

**Secuencia para enseñar conceptos acerca de la luz desde el enfoque de Feynman para la Mecánica Cuántica en la Escuela Secundaria: un análisis basado en la teoría de los campos conceptuales<sup>+</sup>\***

---

*Maria de Los Angeles Fanaro<sup>1</sup>*

*Mariana Elgue<sup>2</sup>*

*María Rita Otero<sup>3</sup>*

Facultad de Ciencias Exactas

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

Buenos Aires – Argentina

**Resumen**

*En este trabajo se presenta un conjunto de situaciones que componen una secuencia diseñada para enseñar conceptos relativos a la luz, que incluyen y enfatizan su aspecto cuántico, con el fin de promover su conceptualización en estudiantes del último año de la escuela secundaria. La descripción y el análisis didáctico de las situaciones se realizan utilizando la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud, anticipando los posibles invariantes operatorios que los estudiantes utilizarán al afrontar las situaciones. Las situaciones se presentan en un marco conceptual unificador basado en el enfoque de Caminos Múltiples de Feynman para la mecánica cuántica. Se parte de un conjunto de experiencias relativas a la luz (en su mayoría realizables en el aula de clases) para luego formular una explicación cuántica de las mismas. Este abordaje ofrece una vía posible para que los estudiantes de la escuela secundaria construyan el sentido de los conceptos cuánticos: caminos alternativos, camino de tiempo mínimo y distribución de probabilidad en la Experiencia.*

---

<sup>+</sup> A sequence for teaching concepts about the light from Feynman's "path integrals" approach to Quantum Physics at High School: an analysis based on the theory of conceptual fields

\* *Recebido: novembro de 2015.  
Aceito: março de 2016.*

<sup>1</sup> E-mail: [mfanaro@exa.unicen.edu.ar](mailto:mfanaro@exa.unicen.edu.ar)

<sup>2</sup> E-mail: [nanaelgue@gmail.com](mailto:nanaelgue@gmail.com)

<sup>3</sup> E-mail: [rotero@exa.unicen.edu.ar](mailto:rotero@exa.unicen.edu.ar)

*cia de la Doble Rendija. Se realizan consideraciones didácticas basadas en la Teoría de los Campos Conceptuales.*

**Palavras-chave:** *Secuencia didáctica; Análisis Didáctico; Luz; Cuántica; Caminos múltiples de Feynman*

### **Abstract**

*In this work, a range of situations presented in a didactic sequence designed to teach concepts related to light and its quantum aspect for high school students is presented. The description and analysis of teaching situations are performed by using the Theory of Conceptual Fields by Vergnaud. The situations are presented in a unifying conceptual framework based on Feynman's "Path Integrals" approach to Quantum Physics. The work is based on a set of experiences on light (mostly achievable in the classroom) and then it proposes a quantum explanation thereof. This approach offers a possibility for high school students to build a sense of quantum concepts: alternative paths, path of a minimum time and probability distribution on the experience of the double slit. Didactic considerations based on the theory of conceptual fields are made.*

**Keywords:** *Didactic analysis; Light; Quantum; Feynman' multiple paths.*

## **I. Presentación del problema**

Desde hace varios años el equipo de investigación viene diseñando, implementando y analizando resultados de secuencias de situaciones que emplean el enfoque de Feynman, para estudiantes de la escuela secundaria, tanto para el comportamiento de los electrones, como de la luz (FANARO; OTERO; ARLEGO, 2012 a) y b); ARLEGO; FANARO; OTERO, 2012; FANARO; ARLEGO; OTERO, 2014; FANARO; ELGUE; OTERO, 2014). Diversos investigadores han elaborado propuestas de enseñanza de la mecánica cuántica (MQ) basadas en este enfoque para el nivel universitario, utilizando herramientas computacionales (TAYLOR; STAMATISVOKOS; THORNBER, 1998; OGBORN; HANCK; TAYLOR, 2006; DOWRICK; 1997, TAYLOR; 2003; HANC; TULEJA, 2005, MALGIERI; ONORATO; DE AMBROSIS, 2014). En general, estas propuestas se centran en el comportamiento dual de la luz desde el enfoque de Feynman, utilizando simulaciones informáticas, empleando el concepto de fotón. En cambio, en esta investigación, no se recurre al concepto de fotón con los estudiantes, porque se quiere enfatizar los conceptos de probabilidad, principio de superposi-

ción y de correspondencia, para lo cual no es necesario referirse a los fotones. Por otro lado, la secuencia no plantea cuestiones ontológicas acerca de la luz, sino que describe, explica y predice su comportamiento en distintas situaciones. Tampoco se pretende presentar la paradoja del comportamiento ondulatorio-corpúscular de la luz a los estudiantes, en acuerdo con Hobson (2007), para sortear el obstáculo de que la luz estaría compuesta por partículas con propiedades clásicas.

## II. Marco teórico

La dimensión didáctica de esta investigación, requiere la explicitación y elaboración de una posible Estructura Conceptual de Referencia (ECR) (OTERO, 2007) para la luz desde MQ. Se trata de estudiar y analizar en profundidad los conceptos fundamentales de la MQ y de proponer un dispositivo didáctico potencialmente viable, que permita reconstruir esos conceptos en la escuela. Esto conduce a la segunda etapa de investigación, que consiste en generar una posible Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar (ECPE) (OTERO, 2007) es decir, una propuesta didáctica. Una Estructura Conceptual de Referencia (ECR) es el conjunto de conceptos relativos a un campo conceptual, que el investigador reconstruye y explicita tomando en cuenta el conocimiento producido por la comunidad científica y la institución en la cual ese conocimiento será enseñado. A partir de esta ECR, se proponen situaciones para enseñar, generando una organización conceptual relacionada con la anterior, aunque diferente a la que se llama Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar (ECPE).

La ECPE es el conjunto de conceptos relativos a un cierto campo conceptual, que es reconstruida por los profesores a partir de una Estructura Conceptual de Referencia (ECR), con la intención de volverla enseñable en un contexto y en una institución dada (OTERO, 2006, 2011). Finalmente, el grupo de clase reconstruirá la Estructura Conceptual Efectivamente Enseñada (ECEE), definida como el conjunto de conceptos relativos a un cierto campo conceptual que efectivamente resulta reconstruido por el docente y los estudiantes en una institución dada. Estas estructuras se consideran explícitamente como parte de una investigación didáctica, y se inspiran en la idea de transposición didáctica (CHEVALLARD, 1985) y en las nociones de campo conceptual, concepto, interacción situación-esquema y forma operatoria y predicativa del conocimiento, propuestas por la Teoría de los Campos Conceptuales (VERGNAUD, 1990).

En esta investigación, interesa analizar el proceso de conceptualización de los estudiantes en el aula escolar, analizando la construcción de conceptos a nivel del sujeto que allí aprende, es decir que la conceptualización no se estudia en un ámbito experimental o puramente psicológico, sino en el contexto del aula y tomando en cuenta una enseñanza de ciertas características, razón por la cual, los aspectos didácticos son ineludibles.

Para la Teoría de los Campos Conceptuales, la conceptualización se produce en todos los ámbitos de la experiencia humana: el familiar, el de la escolarización obligatoria, el de la formación profesional, el laboral, etc. En lo relacionado con los conocimientos físicos y ma-

temáticos, se trata del aprendizaje de conceptos complejos, que ocurre en situaciones que la escuela secundaria puede recrear más probablemente, que ninguna otra institución social. En cada campo de conocimiento, son necesarios ciertos procesos de conceptualización, que se presentan en ciertos tipos de situaciones y de fenómenos, que convocan al desarrollo de determinadas formas de actividad. Por lo tanto, es preciso explicitar el conocimiento de referencia desde el cual se concebirá la enseñanza, el conocimiento que se pretende enseñar y sus transformaciones, y el que efectivamente es enseñado, atendiendo a los procesos transpositivos (CHEVALLARD, 1985).

Para estudiar el aprendizaje de un cierto dominio, se necesita especificar de una manera precisa una relación con esa porción de lo real, que se manifiesta en una *situación*, en “*une tâche*” (tarea). La *situación*, dice Vergnaud (1990, p. 8), *tiene el carácter de tarea y toda situación compleja puede ser analizada como una combinación de tareas*, acerca de las cuales es importante conocer su naturaleza y sus obstáculos. Una situación, es en verdad una clase o tipo de situaciones con especificidades epistemológicas bien definibles (OTERO, 2010; OTERO *et. al.*, 2014). Son ejemplos de tarea: saltar una valla; pilotear un automóvil, podar una viña; resolver una ecuación; calcular una integral, calcular una probabilidad, modelar un sistema físico y predecir su evolución, etc.

Vergnaud propone una definición pragmática -útil y funcional- del concepto. Un concepto puede definirse como un triplete de tres conjuntos distintos, que no son independientes entre sí, (VERGNAUD, 2013, p. 156)

$$\text{Concepto} = \text{def}(S, I, L)$$

S: es el conjunto de las situaciones que le dan sentido al concepto,

I: es el conjunto de los invariantes operatorios que integran los esquemas, evocados en las situaciones,

L: es el conjunto de las representaciones lingüísticas y simbólicas (algebraicas, gráficas, etc.) que permiten representar los conceptos y sus relaciones.

La definición evidencia que los conceptos están compuestos de un elemento propio del sujeto, como los invariantes operatorios presentes en los esquemas, de un elemento objetivo de carácter epistémico, como los tipos de situaciones, las cuales a su vez interactúan dialécticamente con los esquemas, y de un elemento semiótico, que se refiere a los sistemas de signos o de representación, utilizados para enunciar los conceptos, las relaciones entre ellos y para referirse a los objetos (OTERO *et. al.*, 2014).

Un aspecto muy importante de la noción de conceptualización de Vergnaud, es que no distingue entre conceptos cotidianos y conceptos científicos, el proceso de conceptualización tiene las mismas características en todos los casos: se trata de identificar los objetos, sus propiedades y sus relaciones (VERGNAUD, 2013b, p. 41). En este sentido podemos usar la definición de concepto en el caso de Newton creando los conceptos de la Mecánica como para Einstein creando la Teoría Especial de la Relatividad (TER) o para Feynmann construyendo su enfoque para la MQ. En consecuencia, podemos referirnos a las situaciones usadas por

estos científicos, a los teoremas en acto y conceptos en acto con los cuales identifican los conceptos y describen sus propiedades y relaciones entre ellos, en este caso de manera explícita y provisoriamente correcta y al hecho de que en el caso de los conceptos científicos se trata de invariantes formalizados, en sistemas de representación sofisticados propios de la física y de la matemática subyacente (OTERO, 2015).

### III. Las situaciones que conforman la ECPE y su análisis didáctico

La secuencia se compone de cuatro fases consecutivas, conformadas por quince situaciones (incluyendo la situación de evaluación final) que regulan las progresivas conceptualizaciones de los estudiantes diseñada para un curso del anteúltimo año de la escuela secundaria. Las situaciones son formuladas alrededor de cuestiones centrales, sociales, científicas e institucionalmente relevantes. Las respuestas que se esperan lograr serán provisionales, no inmediatas, requerirán mucho tiempo y es probable que no finalicen en la escolarización formal. Las situaciones se desarrollan considerando los conceptos científicos, el conocimiento de los estudiantes y el aprendizaje esperado, ellas tienen una intención explícita de enseñar: desarrollan actividades relacionadas con la construcción de conocimiento físico por parte de los estudiantes y el profesor.

Esta secuencia requiere que los estudiantes trabajen en forma grupal, conversando sobre cada problema e intentando consensuar luego una respuesta escrita. Por su parte, el papel del profesor es presentar las situaciones, proponer las preguntas y coordinar las acciones del grupo de clase: gestionar el tiempo didáctico permitiendo el trabajo autónomo de los grupos, dirigir la puesta en común de cada grupo, señalar los consensos y los desacuerdos, y de ser necesario, introducir el conocimiento que podría hacer falta, aparte del que conlleva la situación<sup>4</sup>. A continuación se presentan las situaciones de cada fase, y luego el análisis didáctico correspondiente, según el marco teórico asumido.

En cada situación se realiza un análisis didáctico previo tomando como unidad de análisis a los conceptos de la ECR que se esperan construir, en relación con las tareas que permitirán surgir los conceptos, y a los invariantes operatorios que dotan de operatividad al concepto y que son utilizados para analizar y dominar las situaciones. Este análisis se presentará en tablas cuyo encabezado se constituirá como la que se presenta a continuación:

<b>Situación 1– Estudiando la reflexión</b>			
<b>Conceptos de la ECR</b>	<b>Tareas para los estudiantes</b>	<b>I.O. anticipados</b>	<b>I.O en acuerdo con la ECR</b>

<sup>4</sup> Esta secuencia se propone desarrollar en unas 20 horas reloj, aproximadamente, dependiendo el contexto escolar en donde se implemente. En Argentina, en el anteúltimo año de la escuela secundaria, solamente tienen Física los estudiantes de la orientación Ciencias Naturales, en dos horas semanales

En la primera columna se hará referencia a los conceptos de la ECR que se pretenden construir, en la segunda, las tareas que componen las situaciones, en la tercera columna se presentan los invariantes que posiblemente utilizarán los estudiantes al afrontar la situación, y que pueden o no ser apropiados para la conceptualización. En la última columna se presentarán, aquellos invariantes operatorios que están en acuerdo con la ECR planteada, y que son deseables que se utilicen en la situación, y éstos estarán representados en forma verbal. Las representaciones gráficas serán presentadas en el desarrollo de las situaciones. Por su parte, los invariantes operatorios que se anticipan también serán representados en forma verbal, debido a que las representaciones simbólicas (gráficos, diagramas), no son explícitamente solicitadas en las tareas, excepto en aquellas situaciones que requieren sumar gráficamente los vectores y la construcción del gráfico de la función  $P(x)$ .

### III.1 Fase 1: Cuatro experiencias con luz

Esta primera fase de la secuencia, presenta cuatro situaciones que requieren como tarea principal para los estudiantes, imaginar distintas experiencias con luz, desde aquellas familiares como mirarse en un espejo plano, hasta la EDR, anticipar los resultados y consensuar entre los compañeros una respuesta a las preguntas. Luego, realizar las experiencias antes imaginadas, en el aula de clases y contrastar las predicciones y los hechos. Estas situaciones constituyen una oportunidad para que los estudiantes expliciten algunos de sus conceptos y *teoremas-en-acto*, que serán progresivamente cuestionados en la secuencia.

#### Situación 1: Estudiando la reflexión

Como se busca elaborar una formulación de la ley de reflexión, se presenta a los estudiantes la Situación 1:

**Situación 1**

*a) Queremos mirarnos en un espejo plano (que no deforma la imagen) que está en posición vertical y perpendicular al suelo, de tal forma que la imagen reflejada sea completa (es decir queremos ver la imagen de todo nuestro cuerpo reflejado). ¿Es posible lograrlo con un espejo de cualquier tamaño?*

*b) Utilizando un puntero láser y un espejo, estudia el comportamiento de la luz al reflejarse en un espejo. Con lo que concluyas, vuelve al punto a) para corroborar o refutar la respuesta que habías dado.*

El primer problema hace referencia a una situación familiar para un estudiante, pero no es trivial, ya que requiere las siguientes acciones por parte de los estudiantes: relacionar el concepto de reflexión especular con el de mecanismo de visión, y analizar posiciones y distancias relativas entre distintos objetos y sus imágenes reflejadas. La idea es no restringir el problema con medidas y valores numéricos sino que los estudiantes puedan experimentar en el salón de clase, con distintos espejos ya sea que se encuentren en la escuela, o los que lleve

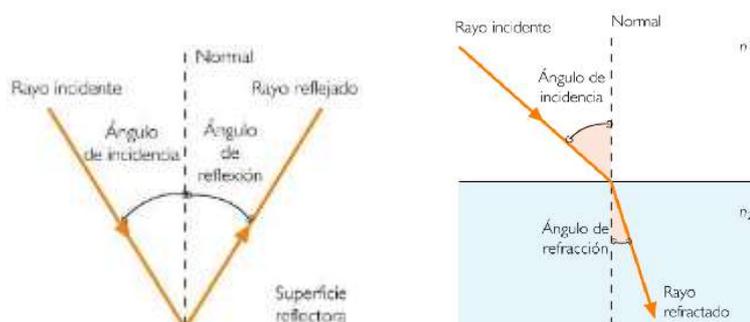
el profesor y de esta forma se comience a analizar el comportamiento de la luz incidente en un espejo plano.

Luego de que los estudiantes conversen acerca del problema, experimenten con espejos, y generen una respuesta consensuada al interior de cada grupo de trabajo, en el segundo problema de la situación se propone realizar la experiencia de la reflexión en el aula, para luego retomar las respuestas de los estudiantes a las cuestiones anteriores. Para realizar la experiencia, basta con llevar al aula un puntero de luz láser doméstico, para apreciar la trayectoria de la luz, un espejo plano pequeño y un círculo graduado para que los estudiantes puedan notar la relación entre ángulo incidente y reflejado, como muestra la Fig. 1 (izquierda):



*Fig. 1 – Izq.: Imagen de la experiencia de la reflexión, factible de ser realizada en clase; Centro: Imagen de la experiencia de la refracción factible de ser realizada en clase; Der.: Imagen del resultado obtenido en la pantalla al realizar la EDR utilizando un puntero láser color rojo, y dos ranuras finas realizadas en una lámina de aluminio.*

Una vez que los estudiantes logren establecer que la luz que incide en un espejo plano se refleja con el mismo ángulo con el que incide respecto a una línea perpendicular al espejo denominada “normal”, y se institucionalice en la clase que una representación gráfica de esto es posible con un esquema similar al de la Fig. 2 (izquierda), es necesario volver al problema inicial. Así se busca consensuar que el largo del espejo debe ser de la mitad de la altura de la persona y debe ubicarse el borde superior del espejo a la altura de los ojos, para que la persona pueda verse reflejada totalmente.



*Fig. 2 – Izq: Esquema de la reflexión especular; Der: Esquema de la refracción.*

## Situación 2: Estudiando la refracción

Una vez que se estudia el comportamiento de la luz en los espejos planos, y se establece la ley de reflexión, se propone a los estudiantes analizar el comportamiento de la luz cuando pasa de un medio a otro, como se muestra a continuación:

### Situación 2

- a) Al sumergir parcialmente un objeto como un lápiz o una cuchara en un vaso que contiene líquido, como agua o aceite, ¿cómo lo percibimos? Justifica tu respuesta.*
- b) Utilizando un puntero láser, un recipiente con líquido, y un círculo graduado, estudia el comportamiento de la luz al pasar del aire al líquido.*

Manteniendo el esquema de la Situación 1, la secuencia propone comenzar con el planteo de una cuestión familiar y con sentido para los estudiantes sin restricciones en las variables del problema. El efecto de “distorsión” del objeto al sumergirse parcialmente en agua, posiblemente, sea familiar a los estudiantes. Luego, se propone realizar la experiencia en clase con el círculo graduado y el láser doméstico, para poder consensuar una descripción del fenómeno de la refracción, en términos del efecto que produce el líquido en el haz de luz que hace que se vea la deformación del objeto sumergido. Para realizar esta experiencia basta con llevar al aula de clases un recipiente de plástico transparente y líquidos de diferente densidad (agua, aceite, etc.), como se muestra en la Fig. 1 (centro). Aquí es preciso que los estudiantes noten que el cambio de dirección del haz de luz que pasa de un medio a otro, está vinculada a la idea de reflexión establecida previamente, ya que en ambos casos se hace incidir un haz de luz en una superficie y se establecen relaciones entre ángulos, pero ahora se busca la relación entre el ángulo de incidencia y el refractado. Es posible que los estudiantes actualicen sus ideas acerca del cambio de velocidad de la luz al pasar de un medio a otro, al buscar una explicación del fenómeno notado, aunque esto no es imprescindible para lo que sigue en la secuencia. Así, se pretende establecer que la luz, al pasar de un medio a otro, cambia su dirección, y se representa en un esquema como el que muestra la Fig. 2 (derecha).

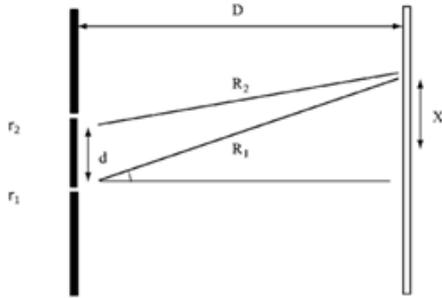
## Situación 3: Estudiando la Experiencia de la Doble Rendija (EDR) con luz

A diferencia de las experiencias anteriores, se presenta una situación que posiblemente no resulte familiar a los estudiantes, pero resulta oportuna para que ellos expliciten sus teoremas y conceptos en acto relativos al comportamiento de un haz de luz al pasar por dos rendijas finas. Se plantea la experiencia con luz láser debido a que para que los resultados sean notables, la luz debe ser monocromática. La primer parte de esta situación es predictiva, ya que requiere que los estudiantes imaginen la distribución de la luz en la pared, habiendo pasado por las rendijas, y permite explicitar sus conceptos y teoremas en acto, que luego serán

retomados o desconsiderados, para la descripción de los resultados de la experiencia que se propone en la segunda parte.

**Situación 3**

a) En la Figura siguiente se presenta un esquema de una experiencia muy conocida e importante en Física, la “Experiencia de la doble rendija”, (EDR) vista desde arriba.



Esta experiencia consiste en hacer pasar un haz de luz de un solo color, por ejemplo un puntero láser rojo a través de dos rendijas o ranuras delgadas realizadas en la pantalla y detectar a simple vista la luz en un papel o simplemente en la pared detrás de las rendijas. ¿Cómo te imaginas que sería en este caso la distribución de la luz en la pantalla colectora? Realiza un esquema del resultado y descríbelo.

b) Utilizando un puntero láser, y una lámina con dos rendijas realiza la experiencia, proyectando sobre una pared a distancia considerable de la fuente de luz láser, y analiza los resultados.

Para realizar la experiencia, se puede utilizar un láser doméstico por ser una luz monocromática accesible (cuya frecuencia puede estimarse en  $4.3 \times 10^{14}$  Hz) una lámina metálica a la cual se realizan dos finas rendijas a una distancia  $d = 10^{-3}$  m, y proyectar sobre una pared localizada a una distancia  $D = 5$  m de las rendijas. De esta forma, se obtiene una imagen detectable a simple vista, similar a la presentada en la Fig. 1 derecha).

Con esta situación se busca que los estudiantes realicen una descripción del fenómeno en términos de “lugares” o “zonas donde hay luz y zonas de oscuridad”, es decir que establezcan que la luz no se encuentra distribuida uniformemente en la pantalla, ni tampoco se encuentra en las dos zonas correspondientes a las rendijas.

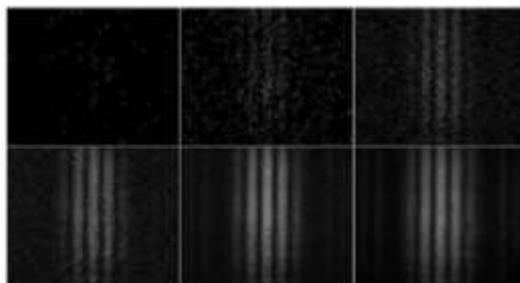
#### **Situación 4: Análisis de la EDR a partir de un conjunto de imágenes**

Una vez que los estudiantes analizaron el comportamiento de la luz al incidir en un espejo plano, al atravesar distintos medios, y al pasar por dos rendijas finas, se busca enfrentar a los estudiantes al problema de la llegada discreta de la luz, como se presenta en la Situación 4 que se muestra a continuación. Para notar la llegada discreta, en principio se debería realizar la EDR con un sistema más sofisticado que la medición directa como lo era la experiencia realizada en el aula (donde la distribución de la luz se notaba directamente en la pared, y la llegada se notaba continua). Para esto, se debe colocar un sistema de filtros a la salida de la luz, una pantalla de detección formada por una gran cantidad de receptores muy sensibles a la

luz, y de esta forma, se podría estudiar la evolución de la figura formada en la pared. Como es muy difícil técnicamente realizar esta disposición experimental en el salón de clases con los estudiantes, se opta por presentar un conjunto de fotografías que muestra los resultados de la experiencia<sup>5</sup>.

#### Situación 4

*Se realiza la experiencia de la doble rendija pero, a diferencia de la anterior (donde a simple vista era posible notar el resultado) ahora se coloca una pantalla de detección que está formada por una gran cantidad de receptores muy sensibles a la luz. Lo que se obtiene es lo siguiente: en un primer momento el detector registró lo que presenta el primer cuadro de la Figura, y a medida que fue pasando el tiempo, los resultados son los que se presentan en los cuadros siguientes de la figura:*



*Describe y analiza los resultados de esta experiencia.*

Para poder afrontar el problema es necesario que los estudiantes desconsideren momentáneamente los resultados anteriores- respecto al comportamiento de la luz, notando que en esta experiencia la luz no se comporta como lo hacía en las experiencias antes realizadas en clase. En particular, en la EDR la luz parecía estar distribuida de una sola vez, presentando lugares donde había luz y lugares donde no había. Ahora, la luz parece estar llegando en forma discreta: al comienzo, las distribuciones parecen ser aleatorias, pero con el tiempo, se comienza a notar una distribución que, en cierto, aspecto se asemeja a la anterior: hay lugares de la pantalla con gran cantidad de detecciones, y en otros lugares, hay muy pocas. Los estudiantes deben notar que a diferencia de la experiencia realizada en clase, a partir de éstas imágenes se pueden inferir las detecciones individuales de luz, aunque se sigue conservando el patrón de zonas de luz y oscuridad, que es lo que se pretende explicar.

En este punto, el profesor debe introducir un modelo unificador, a partir del cual se puedan explicar todas las experiencias anteriores.

---

<sup>5</sup> Imagen obtenida de <<http://www.sps.ch/fr/articles/progresses/wave-particle-duality-of-light-for-the-classroom-13/>>. Como esta experiencia no puede llevarse a cabo en el aula, se busca que a partir de esta imagen los estudiantes noten que con luz de muy baja intensidad (para lo cual es necesario un sistema de filtros y una pantalla con detectores especiales), las detecciones de la luz son individuales, y que a medida que transcurre el tiempo, estas detecciones no están distribuidas al azar sino forman sectores donde se concentran, de forma similar a las bandas de luz y oscuridad observadas al realizar la experiencia en clase. En el sitio, además se puede ver el film de la experiencia, que es posible si las condiciones tecnológicas de la escuela lo permiten.

## Análisis didáctico de las situaciones de la Fase 1

En la Tabla 1 se presenta el análisis didáctico de la **Fase 1**, con los elementos que fueron descriptos previamente.

Tabla 1: Análisis didáctico previo de las situaciones de la **Fase 1**.

<b>Situación 1– Estudiando la reflexión</b>			
<b>Conceptos de la ECR</b>	<b>Tareas para los estudiantes</b>	<b>I.O. anticipados</b>	<b>I.O en acuerdo con la ECR</b>
Reflexión de la luz.  Ángulo de incidencia y ángulo de reflexión.	<p><b>Experimentar</b> con espejos planos de distintos tamaños.</p> <p><b>Acordar</b> las posibles respuestas entre pares, y explicitarla en forma escrita.</p>	<p>La imagen reflejada en los espejos es más pequeña que la real a medida que nos alejamos del espejo.</p> <p>Si nos alejamos lo suficiente del espejo podremos ver nuestro cuerpo completo con cualquier tamaño de espejo.</p>	<p>El tamaño de los objetos reflejados es el mismo que el de los objetos reales.</p> <p>En los espejos planos el tamaño de la imagen reflejada no depende de la distancia a la que se encuentre el espejo.</p> <p>El tamaño del espejo para que se vea nuestro cuerpo completo debe ser la mitad de nuestra altura.</p>
	<p><b>Realizar y describir</b> la experiencia con el puntero láser, el espejo y el círculo graduado ofrecido.</p> <p><b>Contrastar</b> ideas.</p> <p><b>Escribir</b> una explicación del fenómeno de reflexión</p>		<p>El espejo plano hace que la luz que incide, cambie su dirección de forma tal que se mantiene su ángulo respecto de una línea imaginaria perpendicular al plano del espejo (ley de reflexión)</p>
<b>Situación 2- Estudiando la refracción</b>			
Refracción de la luz;  Ángulo de incidencia y ángulo de refracción.	<p><b>Imaginar</b> la experiencia.</p> <p><b>Sumergir</b> parcialmente un objeto en un recipiente con agua o aceite.</p> <p><b>Acordar</b> una respuesta entre pares, y escribir una explicación.</p>	<p>Los objetos se ven distorsionados cuando se sumergen en un líquido.</p> <p>La luz se “deforma” al pasar del aire al agua o al aceite.</p> <p>La velocidad de la luz es siempre la misma, no cambia al cambiar de medio</p>	<p>Al pasar de un medio a otro la luz modifica su dirección.</p> <p>La velocidad de la luz depende del medio en el cual se propague.</p> <p>La luz cambia de velocidad al pasar por distintos medios.</p> <p>El ángulo de incidencia es distinto al ángulo de refracción: al pasar a un medio más denso, el haz de luz se acerca a una línea imaginaria, perpendicular al plano de la superficie.</p>
	<p><b>Realizar</b> la experiencia con el puntero láser, agua, aceite y el círculo graduado ofrecido.</p> <p><b>Escribir</b> una explicación</p>	<p>Al refractarse el láser se difumina</p>	
<b>Situación 3- Estudiando la Experiencia de la Doble Rendija (EDR) con luz láser</b>			
	<p><b>Imaginar</b> la experiencia.</p> <p><b>Realizar</b> un esquema de los</p>	<p>Las rendijas no actúan como un obstáculo para la luz, o sea, es como</p>	<p>Las rendijas imponen una condición tal que en la pared se observan zonas o franjas de luz y de oscuridad,</p>

Interacción Rendijas – luz	resultados imaginados, y describirlo.	una lámina transparente.	alternadamente.
Zonas o franjas de luz, distribuidas de forma alternada.	<b>Realizar</b> la experiencia en clase. <b>Comparar</b> los resultados encontrados con las predicciones previas. <b>Escribir</b> una explicación.	La luz se difunde al pasar por las dos rendijas.  La luz se debilita al pasar por las dos rendijas.	
<b>Situación 4– Análisis de la EDR a partir de un conjunto de imágenes</b>			
Llegada discreta de la luz.  Máximos y mínimos de concentración de detecciones, distribuidos de forma consecutiva.	<b>Observar</b> las imágenes propuestas y describirlas.  <b>Comparar</b> los resultados encontrados con los resultados de la experiencia realizada en clase.	La luz está formada por partículas que son las que van llegando.  La luz cubre toda la pantalla.  Al principio hay poca luz y al final hay mucha luz.	Las detecciones se hacen en forma discreta.  Hay zonas donde se acumulan más detecciones, y en otros lugares no hay casi detecciones.  Luego de cierto tiempo, se forma una figura de franjas claras y oscuras.  Al final de las mediciones se llega una figura similar de máximos y mínimos que se obtuvo en el aula en la pared.

### III.1 Fase 2: El modelo cuántico de la luz. Considerar Caminos Alternativos (CCA)

#### Situación 5: Relación entre caminos alternativos, vectores asociados, ángulos y tiempo

Una vez que los estudiantes analicen el comportamiento de la luz para las cuatro situaciones, es necesario presentar un conjunto de principios o leyes que expliquen todas las experiencias desde un marco conceptual compartido por la comunidad científica. Para eso, en esta situación se presenta la formulación de las leyes de la Mecánica Cuántica para la luz, mediante la técnica de Suma de Caminos Alternativos de Feynman, denominada con los estudiantes la técnica de “Considerar los Caminos Alternativos” (FANARO; ARLEGO; OTERO, 2014).

La adaptación de la técnica original que contenía integrales de camino, se realizó tomando en cuenta que los conceptos matemáticos necesarios de los estudiantes son: vectores, ángulos, y suma de vectores en forma geométrica necesarios para las situaciones de esta fase. Como se muestra a continuación, en la Situación 5, se presenta a los estudiantes conceptos propios de esta teoría como evento y probabilidad y además, se describe paso a paso el método de cálculo de amplitud de probabilidad que luego se utilizará para explicar las cuatro experiencias presentadas. En esta situación se presenta la Simulación 1, para que los estudiantes puedan visualizar la relación entre la selección de los caminos, y el ángulo del vector asociado.

### Situación 5

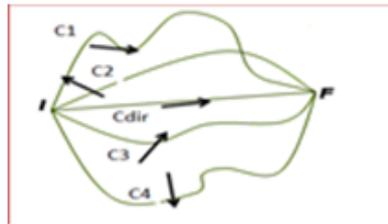
¿Cómo explicar y corroborar los resultados de las experiencias anteriores desde un único modelo?

Para contestar esta pregunta, en física se formuló una teoría llamada **Teoría cuántica de la luz**, que se basa en un método llamado “**Considerar todos los Caminos Alternativos**” o **CCA**, abreviado.

Antes debemos tener en cuenta que en esta teoría se hará referencia a **eventos** y se calcula la **probabilidad de ese evento**; por ejemplo, en los resultados de la EDR de la Fig. 2 un evento sería la detección de luz en un determinado punto de la pantalla de detección, proveniente de la fuente; no se busca la certeza sino la **probabilidad de ese evento**.

Para calcular la Probabilidad de un evento cualquiera, el método CCA indica que se debe realizar lo siguiente:

Considerar un evento particular que es la detección de luz en un punto **F** habiendo sido emitida por el punto **I**. En la Figura siguiente se muestran sólo algunos caminos alternativos que conectan el inicio con el final.



Luego se debe:

**1- Identificar cada camino con un vector:** Con cada camino se identifica un vector en el plano, cuyo módulo es uno, y su dirección depende de cada camino

**2- La dirección del vector es proporcional al tiempo que tomaría a la luz, recorrer cada posible camino:** El ángulo que cada vector forma con el eje  $x$  es proporcional al tiempo que le tomaría a la luz recorrer ese camino. La constante de proporcionalidad ( $k$ ) es una característica que depende del color de la luz, y del medio en el que se propague (agua, aire, etc.). Es decir,

$$\alpha = k.t$$

donde  $k$  es la constante de proporcionalidad que depende del color de la luz y del medio en el que viaje, y cuya unidad es  $1/s$

**3- Sumar todos los vectores correspondientes a cada camino:** Se deben sumar los vectores asociados con todos los posibles caminos que conectan **I** con **F**. Con esto obtenemos el vector resultante.

**4- Obtener la probabilidad:** La longitud del vector resultante elevado al cuadrado es proporcional a la probabilidad del evento buscado.

El modelo CCA indica que **todos** los caminos que conectan el punto inicial y final deben considerarse en el cálculo del vector resultante, y tenerlos en cuenta para calcular la probabilidad. Esto plantea el problema de sumar infinitos vectores...! ¿Cómo hacer esto? Estudia las contribuciones a la suma de los vectores con la Simulación 1. Te mostrará una pantalla como la siguiente:



**Vista de la Simulación 1**

Ahora, a partir de ejecutar la simulación, elige algunos caminos posibles que conecten el punto inicial con el final (para ello toma el punto medio del camino y muévelo hacia arriba y hacia abajo) Elige caminos cercanos al camino directo y nota como varían los ángulos respecto del vector asociado al camino directo. Luego, haz lo mismo seleccionando caminos alejados al camino directo. ¿Qué relación podrías establecer entre la variación del camino y la variación de los ángulos?

La tarea que se propone en la situación tiene por objetivo que los estudiantes se familiaricen con la técnica CCA y puedan visualizar los resultados de su aplicación. Para esto se utilizan representaciones gráficas y operaciones básicas con vectores que capturan los aspectos esenciales de la teoría. El diseño de la secuencia incluye tres simulaciones realizadas con el software GeoGebra®, que es libre y conocido entre los estudiantes. Estas simulaciones alivian el cálculo y permiten visualizar los resultados de la técnica.

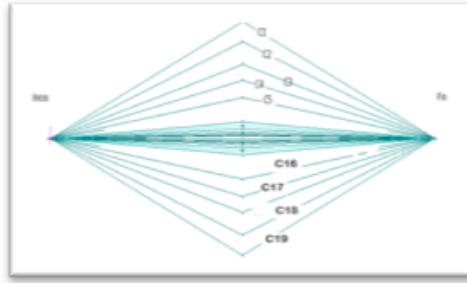
Con esta situación los estudiantes deberían concluir que hay un vector cuyo ángulo es mínimo y se corresponde con el camino de tiempo mínimo (la línea recta que conecta el inicio con el fin). Por su parte, es necesario que los estudiantes noten que los ángulos de los vectores asociados a los caminos alejados del camino de tiempo mínimo varían en forma apreciable entre caminos consecutivos, mientras que los ángulos de los vectores asociados a los caminos cercanos al de tiempo mínimo, son similares. El establecimiento de estas relaciones resulta imprescindible para reducir la suma, que en principio según la técnica CCA, es infinita, y entonces no podría calcularse la probabilidad.

### **Situación 6: Amplitud de probabilidad a partir de suma gráfica de vectores**

Una vez establecida la relación entre la variación ángulo del vector con el camino, es esencial para comprender como funciona la técnica, que los estudiantes analicen la contribución de cada vector a la suma. Para ello, se formuló la Situación 6 como se presenta a continuación, la cual requiere que los estudiantes reconozcan los resultados que muestra la simulación, y realicen la suma geométrica de los vectores.

### Situación 6

¿Todos los vectores identificados con cada camino contribuyen de la misma forma a la suma (y por lo tanto a la probabilidad)? Justifica tu respuesta.



Para que realices la suma y puedas resolver esta pregunta se tomaron de la Simulación 1 algunos caminos posibles, y se armó la tabla que está a continuación, donde se encuentra para cada uno de esos caminos, los vectores asociados a cada uno de ellos, escrito en forma polar (es decir como un par donde la primer componente es el módulo y la segunda componente es el ángulo que forma el vector con el eje x positivo) Considera que el camino denominado C10 en esta tabla, corresponde al camino directo.

Camino	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13	C14	C15	
vector	(1;90°)	(1;140°)	(1;230°)	(1;270°)	(1;320°)	(1;68°)	(1;67°)	(1;65°)	(1;64°)	(1;63°)	(1;62°)	(1;61°)	(1;60°)	(1;59°)	(1;58°)	
Camino	C16	C17	C18	C19	C20	C21	C22	C23	C24	C25	C26	C27	C28	C29	C30	C31
vector	(1;57,8°)	(1;58°)	(1;59°)	(1;60°)	(1;61°)	(1;62°)	(1;63°)	(1;64°)	(1;65°)	(1;67°)	(1;68°)	(1;320°)	(1;270°)	(1;230°)	(1;140°)	(1;90°)

Con los valores de la tabla que se presenta en la Situación 6, se espera que los estudiantes puedan construir un gráfico similar al que se presenta en la Fig. 3.

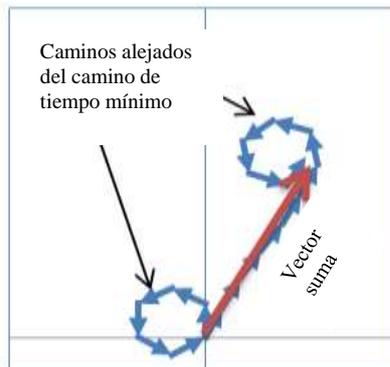


Fig. 3 – Suma de los vectores asociados, según la tabla que se presenta en la Situación 6.

A partir de esta representación gráfica se espera que los estudiantes conceptualicen que los vectores asociados a los caminos alejados al camino de tiempo mínimo se anulan entre sí y no contribuyen a la suma, y por lo tanto a la probabilidad. Los caminos que contribuyen a la suma son únicamente aquellos cercanos al camino de tiempo mínimo; por lo tanto el camino de tiempo mínimo y los de su alrededor son los que se deben tener en cuenta para el cálculo de la probabilidad de detectar luz en F, habiendo partido de I.

## Análisis didáctico de las situaciones de la Fase 2

Los componentes fundamentales de la ECPE para las situaciones de la Fase 2 se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2: Análisis didáctico previo de las situaciones de la **Fase 2**.

<b>Situación 5: Relación entre caminos alternativos, vectores asociados, ángulos y tiempo.</b>			
<p>Caminos alternativos.</p> <p>Proporcionalidad entre la amplitud de probabilidad (vector asociado) y tiempo que tomaría a la luz recorrer ese camino alternativo.</p> <p>Variación de los ángulos de los vectores asociados a los caminos alternativos según la cercanía al camino de tiempo mínimo</p>	<p><b>Seleccionar</b> caminos alternativos en la simulación.</p> <p><b>Reconocer y establecer</b> la relación entre caminos alternativos y amplitud de probabilidad (vectores asociados).</p> <p><b>Reconocer</b> un conjunto de ángulos similares asociados a los caminos cercanos al de tiempo mínimo.</p>	<p>Cada uno de los caminos alternativos corresponde a un camino real.</p> <p>La longitud del vector es proporcional a la longitud del camino.</p> <p>El ángulo que forma el camino con la horizontal en el software es el ángulo del vector asociado.</p>	<p>Los ángulos de los vectores asociados a los caminos alejados del camino de tiempo mínimo varían en forma apreciable entre caminos consecutivos.</p> <p>Los ángulos de los vectores asociados a los caminos cercanos al de tiempo mínimo son similares.</p>
<b>Situación 6: Amplitud de probabilidad a partir de suma gráfica de vectores.</b>			
<p>Superposición de amplitudes.</p> <p>Amplitud de Probabilidad Total</p>	<p><b>Medir y/o estimar</b> los ángulos.</p> <p><b>Sumar</b> gráficamente los vectores (método del polígono).</p> <p><b>Identificar</b> la contribución a la suma de cada vector asociado según la cercanía del camino de tiempo mínimo.</p> <p><b>Relacionar</b> la suma obtenida con la probabilidad de detectar la luz en F habiendo partido de I.</p>	<p>La suma de ángulos se realiza igual que la suma de números naturales</p> <p>Agregar un vector siempre aumenta el resultado de la suma.</p>	<p>Los vectores asociados a los caminos alejados al camino de tiempo mínimo se anulan entre sí y no contribuyen a la suma y por lo tanto a la probabilidad. Los cercanos sí lo hacen.</p> <p>El camino de tiempo mínimo y los de su alrededor son los que se tienen en cuenta para el cálculo de la probabilidad</p> <p>Desde el punto de vista cuántico, todos los eventos son posibles, aunque el evento en el que la luz recorre tarda el menor tiempo es el más probable</p>

### III.3 Fase 3: Aplicación de la técnica CCA a la reflexión y la refracción

Una vez que los estudiantes conceptualizan que para el cálculo de la probabilidad se deben considerar no sólo el camino de tiempo mínimo sino también los aportes de los caminos de su alrededor, se proponen las cuatro siguientes situaciones para que apliquen la técnica a las experiencias de reflexión y refracción, que interpreten los resultados que se obtienen,

notando las características cuánticas, y luego se establezca la relación entre estos resultados y los obtenidos al realizar las experiencias en el aula.

### Situación 7: La técnica CCA aplicada en la reflexión

En esta situación se presenta a los estudiantes una simulación, realizada también con GeoGebra®, denominada “Reflexión”, en la cual, de forma similar a la anterior, se propone a los estudiantes seleccionar distintos caminos alternativos de conectar el punto de partida de la luz y el de llegada, y notar cómo son los ángulos de los vectores asociados a cada uno de ellos. Se plantea a los estudiantes la Situación 7 como se muestra continuación:

**Situación 7**

*Ya establecimos a partir de la primer experiencia, que la ley que rige la reflexión en un espejo es que el ángulo con que incide la luz es igual al ángulo con que se refleja. Si las leyes de la Mecánica Cuántica son universales, apliquemos el modelo de Considerar los Caminos Alternativos para este caso y analicemos lo que se obtiene. La simulación “Reflexión” muestra los vectores identificados con cada camino que selecciones; tomamos de ella los vectores identificados con **algunos** caminos posibles, según se señalan en la figura de la izquierda (todos tienen módulo uno y ángulo proporcional al tiempo empleado por la luz para recorrerlo,  $\alpha = k.t$ ).*

Camino	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13	C14	C15	C16	C17
vector asociado	(1;450°)	(1;410°)	(1;320°)	(1;270°)	(1;230°)	(1;140°)	(1;38°)	(1;36°)	(1;37°)	(1;35°)	(1;39°)	(1;270°)	(1;330°)	(1;390°)	(1;450°)	(1;510°)	(1;570°)

a) ¿Cómo es la contribución de los vectores a la suma? ¿A qué caminos respecto al camino más corto, corresponden estos vectores?

b) En términos de probabilidades, ¿cómo se interpreta la contribución de los vectores?

Si bien en la situación anterior se concluye que el camino de tiempo mínimo y los de su alrededor son los que deben ser considerados en el cálculo de la probabilidad para el caso de la emisión y detección de la luz, la idea es analizar qué sucede en esta disposición experimental en particular. De esta forma, con la tabla anterior, los estudiantes pueden construir la suma, obteniendo un gráfico similar al de la Fig. 4.

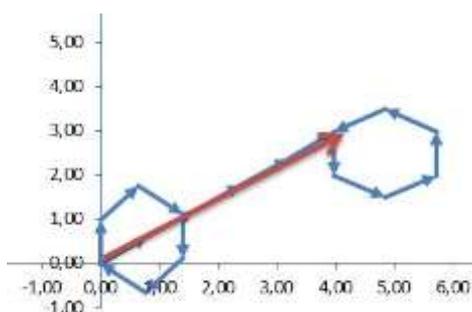


Fig. 4 – Suma de los vectores asociados, según la tabla que se presenta en la Situación 7.

A partir de este gráfico, los estudiantes pueden abordar la segunda tarea de esta situación, y construir la idea que el camino de tiempo mínimo y los de su alrededor son los únicos que contribuyen al cálculo de la probabilidad, ya que el resto se anula y por lo tanto no contribuye a la suma, de forma análoga al caso simple de emisión y detección de luz.

### **Situación 8: Relación entre la experiencia de reflexión realizada y la técnica CCA**

Aquí se propone que los estudiantes apliquen la noción de camino de tiempo mínimo antes establecida, y realicen una vinculación con el resultado experimental. Para ello se plantea:

**Situación 8**  
*¿Cómo se relaciona el resultado que se obtiene al sumar los vectores con la ley de la reflexión que concluimos en la primera experiencia?*

A partir del gráfico de la Fig. 4 es posible notar que los únicos vectores que no se anulan son aquellos que corresponden al camino de tiempo mínimo y los de su alrededor, que en el caso de la reflexión este vector es el que corresponde al camino cuyo ángulo de incidencia es igual al de reflexión. Así los estudiantes pueden concluir que la ley de reflexión establece que el ángulo de incidencia es igual al de reflexión, corroborando así los resultados de la experiencia realizada en clase y concluyendo que la técnica CCA permite explicarlos.

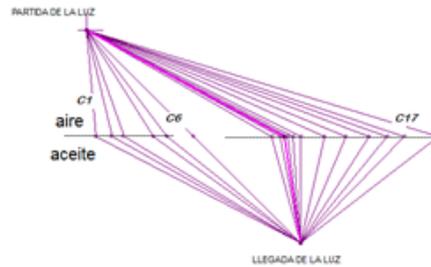
Luego, se proponen las Situaciones 9 y 10, para estudiar de forma análoga, la refracción de la luz, como se presenta a continuación.

### **Situación 9: La técnica CCA aplicada en la refracción**

De forma análoga al trabajo con la técnica CCA para la reflexión, en esta situación se plantea, trabajar con una simulación, también realizada con GeoGebra®, denominada “Refracción”. De forma similar a la anterior, se propone a los estudiantes seleccionar distintos caminos alternativos de conectar el punto de partida de la luz y el de llegada, y notar cómo son los ángulos de los vectores asociados a cada uno de ellos. Se plantea a los estudiantes la Situación 9.

### Situación 9

A partir de la segunda experiencia, acordamos que cuando la luz viaja y pasa de un medio a otro (por ejemplo del aire al agua, o al aceite) cambia de dirección, es decir se refracta. Tratemos de explicar este fenómeno desde el modelo de Considerar los Caminos Alternativos que nos proporciona la Mecánica Cuántica. La simulación "Refracción" muestra los vectores identificados con cada camino que seleccionamos; tomamos de ella los vectores identificados con **algunos** caminos posibles, según se señalan en la figura siguiente (todos tienen módulo uno y ángulo proporcional al tiempo empleado por la luz para recorrer cada camino posible,  $\alpha = k \cdot t$ ). En este caso, a diferencia de cuando la luz se reflejaba en un espejo, la luz atraviesa un medio como el aceite, y por lo tanto, cambia su velocidad.



Camino	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13	C14	C15	C16	C17
Vector asociado	(1, 90°)	(1, 150°)	(1, 210°)	(1, 270°)	(1, 330°)	(1, 390°)	(1, 315°)	(1, 312°)	(1, 310°)	(1, 313°)	(1, 314°)	(1, 280°)	(1, 340°)	(1, 400°)	(1, 460°)	(1, 520°)	(1, 580°)

- Realiza la suma de los vectores.
- ¿Cuáles son los vectores que contribuyen a la suma y cuáles no contribuyen? ¿A qué caminos corresponden estos vectores?

La tabla ofrecida en la **Situación 9** presenta un conjunto de vectores que fueron seleccionados de tal forma que, al construir la suma, se obtiene un gráfico similar al siguiente:

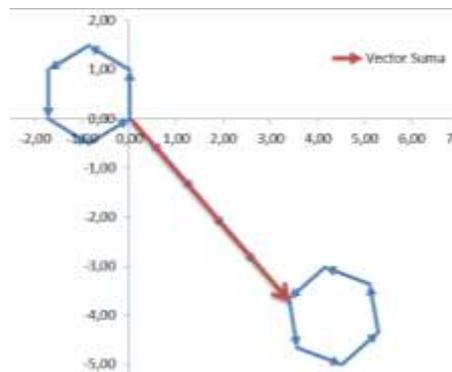


Fig. 5 – Suma de los vectores asociados, según la tabla que se presenta en la Situación 9.

Los valores de los ángulos fueron seleccionados de forma tal que los estudiantes puedan notar aquellos vectores que se cancelan, y aquellos que contribuyen a la suma.

## Situación 10: Relación entre la experiencia de refracción realizada en clase y la técnica CCA

Aquí se propone que los estudiantes apliquen la noción de camino de tiempo mínimo antes establecida y corroborada para la reflexión, ahora para la refracción. Para ello se plantea la **Situación 10**, como se muestra a continuación:

**Situación 10**  
*En términos de probabilidades, ¿cómo se interpreta la contribución de los vectores cercanos al camino de tiempo mínimo para la luz en la refracción?*

Con estas dos últimas situaciones los estudiantes estarían en condiciones de conceptualizar que el camino de tiempo mínimo, al igual que antes, junto con los caminos de alrededor son los que deben ser tenidos en cuenta para el cálculo de la probabilidad. Al abordar la **Situación 10** se espera que los estudiantes reconozcan que al igual que en el caso de la reflexión, el camino de tiempo mínimo es el que se observa a simple vista en la refracción, que en este caso no coincide con el más corto.

### Análisis didáctico de las situaciones de la Fase 3

Los componentes fundamentales de la ECPE para las situaciones de la Fase 3 se presentan en la Tabla 3.

Tabla 3: Análisis didáctico previo de las situaciones de la Fase 3.

<b>SITUACIÓN 7: La técnica CCA aplicada en la reflexión</b>			
<b>Conceptos de la ECR</b>	<b>Tareas para los estudiantes</b>	<b>I.O. anticipados</b>	<b>I.O en acuerdo con la ECR</b>
Caminos alternativos.  Proporcionalidad entre la amplitud de probabilidad y tiempo que tomaría a la luz recorrer ese camino alternativo.  Variación de los ángulos de los vectores asociados a los caminos alternativos según la cercanía al camino de tiempo mínimo.  Superposición de amplitudes.  Amplitud de Probabilidad Total	<b>Ejecutar</b> la simulación, seleccionando distintos caminos posibles para la luz.  <b>Sumar</b> gráficamente los vectores (método del polígono) ofrecidos.  <b>Identificar</b> la contribución a la suma de cada vector asociado según la cercanía del camino de tiempo mínimo.  <b>Relacionar</b> la suma obtenida con la probabilidad de detectar la luz en F habiendo partido de I, pasando por el espejo.	Los distintos caminos para la reflexión de la luz, que muestra la simulación son reales, y generados por el movimiento del láser.	El camino de tiempo mínimo, junto con los caminos de su alrededor son los que deben ser tenidos en cuenta para el cálculo de la probabilidad.  Los vectores asociados a los caminos alejados al camino de tiempo mínimo se anulan entre sí y no contribuyen a la suma y por lo tanto a la probabilidad. Los cercanos sí lo hacen.  Desde el punto de vista cuántico, todos los eventos son posibles, aunque el evento en el que la luz recorre tarda el menor tiempo es el más probable
<b>SITUACIÓN 8: Relación entre la experiencia de reflexión realizada y la técnica CCA</b>			
Variación de los ángulos de los vectores asociados a los caminos alter-	<b>Interpretar</b> los resultados de la técnica con la experiencia realizada en clase.	La CCA establece que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de	La ley de reflexión establecida experimentalmente se puede explicar desde la téc-

<p>nativos según la cercanía al camino de tiempo mínimo.</p> <p>Superposición de amplitudes.</p> <p>Amplitud de Probabilidad Total.</p> <p>Angulo de incidencia y ángulo de reflexión.</p> <p>Probabilidad de detectar luz.</p>		reflexión.	<p>nica CCA, ya que los vectores que no se anulan son los que corresponden al camino para el cual el ángulo de incidencia es igual al de reflexión, y los caminos de sus alrededores. Además, el de tiempo mínimo coincide con es el más corto.</p> <p>La técnica CCA de la Mecánica Cuántica es aplicable a los casos de reflexión.</p> <p>Las leyes de la Mecánica Cuántica son universales (permiten explicar tanto fenómenos macroscópicos como microscópicos).</p>
<b>SITUACIÓN 9:</b> La técnica CCA aplicada en la refracción			
<p>Caminos alternativos.</p> <p>Proporcionalidad entre la amplitud de probabilidad y tiempo que tomaría a la luz recorrer ese camino alternativo.</p> <p>Variación de los ángulos de los vectores asociados a los caminos alternativos según la cercanía al camino de tiempo mínimo.</p> <p>Superposición de amplitudes.</p> <p>Amplitud de Probabilidad Total.</p> <p>Ángulo de refracción.</p>	<p><b>Ejecutar</b> la simulación, seleccionando distintos caminos posibles para la luz.</p> <p><b>Sumar</b> gráficamente los vectores (método del polígono) ofrecidos.</p> <p><b>Identificar</b> la contribución a la suma de cada vector asociado según la cercanía del camino de tiempo mínimo.</p> <p><b>Relacionar</b> la suma obtenida con la probabilidad de detectar la luz en F habiendo partido de I, luego de atravesar los dos medios.</p>	<p>Los distintos caminos para la refracción de la luz, que muestra la simulación son reales, y generados por el movimiento del láser.</p>	<p>El camino de tiempo mínimo, junto con los caminos de su alrededor son los que deben ser tenidos en cuenta para el cálculo de la probabilidad.</p> <p>Los vectores asociados a los caminos alejados del camino de tiempo mínimo se anulan entre sí y no contribuyen a la suma y por lo tanto a la probabilidad. Los cercanos sí lo hacen.</p> <p>Desde el punto de vista cuántico, todos los eventos son posibles, aunque el evento en el que la luz recorre tarda el menor tiempo es el más probable</p>
<b>SITUACIÓN 10:</b> Relación entre la experiencia de refracción realizada en clase y la técnica CCA			
<p>Variación de los ángulos de los vectores asociados a los caminos alternativos según la cercanía al camino de tiempo mínimo.</p> <p>Superposición de amplitudes.</p> <p>Amplitud de Probabilidad Total.</p> <p>Angulo de incidencia y ángulo de refracción.</p>	<p><b>Interpretar</b> los resultados de la técnica con la experiencia realizada en clase.</p>	<p>La CCA establece que la luz se desvía al pasar de un medio a otro, porque cambia su velocidad.</p>	<p>El fenómeno de refracción se puede explicar desde la técnica CCA, ya que los vectores que no se anulan son los que corresponden al camino para el cual el camino resulta de menor tiempo y los de su alrededor. El camino de tiempo mínimo coincide con el fenómeno de refracción observado experimentalmente.</p> <p>Las leyes de la Mecánica Cuántica son universales</p>

Probabilidad de detectar luz.			(permiten explicar tanto fenómenos macroscópicos como microscópicos)
-------------------------------	--	--	--

### III.4 Fase 4: La EDR desde la técnica CCA

Esta última fase tiene por objetivo reformular los resultados de la EDR, tanto la realizada en clase como la presentada mediante imágenes, utilizando la CCA, ya que esta experiencia es vertebral en la secuencia.

#### Situación 11: La técnica CCA aplicada a la EDR

Para que los estudiantes puedan interpretar la deducción de la forma de  $P(x)$ , la secuencia propone que los estudiantes lean y analicen el texto se encuentra en el Anexo 1, antes de abordar las preguntas de las situaciones de esta fase. Se plantea esta situación para que los estudiantes analicen las características de la función de probabilidad recién hallada, para luego, establecer relaciones con los resultados experimentales. Esta situación requiere que los estudiantes conozcan y apliquen nociones relacionadas con las funciones trigonométricas previas, así como forma de una función armónica, ceros, máximos y mínimos.

**Situación 11**

*Grafica la última expresión obtenida para la función  $P(x)$ , y describe cómo varía la probabilidad según la distancia al centro de la pantalla,  $x$ . Aproxima los valores experimentales para  $D$  (distancia desde las rendijas hasta la pared) y  $d$  (distancia entre rendijas) y el valor de la constante de proporcionalidad  $k$ , que corresponde al color del láser rojo es  $k= 430.10^{12}(s^{-1})$*

Por ejemplo  $D=3000\text{mm}$ ,  $d=3\text{mm}$ , y se considera  $c=3.10^{11} \text{ mm/s}$ , y  $k= 430.10^{12}\text{s}^{-1}$ , se obtiene un gráfico para  $P(x)$  como se muestra en la Fig. 6, en donde los valores máximos y mínimos coinciden con los resultados obtenidos en la experiencia en el aula, donde la separación entre máximos y mínimos es del orden del milímetro:

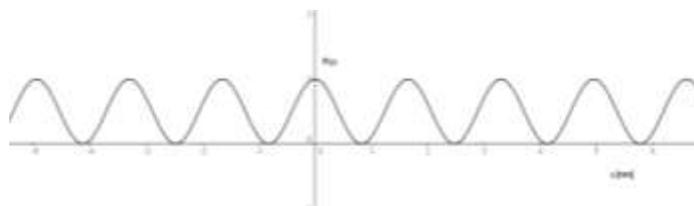


Fig. 6 – Gráfico de  $P(x)$  que se obtiene a partir de la expresión obtenida al aplicar la técnica CCA para el caso de la EDR.

A partir del reconocimiento de las características de esta función, se espera que los estudiantes puedan interpretarla según lo que representa: por un lado, que la función sólo toma valores positivos, lo cual es acorde con cada valor que puede tomar la probabilidad, y por otro lado, que la función toma valores máximos y mínimos en forma periódica. Asimismo,

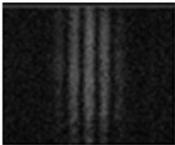
que ellos noten que un máximo en la función se corresponde con la probabilidad máxima, mientras que un mínimo en la función se corresponde con la probabilidad nula.

### **Situación 12: Interpretación de los resultados de la EDR en pantalla desde la Teoría Cuántica**

Para que los estudiantes establezcan la correspondencia entre los máximos y mínimos de probabilidad graficada en la **Situación 11**, ahora con los resultados de la EDR que muestra las detecciones individuales, se plantea la siguiente situación:

**Situación 12**

*Relaciona los valores máximos y mínimos de la función  $P(x)$  que dibujaste recién, con las detecciones individuales que se observan experimentalmente al realizar la Experiencia de la Doble Rendija, que aquí nuevamente te mostramos.*



Aquí se espera que los estudiantes construyan la idea que un máximo en la función de probabilidad indica una probabilidad máxima de detección de luz en ese lugar de la pantalla. Por el contrario, un mínimo en la función de probabilidad indica que en ese lugar la probabilidad de obtener detecciones de luz es mínima, es decir, se trata de una franja de oscuridad.

### **Situación 13: Interpretación de los resultados de la EDR aplicando la técnica CCA**

Se plantea una última situación para que los estudiantes identifiquen que en cada lugar de la pantalla de detección de la EDR (ya sea la realizada en el aula o la analizada mediante imágenes) la probabilidad se obtiene principalmente con el aporte de dos vectores asociados a los dos caminos principales para la luz (que unen cada rendija con el punto de detección  $x$ ).

**Situación 13**

*Para analizar gráficamente la suma de los vectores asociados a cada rendija y obtener la probabilidad en cada punto de la pantalla, ejecuta la Simulación "EDR desde la Consideración de Caminos Alternativos".*

*a) Transcribe aquí algunas de las imágenes obtenidas al correr la simulación.*

*b) Analiza lo que va ocurriendo con los vectores asociados a cada camino, con la suma y con la formación de la función de  $P(x)$  que se muestra a la derecha.*

En esta situación se construyó una cuarta simulación con Modellus<sup>MT</sup>, en la cual se va construyendo el gráfico de la función  $P(x)$  para cada valor de  $x$ , y simultáneamente se dibu-

jan los dos vectores principales que aportan al cálculo de probabilidad. En la Fig. 7, se muestran algunas de las pantallas que presenta la simulación:

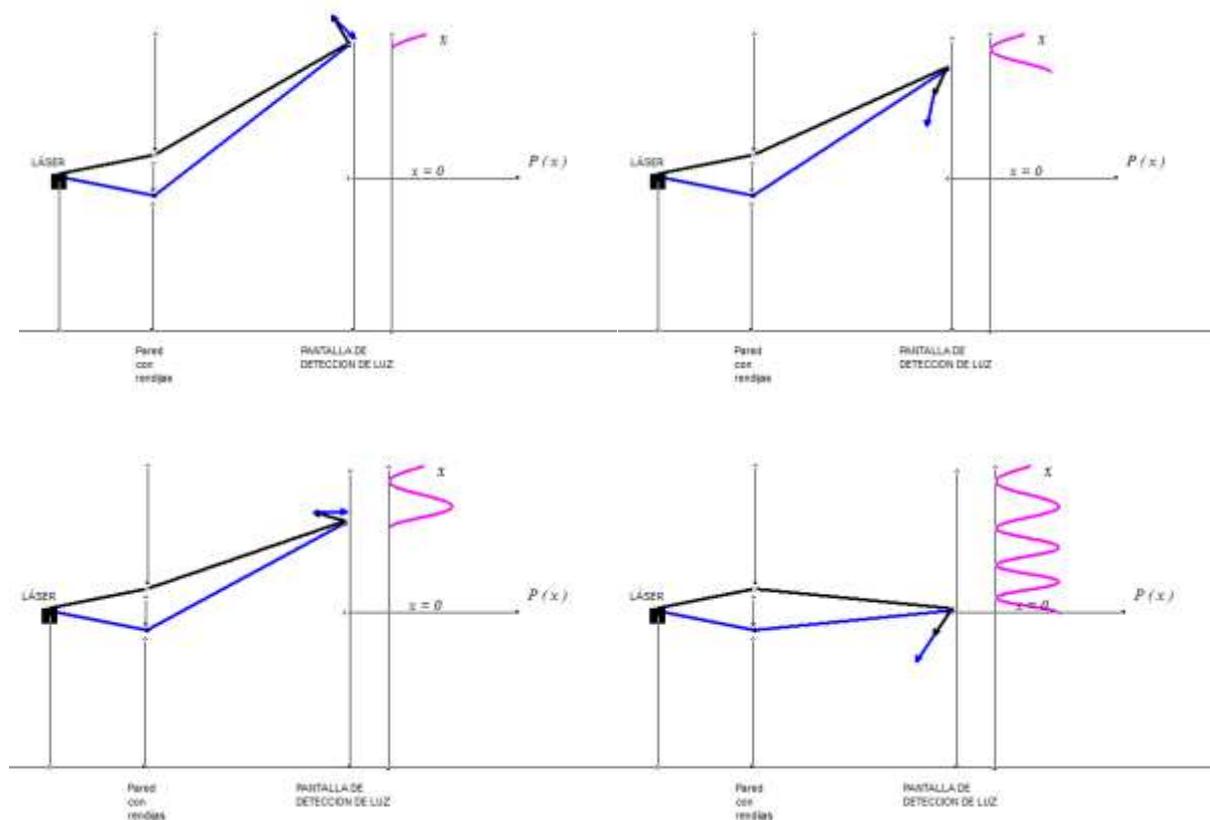


Fig. 7 – Algunas pantallas de salida de la Simulación “EDR”, diseñada con Modellus™.

Los estudiantes deben notar que en aquellos lugares donde la suma de los dos vectores se anula, porque tienen la misma dirección y sentido opuesto, la función  $P(x)$  tiene un mínimo, y por el contrario, cuando la suma resulta máxima debido a que los vectores se encuentran colineales, la función tiene un máximo.

#### Análisis didáctico de las situaciones de la Fase 4

Los componentes fundamentales de la ECPE para las situaciones de la Fase 3 se presentan en la Tabla 3.4.

Tabla 4: Análisis didáctico previo de las situaciones de la Fase 4.

SITUACIÓN 11: La técnica CCA aplicada a la EDR			
Conceptos de la ECR	Tareas para los estudiantes	I.O. anticipados	I.O en acuerdo con la ECR
	<p><b>Estimar</b> valores experimentales.</p> <p><b>Obtener</b> un valor para el argumento.</p>	<p>La función coseno cuadrado tiene la forma de una función conocida (constante, lineal o cuadrática).</p>	<p>Como se trata de una función coseno cuadrado, la función toma sólo valores positivos, es periódica, y presenta máximos y mínimos en lugares determinados.</p>

Máximos y mínimos de la función de probabilidad.  Periodicidad de una función armónica.	<b>Graficar y caracterizar</b> la función $P(x)$ a partir de los parámetros.  <b>Interpretar</b> las características de la curva en términos de probabilidades.		Un máximo en la función corresponde con probabilidad máxima.  Un mínimo en la función corresponde con probabilidad cero.
<b>SITUACIÓN 12:</b> Interpretación de los resultados de la EDR en pantalla desde la Teoría Cuántica.			
Concentración de detecciones individuales de luz, pero formando franjas.	<b>Identificar</b> la correspondencia entre los máximos y mínimos de probabilidad con las zonas de concentración de detecciones.	Los resultados experimentales no se vinculan con la expresión matemática de la probabilidad.	Un máximo en la función corresponde con máxima intensidad de luz, mientras que un mínimo en la función corresponde con oscuridad; el lugar de máxima concentración de detecciones se corresponde con la probabilidad máxima
<b>SITUACIÓN 13:</b> Interpretación de los resultados de la EDR aplicando la técnica CCA.			
Caminos alternativos asociados a cada rendija.  Reducción de todos los caminos a sólo dos.	<b>Identificar</b> cada lugar de la pantalla de detección con el resultado de la suma de los dos vectores principales, asociados a cada camino directo de la rendija al lugar analizado.	La probabilidad se calcula solamente con el aporte de dos vectores asociados (uno por cada rendija).  En aquellos lugares donde la suma es máxima hay luz y donde es mínima hay oscuridad.	En cada lugar de la pantalla de detección la probabilidad se construye con el aporte de los dos vectores asociados a los caminos de tiempo mínimo, puesto que el resto de los vectores se cancelan.  La técnica CCA de la Mecánica Cuántica permite explicar los resultados de la EDR, tanto la realizada con luz en clase como la experiencia realizada con detectores especiales, donde la llegada de luz se detecta en forma discreta.  Las leyes de la Mecánica Cuántica son universales (permiten explicar tanto fenómenos macroscópicos como microscópicos)

#### IV. Comentarios finales

En este trabajo se presentó una secuencia de situaciones para abordar el aspecto cuántico de la luz dirigida a estudiantes del último año de la escuela secundaria, y se realizó un análisis didáctico y cognitivo basado en la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud. Un aspecto muy destacable de la secuencia es que la formulación de Feynman ofrece una vía matemáticamente simple y físicamente diáfana para que los estudiantes de la escuela secundaria tengan un primer encuentro con los conceptos cuánticos básicos, que más adelante podrán ser retomados y profundizados. El análisis se focalizó en los conceptos que conforman la ECR, y en los posibles procesos de construcción por parte de los estudiantes.

La Teoría de los Campos Conceptuales de Gérard Vergnaud habilita también un análisis didáctico, porque la conceptualización que propone es pragmática, es decir ligada a acciones y fases que no pueden desvincularse de la estructura del conocimiento en juego. En

un análisis didáctico que considera esencial el proceso de Transposición Didáctica, es ineludible el análisis epistemológico que se plasma en las situaciones que producen la emergencia de unos conceptos y no de otros, y de los invariantes operatorios que les son propios, y los sistemas de representación. La definición de concepto de Vergnaud como la terna situación, invariantes operatorios y sistemas de representación, es una valiosa herramienta para la gestión del saber.

El resultado del análisis didáctico permite notar que en las primeras situaciones la utilización y reformulación de los invariantes operatorios de los estudiantes debería favorecer la conceptualización de la reflexión y refracción de luz sin mayores obstáculos, por tratarse de situaciones cotidianas. Se plantea la necesidad de que los estudiantes construyan los conceptos de reflexión y refracción, y noten la distribución en franjas de la luz en la EDR, porque luego estas experiencias serán reformuladas en términos cuánticos. También se prevé que la mayor dificultad para la conceptualización se manifestará al presentar a los estudiantes la técnica CCA, puesto que allí difícilmente se tienen los invariantes operatorios que requieren su aplicación, y entonces deberán ser construidos al afrontar las situaciones propuestas. Se estableció también que si los estudiantes logran construir los invariantes relativos a la importancia del tiempo mínimo y su aporte al cálculo de la probabilidad, en acuerdo con los de la ECR, éstos podrían ser aplicados en las primeras experiencias, y así accederán a apreciar la universalidad de la Mecánica Cuántica.

Esta secuencia ya fue implementada cuatro veces, con resultados satisfactorios desde el punto de vista de su viabilidad institucional. El análisis de la conceptualización que está en curso ofrecerá indicadores precisos acerca de los obstáculos y las ayudas a la conceptualización, así como los ajustes necesarios para futuras implementaciones. Uno de los ajustes que se prevé realizar es la reformulación de las situaciones para incrementar la adidacticidad. Por ejemplo, analizar qué preguntas son necesarias en cada situación y cuáles pueden omitirse y quedar a cargo de los estudiantes, o si es posible prescindir de la presentación de las tablas para que los estudiantes realicen la suma geométrica a partir de ella.

## Referencias

ARLEGO, M.; FANARO, M.; OTERO, M. R. Teaching different aspects of light in the unified framework of quantum mechanics. In: WORLD CONFERENCE ON PHYSICS EDUCATION, 2013, PegemAcademi, Istanbul. **Proceedings...** p. 795-799.

CHEVALLARD, Y. **La Transposición Didáctica. Del saber sabio al Saber enseñado.** Aique: Buenos Aires, 1999.

DOWRICK, N. J. Feynman's sum-over-histories in elementary quantum mechanics. **European Journal of Physics**, v. 18, p. 75-78, 1997.

FANARO, M; OTERO, M. R; ARLEGO, M. A Teaching the foundations of quantum mechanics in secondary school: a proposed conceptual structure. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 14, n. 1, p. 37-64, 2009.

FANARO, M; OTERO M. R.; ARLEGO, M. A proposal to teach the light at secondary school from the Feynman method. **Problems of Education in the 21st Century**, v. 47, p. 27-39, 2012a.

FANARO, M; OTERO M. R.; ARLEGO, M. Teaching basic Quantum Mechanics in Secondary School using concepts of Feynman's Path Integrals Method. **The Physics Teacher**, v. 20, p. 156-158, 2012b.

FANARO, M; OTERO M. R.; ARLEGO, M. The double slit experience with light from Feynman's Sum of Multiple Paths viewpoint. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 36, n. 2, p. 1-7, 2014.

FANARO, M; OTERO M. R.; ELGUE, M. Implementation of a proposal to teach quantum mechanics concepts from the Multiple Paths of Feynman applied to the light. In: GIREP-MPTL INTERNATIONAL CONFERENCE ON TEACHING/LEARNING PHYSICS: INTEGRATING RESEARCH INTO PRACTICE, 2014, University of Palermo, Italy. **Proceedings...**

GEOGEBRA®. Disponible en: <[www.GeoGebra.org](http://www.GeoGebra.org)>.

HANC, J.; TULEJA, S. The Feynman quantum mechanics with the help of Java applets and physlets in Slovakia. In: WORKSHOP ON MULTIMEDIA IN PHYSICS TEACHING AND LEARNING, 10<sup>th</sup>, 2005, Freie Universität, Berlin. **Proceedings...**

HOBSON, A. Teaching Quantum Physics without paradoxes. **The Physics Teacher**, v. 45, 2007.

MALGIERI, O.; DE AMBROSIS, A. Teaching quantum physics by the sum over paths approach and GeoGebra simulations. **European Journal of Physics**, v. 35, n. 5, 2014.

OGBORN, J.; HANC, J.; TAYLOR, E. Action on Stage: ways to unify Classical and Quantum Physics using the action model. In: THE GIREP CONFERENCE 2006, MODELING IN PHYSICS AND PHYSICS EDUCATION, 2006, AMSTEL Institute, Amsterdam. **Proceedings...** p. 213.

OTERO, M. R. Emociones, sentimientos y razonamientos en Didáctica de las Ciencias. **Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias**, v. 1, n. 1, p. 24-53, 2006. Disponible en: <<http://ppct.caicyt.gov.ar/index.php/reiec/article/view/7350/6603>>. Acceso en: 1 mar. 2016.

OTERO, M. R. Emociones, sentimientos y razonamientos en Educación Matemática. In: ENEM, I, 2007, Tandil, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. **Actas...**

OTERO, M. R. La Notion de situation: analysée depuis la théorie des champs conceptuels, la théorie des situations, la dialectique outil-object et la théorie anthropologique du didactique. **Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias**, v. 5, n. 1, p. 42-53, 2010. Disponible en: <<http://ppct.caicyt.gov.ar/index.php/reiec/article/view/7414/6672>>. Acceso en: 01 mar. 2016.

OTERO, M. R.; FANARO, M. A. Physics Didactic, Affect and Conceptualization. Review of Science. **Mathematics and Ict Education**, v. 5, n. 2, p 5-26, 2011.

OTERO, M. R; FANARO, M; SUREDA, P; LLANOS, V C; ARLEGO, M. La teoría de los campos conceptuales y la conceptualización en el aula de Matemática y Física. Buenos Aires: Editorial Dunken, 2014. 124 p.

TAYLOR E.; VOKOS, S.; O'MEARA; J.; THORNBUR, N. Teaching Feynman's sum over paths Quantum Theory. **Computers in Physics**, v. 12, p. 190-199, 1998.

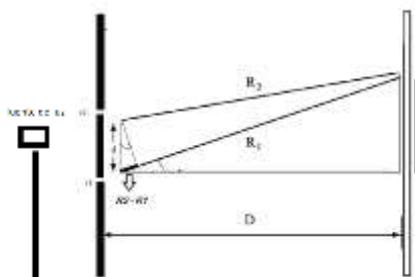
VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 10, n. 2/3, p.133-170, 1990.

VERGNAUD, G. Pourquoi la théorie des champs conceptuels? **Infancia y Aprendizaje**, v. 36, n. 2, p. 131-161, 2013a.

VERGNAUD, G. Conceptual development and learning. **Curriculum**, v. 26, p. 39-59, 2013b. Disponible en: <<http://curriculum.webs.ull.es/?p=731>>. Acceso en : 01 mar. 2016.

## Anexo 1

Analicemos la experiencia de la doble rendija, considerando las **detecciones individuales** de la luz. Recordemos que al principio las detecciones de la luz parecían ser aleatorias, es decir no se notaba en la pantalla ninguna formación en particular, pero al pasar el tiempo, se comenzaba a notar una distribución, donde había lugares donde había gran cantidad de detecciones, y lugares donde no había, o había muy pocas, detecciones de luz. Nos preguntamos ahora ¿Cómo calcular la probabilidad de detectar la luz para cada lugar de la pantalla? La teoría indica que debemos utilizar para ello la técnica de Considerar los Caminos Alternativos de la Mecánica Cuántica. A continuación se presenta un esquema de la experiencia, para poder analizar la cuestión de cómo determinar la probabilidad de detectar luz en determinado lugar de la pantalla, a cierta distancia, digamos  $x$ , del centro de la pantalla.



Sabemos, por lo que calculamos la técnica para el caso más simple (luz que va de un punto inicial dado a otro punto final dado) que los vectores que entran en la consideración de la probabilidad, son los vectores identificados con el camino directo (que es el más corto) y un conjunto finito de vectores asociados a los caminos cercanos, digamos “ $N$ ”. Es decir, en el cálculo de la probabilidad habrá que considerar  $N$  veces el vector cuyo ángulo es proporcional al tiempo mínimo, al cuadrado:

$$\vec{V}_1(r_1 \rightarrow x) = N (1; kt_{\min})$$

Recordemos que  $k$  es una constante de proporcionalidad que depende del color de la luz y del medio en el que la luz se propaga. Como en este caso se trata de aire, la constante solo depende del color de la luz.

Es posible anotar este vector utilizando la notación de coordenadas:

$$\vec{V}_1(r_1 \rightarrow x) = N (\cos(kt_1); \text{sen}(kt_1))$$

Para la otra rendija, en forma análoga tenemos que

$$\vec{V}_2(r_2 \rightarrow x) = N (\cos(kt_2); \text{sen}(kt_2))$$

Ahora, debemos hacer la suma de los dos vectores,

$$\begin{aligned} \text{Vector suma } (x) &= \vec{V}_1(r_1 \rightarrow x) + \vec{V}_2(r_2 \rightarrow x) \\ &= N ((\cos(kt_1); \text{sen}(kt_1)) + N ((\cos(kt_2); \text{sen}(kt_2))) \end{aligned}$$

Realizando en forma analítica la suma de los vectores, y luego elevando el resultado al cuadrado, se obtiene la siguiente expresión para la detección de la probabilidad en determinado lugar  $x$  del centro de la pantalla:

$$P(x) \approx \frac{\cos^2(kt_2 - kt_1)}{2}$$

Para expresar la probabilidad en función de la geometría de la situación, reemplacemos al tiempo por la distancia sobre la velocidad (en este caso es  $c$  la velocidad de la luz) para cada caso:  $t_2 = R_2/c$  y  $t_1 = R_1/c$ . Por lo tanto,

$$kt_2 - kt_1 = R_2/c - R_1/c = (R_2 - R_1)/c \text{ (ver esquema de la experiencia)}$$

Entonces, la expresión final queda: 
$$P(x) \approx \frac{\cos^2(R_2 - R_1)}{2c}$$

Podemos realizar aún más consideraciones geométricas para expresar la diferencia de caminos  $R_2 - R_1$  en términos de la distancia entre las rendijas ( $d$ ) o la distancia a la pantalla de detección  $D$ , y suponemos que  $D \gg d$ :

Como los triángulos son semejantes, tenemos que  $\frac{R_2 - R_1}{d} = \frac{x}{D}$  entonces,

$$R_2 - R_1 = \frac{x}{D}d$$

Reemplazando esto en la ecuación de  $P(x)$  llegamos a la expresión:

$$P(x) \approx \frac{\cos^2(kd x)}{2cD}$$

Esta es la expresión matemática de la probabilidad de detectar luz a una distancia  $x$  del centro de la pantalla, que predice la técnica de Considerar Caminos Alternativos. Debemos analizar si esta predicción es acorde a lo que obtuvimos al realizar la experiencia en clase.