Caractérisation des fonctions didactiques Topogenèse, Mésogenèse et Chronogenèse dans un Parcours d'Étude et Recherche (PER) monodisciplinaire dans l'École Secondaire

Characterization of the didactic functions Topogénesis, Mesogénese and Chronogénese in a Study and Research Course (SRC) monodisciplinary in Secondary School

Viviana Carolina Llanos[a]*; María Rita Otero[a]

[a]Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología; Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires; e Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. Argentina.
*E-mail: vcllanos@exa.unicen.edu.ar

Résumé

Ce travail présente quelques résultats d'une recherche qui essaie d'introduire les PER dans l'école secondaire en Argentine. Le PER développé a permis de « couvrir » le programme de mathématiques des trois dernières années de l'école secondaire, mais ici on décrit seulement les résultats de la première partie, laquelle est liée à l'étude des fonctions polynomiales de deuxième degré. On analyse quelques caractéristiques de l'Organisation Praxéologique de Référence (OPR) et de l'activité mathématique développée dans le PER.

Mots clés: Parcours d'Étude et de Recherche (PER). Fonctions Polynomiales du Second Degré. Fonctions Didactiques. École Secondaire.

Abstract

This work presents some results of a research that try to introduce Study and Research Course (SRC) in the secondary school in Argentina. The RSC allows to "cover" the program of mathematics of the last three years of the secondary school, but this work describes the results of the first report, which allows reconstructing the Mathematical Organization (MO) of the polynomial functions of the second. The characteristics of the Mathematical Organization effectively Reconstructed (MOER) and the mathematical activity developed in the RSC are analyzed.

Keywords: *Study and Research Course (SRC). Polynomial Functions of the Second Degree. Didactic Functions. Secondary School.*

1 Introduction

Dans ce travail on présente des résultats d'introduire d'une manière expérimentale et contrôlée, la *P*édagogie de l'*Enquête et du Questionnement du Monde*, au moyen des *Parcours d'Étude et de Recherche* (PER) (Chevallard, 2009, 2013) dans l'école secondaire en Argentine. La recherche est partie depuis la question génératrice Q_0: *Comment effectuer des opérations avec n'importe quelles courbes si l'on connait seulement ses représentations graphiques et l'unité sur les axes?* Les réponses possibles à cette question peuvent générer des différents parcours, cela dépend des courbes choisies et des opérations à faire entre les fonctions.

Il y a quelques recherches qui mettent en œuvre des PER, mais principalement dans des cours spéciaux, non dans des classes régulières de Mathématiques. Les travaux de Barquero (2009) ; Boigues, Estruch, Roig, Vidal (2013) ; Costa, Arlego et Otero (2013) ; Salgado, Otero et Parra (2017) ; Ladage y Chevallard (2011) et Serrano, Bosch et Gascón (2007, 2013) proposent, mettent en application et analysent un enseignement par PER dans l'Université. Les recherches menées par Fonseca (2011) ; Fonseca, Pereira et Casas (2011) ; García, Bosch, Gascón et Ruiz (2005) s'établissent aux écoles secondaires, les RSP sont activités hors du programme réalisées dans des ateliers spéciaux. Dans les classes habituelles de mathématiques les travaux de Donvito, Otero et Sureda (2014) **;** Parra, Otero et Fanaro (2015) **;** Otero, Llanos, Parra et Sureda (2014) ; Gazzola, Otero, Llanos (2015) ont développé des PER dans des cours réguliers de mathématiques. Dans ce travail le PER mis en œuvre correspond à une étude longitudinale durant deux ans dans les classes régulières de l'école secondaire.

Le PER proposé dans ce travail commence avec les élèves de la 4*éme* année (14 et 15 ans) de l'école secondaire en Argentine et il continue pendant l'année suivante, c'est-à-dire pendant la 5*éme* année. Comme on est dans un contexte scolaire réel, les PER essaient de «couvrir» le programme d'étude. Dans ce travail sont décrites les réponses initiales à Q_0 qui ont proposé par les élèves, elles sont consécutives à l'introduction du PER. Nous analysons et justifions les caractéristiques d'un PER qui dans sa première phase, nous a amené à étudier l'organisation mathématique des fonctions polynomiales de deuxième dégrée (Llanos, Otero, 2013), et dans l´année suivante les fonctions polynomiales (Llanos, Otero, Colombo, 2015) et rationnelles (Gazzola, Llanos, Otero, 2013). Dans cet article, nous décrivons seulement la première partie du PER, en partant de la question Q_1 *: Comment faire le produit de deux droites, si l'on connaît seulement leur représentation graphique et l'unité sur les axes ?* À partir des résultats obtenus de l›étude de Q_1, dans six cours différents, on peut répondre aux questions :

- Quelles sont les caractéristiques de l'OM effectivement étudiée par la classe ?

- Quelles sont les caractéristiques de l'activité mathématique développée dans le PER?

2 Cadre Théorique

La Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) (Chevallard, 1999) a proposé un nouveau paradigme nommé de *l'enquête et du questionnement du Monde* (Chevallard, 2013), pour substituer au paradigme dominant le dit « de visite aux œuvres ». Une conséquence de la mise en œuvre de ce paradigme émergent, ce sont les *Parcours d'Étude et de Recherche* (PER) (Ibid., 2009). Selon Chevallard, les programmes d'études devraient consister en paires de questions et de réponses $P=(Q_i;R_i)_{1\leq i\leq n}$, à partir d'une question génératrice Q. Il s'agit des questions dont la réponse permet de retrouver les Praxéologies ou Organisations Mathématiques (OM) proposées pour étudier dans les programmes d'étude. Ces réponses doivent être réponses dans un fort sens, et pas simplement de la reproduction d'information.

Chevallard a beaucoup souligné que les réformes éducatives successives ont substitué l'étude de questions Q par l'apprentissage de réponses R. Par conséquent, les programmes d'études s'agissent d'une succession de réponses qu'on ne sait pas bien à quelles questions répondent, $P=(?;R_i)_{1\leq i\leq n}$. Alors, les questions à étudier sont des questions « mortes », dépourvues de sens et de raison d'être pour les élèves aussi que pour les enseignants. Les PER permettant de reformuler les programmes d'études à partir d'un ensemble de questions « cruciales » ou « génératrices », au même temps, cela demande aboutir le modèle d'enseignement traditionnel et le paradigme dominant de la visite des œuvres.

La générativité de Q_0 est cruciale dans les PER, donc elle produit l'émergence des plusieurs Organisations Mathématiques (OM). Le schéma herbartien développé $[S(X;Y;Q) \rightarrow \{R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, \dots, R_n^\lozenge, Q_{n+1}, \dots, Q_m, O_{m+1}, \dots, O_p\}] \rightarrow R^\heartsuit$ (Otero, et. Al., 2013) exprime les caractéristiques et la manière d'élaborer la réponse dans un PER: elle doit s'organiser autour d'une question génératrice (Q_0), celle-ci est une exigence *sine qua non*; elle doit permettre la création d'un milieu M, $M=\{R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, \dots, R_n^\lozenge, Q_{n+1}, \dots, Q_m, O_{m+1}, \dots, O_p\}$ pour obtenir à la fin du processus, l'élaboration, validation et institutionnalisation d'une réponse $R^\heartsuit$. Les PER permettent observer, analyser et évaluer les réponses « déjà faites » $R_i^\lozenge{}_{1\leq i\leq n}$ - existantes dans la culture, celles qui peuvent être fournis par des livres, des enseignants, l'internet, etc.-; et finalement, développer, répandre et défendre la réponse $R^\heartsuit$, qui résulte du processus d'étude.

La génération du milieu requiert des modifications importantes par rapport au paradigme de la visite des œuvres, lesquelles affectent le processus d'étude, et la « vie » du PER. On peut décrire ces modifications au moyen des fonctions didactiques : *mésogenèse*, *topogenèse* et *chronogenèse :*

- La *mésogenèse*, comporte le processus de construction du milieu. Dans le cas des PER, M doit permettre générer tant les réponses internes (cette réponses pourraient être produits par un élève R_x, ou par le professeur R_y) ou externes à la classe. Toutes les réponses contribuent au moyen M et apportent des réponses partielles à Q. Dans un PER, le *milieu* n'est pas déterminé en avance, il est « construit » par la classe. Il faut considérer toutes les différentes œuvres qui pourraient être appelées pour construire le milieu, et elles ne peuvent pas être exclues comme il pourrait arriver dans l'enseignement traditionnel. Le milieu doit offrir des outils idéaux pour construire et pour justifier chaque réponse partielle et la $R^\heartsuit$. Les questions dérivées de Q_0 qui émergent dans le processus font aussi partie du milieu.
- La *topogenèse* est la fonction qui règle l'occupation de l'espace par le groupe d'élèves X et le professeur $\{y\}$. Les modifications dans la *topogenèse* influencent les échanges dans la *mésogenèse* parce que les changements de rôles affectent les résultats obtenus dans le milieu; c'est-à-dire que les modifications dans le milieu ne sont uniquement une responsabilité de y.
- La *chronogenèse* est une fonction qui règle les temps didactiques pour les distincts composants du système didactique. Dans les PER cette composante est relative au temps réel requis pour effectuer l'étude d'une question, et elle permet de différencier les PER des autres dispositifs didactiques. La construction du *milieu M* pendent le processus d'étude implique que les temps d'étude sont supérieurs que ceux d'un enseignement traditionnel.

2 Méthodologie

On présente une étude exploratoire, longitudinale, qualitative et ethnographique. Il s'est proposé de décrire les modifications qui se produisent quand on introduit un enseignement par PER dans l'école secondaire. Les parcours développés sont décrits dans la section où l'on analyse la mise en œuvre dans les classes habituelles de l'école secondaire. Cela est remarquable parce qu'il y a encore peu de recherches qui se développent dans les cours habituels, bien dans d'autres comme ateliers ou cours «artificiels» par rapport aux cours habituels. Les implémentations ont été sous la responsabilité des chercheurs et ils ont sélectionné les cours au moyen d'un échantillonnage intentionnel. Le PER commence quand les étudiants initient la 4ème année du secondaire et continuent pendant l'année suivante, c'est-à-dire durant la 5ème année. L'âge des élèves qui participent à la recherche est 14 et 16 ans. Chaque cours est formé à peu près par 30 élèves et l'enseignant / chercheur. Deux implémentations simultanées ont été réalisées chaque année, pendant trois ans consécutifs, et 163 élèves ont participé au total. Chaque mise en œuvre a permis d'améliorer l'analyse a priori et les conditions d'étude aussi que des évolutions remarquables du groupe d'étude.

Dans ce papier on décrit seulement la première partie du PER, réalisée avec les étudiants de la 4éme année.

Les classes ont été enregistrées en audio et aussi on a récupère les protocoles écrits de chaque élève, tous les travaux ont été scannés et rendus au cours suivant, pendent chaque expérimentation. Pour décrire les caractéristiques de l'Organisation Mathématique effectivement reconstruite (OMER) et des changements dans l'Organisation Didactique, ont été analysés les modifications *mesogénètique*, *chronogénètique* et *topogénètique* pour chaque « année » d'expérimentation.

3 Insérer le PER à L'école Secondaire: Réponses et Parcours Possibles

L'enseignant introduit la question génératrice Q_0 *: comment effectuer des opérations avec n'importe quelles courbes, si l'on connaît seulement leur représentation graphique et l'unité sur les axes ?* Les élèves proposent des réponses possibles à la question selon les courbes choisies, et aussi, des opérations qu'ils souhaitent réaliser. Notamment, ils proposent des opérations entre deux ou plusieurs droites, et seulement dans quelques cas exceptionnels, ils proposent d'agir avec des courbes qu'ils ne connaissent pas. Les élèves ont proposé les droites et les justificatifs suivants :

- « Nous choisissons des droites puisque c'est une forme facile de représenter et de calculer un problème »

RECTAS: Nosotras elegimos rectas, ya que es una forma fácil de representar y calcular un problem

- « Nous choisissons les droites parce que c'étaient les seules que nous avons apprises les années précédentes, donc, les seules que nous connaissons bien. Nous avons choisi l'addition, la multiplication, la division et l'enracinement parce que ce sont les opérations que nous réalisons mieux»

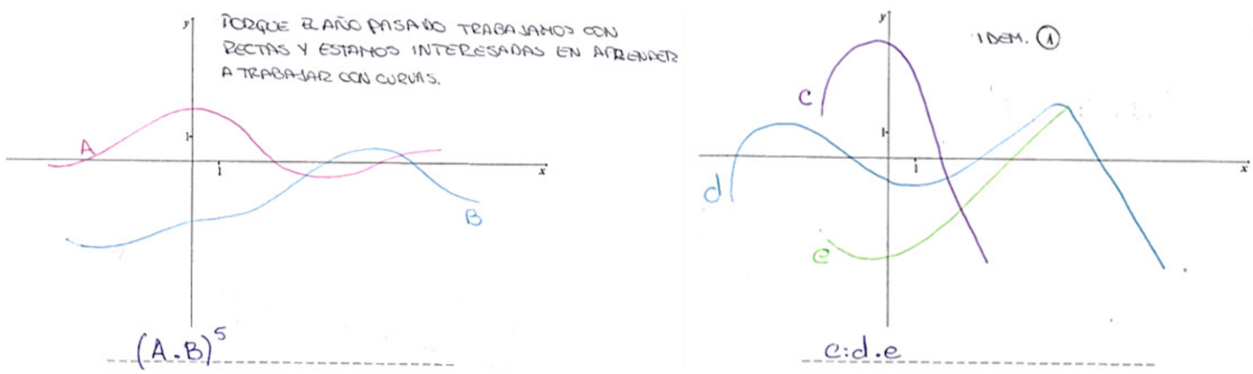
Elegimos rectas porque eran las únicas que vimos años anteriores y, por lo tanto, las únicas que sabíamos. Elegimos suma, multiplicación, división y radicación porque son las operaciones que más manejamos.

- « Nous avons choisi les droites parce que nous avons étudié seulement la fonction linéaire, et nous avons pensé qu'il serait plus facile de résoudre des problèmes avec des droites que celui des courbes. Nous avons utilisé les opérations basiques (+ ; - ; x ; %) parce qu'elles sont plus simples à résoudre »

Hicimos la elección de rectas debido a que únicamente vimos el contenido de función lineal, y también creemos que resolver problemas con rectas es más fácil que curvas. Los operaciones que utilizamos fueron las básicas (+, −, x, ÷) porque son más sencillas de resolver.

Les élèves de la 4éme année connaissaient seulement des droites. Parmi les opérations, ils ont utilisé l'addition, la soustraction, la multiplication et la division et aussi des opérations combinées. Le problème d'élever au carré ou « d'extraire la racine carrée d'une droite », est apparu seulement dans quelques cas. De plus, quelques groupes ont choisi d'autres courbes qui ne correspondaient pas à des fonctions connues :

- « Comme l'année passée nous avons travaillé avec les droites, maintenant nous sommes intéressés à étudier les courbes »



Représentation d'autres courbes et des opérations proposées par les élèves.

Quand la question génératrice a été proposée, et les possibles réponses ont été analysées avec les étudiants, l'enseignant a décidé de commencer par les droites parce qu'au commencement elles étaient les plus connues par les étudiants. Parmi les réponses données par les étudiants à Q_0 prédominent principalement les opérations : adition, soustraction, produit, quotient, racine et puissance avec des droites. Ainsi, selon le choix des élèves, des différentes OM ont été relatives à:

l'addition et la soustraction entre des droites, qui permettrait de reconstruire l'OM des fonctions polynomiales de premier degré ou constantes ;
la multiplication de deux droites, qui permettrait de reconstruire l'OM des fonctions polynomiales du second degré ;
la multiplication de trois droites, ou des paraboles et des droites, ou entre paraboles, qui permettrait de reconstruire l'OM des fonctions polynomiales ;
la division entre des fonctions polynomiales qui permettrait de reconstruire l'OM des fonctions rationnelles.

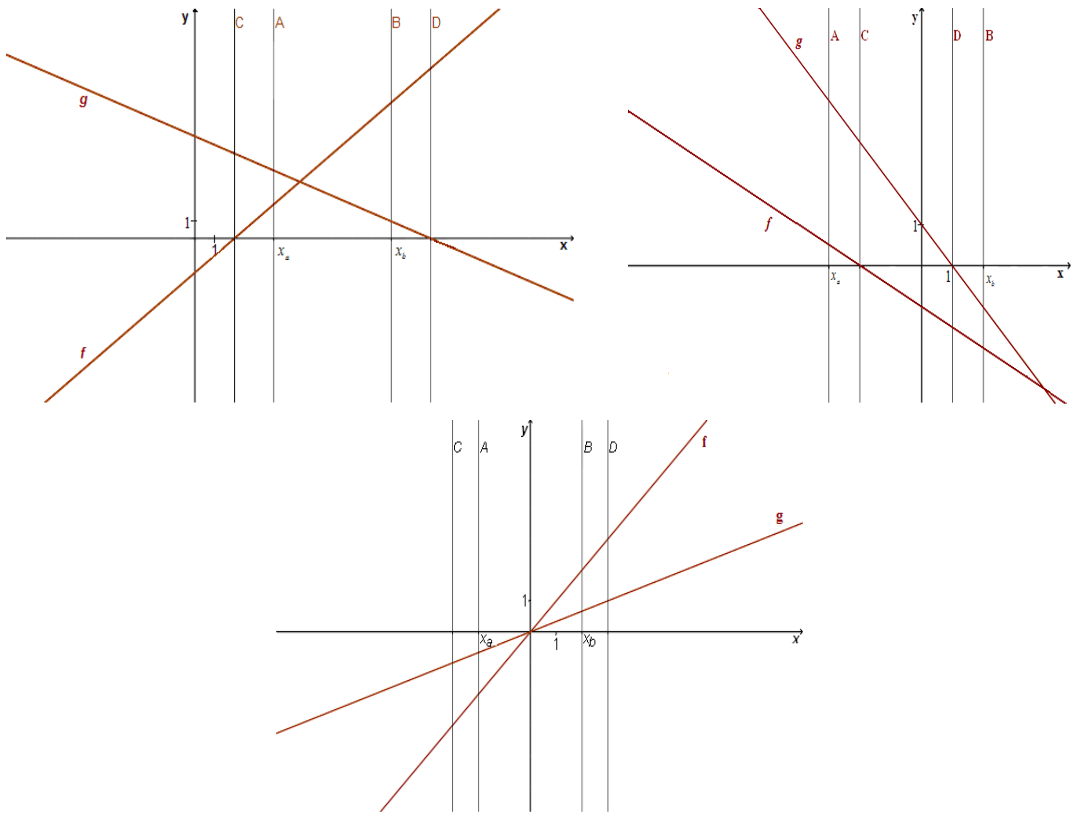
En particulier, la multiplication de deux droites a conduit à l'étude de l'OM des fonctions polynomiales du second degré, en correspondance avec le programme d'études de la 4ème année. Dans cette recherche, l'OM des fonctions polynomiales du second degré, l'OM des fonctions polynomiales et l'OM des fonctions rationnelles ont été retrouvé dans cet ordre, bien qu'il s'agisse d'une possibilité parmi d'autres dans le parcours proposé. Les techniques développées dans une partie du parcours peuvent s'étendre dans d'autres parties. On décrit tout de suite quelques résultats de la première partie du PER (P1) relative à l'étude des multiplications des deux droits; qui permet de reconstruire l'OM des fonctions polynomiales du deuxième degré.

Le problème consiste à multiplier les droites quand seulement leur représentation graphique et l'unité sont connues, en obtenant la représentation graphique d'une parabole. L'enseignant a proposé les questions suivantes au commencement du parcours :

Q_1 : Comment faire le produit de deux droites, si l'on connaît seulement leur représentation graphique et l'unité sur les axes ?

Les fonctions f et g sont données par les graphiques de la figure. Toutes les droites A, B, C et D sont parallèles et sont perpendiculaires à l'axe x. La fonction h est telle que : h=f·g

Figure 1 - Graphiques des fonctions *f* et *g*



Q1.1: Quelle serait le graphique le plus probable pour h ? Quelles caractéristiques du graphique de h pourrais-tu justifier ?

Q1.2 : Pour toutes les valeurs x_a et x_b équidistantes des zéros de chaque fonction, les segments qui se forment . Est-ce vrai que $h(x_a)= h(x_b)$? Pourrais-tu justifier ?

Q1.3 : Quels triangles faudrait-il construire pour calculer la multiplication entre f et g sur l'axe de symétrie, en utilisant pour l'un des côtés d'un des triangles, l'unité ?

Les situations ont permis de construire un graphique approché pour *h=f·g*, en principe, à partir de l'identification des points remarquables (les zéros, les valeurs de l'ordonnée égales à 1) et les signes de *h* (C^+ et C^-). Dans cette partie les processus de démonstration de la symétrie de la courbe et de la construction géométrique du sommet réalisé par les étudiants ont été remarquables. Cette dernière technique a permis aux élèves de développer une adaptation qui a été très utile pour augmenter la quantité des "points sûrs". La technique demande de construire des triangles semblables, qu'il faut choisir d'une manière appropriée en utilisent au même temps l'unité (Llanos, & Otero, 2015). Les élèves ont utilisé la technologie du théorème de Thales et la proportionnalité des segments pour expliquer la technique qu'ils ont développé.

Les différences entre les implémentations par rapport à la construction de la parabole quand seules sont connues les représentations des droites et l'unité sur les axes, ont été décrites au moyen des concepts *topogenèse*, *chronogenèse* et *mésogenèse* et ont été synthétisées dans le tableau 1. Dans la dite description, on utilise plus (+) entre les différentes années, pour indiquer les caractéristiques qui s'ajoutent, par rapport à celles obtenues l'année antérieure.

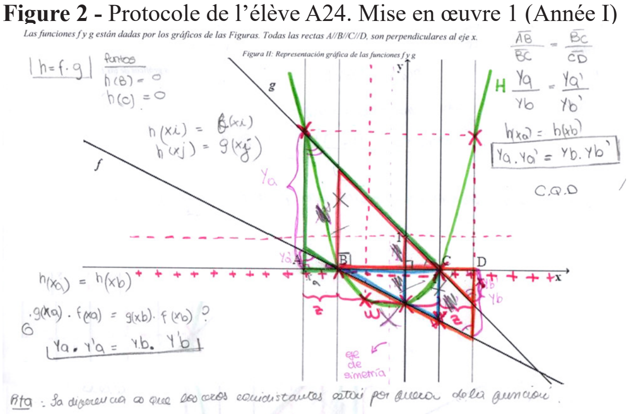
Tableau 1

Mise en œuvre Niveaux	Année I Mise en œuvre 1 et 2	Année II Mise en œuvre 3 et 4	Année III Mise en œuvre 5 et 6
Niveau mesogénèti-que	On obtient une courbe approchée pour *h* à partir des signes, zéros et l'unité. La preuve de la symétrie de la courbe a été réalisée, l'axe de symétrie a été construit et les points symétriques ont été identifiés. La parabole construite a été approximative	+ Les élèves ont inséré le problème de construire le sommet, mais c'est le professeur qui a proposé la technique. Les élèves ont amélioré les caractéristiques du graphique de *h*.	+ Les élèves ont construit le sommet à partir des triangles semblables et ils ont obtenu une généralisation de la technique pour n'importe quel point de *h*. Ils ont construit un graphique très précis pour *h*.
Niveau topogénéti-que	Les étudiants ont construit un graphique pour *h* et le professeur a géré les discussions pendent le processus de génération des réponses.	+ Les élèves ont proposé de construire le sommet de la parabole. L'enseignant a réalisé la construction et les élèves l'ont reproduit La imposition de la construction du sommet de la part de l'enseignant u a été erronée.	+ Les élèves ont résoudre par eux-mêmes la construction géométrique du sommet. De plus ils ont proposé une généralisation de la technique développée.
Niveau chronogéné-tique	Pour obtenir un graphique pour *h* a été nécessaire d'étendre le temps -un peu plus qui était prévu-. La plus grande augmentation du temps a été due à la preuve pour la symétrie.	+ Même quand l'enseignant a introduit la construction du sommet, les étudiants ont eu besoin du temps de réflexion, pour reproduire la courbe et construire d'autres points.	+ La construction du sommet de *h* réalisée par les élèves, a demandé une prolongation du «temps scolaire», grâce aux discussions générées par rapport à cette construction et à la généralisation de la technique pour n'importe quel cas.

Description des fonctions mésogenèse, topogenèse et chronogenèse pour chaque année

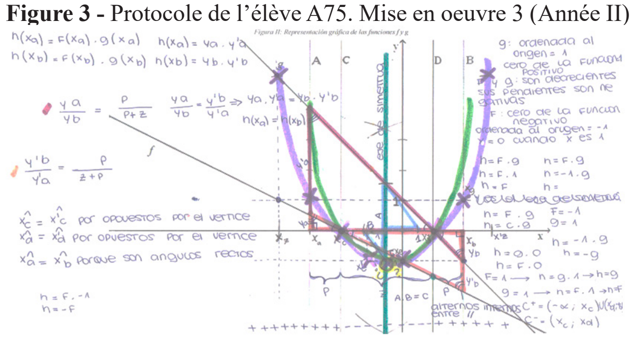
Plus de précisions des techniques pour la construction d'une courbe raisonnable peuvent se rencontrer dans le papier de Llanos & Otero (2013). Les protocoles des étudiants A24 (voir Figure 2), A75 (voir Figure 3) et A136 (voir Figure 4) montrent des différences relatives à la situation où il est demandé de multiplier deux droites. Dans la figure 2, l'élève A24 obtient une construction de *h* très approximative, seulement à partir du zéro et des uns et de l'analyse des signes. Le sommet n'est qu'une inférence. Ce protocole montre comment les étudiants obtiennent un graphique approximatif pour *h* quand seuls sont connus le zéro et les uns et la preuve de la symétrie réalisée pour obtenir les points symétriques.

Figure 2 - Protocole de l'élève A24. Mise en œuvre 1 (Année I)



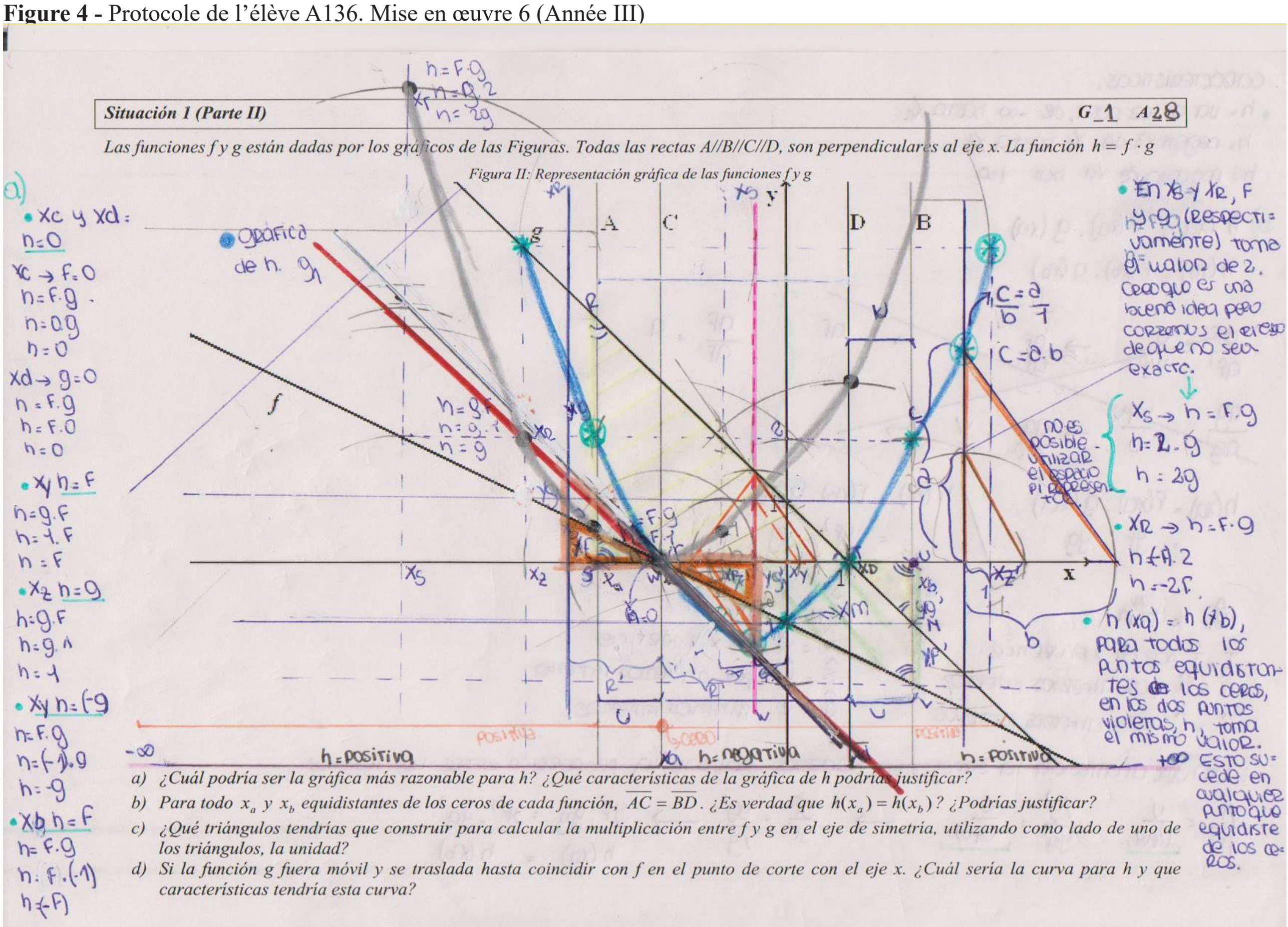
Pour la deuxième et la troisième année (mises en œuvre 3 à 6), le sommet a été obtenu au moyen d'une construction. La figure 3, montre comment l'élève A75 a obtenu par construction le sommet de la parabole, technique qui a été introduite par l'enseignant. L'élève a aussi justifié la symétrie de la courbe, et il a bien compris l'analyse des angles pour vérifier que les triangles sont semblables. Le graphique *h* a été obtenu à partir des points « sûrs » c'est à dire les zéros, les uns et les deux, les constructions des symétriques et du sommet construit. La différence entre la première et la deuxième année a été trouvé dans la construction du sommet.

Figure 3 - Protocole de l'élève A75. Mise en oeuvre 3 (Année II)



L'étudiant A136 (voir la figure 4) a identifié: des signes, les zéros, les uns; il a réalisé la preuve de la symétrie et la construction du sommet. Pour construire le sommet, la classe a discuté des résultats obtenus dans la réponse de l'item c) du problème. En plus de discuter des caractéristiques de la position des segments, de la construction des triangles semblables qui déterminent la multiplication en abscisse, ils ont analysé et généralisé la technique à tous les cas; c'est-à-dire à n'importe quel point. En plus, comme la technique a été développée pour obtenir le sommet, les élèves ont proposé de déplacer l'une des droites pour obtenir un sommet en zéro, et analyser si la technique s'accomplit aussi pour d'autres points. L'élève A136 a représenté cette courbe comme h_2, et il a augmenté de plus la quantité de points sûrs, donc il a réussi à généraliser la technique élaborée pour le sommet aux autres points. Ce résultat a été exclusif de la dernière année.

Figure 4 - Protocole de l'élève A136. Mise en œuvre 6 (Année III)



En plus des réponses développées par la classe, décrites ci-dessus au niveau mesogénètique, nous ajoutons que les élèves ont aussi analysé les graphiques de h pour les autres cas. Par exemple, la multiplication des droites parallèles ou d'autres. Ils ont proposé également d'autres situations et dans certains cas celles ont été analysées. En plus des caractéristiques de la représentation graphique des fonctions polynomiales de second degré, le parcours a permis de reconstruire différentes manières de représenter analytiquement ces fonctions à partir d'autres situations similaires présentées dans autre cadre (Doaudy, 1986, 1999) par exemple multiplier deux fonctions analytiquement. Les caractéristiques de la topogenèse ont contribué à l'ouverture du milieu ce qui a amené à étudier l'OM des fonctions polynomiales du second degré selon la description suivante:

- Construire une représentation graphique de la parabole, justifier chaque point remarquable, et analyser les différences entre les représentations obtenues.
- Analyser le rôle des points remarquables quand seule l'unité sur les axes est connue, et celui de l'analyse des signes. La relation entre les zéros et le changement ou non d'un signe a été remarquable dans ce processus.
- Construire et justifier le sommet et la symétrie de la courbe, au moyen d'un problème qui a proposé un changement de cadre vers la géométrie synthétique pour revenir après vers le cadre analytique. Les élèves ont aussi généralisé la technique appliquée au sommet à la construction de n'importe quel point du graphique.
- On a mis en évidence la possibilité d'étudier chaque point remarquable de la courbe, en utilisant des techniques de géométrie synthétique. Principalement pour l'épreuve de la symétrie et le sommet, lesquels sont d'habitude imposés dans la classe.
- Après la situation 3, la situation 4 a proposé un problème similaire mais dans autre cadre, maintenant les unités des axes, les coordonnées du zéro, et les coordonnées du point d'intersection des droites f et g sont connues. Le changement entre les cadres analytiques, graphiques et fonctionnels a eu l'objectif de reconstruire les caractéristiques de la graphique de la courbe h et de plus développer les caractéristiques des représentations analytiques équivalentes de la fonction polynomiale du second degré. Commencer par la multiplication des droites a conduit facilement à la forme factorisée des fonctions polynomiales de second degré et à la forme polynomiale comme résultat

du passage inverse. Le passage de la forme factorisée à la forme polynomiale ne présente pas des difficultés.

- L'analyse des infinies paires de droites qu'on peut multiplier pour obtenir la même parabole, a mis en évidence qu'une fonction n'est pas réductible à son expression analytique et qui la même fonction a beaucoup de représentations analytiques.
- Pour analyser les cas des fonctions polynomiales de second degré qui ne s'obtiennent pas par le produit de deux droites, on a posé la question du passage de la forme polynomiale à la forme factorisée. C'est-à-dire, pour les cas qu'il n'est pas possible de «passer» de la forme polynomiale à la forme factorisée, la forme canonique a été obtenue et les caractéristiques de la graphique ont été analysées. En relation aux fonctions qui n'ont pas de zéros réels on a questionné la conjecture implicite au commencement : «toutes les paraboles sont le résultat de multiplier deux droites».
- C'est remarquable la relation établie entre les différents formes: polynomiale, factorisée et canonique ainsi que la représentation graphique des fonctions polynomiales du second degré.

On a fait le tableau et l'analyse des résultats pour toutes les situations, mais ici on a présenté seulement les correspondantes aux situations 1, 2 et 3 traitées dans ce travail. Les différences obtenues entre les implémentations de chaque année, par rapport aux les caractéristiques des graphiques, les représentations analytiques équivalentes et les résultats apportés par la multiplication de deux droites, pourraient être attribuées aux les décisions relatives à la mésogenèse, le topo genèse et la chronogenèse L'étude des fonctions polynomiales et rationnelles (Llanos, Otero, Gazzola, 2013) a été continué l'année suivante avec les mêmes élèves comme une prolongation du PER. Les techniques géométriques et analytiques ont été récupérées et adaptées par la classe pour étudier lesdites fonctions.

4 Commentaires finales

Dans ce travail nous avons présenté quelques résultats relatifs à l'introduction d'un PER dans l'école secondaire. La question génératrice Q_0 permet de reconstruire l'OM des fonctions, et à partir de Q_1 nous avons proposé de reconstruire l'OM des fonctions polynomiales du deuxième degré.

Par rapport à la topogenèse une des plus grandes difficultés a été la résistance initiale des étudiants à développer par eux-mêmes des possibles réponses aux questions dérivées; ce problème a diminué peu à peu avec le temps. Les élèves ont réussi à faire face à l'incertitude quand des réponses n'arrivaient, cette difficulté n'a pas toujours été bien gérée par l'enseignant. Les implémentations ont montré comment l'enseignant a parfois sous-estimé la capacité des élèves, ce qui a affecté quelques résultats.

Cette recherche montre comment la construction d'un milieu relativement ouvert appelle aux changements dans le topogenèse caractéristique des PER, en contribuent à son écologie. Les différences identifiées ne sont pas attribuables à l'intelligence des derniers groupes à l'égard des premiers, ni aux moyennes disponibles; puisque les caractéristiques des cours sont similaires dans tous les cas. La question et sa générativité n'ont pas non plus changé, l'enseignant a toujours été le même. Les modifications seraient relatives au geste didactique de l'enseignant de donner sa place aux élèves (topos), qu'ils ont fait la découverte d'être capables de faire face aux questions. Cela a permis au long du temps, l'enrichissement du milieu et la construction d'une réponse probable et valide en utilisent les instruments de la classe. C'est-à-dire l'élargissement du temps didactique est indispensable dans la vie des PER (écologie).

Le paradigme du questionnement du monde reste encore émergent et il ne vit pas pleinement dans les institutions scolaires, bien si l'on peut d'introduire quelques gestes du questionnement comme a été notre cas. La réalisation a été tout à fait possible et positive du côté des étudiants, leur capacité à construire des réponses est très probante comme nous l'avons montré avec les données proposées dans ce texte.

Références

Barquero, B. (2009). Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas. Universidad Autónoma de Barcelona. Barcelona, España.

Boigues, F. J., Estruch, V. D., Roig, B.; Vidal, A. (2013). Una propuesta de Recorrido de Estudio e Investigación (REI): Diseño, simulación y decisión de una estrategia de pesca sostenible. *Modelling Sci Educ Learning, 6(2), p. 5-19.*

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19(2), p. 221-266.*

Chevallard, Y. (2009). *La notion de PER: problèmes et avancées*. Disponible dans http://yves.chevallard.free.fr/.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *J Res Mathem Educ, 2(2), p.161-182*. doi: 10.447/redimat.2013.26.

Costa, V., Arlego, M., & Otero, M. R. (2013). Enseñanza del Cálculo Vectorial en la Universidad: propuesta de Recorridos de Estudio e Investigación. *Rev Formación Innovación Educ Universit, 7(1), p.20-40.*

Fonseca, C. (2011). Recorridos de Estudio e Investigación: **Una propuesta dentro de la teoría antropológica de lo didáctico para la creación de secuencias de enseñanza y aprendizaje.** *Paradígma*, *32(1), p. 55-70.*

Fonseca C., Pereira, A., & Casas, J. M. (2011). Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: los Recorridos de Estudio e Investigación (REI). *Educ Matem*, *23(1), p.97-121*.

Donvito, A. E., Otero, M. R., & Sureda, P. (2014). Actitudes de la Pedagogía de la Investigación en el marco de la TAD: un análisis en tres escuelas secundarias. *Ikastorratza, 12*, *p. 1-27*.

Douady, R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches Didactique Mathém*, *7/2, p. 5- 32.*

Douady, R. (1999) *Relation Function/al algebra: an example in high school (age 15-16)*. *Euro Res Mathem Educ* I: *Group 1. p. 113-124.*

García, F., Bosch, M., Gascón, J., & Ruiz Higueras, L. (2005). Integración de la proporcionalidad escolar en una Organización Matemática Regional en torno a la Modelización funcional: los planes de ahorro. Actas del *I Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico (I CITAD).*

Gazzola, M. P., Llanos, V. C., & Otero, M. R. (2013). Research and Study Paths in the Teaching of Mathematics at Secondary school relative to the Rational Functions. *J Arts Hum, 2(3), p. 109-115.*

Ladage, C. & Chevallard, Y. (2011). Enquêter avec l'Internet. Études pour une didactique de l'enquête. Éducation & Didactique, *5(2), p.85-115.*

Llanos, V. C., & Otero, M. R. (2013). Operaciones con curvas y estudio de funciones. *Rev SUMA*, *73*, *p.17-24.*

Llanos, V. C., Otero, M. R., & Gazzola, M. P. (2013). Recorridos de Estudio y de Investigación mono disciplinares en la escuela secundaria: resultados y arborescencias. En M. R. Otero. *La Teoría antropológica de lo didáctico en el aula de matemática*. (pp.29-43). Buenos Aires: Editorial Dunken.

Llanos, V. C., Otero, M. R., & Colombo, E. (2015). The polynomial functions as result of multiplying curves in the framework of a Research and Study Paths. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education, 4 (1), p. 80-98.*

Otero, M. R., Llanos, V. C., Parra, V. E., & Sureda, P. (2014). Pedagogy of research and questioning the world: teaching through research and study paths in secondary school. *Review of Science, Mathematics and ICT Education. Re SM TICE*, *8 (1), p. 7-32.*

Otero, M. R., Fanaro, M., Corica, A. R., Llanos, V. C., Sureda, P., Parra, V. (2013). *La teoría antropológica de lo didáctico en el aula de matemática*. Buenos Aires: Editorial Dunken.

Parra, V., Otero, M. R., & Fanaro, M. (2015). Los Recorridos de Estudio e Investigación en la Escuela Secundaria: resultados de una implementación. *Bolema*, *27(47), p. 847-874*.

Salgado, D. P., Otero, M. R., & Parra, V. (2017). Gestos didácticos en el desarrollo de un Recorrido de Estudio e Investigación en el nivel universitario relativo al cálculo: el funcionamiento de las dialécticas. *Perspectiva Educacional. Formación de Profesores*, 56*(1), p. 84-108.*

Serrano, L., Bosch, M. & Gascón, J. (2007). Cómo hacer una previsión de ventas: propuesta de recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas. *Actas del II CITAD*. Montpellier: IUFM de l' académie de Montpellier.

Serrano, L., Bosch, M. & Gascón, J. (2013). Recorridos de estudio e investigación en la enseñanza universitaria de ciencias económicas y empresariales. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 62, p.39-48.*