtuvo que la curvatura no afecta la sintonía de la misma cuando

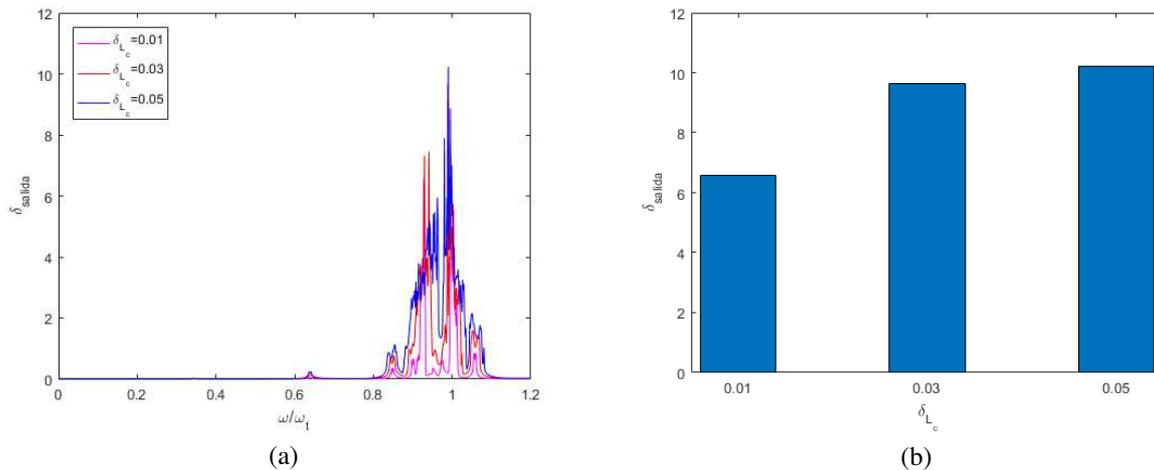


Figura 7: Sensibilidad del modelo frente a variaciones de  $L_k$ . (a) Dispersión de la respuesta, (b) Dispersión máxima.

el plano de curvatura es normal a las capas de la estructura. Finalmente se realizó el estudio estadístico, cuyos resultados mostraron una gran sensibilidad de la respuesta a variaciones en los valores inductivos únicamente en la zona de bandgap. Algunas observaciones importantes del estudio fueron las siguientes:

- La sintonía de la metaestructura es sensible a variaciones de los parámetros  $L_k$ .
- La respuesta dinámica es sensible a variaciones del parámetro  $L_k$  únicamente en la zona del bandgap.
- Se produce un desplazamiento significativo del valor medio de la frecuencia central del bandgap respecto de su valor determinístico.
- Si bien se reduce el AB efectivo, el valor medio del AB es superior al valor determinístico.
- Se logra una degradación completa del bandgap con coeficiente de variación de 0,05 del parámetro.

## REFERENCIAS

- Airoldi L. y Ruzzene M. Design of tunable acoustic metamaterials through periodic arrays of resonant shunted piezos. *New Journal of Physics*, 13(11):113010, 2011.
- Baravelli E. y Ruzzene M. Internally resonating lattices for bandgap generation and low-frequency vibration control. *Journal of Sound and Vibration*, 332(25):6562–6579, 2013.
- Bergamini A.E., Zündel M., Flores Parra E.A., Delpero T., Ruzzene M., y Ermanni P. Hybrid dispersive media with controllable wave propagation: A new take on smart materials. *Journal of Applied Physics*, 118(15):154310, 2015.
- Casadei F., Ruzzene M., Dozio L., y Cunefare K. Broadband vibration control through periodic arrays of resonant shunts: experimental investigation on plates. *Smart materials and structures*, 19(1):015002, 2009.
- Dal Poggetto V.F. y Serpa A.L. Elastic wave band gaps in a three-dimensional periodic metamaterial using the plane wave expansion method. *International Journal of Mechanical Sciences*, página 105841, 2020.

- Gnawali R., Kota A., Banerjee P.P., Haus J.W., Reshetnyak V., y Evans D.R. A simplified transfer function approach to beam propagation in anisotropic metamaterials. *Optics Communications*, 461:125235, 2020.
- Jaynes E. Information theory and statistical mechanics i and ii. *The Physical Review*, 106:1620–1630, 1957.
- Jin Y., Bonello B., y Pan Y. Acoustic metamaterials with piezoelectric resonant structures. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 47(24):245301, 2014.
- Matlack K.H., Bauhofer A., Krödel S., Palermo A., y Daraio C. Composite 3d-printed metastructures for low-frequency and broadband vibration absorption. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 113(30):8386–8390, 2016.
- Miranda Jr E., Nobrega E., Rodrigues S., Aranas Jr C., y Dos Santos J. Wave attenuation in elastic metamaterial thick plates: Analytical, numerical and experimental investigations. *International Journal of Solids and Structures*, 204:138–152, 2020.
- Nouh M., Aldraihem O., y Baz A. Wave propagation in metamaterial plates with periodic local resonances. *Journal of Sound and Vibration*, 341:53–73, 2015.
- Oudich M., Senesi M., Assouar M.B., Ruzenne M., Sun J.H., Vincent B., Hou Z., y Wu T.T. Experimental evidence of locally resonant sonic band gap in two-dimensional phononic stubbed plates. *Physical Review B*, 84(16):165136, 2011.
- Piovan M. y Cortinez V. Mechanics of thin-walled curved beams made of composite materials, allowing for shear deformability. *Thin-Walled Structures*, 45:759–789, 2007.
- Piovan M., Ramirez J., y Sampaio R. Dynamics of thin-walled composite beams: Analysis of parametric uncertainties. *Composite Structures*, 105:14–28, 2013.
- Piovan M.T., Domini S., y Ramirez J.M. In-plane and out-of-plane dynamics and buckling of functionally graded circular curved beams. *Composite Structures*, 94(11):3194–3206, 2012. Cited By :26.
- Rayleigh B. y Strutt J.W. *The theory of sound*. Dover, 1945.
- Sampaio R. y Cataldo E. Comparing two strategies to model uncertainties in structural dynamics. *Shock and Vibration*, 17:171–186, 2011.
- Senesi M. y Ruzzene M. Piezoelectric superlattices as multi-field internally resonating metamaterials. *AIP Advances*, 1(4):041504, 2011.
- Soize C. A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, 289:623–652, 2005.
- Sugino C., Leadenham S., Ruzzene M., y Erturk A. An investigation of electroelastic bandgap formation in locally resonant piezoelectric metastructures. *Smart Materials and Structures*, 26(5):055029, 2017.
- Wang P., Casadei F., Shan S., Weaver J.C., y Bertoldi K. Harnessing buckling to design tunable locally resonant acoustic metamaterials. *Physical review letters*, 113(1):014301, 2014.
- Yang Y.B. y Kuo S.R. Effect of curvature on stability of curved beams. *Journal of structural Engineering*, 113(6):1185–1202, 1987.
- Zhu R., Liu X., Hu G., Sun C., y Huang G. A chiral elastic metamaterial beam for broadband vibration suppression. *Journal of Sound and Vibration*, 333(10):2759–2773, 2014.