

CDD: 530.11

LA PARADOJA DE EINSTEIN-DE BROGLIE: ¿INCOMPLETITUD O SUPERPOSICIÓN DE ESTADOS?

ALEJANDRO CASSINI

Instituto de Filosofía Dr. A. Korn,

Universidad de Buenos Aires (UBA), y CONICET, Argentina

alefrac@yahoo.com.ar

Resumen: En este trabajo analizo una paradoja, concebida por Einstein en 1935 y desarrollada por de Broglie en 1959, que tiene como objetivo argumentar que la mecánica cuántica ortodoxa debe considerarse una teoría incompleta. Sostengo que la paradoja no muestra ninguna inconsistencia interna de la mecánica cuántica, ni prueba que sea una teoría incompleta, ni mucho menos, que sea necesario completarla introduciendo variables ocultas. El argumento sólo prueba que, si se acepta que esta teoría ofrece toda la información que es posible obtener sobre un sistema físico, se debe admitir que los estados de superposición son reales y que las probabilidades que aparecen en la teoría son objetivas.

Palabras clave: mecánica cuántica, incompletitud, variables ocultas, superposición de estados, colapso del vector de estado, medición sin interacción.

THE PARADOX OF EINSTEIN-DE BROGLIE: INCOMPLETENESS OR SUPERPOSITION OF STATES?

Abstract: In this paper I analyze a paradox – invented by Einstein in 1935 and developed by de Broglie in 1959 – whose aim is to prove that standard quantum mechanics is an incomplete theory. I contend that this paradox does not show any internal inconsistency in quantum mechanics, or that this theory is incomplete, or that it should be supplemented with hidden variables. The Einstein-de Broglie argument only proves that, if it is admitted that this theory provides all the information it is possible to obtain about physical systems, then, it is necessary to accept that superposed states are real and that all the probabilities that show up within the theory are objective.

Keywords: quantum mechanics, incompleteness, hidden variables, superposition of states, collapse of the state vector, interaction-free measurement.

1. Introducción

La mecánica cuántica ha estado acosada por paradojas y problemas de interpretación desde sus comienzos. Muchos físicos y filósofos pensaron que esa situación se debía al carácter incompleto de esta teoría, que era incapaz de proporcionar una descripción adecuada del mundo físico. Cuando la teoría fuera completada, es decir, reemplazada por otra teoría más satisfactoria, las paradojas deberían desaparecer. Albert Einstein y Louis de Broglie se cuentan entre quienes pensaron de esta manera. Los dos propusieron diversos argumentos para tratar de probar que si la mecánica cuántica ortodoxa se considera una teoría completa, se producen consecuencias inaceptables. Las denominaron paradojas, aunque no necesariamente implican una contradicción lógica. Aquí me ocuparé de uno de esos argumentos, propuesto originalmente por Einstein en 1935, pero nunca publicado, y desarrollado por de Broglie, que lo publicó en 1959. A menudo se la denomina “paradoja de de Broglie” (por ejemplo, en SELLERI, 1994, p. 58), aunque desde un punto de vista histórico resulta más justo denominarla “paradoja de Einstein-de Broglie”.

Comenzaré por exponer la versión de Einstein de la paradoja, basada en un experimento mental, que se encuentra en su correspondencia con Schrödinger, todavía inédita. Luego, formularé la versión, más detallada, de Louis de Broglie y señalaré las conclusiones que extrae de ella. Después, criticaré la interpretación que hace Franco Selleri de esta paradoja y, por último, presentaré mi propia interpretación. En síntesis, mi argumento es el siguiente. Einstein y de Broglie intentaron mostrar mediante una paradoja que la mecánica cuántica ortodoxa debería considerarse incompleta. Selleri, además, sostuvo que la paradoja muestra que la teoría debería completarse mediante la introducción de variables ocultas. Yo, por mi parte, argumentaré que ninguna de estas conclusiones se sigue de la paradoja por sí misma. Para llegar a ellas es necesario, apelar a presupuestos ontológicos realistas que no forman parte de la teoría cuántica ortodoxa. Incluso asumiendo una posición realista, la paradoja sólo prueba que la teoría cuántica lleva a aceptar que la superposición de estados debe considerarse real, aunque todavía no se disponga de las categorías ontológicas necesarias para describir de manera coherente esta clase de estados de los sistemas cuánticos.

2. La formulación de Einstein

Einstein siempre consideró que la mecánica cuántica era una teoría provisoria que debía reemplazarse por otra más completa. En particular, sostuvo que el carácter probabilístico y no local de la mecánica cuántica se debía al hecho de que esta teoría no era capaz de proporcionar una descripción completa de la realidad. Las leyes probabilistas, de acuerdo con Einstein, sólo expresan nuestra falta de conocimiento y, por consiguiente, no pueden considerarse como leyes fundamentales. Einstein sostuvo, entonces, que la mecánica cuántica era una teoría estadística y que, por consiguiente, el vector de estado ψ no describía sistemas físicos singulares, sino colecciones de sistemas (EINSTEIN, 1949, p. 671).¹

Durante la década de 1930 Einstein elaboró diferentes argumentos para probar que la mecánica cuántica era una teoría incompleta. El más famoso de todos es el que aparece en el artículo conocido como EPR (EINSTEIN, PODOLSKY & ROSEN, 1935), que hoy sabemos que fuera escrito solamente por Boris Podolsky, sobre la base de ideas procedentes del propio Einstein. Este artículo no satisfizo del todo a Einstein, que más tarde prefirió presentar los aspectos esenciales de su argumento de una manera más simple (EINSTEIN, 1936, § 5; 1948). Aquí no me ocuparé de este célebre argumento, que ha sido comentado y discutido en numerosas ocasiones. Señalaré, no obstante, que la estrategia general de EPR, y de todos los argumentos de Einstein, no consiste en probar directamente que la mecánica cuántica sea incompleta, sino, más bien, en mostrar que si se aceptan ciertos supuestos ontológicos acerca de la realidad del mundo físico, que él considera razonables, y, además, se supone que la teoría brinda una descripción completa de la realidad, entonces, se producen consecuencias paradójicas e inaceptables.² En el caso del artículo EPR, la consecuencia que Einstein considera inaceptable es la *no localidad*, la existencia de una aparente acción a distancia, donde el cambio en el estado de un sistema físico produce instantáneamente un cambio en el estado de otro

¹ Esta es una idea que Einstein mantuvo consistentemente durante toda su vida, pero nunca desarrolló con detalle, como mostró FINE (1996, cap. 4).

² Por esa razón, Einstein se refirió siempre al argumento EPR como una “paradoja”, aunque, en sentido estricto, no muestra la existencia de una contradicción interna a la mecánica cuántica.

sistema que se encuentra espacialmente separado del primero. Einstein siempre mantuvo que una teoría cuántica satisfactoria debería ser determinista y local, pero esta esperanza, como es bien sabido, nunca pudo concretarse.

En la misma época en que elaboró el artículo EPR, Einstein propuso otro argumento para mostrar la incompletitud de la mecánica cuántica. Se encuentra en su correspondencia con Schrödinger del año 1935, que todavía permanece inédita.³ La conocemos parcialmente gracias a la obra de Arthur Fine (1996), de la cual extraigo la información sobre el argumento de Einstein. La idea fundamental, expuesta en la carta de Einstein del 19 de junio de ese año (FINE, 1996, p. 36), es la siguiente: supongamos que tenemos dos cajas cerradas y que hay una bola que se encuentra en una de ellas, mientras que la otra está vacía. Si no tenemos más información que esa, podemos describir la situación diciendo que hay una probabilidad de $\frac{1}{2}$ de que la bola se encuentre en la primera caja y una probabilidad de $\frac{1}{2}$ de que se encuentre en la segunda caja. Pero esa, según Einstein, sería una descripción incompleta de la situación real. Una descripción completa debería decir, por ejemplo, que la bola se encuentra en la primera caja. La afirmación probabilista es incompleta y sólo surge como resultado de nuestra ignorancia (parcial) acerca de la ubicación de la bola. Ahora bien, es posible saber si la bola se encuentra o no en la primera caja abriendo la segunda caja. Suponiendo que se encuentre allí, las probabilidades se reducen a 0 y 1, para la primera y segunda caja, respectivamente; en caso contrario, las probabilidades serán de 1 y 0. De esta manera, se obtiene una descripción completa de la situación que coincide con el realismo del sentido común, de acuerdo con el cual la bola se hallaba en una sola de las cajas antes de que abriéramos cualquiera de ellas. Para llegar a esta conclusión, sin embargo, es necesario aceptar algunos supuestos ontológicos. El primero, obviamente, es un principio de conservación de la masa, según el cual la bola no se crea ni se destruye una vez colocada en una de las cajas. El segundo, mucho más sutil, es el que Einstein denomina “principio de separación” que afirma que “los contenidos de la segunda caja son independientes de lo que ocurra en la primera caja”. Más específicamente, la apertura de la segunda caja no puede afectar en modo alguno a la primera caja, suponiendo que las cajas se encuentran espacialmente separadas. Dados estos dos supuestos, Einstein

³ Agradezco a Silvio Chibeni por haber llamado mi atención acerca de esa correspondencia.

concluye que si una teoría sólo permite conocer que la probabilidad de que la bola se encuentre en la primera caja es de $\frac{1}{2}$ (o cualquier otro valor mayor que 0 y menor que 1), entonces, esa teoría es incompleta porque no describe adecuadamente la situación.

Einstein, en la citada carta a Schrödinger, caracteriza las dos posiciones que podrían adoptarse ante la situación en los siguientes términos:

Describo así el estado de cosas: La probabilidad de que la bola esté en la primera caja es $\frac{1}{2}$. ¿Es esta una descripción completa?

No: Un enunciado completo es: la bola *está* (o no está) en la primera caja. Así debe aparecer la caracterización del estado en una descripción completa.

Sí: Antes de que abra la tapa de la caja la bola no está en *una* de las dos cajas. Estar en una determinada caja es un estado que sólo adviene cuando levanto la tapa. De allí viene el carácter estadístico del mundo de la experiencia, esto es, su legalidad empírica. El estado [de las cajas] antes de destaparlas está *completamente* caracterizado por el número $\frac{1}{2}$, cuyo sentido como resultado estadístico sólo se manifiesta cuando se realizan observaciones. La estadística sólo surge porque la observación entraña factores insuficientemente conocidos, ajenos al sistema descripto. (EINSTEIN a Schrödinger, 19 de junio de 1935; citada por FINE, 1996, p. 69.)

La situación que Einstein describe no es cuántica, sino clásica, ya que se refiere a entidades macroscópicas, pero evidentemente supone que una situación análoga se produce en la mecánica cuántica, si se admite que el vector de estado ψ proporciona una información completa acerca del estado de un sistema cuántico. Esa idea es la que de Broglie desarrolló de manera explícita, apelando a un experimento mental.

3. La versión de de Broglie

En un *review article* publicado en 1959 y dedicado a la situación de las teorías de variables ocultas en mecánica cuántica, Louis de Broglie elaboró con detalle una versión específicamente cuántica de la paradoja de Einstein. En esta

sección citaré *in extenso* algunos fragmentos del primer párrafo de ese artículo, intercalando algunos comentarios entre cada pasaje. Comienza de esta manera:

Las objeciones más fuertes que se pueden plantear contra la interpretación actualmente admitida de la mecánica ondulatoria son relativas a la *no localización* del corpúsculo en esta interpretación. Ella admite, en efecto, que si el estado de nuestro conocimiento acerca de un corpúsculo está representado por un tren de ondas ψ extendido, el corpúsculo está presente en todos los puntos de ese tren de ondas con una probabilidad igual a $|\psi|^2$: esta presencia podría ser calificada de ‘potencial’, y es solamente en el momento en que constatamos la presencia del corpúsculo en un punto del tren de ondas por medio de una observación que esta potencialidad se actualiza, para emplear un lenguaje de filósofos. (DE BROGLIE, 1959, p. 963)

El lenguaje que emplea de Broglie es un poco impreciso, pero no hay duda de que se refiere a la llamada regla de Born: si la posición de una partícula está descrita por el vector de estado ψ , el número $|\psi|^2$ expresa la probabilidad de encontrar a la partícula en una determinada región espacial (como el interior de una caja) cuando se realice una medición de su posición. En ausencia de toda observación, la partícula no tiene una localización bien definida; puede considerarse como potencialmente presente en toda esa región del espacio. Cuando se hace una medición de la posición de la partícula, ésta se localiza en un punto determinado del espacio (o, más precisamente, en el entorno de dicho punto). De esta manera, la posición de la partícula se vuelve actual, mientras que antes de efectuar la medición era meramente potencial.

De Broglie hace al respecto este comentario:

Una concepción tal se enfrenta a dificultades que han sido señaladas con fuerza y de diversas maneras por Einstein y Schrödinger. [...] Estas objeciones podrían ser presentadas de diferentes maneras; me conformaré con desarrollar una de ellas, que es un poco esquemática, pero que muestra bien la naturaleza de las paradojas a las cuales uno se ve conducido. (DE BROGLIE, 1959, p. 963)

Aquí alude, casi seguramente, al artículo de EINSTEIN, PODOLSKY & ROSEN (1935) y al del gato de SCHRÖDINGER (1935). Luego formula su

argumento que, como Einstein, considera que conduce a una paradoja. Se trata de un experimento mental que incluso en nuestros días, cuando es posible emitir partículas de a una por vez, no resulta técnicamente realizable como experimento real.

Consideremos un corpúsculo encerrado en una caja B , cuyas paredes le son infranqueables. Su onda ψ está extendida por la caja y el corpúsculo está ‘potencialmente’ presente en toda la caja B con una probabilidad localmente igual a $|\psi|^2$. Supongamos que por un procedimiento cualquiera, por ejemplo deslizando una doble pared a través de la caja B , se divide esta caja en dos partes aisladas B_1 y B_2 y que luego se transporta las dos cajas [...] a dos lugares muy alejados, por ejemplo, a París y a Tokio. El corpúsculo se encuentra ahora potencialmente presente en el conjunto de las cajas B_1 y B_2 y su función de onda ψ comprende dos partes, de las cuales una ψ_1 está localizada en B_1 y la otra ψ_2 en B_2 . La función ψ tiene entonces la forma: $\psi = C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2$, donde C_1 y C_2 son dos constantes, generalmente complejas, tales que $|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1$. (DE BROGLIE, 1959, p. 963-964)

La descripción de la paradoja es muy semejante a la de Einstein, aunque de Broglie no se la acredita de manera directa. Es probable que la conociera mediante conversaciones o correspondencia con Einstein o con Schrödinger, aunque no lo sabemos con certeza. En cualquier caso, de Broglie fue el primero en publicarla, pero lo hizo casi un cuarto de siglo después de que Einstein la inventara. Prosigue la formulación de este modo:

Las leyes de la probabilidad de la mecánica ondulatoria nos dicen que, si se hace en París, sobre la caja B_1 , una experiencia que permite desvelar la presencia del corpúsculo dentro de esta caja, la probabilidad de que esta experiencia dé un resultado positivo es $|C_1|^2$ mientras que la probabilidad de que dé un resultado negativo es de $|C_2|^2$. Según la interpretación usual, esto tendría el siguiente significado: el corpúsculo, estando presente ‘potencialmente’ en el conjunto de las dos cajas antes de la experiencia de localización, se localizaría bruscamente dentro de la caja B_1 en París en caso de un resultado positivo, y se localizaría bruscamente dentro de la caja B_2 en Tokio en caso de un resultado negativo. (DE BROGLIE, 1959, p. 964)

La manera usual de describir esta situación en el contexto de la mecánica cuántica ortodoxa consiste en afirmar que la partícula se encontraba en una *superposición de estados de posición* en las dos cajas. No puede interpretarse este estado como si se tratara de una entidad extendida en el espacio, tal como una onda, que ocupara a la vez las dos cajas. En tal caso, también debería ocupar el espacio que separa a las dos cajas, pero el vector de estado de la partícula indica que la probabilidad de encontrarla fuera de las cajas es igual a cero.⁴ Por consiguiente, no se puede explicar la superposición de estados de posición apelando al comportamiento ondulatorio de la partícula (como suele hacerse a menudo respecto de los estados de superposición de trayectorias producidos en los interferómetros). Más en general, como ya lo había advertido DIRAC ([1930] 1967, p. 17-18), no es posible interpretar el fenómeno de la superposición cuántica de estados entendiéndolo como si fuera una superposición de ondas o campos clásicos. La analogía ondulatoria, de hecho, es un obstáculo para la comprensión de la mecánica cuántica. Por esta razón, la expresión “mecánica ondulatoria”, que emplea de Broglie, pero que ya ha sido abandonada, resulta poco apropiada. Lo mismo puede decirse de la expresión “función de onda”, cuyo uso todavía es muy extendido. Es mejor llamar a ψ el vector de estado de la partícula, lo cual evita la connotación de que describe alguna clase de onda y, por otra parte, resulta también más adecuado desde el punto de vista matemático.⁵

La superposición de estados tampoco se puede describir afirmando que la partícula se encuentra simultáneamente y en acto dentro de las dos cajas, ya que, tomada literalmente, esa descripción sería inconsistente. La apelación a las potencialidades, tempranamente empleada por Max Born y Werner Heisenberg en el célebre Congreso Solvay de 1927 (véase BACCIAGALUPPI & VALENTINI, 2009, p. 383), permite evitar una contradicción manifiesta pero deja sin resolver la cuestión de las probabilidades. Una modificación del experimento muestra mejor este problema. Supongamos que la caja inicial se divide en dos cajas de tamaños diferentes, de modo que una tiene 9/10 del volumen total y la otra

⁴ Aquí se desprecia una probabilidad muy baja de que la partícula salga de las cajas por efecto túnel.

⁵ Aquí emplearé “función de onda” sólo en las citas de autores, como de Broglie y Selleri, que usan esta expresión.

sólo 1/10. Si la probabilidad de encontrar la partícula en una caja es proporcional al volumen de esa caja, como parece razonable suponer, la situación debe describirse diciendo que la partícula se encuentra en una superposición de estados con probabilidad 9/10 de estar en la primera caja y probabilidad 1/10 de estar en la segunda caja. Si afirmamos que la partícula se encuentra potencialmente dentro de las dos cajas, no resulta claro qué significan las probabilidades. ¿Cómo debería entenderse la relación entre probabilidades y potencialidades? ¿Es la probabilidad una medida de la potencialidad? Volveré sobre estas preguntas cuando discuta el significado físico de la superposición de estados.

Cuando se abre una de las cajas, se puede conocer con certeza dónde se encuentra la partícula en ese momento. El vector de estado cambia abruptamente y las probabilidades anteriores colapsan. Parece, entonces, que una medición realizada en un lugar produce un cambio abrupto en el estado de la partícula en otro lugar muy alejado. Es el conocido fenómeno del colapso del vector de estado, que parece implicar algo que Einstein llamaba una “acción a distancia fantasmal”.⁶ Nadie comprende por qué un proceso de medición podría tener este efecto, pero la teoría cuántica ortodoxa postula este fenómeno como un hecho bruto, esto es, que no tiene explicación dentro de la propia teoría. En ausencia de toda medición de la posición de la partícula, ésta permanece en estado de superposición, aun cuando las cajas se alejen indefinidamente. La medición destruye instantáneamente el estado de superposición en ambas cajas, sin que haya una explicación razonable de por qué ocurre este fenómeno. Afirmar que las potencialidades se actualizan simplemente traslada al problema: ahora es necesario explicar por qué las potencialidades no se actualizan espontáneamente y requieren una medición, y acaso un observador consciente, para actualizarse.⁷

⁶ En una conocida carta a Max Born del 3 de marzo de 1947 Einstein le dice que no puede creer en la mecánica cuántica “porque la teoría no puede reconciliarse con la idea de que la física debería representar una realidad en el espacio y el tiempo, libre de acciones a distancia fantasmales.” (EINSTEIN, 1947, p. 158).

⁷ En principio, una medición es cualquier interacción física que nos permita conocer con certeza el valor de un observable. La cuestión de si la medición requiere un observador consciente ha sido muy discutida, pero no puede tratarse aquí.

De Broglie, al igual que Einstein, encontraba imposible aceptar estas ideas:

La única interpretación razonable me parece que es la siguiente: el corpúsculo estaba *antes* de la experiencia de localización dentro de una de las dos cajas B_1 y B_2 , pero nosotros ignorábamos cuál y las probabilidades consideradas por la mecánica ondulatoria usual traducen esta ignorancia; si lo desvelamos dentro de la caja B_1 , es que ya estaba allí, y si no podemos desvelarlo allí, es que estaba dentro de la caja B_2 . [...] Entonces todo se vuelve claro porque retornamos a la interpretación clásica de la probabilidad, cuya intervención resulta de nuestra ignorancia. (DE BROGLIE, 1959, p. 964)

De Broglie propone, entonces, un retorno al realismo del sentido común, según el cual las partículas tienen en todo momento y de manera actual una posición bien definida (y, como consecuencia de ello, también tienen trayectorias bien determinadas en el espacio). Si se descubre que la partícula está dentro de una caja, entonces, ya debía estar allí antes de que se realice la medición; es más, debía estar allí desde el mismo momento en que se separaron las cajas. Las probabilidades no representan ninguna forma de potencialidad, sino que son el resultado de nuestra ignorancia acerca de la posición actual de la partícula antes de abrir las cajas. De esta manera se vuelve a una concepción epistémica de las probabilidades, como es la interpretación clásica, una concepción que está a la base de la termodinámica y la física estadística clásicas. Prosiguiendo esta línea de pensamiento se llega naturalmente a una interpretación estadística de la mecánica cuántica, según la cual esta no describe entidades singulares, como partículas, sino conjuntos (o *ensembles*) de tales entidades.

La conclusión de de Broglie es que la mecánica cuántica debe ser incompleta porque hay al menos un observable, la posición, que la teoría no permite representar de manera adecuada. Lo dice en estos términos:

Pero, en cuanto se admite este punto de vista, se hace manifiesto que la descripción del corpúsculo por la onda ψ , aunque conduce a una representación perfectamente exacta de las probabilidades, no nos da una descripción *completa* de la realidad física, puesto que el corpúsculo debe

tener una localización antes de la experiencia que la desvela y que la onda ψ no nos dice nada respecto de ello. (DE BROGLIE, 1959, p. 964)

En trabajos posteriores, de Broglie volvió a presentar su paradoja como un caso en el que el colapso del vector de estado se produce sin interacción alguna con la partícula o con la caja que la contiene. En efecto, si se abre una caja y la partícula no se encuentra en ella, el colapso se produce igualmente y puede saberse con certeza que la partícula está en la otra caja. Dice al respecto que:

Deberíamos advertir aquí cómo la interpretación usual conduce a una paradoja en el caso de los experimentos con un resultado negativo. Supongamos que el corpúsculo está cargado y que en la caja B_2 en Tokio se ha instalado un instrumento que permite extraer la totalidad del corpúsculo cargado localizado en la caja y, al hacerlo, establecer una localización observable. Ahora bien, si no se observa nada, este resultado negativo significará que el corpúsculo no está en la caja B_2 y, por tanto, está en la caja B_1 en París. Pero esto sólo puede significar razonablemente una cosa: el corpúsculo ya estaba en París antes del experimento de extracción hecho en Tokio en la caja B_2 . Cualquier otra interpretación parecería absurda, pues ¿puede imaginarse que el simple hecho de no haber observado *nada* en Tokio haya podido provocar la localización del corpúsculo a miles de kilómetros? (DE BROGLIE, 1963, p. 30).

De Broglie rechaza como incomprensible la idea de que el colapso del vector de estado pueda haber sido producido por la conciencia del observador que comprueba que la caja está vacía.

En este caso de observación “negativa”, la reducción del paquete de probabilidades, si se lo ha considerado como un fenómeno físico, toma un aspecto incomprensible. En efecto, es imposible admitir que esta reducción sea provocada por la toma de conciencia de un observador que no ha observado nada [...] (DE BROGLIE, 1973, p. 141)

La paradoja de las dos cajas, entonces, también constituye un ejemplo de *medición sin interacción*, una expresión hoy habitual para describir toda una clase de experimentos en los cuales el estado de un sistema físico puede

conocerse a distancia y sin interactuar con dicho sistema. Es también un ejemplo más del carácter extraño del mundo cuántico.

4. La interpretación de Selleri

Franco SELLERI (1994) hizo algunos comentarios filosóficos bastante reveladores acerca de los presupuestos de la interpretación de esta supuesta paradoja. Uno de ellos se refiere a la noción misma de completitud de la teoría. Dice al respecto que:

La noción de completitud de la mecánica cuántica está basada en la idea de que no existe nada en la realidad objetiva que no esté ya contenido en el formalismo de la mecánica cuántica. (SELLERI, 1994, p. 58)

Esta afirmación es particularmente oscura. Ante todo, Einstein nunca definió la noción de completitud de una teoría. En el artículo EPR, sostuvo que una *condición necesaria* para ella es que en una teoría completa “todo elemento de realidad física debe tener una contrapartida en la teoría física” (EINSTEIN et al., 1935, p. 177). Para los fines de probar que una teoría no es completa basta con mostrar que no se cumple esta condición. Sin embargo, ella no constituye una definición de completitud, ya que no se la postula como una condición que sea, además, suficiente. Incluso como mera condición necesaria, no está claro cuáles son sus implicaciones. Es una caracterización bastante vaga de la completitud, pero se la puede esclarecer con un ejemplo. Supongamos un sistema físico formado por una colección de partículas, cada una de las cuales tiene una posición determinada en tanto partes del sistema total. Una teoría completa sería, entonces, aquella que permitiera establecer no sólo la posición del sistema físico compuesto, sino, además, la posición de cada partícula individual que lo compone. La física estadística clásica no permite hacerlo, por lo que debe considerarse una teoría incompleta. El mismo argumento se puede aplicar a la mecánica cuántica en relación con la posición y el momento de una partícula en un instante dado. Pero, sin duda, el argumento tiene presupuestos ontológicos, es decir, supone que ya se conoce cuáles son las entidades que tienen realidad física y cuáles son sus propiedades. En particular, se supone que las partículas

son reales y que tienen en todo tiempo propiedades actuales bien determinadas, como la posición y el momento.

Si se toma literalmente la caracterización de completitud de Selleri, toda teoría física resulta incompleta por principio. Cualquier entidad o proceso físico tiene un número infinito o indefinidamente grande de propiedades, pero una teoría física sólo trata acerca de un conjunto muy limitado de tales propiedades. Usualmente se afirma que el vector de estado que representa el estado de un sistema físico contiene toda la información posible acerca de ese sistema físico. Esto equivale a decir que dicho vector caracteriza de manera completa el estado del sistema. La completitud de la teoría cuántica debe entenderse, creo, relativamente a la propia teoría. La teoría es completa si nos permite obtener toda la información relevante que deseamos obtener respecto de una determinada propiedad (u observable) tal como la posición, que se encuentra dentro del alcance de la teoría (la cual no dice nada, por ejemplo, respecto de innumerables propiedades de cada sistema físico). Desde este punto de vista, la mecánica cuántica sería incompleta porque no nos permite conocer la posición actual de la partícula una vez que se han separado las cajas. Selleri lo dice en estos términos:

Advirtamos que la completitud de la teoría nos prohíbe decir, por ejemplo, que el electrón esté en realidad dentro de B_1 o dentro de B_2 . Una afirmación tal implicaría, pues, una mejor localización espacial que la provista por las funciones de onda ψ_1 y ψ_2 . La única afirmación compatible con la completitud de la mecánica cuántica consiste en decir que la partícula está dentro de B_1 y de B_2 . (SELLERI, 1994, p. 59)

Esta no es una descripción adecuada de la situación. En realidad, la mecánica cuántica sólo permite afirmar que la partícula se encuentra en una superposición de estados de posición en B_1 y B_2 , pero esto no implica que se encuentre simultáneamente dentro de ambas cajas, ni distribuida por partes, ni de ningún otro modo semejante que implique que tiene *en acto* una posición determinada. Selleri prosigue así su comentario:

Excluyendo la posibilidad de que una observación en París haga desaparecer un 'semi-electrón' en Tokio y lo haga aparecer en París, la actitud natural de la mayoría de los físicos será decir que el electrón observado en París en el tiempo t_0 ya estaba allí *en* $t < t_0$ *y que las*

funciones de onda Ψ_1 y Ψ_2 representan solamente el conocimiento, antes de la observación, de la posición del electrón. (SELLERI, 1994, p. 60)

La situación es en realidad más compleja. En un contexto clásico puede decirse que si se realiza una medición del estado de un sistema respecto de un determinado observable A que resulta tener el valor a_1 en el momento t_0 , entonces, el valor de ese observable era a_1 en un momento t inmediatamente anterior a t_0 y será a_1 en un momento t' inmediatamente posterior a t_0 (pensemos, por ejemplo, en la posición de una partícula en movimiento). La mecánica cuántica, en cambio, sólo permite afirmar que el valor de A es a_1 en t_0 y será a_1 en un momento posterior t' suficientemente breve, pero no permite decir nada acerca del valor de ese observable en ningún momento anterior a la realización de la medición. Cuando la partícula se prepara de tal modo que se sabe con certeza que se encuentra dentro de una caja, que podemos imaginar de gran tamaño, no puede decirse que tenga una posición determinada dentro de la caja. No se encuentra en una superposición de estados de posición, pero se encuentra *deslocalizada* en el interior de la caja. El vector de estado de la partícula sólo permite describirla como una partícula que se encuentra dentro de la caja con probabilidad 1. Si se mide su posición y se halla que está, digamos, en uno de los vértices de la caja, no puede decirse que estuviera allí antes de la medición. También podría haber estado en cualquier otra parte dentro de la caja. De manera análoga, cuando la partícula se encuentra en superposición de estados de posición en las dos cajas, está deslocalizada respecto de cada caja en particular, y si se la encuentra dentro de una de las cajas, no puede decirse que estuviera allí antes de la medición. También podría haberse encontrado dentro de la otra caja. Evidentemente, es difícil proporcionar una descripción coherente o incluso inteligible de esta situación, simplemente, porque no es claro cómo deben entenderse los estados de superposición.⁸

Selleri concluye, interpretando el espíritu de la posición de de Broglie, que la mecánica cuántica debe ser completada mediante *variables ocultas*, si es que se quiere permanecer dentro de una posición filosófica realista.

⁸ En las secciones 5 y 6 analizo la formulación del principio de superposición y la interpretación física de la superposición de estados.

Esta actitud natural (que corresponde a la posición filosófica del realismo) si se la lleva hasta su conclusión lógica, conduce a introducir un nuevo parámetro observable λ que describe la localización dentro de B_1 y de B_2 . Si $\lambda = +1$, se dice que el electrón está dentro de B_1 , y si $\lambda = -1$, se dice que el electrón está dentro de B_2 . Todo esto, en consecuencia, implica que la mecánica cuántica usual, que nada sabe sobre λ , es incompleta. Esta localización λ es pues una variable oculta. (SELLERI, 1994, p. 60)

Este es el programa de las teorías de variables ocultas que fue realizado por primera vez por Bohm en 1952 y que ha proseguido hasta nuestros días en la llamada Mecánica Bohmiana.⁹ Aquí no me propongo hacer una evaluación de este programa de investigación, pero quiero hacer dos observaciones generales. La primera es que la estrategia de “completar” la teoría cuántica ortodoxa introduciendo variables ocultas debe entenderse como el reemplazo de esta teoría por otra alternativa, y no como una interpretación más de esta teoría o como una formulación de ella.¹⁰ Aunque la teoría de Bohm es empíricamente equivalente a la mecánica cuántica ortodoxa, de hecho modifica una parte del formalismo de esta teoría. Mantiene la ecuación de Schrödinger como ley dinámica, pero modifica el espacio de los estados (el espacio de Hilbert) suplementándolo con las variables ocultas, que son básicamente las posiciones de las partículas. Por otra parte, la teoría de Bohm introduce nuevas entidades teóricas, como el potencial cuántico, que no tienen contrapartida en la mecánica cuántica ortodoxa y cuyo estatus ontológico ha sido oscuro desde el comienzo. Se la debe considerar, entonces, como una teoría rival de la teoría cuántica estándar, que no es teóricamente equivalente a ésta. La segunda observación es que el desarrollo teórico y experimental de la física cuántica ha socavado el

⁹ Por ejemplo, en las obras de HOLLAND (1993), DÜRR & TEUFEL (2009) y DÜRR, GOLDSTEIN & ZANGHI (2014). GOUESBET (2013) contiene un detallado examen de las objeciones a la teoría de Bohm y una réplica a cada una de ellas.

¹⁰ El propio Bohm presentó su teoría como “una interpretación alternativa” de la mecánica cuántica (BOHM, 1952, p. 166) y mantuvo siempre esta manera de expresarse (por ejemplo, en sus libros posteriores como BOHM, 1957, p. 111 y ss) y BOHM & HILEY, 1993, p. 2 y ss). Para un argumento detallado acerca de la teoría de Bohm como rival de la mecánica cuántica ortodoxa véase RIGGS (2009, p. 10-11).

atractivo inicial de esta clase de teorías, que era recuperar la ontología de la física clásica. En principio, la teoría de Bohm pretendía referirse a partículas puntuales que tienen una posición determinada en todo momento y se mueven a lo largo de trayectorias bien definidas en el espacio real. Sin embargo, el teorema de Bell y el teorema de Kochen y Specker establecieron límites fundamentales para esta clase de teorías. Como consecuencia de estas limitaciones, toda teoría de variables ocultas que sea empíricamente equivalente a la mecánica cuántica ortodoxa debe ser *no local* y *contextualista*.¹¹ A causa de la no localidad, en la teoría de Bohm la trayectoria de una partícula depende de las posiciones de otras partículas separadas de ella por un intervalo de tipo espacial. Además, como consecuencia de la contextualidad, el valor medido de una propiedad de una partícula depende de los valores de otras propiedades de la partícula que se midan simultáneamente en un determinado contexto experimental.¹² Comoquiera que se entiendan la no localidad y la contextualidad (hay diferentes posiciones al respecto) resulta claro que estas características no forman parte de la ontología realista clásica, de acuerdo con la cual cada objeto ocupa una posición determinada en el espacio-tiempo, posee todas sus propiedades en acto y sólo ejerce influencias causales significativas sobre otros objetos en su entorno inmediato.¹³

Así pues, según Selleri, la paradoja de de Broglie nos obliga a elegir entre la incompletitud de la mecánica cuántica o una situación paradójica. Al respecto se expresa de esta manera:

¹¹ Sobre este punto, que no es posible desarrollar aquí, véanse las observaciones de BITBOL (1996, p. 350-352 y 448-452). Véase también GOUESBET (2013, p. 168 y 255).

¹² Por consiguiente, si se fija el valor de las variables ocultas, el valor de algunos observables no queda objetivamente determinado. En la teoría de Bohm, por ejemplo, la posición es una variable oculta no contextual, pero el *spin*, en cambio, es una variable contextual. Si se fija el valor de la posición de una partícula, el valor del *spin* de dicha partícula no queda determinado, sino que depende del contexto experimental (este ejemplo se desarrolla con detalle en GHIRARDI, 2005, p. 210-225).

¹³ Sobre la no localidad cuántica véase el estudio detallado de MAUDLIN (2011), que distingue claramente los diferentes sentidos en que puede entenderse la condición de localidad.

Insistir sobre la completitud de la mecánica cuántica conduce a la conclusión muy paradójica de que un electrón puede existir simultáneamente dentro de B_1 y dentro de B_2 , y de que observar el electrón dentro de B_1 hace desaparecer súbitamente la ‘parte’ que se encontraba inicialmente dentro de B_2 . (SELLERI, 1994, p. 60)

En realidad, como ya se ha dicho, la descripción cuántica de la situación sólo permite decir que antes de realizar una medición en alguna de las cajas, el electrón se encontraba en la superposición de estados $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$, pero que, inmediatamente después de la medición se encuentra en un nuevo estado puro, no superpuesto. Así, los viejos vectores de estado son reemplazados por otros nuevos: ψ'_1 y ψ'_2 , tales que $|\psi'_1|^2 = 1$ y $|\psi'_2|^2 = 0$.¹⁴ La mecánica cuántica nada dice acerca de cómo se produce el colapso a distancia de los vectores de estado. Mucho menos, acerca de “partes” de electrones que aparecen y desaparecen. Esa es una descripción ajena a la teoría, basada en supuestos ontológicos de un realismo ingenuo. Selleri advierte este presupuesto y dice al respecto:

Todo esto conduce a una conclusión bastante elemental: la *paradoja* de de Broglie no existe más que para las personas que insisten sobre su posición filosófica *realista* (las partículas existen objetivamente) y racionalista (para la cual el espacio-tiempo no es una ilusión de los sentidos y para la cual es posible hablar de la localización del electrón). Para otros puntos de vista filosóficos (como el del positivismo) no hay paradoja en absoluto. (SELLERI, 1994, p. 61)

Es indudablemente cierto que el planteo de la paradoja presupone un punto de vista realista, tanto sobre las partículas como sobre el espacio-tiempo. (El racionalismo, por otra parte, no tiene nada que ver con la objetividad del espacio-tiempo). La paradoja proviene del supuesto de que los objetos concretos que existen en el espacio-tiempo, ya sean partículas elementales o cajas, tienen en todo momento una localización bien definida. Pero este presupuesto no forma parte de la mecánica cuántica sino, en todo caso, es parte de una ontología del sentido común acerca de los objetos macroscópicos de los cuales tenemos experiencia. No obstante, este es el supuesto en el que se funda

¹⁴ Empleo aquí la notación que usan de Broglie y Selleri.

la idea de incompletitud de Einstein, de Broglie y Selleri. Para ellos el vector de estado no brinda una información completa sobre la posición de la partícula en las cajas porque piensan que la partícula tiene en todo momento una posición bien definida y, por consiguiente, desde el momento en que se separan las cajas se encuentra en acto dentro de una de las dos cajas. La mecánica cuántica ortodoxa, en cambio, permite afirmar solamente que la partícula se encuentra en una superposición de estados de posición. Si la descripción del sistema físico que proporciona el vector de estado fuera completa, entonces, debería aceptarse que la partícula a veces no tiene una posición definida. En este caso, el problema se traslada a la manera en que debe entenderse el significado físico de los estados superpuestos.

En síntesis, la paradoja de las dos cajas ejemplifica tres aspectos característicos de la teoría cuántica ortodoxa: (i) *la superposición de estados de un observable*, tal como la posición; (ii) *el colapso de la función de onda a distancia*, esto es, la existencia de una acción no local de un sistema físico sobre otro; y (iii) *la existencia de mediciones sin interacción* que permiten determinar el estado de un sistema físico sin interactuar causalmente con dicho sistema. Recientemente, se la ha discutido sobre todo respecto de los dos últimos aspectos.¹⁵ Desde este punto de vista, la paradoja presenta el problema clásico de la medición en mecánica cuántica y constituye una ejemplificación de los aspectos más característicos de tal proceso de medición. En este trabajo, en cambio, quiero analizarla solamente en relación con el primero, con la superposición de estados. Supongamos que las dos cajas se alejan indefinidamente, pero nunca se abren, de modo que no se determina en cuál de ellas se encuentra la partícula. Según la mecánica cuántica ortodoxa, en ausencia de toda interacción con su entorno la partícula permanece en una superposición de estados de posición en las dos cajas. Aquí el problema del colapso del vector de estado producido por la medición no se presenta, y, por tanto, no se requiere el principio de separación de Einstein. La cuestión de la completitud de la teoría puede plantearse, entonces, como un dilema. En primer lugar, si la teoría cuántica es completa, la partícula se encuentra *realmente* en una superposición de estados de

¹⁵ Véanse, por ejemplo, los artículos de NORSE (2005) y HELD (2014), que relacionan la paradoja de las dos cajas con el argumento EPR y con el teorema de Bell. Ciertamente, la paradoja tiene relación con estos dos temas, pero esa no es la línea de argumentación que quiero seguir aquí.

posición y, por consiguiente, las probabilidades que se extraen de la función de onda, mediante la regla de Born, son *objetivas*. En segundo lugar, si la mecánica cuántica es incompleta, la partícula se encuentra en todo momento en una sola de las cajas; por consiguiente, los estados de superposición *no son reales*, y las probabilidades expresadas en la función de onda son *subjetivas* o, más en general, *epistémicas*.

5. El principio de superposición

Paul Dirac, ya en 1930, presentó al principio de superposición como el fundamento mismo de la mecánica cuántica y a la existencia de estados superpuestos como la característica más distintiva de esta teoría.¹⁶ El desarrollo de la física cuántica hasta nuestros días ha confirmado ampliamente esta intuición afortunada. Los fenómenos más sorprendentes de la física cuántica, como el entrelazamiento de los estados de sistemas compuestos y la teleportación cuántica, son, en efecto, consecuencias del principio de superposición. Aquí no me ocuparé de estos fenómenos, sino que me limitaré a formular este principio y a plantear el problema de su interpretación física.

El formalismo matemático estándar de la mecánica cuántica emplea los espacios de Hilbert, que son espacios vectoriales que contienen un número infinito de vectores $|\phi\rangle$, $|\xi\rangle$, etc., y de escalares c , d , etc., que generalmente son números complejos. Si un vector $|\phi\rangle$ pertenece a un espacio de Hilbert \mathcal{H} , entonces, el producto de un escalar por un vector $c|\phi\rangle$ también es un vector que pertenece a \mathcal{H} . Los vectores de un espacio de Hilbert pueden superponerse y el resultado de esta operación es otro vector. Si los vectores $|\phi\rangle$, $|\xi\rangle$ pertenecen a \mathcal{H} , entonces, la suma $|\phi\rangle + |\xi\rangle$ también es un vector que pertenece a \mathcal{H} . Todo espacio de Hilbert está dotado de una operación de

¹⁶ Véase DIRAC ([1930] 1967, cap. 1), que todavía hoy constituye el análisis más profundo del principio de superposición, un tema que no ha tenido la atención que merece por parte de los filósofos de la ciencia. Por su parte, los tratados de mecánica cuántica casi siempre formulan el principio de superposición y lo señalan como uno de los postulados básicos de la teoría, pero apenas dedican algunas líneas a analizar el significado físico de este principio. Véanse, entre muchos otros, GOTTFRIED & YAN (2003, p. 11-12); y AULETTA & WANG (2014, p. 26-27).

producto interno, que consiste en la asignación de un número complejo a cada par ordenado de vectores $\langle \phi | \xi \rangle$. Se admite como una convención útil que los vectores son unitarios, de modo que $\langle \phi | \phi \rangle = 1$.

Un espacio de Hilbert es un objeto puramente matemático que, como tal, carece de contenido empírico y no permite hacer ninguna predicción sobre los fenómenos físicos. Para que la mecánica cuántica pueda considerarse una teoría física es necesario interpretar los símbolos del espacio de Hilbert asignándoles un significado físico. La asignación de estos significados se hace mediante reglas de interpretación que, usualmente, se presentan como principios fundamentales de la teoría. La primera de estas reglas es que cada espacio de Hilbert representa un determinado sistema físico. La segunda regla básica es que un vector no nulo $|\phi\rangle$ de un espacio de Hilbert representa el estado de un sistema físico, y que el producto $c|\phi\rangle$ (donde c es un número complejo) representa el mismo estado que $|\phi\rangle$. La tercera regla es el propio principio de superposición que afirma que si los vectores $|\phi\rangle$ y $|\xi\rangle$ de un espacio de Hilbert \mathcal{H} representan dos estados del sistema físico \mathcal{S} , asociado a \mathcal{H} , entonces, el vector $c_1|\phi\rangle + c_2|\xi\rangle$ también representa un estado de \mathcal{S} . Suponemos aquí que los números complejos c_1 y c_2 (no necesariamente diferentes) son tales que $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$. Se conviene en normalizarlos de manera que $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$.

El principio de superposición es una consecuencia del carácter lineal del espacio de Hilbert. Se lo puede generalizar a cualquier número de estados. La formulación más general del principio es, entonces, la siguiente: si los vectores no nulos $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots, |\phi_n\rangle$ representan posibles estados de un sistema físico \mathcal{S} , entonces, $|\phi\rangle = \sum_n c_n |\phi_n\rangle$ también representa un estado posible de \mathcal{S} . La condición de normalización de los números complejos debe expresarse, entonces, como $\sum_n |c_n|^2 = 1$.

Se plantea, entonces, de manera inmediata, el problema de comprender el significado físico de la superposición de estados. Si se admite que todo vector no nulo de un espacio de Hilbert \mathcal{H} , asociado a un sistema \mathcal{S} , representa un estado de \mathcal{S} ¿cuál es el estado de \mathcal{S} que representa la superposición de dos o más vectores de \mathcal{H} ? Desde el punto de vista matemático, la superposición lineal de vectores es una consecuencia inevitable del carácter lineal de los espacios de Hilbert y no presenta ningún problema de interpretación. Desde el punto de

vista físico, en cambio, la naturaleza de los estados superpuestos parece a primera vista incomprensible.

Para esclarecerla es necesario introducir la noción de observable de la teoría cuántica. Los observables A , B , etc., de un sistema físico S son las propiedades o magnitudes físicas que caracterizan a S . Si el sistema es una partícula, como un electrón, los observables correspondientes son propiedades físicas tales, como la posición, el momento, el *spin* y otras derivadas de éstas. Esta terminología puede ser engañosa, ya que un observable cuántico no necesariamente es una propiedad observable en el sentido informal del término, pero puede entenderse como una magnitud física cuyo valor se puede medir o determinar por medio de algún experimento. Un observable A es una propiedad determinable de un sistema físico S que puede tomar un número finito o infinito de valores determinados: a_1 , a_2 , etc. Cada uno de estos valores constituye un estado diferente de S , que está representado por un vector unitario perteneciente al espacio de Hilbert que representa a S . Así, el vector unitario $|a_1\rangle$ representa el estado de S en el cual el observable A tiene el valor a_1 y el vector unitario $|a_2\rangle$ representa otro estado de S en el cual A tiene el valor a_2 .¹⁷ ¿Cómo debe interpretarse, entonces, el estado superpuesto $c_1|a_1\rangle + c_2|a_2\rangle$? Parece evidente, que tanto los coeficientes complejos c_1 y c_2 como el signo de adición son símbolos matemáticos que no tienen un carácter referencial, es decir, que por sí mismos no representan nada en el mundo físico. Si la expresión $c_1|a_1\rangle + c_2|a_2\rangle$ representa algo, debe hacerlo de manera global.

Para interpretar el significado físico del vector de estado ψ es indispensable una cuarta regla, la ya mencionada regla de Born, según la cual si un sistema S se encuentra en un estado $|\psi_1\rangle = c_i|a_i\rangle$, entonces, $|\psi_1|^2$ representa la probabilidad de que si se hace una medición del observable A en el sistema S el resultado sea a_i , es decir, la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado a_i inmediatamente después de realizada la medición. Así, los números complejos que se encuentran en el vector de estado se interpretan de tal modo que el cuadrado de cada número expresa un valor de probabilidad (en sentido estricto, una densidad de probabilidad). La regla de Born constituye el lazo fundamental entre el formalismo matemático de la teoría y la experiencia. Mediante esta regla se pueden deducir de la teoría predicciones probabilistas,

¹⁷ Suponiendo siempre la convención notacional según la cual $a_j \neq a_k$ si y sólo si $j \neq k$.

que, comoquiera que se interpreten las probabilidades, a la hora de ponerse a prueba tendrán que compararse con el resultado de frecuencias observadas en experimentos repetidos sobre una muestra convenientemente preparada.

Si se aplica la regla de Born a los sistemas en superposición de estados, la expresión $|\Psi_1\rangle = c_1|a_1\rangle + c_2|a_2\rangle$ tiene que entenderse así: el sistema físico S se encuentra simultáneamente en el estado $|a_1\rangle$ con una probabilidad $P_1 = |c_1|^2$ y en el estado $|a_2\rangle$ con una probabilidad $P_2 = |c_2|^2$. Esto no aclara mucho las cosas, sino que más bien las complica. ¿Qué puede significar encontrarse a la vez en dos estados diferentes cada uno de ellos con una cierta probabilidad? El problema puede extenderse a la superposición de cualquier número de estados con sus correspondientes probabilidades (que siempre supondremos que son mayores que 0). Por ejemplo, en el caso de la paradoja de las cajas, si la caja original se divide en n partes diferentes que se separan, cada una de ellas con un volumen diferente, la partícula se encuentra en una superposición de n estados, cada uno de ellos con una probabilidad proporcional al volumen de cada parte de la caja original.

6. La interpretación del principio de superposición

Las obras de divulgación sobre mecánica cuántica (y también, a veces, algunas obras especializadas) casi siempre describen los estados de superposición cuántica diciendo que un sistema físico se encuentra a la vez en dos o más estados: una partícula pasa a la vez por las dos ranuras de una pantalla, o el gato de Schrödinger se encuentra a la vez vivo y muerto. Pero esta descripción es incoherente, ya que se trata de estados incompatibles entre sí, al menos si se los concibe como la posesión de *propiedades actuales* por parte de un sistema físico. De Broglie y Selleri también apelan a este tipo de expresiones cuando sugieren que la partícula en superposición de estados de posición se encuentra a la vez en las dos cajas. Pero este discurso debe tomarse como un modo de hablar dirigido a poner de relieve los aspectos paradójicos de la mecánica cuántica. Es una descripción que no puede entenderse literalmente.

En sentido estricto, la superposición de estados $c_1|a_1\rangle + c_2|a_2\rangle$ no puede describirse afirmando que el sistema se encuentra en ninguno de los estados $|a_1\rangle$ o $|a_2\rangle$, ni tampoco en ambos a la vez o en ninguno de ellos. Como señala Abner Shimony, los estados de superposición de un determinado

observable A representan un estado del sistema S en el cual “ A no tiene un valor definido” (SHIMONY, 2007, p. 108). En el lenguaje de la ontología tradicional, puede decirse que el sistema no tiene en acto ningún determinado del determinable A . Esta caracterización es puramente negativa por lo cual no permite comprender qué es precisamente encontrarse en una superposición de estados. David Albert advierte que sólo es lícito expresarse de manera negativa acerca de la superposición de estados y concluye que “superposición” es “sólo un nombre para algo que no comprendemos” (ALBERT, 1992, p. 11). Sugiere, sin embargo, que los estados superpuestos son “modos de ser” que son “muy diferentes de aquello que sabemos cómo pensar” (ALBERT, 1992, p. 11). El problema principal de la interpretación de la mecánica cuántica consiste, para todos los físicos y filósofos de orientación realista, en determinar cuáles son esos modos de ser, es decir, en proporcionar una ontología coherente y completa para esta teoría. La superposición de estados constituye, por su parte, el obstáculo fundamental para esta tarea.

Hay varias estrategias posibles para tratar de superar las dificultades que plantea el principio de superposición. La más radical consiste en adoptar una posición completamente anti-realista acerca de la teoría cuántica, considerando que se trata solamente de un instrumento de cálculo que permite predecir (de manera probabilista) los resultados de las mediciones y experimentos. Desde esta perspectiva, la superposición de estados resulta una mera ficción útil, que no tiene alcance ontológico. Además, el problema de la completitud o no de la mecánica cuántica se disuelve, ya que la teoría no pretende describir los sistemas cuánticos, ni individual ni colectivamente, por lo que no tiene sentido preguntar si la “descripción mecánico-cuántica de la realidad” (son los términos del título del artículo EPR) es completa o incompleta, sencillamente porque no hay tal descripción. Para el anti-realista, el objetivo de la mecánica cuántica, o de cualquier otra teoría física, no es describir la realidad ni, mucho menos, ofrecer una imagen del mundo. Esta ha sido, y todavía es, la posición de numerosos físicos desde el origen mismo de la mecánica cuántica. Bohr, Dirac, Heisenberg y Pauli, entre muchos otros, adoptaron alguna variante del anti-realismo, pero, aunque esta posición sigue siendo popular entre los físicos practicantes,

actualmente ha perdido consenso entre quienes reflexionan sobre la cuestión interpretativa.¹⁸

La posición realista, que admite que las teorías de la física se proponen ofrecer una descripción verdadera, o al menos verosímil, del mundo físico tal como es en sí mismo, tiene dos caminos posibles. El primero es aceptar que la mecánica cuántica ortodoxa proporciona una descripción completa de los sistemas físicos (no necesariamente microscópicos) que caen bajo su dominio de aplicación. En ese caso, debe admitirse que los estados de superposición son reales. De allí se siguen dos consecuencias importantes. La primera es que en un estado como $|\psi_1\rangle = c_1|a_1\rangle + c_2|a_2\rangle$, el observable \mathcal{A} no tiene objetivamente un único valor determinado. Esta indeterminación no es, por tanto, un resultado de nuestra falta de conocimiento acerca del estado del sistema S ; al contrario, el sistema se encuentra en un estado en el que ese observable no tiene un único valor definido. La segunda consecuencia, es que las probabilidades $|c_1|^2$ y $|c_2|^2$ deben considerarse como objetivas, y, por tanto, no admiten una interpretación epistémica o subjetiva, según la cual expresan nuestra ignorancia acerca del estado total de S o nuestro grado de creencia parcial acerca de dicho estado (como en la interpretación bayesiana). Así, si la mecánica cuántica es completa, el vector de estado ψ contiene toda la información posible acerca del estado del sistema S , por tanto, si el vector de estado indica que dicho sistema se encuentra en una superposición de estados, es ése precisamente el estado del sistema y no puede obtenerse mayor información acerca de él puesto que no hay por principio información oculta o inaccesible.

El otro camino posible para el realista consiste en reemplazar la mecánica cuántica ortodoxa por otra teoría, empíricamente equivalente o no, en la cual no se admita la superposición de estados. El programa de “completar” la mecánica cuántica con variables ocultas es una estrategia de esta clase. En realidad es un programa dirigido a producir una teoría alternativa a la mecánica

¹⁸ Como muestra véase la evaluación de la situación que, desde un punto de vista realista, hace Steven WEINBERG (2013, p. 95). Asher Peres proporciona un claro ejemplo de la persistencia de la posición anti-realista, según la cual “la mecánica cuántica no es una descripción objetiva de la realidad”, sino que “sólo predice la probabilidad de que ocurran eventos macroscópicos estocásticos” (PERES, 2002, p. 423).

cuántica y no una mera interpretación de ésta. Las teorías del colapso espontáneo del vector de estado, como las de GHIRARDI, RIMINI & WEBER (1986) proporcionan otra variante del mismo programa. En este caso el resultado es una teoría claramente diferente de la mecánica cuántica ortodoxa que, a diferencia de la teoría de variables ocultas de Bohm, no es empíricamente equivalente a esta.¹⁹ En cualquiera de sus variedades, las teorías alternativas, si es que han de ser empíricamente adecuadas a los resultados experimentales, deberán ser no locales, ya que la no localidad es un fenómeno experimentalmente bien confirmado. Los realistas están, por tanto, forzados a admitir que la no localidad es una característica intrínseca del mundo físico, cualquiera sea la teoría que adopten. Los anti-realistas tampoco pueden prescindir de ella, al menos a los fines de realizar los cálculos para derivar predicciones, pero la considerarán simplemente otra ficción útil más, de las tantas que han introducido los físicos cuánticos.

El problema fundamental que afrontan todos los realistas que se mantienen en el dominio de la mecánica cuántica ortodoxa consiste en proporcionar una ontología para esta teoría que permita hacer inteligible el principio de superposición. Si se es realista acerca de la mecánica cuántica, ésta ciertamente necesita una interpretación, pero no en el sentido de una correlación de los símbolos del formalismo matemático con significados físicos. Toda teoría física, en particular, cualquier teoría cuántica, necesita esta clase de interpretación minimal, si es que ha de tener contenido empírico. De otro modo, sería una pura teoría formal de la que no podrían derivarse predicciones sobre los fenómenos y, por tanto, no podría ser confirmada por ningún experimento.²⁰ Además de esta interpretación básica o minimal, suficiente para

¹⁹ Véase GHIRARDI (2005, cap. 17), donde se afirma sin reservas que la teoría del colapso espontáneo es una alternativa a la mecánica cuántica ortodoxa, precisamente por el hecho de que permite derivar algunas predicciones diferentes de las de esa teoría (por ejemplo, que la energía no se conserva). La no equivalencia empírica, sin embargo, no puede considerarse como el único criterio para distinguir teorías, sino sólo como una condición suficiente. Esto es, si dos teorías son empíricamente equivalentes, no necesariamente son dos formulaciones de una y la misma teoría. Sólo los filósofos anti-realistas, en particular, los empiristas, aceptarían esta implicación.

²⁰ La interpretación minimal, debida principalmente a DIRAC ([1930] 1967) y VON NEUMANN (1932), está dada por reglas semánticas, puramente convencionales, como las enunciadas en la sección 5. Sobre estas reglas no hay mayor desacuerdo entre los

cualquier aplicación de la teoría cuántica, el realista busca una interpretación plena que proporcione una ontología completa y coherente, si es que ha de perseguir el fin de obtener una “imagen cuántica de la realidad física”. Hasta ahora, nadie ha conseguido proporcionar tal ontología para la teoría cuántica ortodoxa que, desde sus mismos orígenes, careció de una ontología pretendida.

La apelación a *potencialidades* ha sido, desde los comienzos, una alternativa ontológica para interpretar la superposición de estados. Dado que en un estado superpuesto como $|\psi_1\rangle = c_1|a_1\rangle + c_2|a_2\rangle$, no se puede adjudicar al observable A un valor determinado, puede interpretarse que éste no tiene *en acto* un valor definido. De allí puede inferirse que el sistema que se encuentra en superposición de estados de un observable dado no tiene en acto ninguna propiedad correspondiente a los determinados de ese observable, sino sólo propiedades *en potencia*. Cuando dicho sistema se encuentra en una superposición de estados, el vector de estado sólo describe propiedades potenciales de ese sistema. El colapso del vector de estado, por consiguiente, debe concebirse como la actualización, objetivamente azarosa, de una de esas propiedades potenciales.

David Bohm, antes de volverse partidario de las variables ocultas, expresó de manera incomparablemente clara esta interpretación del vector de estado en los siguientes términos:

[...] las propiedades de la materia, en general, no existen separadamente en un objeto dado de una forma precisamente definida. Son, en cambio, potencialidades incompletamente definidas realizadas en una forma más definida sólo en la interacción con otros sistemas, tales como instrumentos de medición. La función de onda describe todas estas potencialidades y les asigna una cierta probabilidad a cada una. Esta probabilidad no se refiere a la chance de que una propiedad dada, tal como un cierto valor de momento, realmente exista en ese tiempo en

físicos, como señala JAEGER (2009, p. 117-124). REDHEAD (1987, p. 44) la llama “interpretación minimal instrumentalista”, pero el nombre no me parece adecuado, ya que se trata de una interpretación neutral respecto de cualquier posición epistemológica que, de hecho, la emplean tanto los realistas como los anti-realistas. La noción misma de interpretación de una teoría física todavía no tiene una elucidación satisfactoria. El capítulo 1 de RUETSCHÉ (2011) contiene un análisis que, en mi opinión, deja la mayoría de los problemas importantes sin respuesta.

el sistema, sino más bien a la chance de que en interacción con un instrumento de medición apropiado tal valor se desarrolle a expensas de una correspondiente pérdida de definición de alguna otra variable, en este caso la posición. (BOHM, 1951, p. 175)

Muchas otras interpretaciones de la misma familia adoptaron una ontología de potencialidades, latencias o disposiciones, que no se consideran como propiedades en acto, para dar cuenta de la superposición de estados o de los estados cuánticos en general. Aquí no me ocuparé de analizarlas, lo cual está fuera de los límites de este trabajo. Sólo haré tres observaciones generales. La primera, que es la más obvia desde un punto de vista filosófico, es que esta ontología de potencialidades no ha sido desarrollada todavía de un modo consistente y completo. La segunda observación es que, en caso de que se dispusiera de tal ontología, la mecánica cuántica ocuparía un lugar singular entre las teorías físicas, ya que todas las teorías clásicas, incluso las teoría probabilistas como la física estadística, pueden comprenderse, y de hecho lo han sido, en términos de sistemas físicos que poseen todas sus propiedades en acto. Por consiguiente, el resto de la física no requiere una ontología de potencialidades, al menos a primera vista. Este hecho podría hacer difícil la unificación de la física cuántica con el resto de la física, si lo que se busca es obtener una imagen completa del mundo físico. La tercera observación es que el significado de las probabilidades cuánticas, y del cambio de las probabilidades que se produce cuando colapsa el vector de estado, no resulta inmediatamente inteligible en términos de potencialidades. Ante todo, porque el concepto de potencialidad, al menos en la tradición filosófica, es puramente cualitativo, por lo que la probabilidad no puede considerarse directamente como una medida de la potencialidad.²¹ Para poder hacerlo, sería necesario metrizar el concepto de potencialidad, y luego probar que ese concepto métrico (normalizado) satisface los axiomas de la teoría de la probabilidad.

El significado de las probabilidades también puede explorarse utilizando el ejemplo de las dos cajas. Cuando la partícula se halla en superposición de estados de posición en las dos cajas, puede interpretarse que

²¹ Algo semejante ocurre con la relación entre probabilidad y verdad. La probabilidad que se atribuye a una proposición no puede considerarse como una medida de la verosimilitud o grado de verdad de dicha proposición.

no tiene posición alguna en acto, pero que se encuentra potencialmente dentro de las dos cajas, aunque con diferentes probabilidades. Supongamos que las cajas sean desiguales y las probabilidades, sean, respectivamente de $1/10$ y de $9/10$. ¿Qué significan estas probabilidades en términos de potencialidades? Desde un punto de vista experimental, las probabilidades siempre tienen que interpretarse como frecuencias, dado que la única manera de confirmar predicciones probabilistas es mediante el conteo de frecuencias observadas. Esto quiere decir que si realizamos experimentos repetidos con las dos cajas, la partícula se encontrará dentro de la caja chica una de cada diez veces y dentro de la caja grande nueve de cada diez veces (por cierto, en secuencias finitas de observaciones los valores observados se desviarán de estos valores, pero tenderán a estabilizarse en secuencias largas). Pero esto no resuelve el problema de interpretar la superposición de estados, ya que en ausencia de toda observación no puede apelarse a frecuencias. Las probabilidades tienen que ser entendidas de manera objetiva, pero no pueden ser frecuencias cuando el sistema se encuentra en un estado de superposición y no se realiza ninguna medición sobre él. La manera más extendida de interpretar estas probabilidades es considerarlas como *propensiones*, pero la interpretación propensivista del cálculo de probabilidades presenta serios problemas conceptuales que todavía no se han resuelto.²² En cualquier caso, la posición ortodoxa no implica que las probabilidades cuánticas sean propensiones, sino sólo que deben considerarse objetivas, en algún sentido de este término.

Es importante señalar que para lograr una elucidación adecuada del principio de superposición es necesario ir más allá de una caracterización puramente negativa, como las citadas de Albert y Shimony. Es cierto que no puede afirmarse que un sistema en superposición de dos estados se encuentra a la vez en ambos estados (la partícula en las dos cajas) ya que ello implicaría una contradicción explícita. También es cierto que el sistema en superposición de estados de un determinado observable no tiene un único valor definido para ese observable. Sin embargo, ambas afirmaciones sólo son ciertas para propiedades en acto, pero no necesariamente para propiedades potenciales. Por otra parte, de la superposición de estados de un sistema puede extraerse información adicional acerca de las propiedades de dicho sistema. Por ejemplo, cuando la partícula se encuentra en superposición de estados en las dos cajas, puede

²² Para un análisis detallado de estas dificultades véase GILLIES (2000, caps. 6 y 7).

saberse con certeza (es decir, con probabilidad 1) que la partícula no se encuentra en cualquier otra región del espacio fuera de las cajas, en particular, que no se encuentra en el espacio que separa ambas cajas. Así pues, en esa particular superposición de estados la posición de la partícula no está completamente indeterminada, es decir, la partícula no está del todo deslocalizada ni distribuida potencialmente por todo el espacio, ni siquiera distribuida en el interior de un volumen finito que contiene a las dos cajas.

Los estados superpuestos plantean un problema evidente cuando se consideran objetos macroscópicos, como ocurre en la formulación de Einstein de la paradoja de las dos cajas (o la del gato de Schrödinger). Se trata del hecho de que nunca observamos objetos en superposición de estados. Más aun, no podemos siquiera concebir cómo sería observar un objeto en superposición de estados, sobre todo, estados de posición. Tampoco observamos instrumentos de medición en estados de superposición, aunque la mecánica cuántica admite estos estados (como en la conocida situación llamada la “cadena de von Neumann”). De hecho, la inexistencia de observaciones de objetos en superposición de estados podría incluso emplearse para argumentar a favor de la incompletitud de la mecánica cuántica.

En principio, quienes admiten que la mecánica cuántica es una teoría completa necesitan explicar por qué no hay observación de entidades en superposición de estados. Hay muchas razones que podrían invocarse. Podría argumentarse, por ejemplo, que la superposición de estados existe realmente, pero sólo afecta a las entidades microscópicas, como un electrón, pero no a las macroscópicas. Actualmente, este argumento tiene poca plausibilidad. En primer lugar, porque plantea el llamado problema del límite entre el mundo clásico y el mundo cuántico, que como se sabe, no tiene una solución clara (¿la superposición alcanza a las macromoléculas o solamente a los átomos?). En segundo lugar, porque se admite de manera casi generalizada que la mecánica cuántica es una teoría de alcance universal que se aplica a objetos de cualquier tamaño, todos los cuales deben concebirse como sistemas cuánticos. De hecho, la producción de efectos cuánticos macroscópicos constituye en la actualidad una línea de investigación importante en la física experimental.

Otra explicación posible apelaría al fenómeno de la *decoherencia*. La superposición de estados cuánticos de un sistema individual, como una partícula, se rompe de manera espontánea y muy rápida cuando un sistema cuántico interactúa con su entorno físico, es decir, con un número muy grande

de sistemas cuánticos tales como átomos y moléculas. En sentido estricto, la superposición del sistema no se destruye, sino que se extiende a todo su entorno. Más precisamente, cuando un sistema individual S se encuentra en un estado de superposición $|\psi_1\rangle = c_1|\phi\rangle + c_2|\xi\rangle$ interactúa con el entorno que se encuentra en el estado $|E_0\rangle$, entonces, se produce un estado compuesto $|\psi_1\rangle|E_0\rangle = (c_1|\phi\rangle + c_2|\xi\rangle)|E_0\rangle$. Ese estado evoluciona en el tiempo, de acuerdo con la ecuación de Schrödinger, para formar el estado superpuesto $c_1(|\phi\rangle|E_1\rangle) + c_2(|\xi\rangle|E_2\rangle)$. La superposición se ha extendido así del sistema individual al sistema compuesto. Esa es la razón principal, se afirma, por la cual los estados de superposición de sistemas individuales son efímeros e inestables, y, como consecuencia de ello, aunque existen realmente, no pueden ser observados. Todavía no resulta claro si la apelación a la decoherencia permite resolver el problema de la medición cuántica y el del límite entre el mundo clásico y el mundo cuántico. Esta no es una cuestión que pueda tratarse aquí, pero hay argumentos para pensar que la respuesta es negativa.²³ En cualquier caso, parece claro que la noción de decoherencia no proporciona una explicación del significado físico de la superposición de estados, es decir, de la manera en que deberíamos concebirla. Este es, en mi opinión, el problema más básico que plantea la mecánica cuántica ortodoxa y, precisamente, el que ejemplifica la paradoja de las dos cajas. El problema conceptual más profundo de esta teoría no es el de la medición, ni el del límite clásico, sino el de la propia existencia de estados superpuestos.

7. Conclusión

La paradoja de Einstein-de Broglie no constituye una prueba de imposibilidad que demuestre la incompletitud de la mecánica cuántica. No desvela ninguna inconsistencia interna en la teoría cuántica ortodoxa, ni respecto del formalismo matemático ni en relación con la interpretación minimal. No prueba que la teoría sea incompleta ni, mucho menos, que deba “completarse” reemplazándola por una teoría de variables ocultas. Tampoco

²³ Entre las muchas obras que se han escrito sobre la decoherencia véanse las de OMNÈS (1999) y SCHLOSSHAUER (2007). Actualmente, muchos físicos y filósofos no comparten el optimismo de estos autores.

prueba que las probabilidades que aparecen en la teoría sean puramente epistémicas o subjetivas. Es simplemente un argumento que exhibe de un modo particularmente claro e intuitivo las consecuencias que resultan de suponer que la mecánica cuántica ortodoxa proporciona una descripción completa de los sistemas físicos que caen bajo su dominio. Estas consecuencias se consideran paradójicas porque resultan anti-intuitivas e incompatibles con presupuestos ontológicos profundamente arraigados en nuestro sentido común y bien corroborados por nuestra experiencia con objetos macroscópicos. En la vida cotidiana nadie duda de que los cuerpos tienen en todo momento una posición bien definida independientemente de que los observemos o no. Son presupuestos de un realismo ingenuo propio del sentido común. La paradoja de Einstein-de Broglie muestra, sin embargo, que estos supuestos son incompatibles con la teoría cuántica ortodoxa.

Hay tres estrategias posibles frente a esta situación. La primera es la estrategia de *evasión* de la paradoja. Consiste simplemente en adoptar una actitud anti-realista respecto de la mecánica cuántica. De este modo, la paradoja se disuelve y el problema de la completitud de la teoría no puede siquiera plantearse. Como ya se dijo, la paradoja sólo resulta un inconveniente para el realista epistemológico. Si se quiere permanecer dentro de la posición realista, quedan dos actitudes posibles. Una es la estrategia de *resolución* de la paradoja. Esta implica necesariamente reemplazar la teoría cuántica ortodoxa por otra teoría, en particular, por una alternativa en la cual no se admita la superposición de estados ni el colapso del vector de estado producido a distancia por un acto de observación. Las teorías de variables ocultas y las teorías del colapso espontáneo son dos variantes del mismo programa general. La última estrategia es la *aceptación* de la paradoja. Consiste en permanecer estrictamente en el marco de la teoría cuántica ortodoxa, sin introducir modificación alguna en el formalismo matemático ni en la interpretación minimal de la teoría. Esta posición lleva indefectiblemente a admitir la realidad de las superposiciones cuánticas y de todas sus consecuencias, en particular, de las que se muestran en la paradoja de las dos cajas.

Cualquiera de las tres posiciones tiene sus costos y beneficios epistemológicos. El examen de la paradoja deja en claro, sin embargo, que las consecuencias de cada estrategia se presentan en bloque y no pueden ser separadas, sino que deben evaluarse conjuntamente. La evasión de la paradoja implica renunciar al carácter descriptivo de la teoría cuántica, considerándola

como un instrumento puramente predictivo cuyos términos teóricos no tienen pretensiones referenciales más allá de los fenómenos experimentales. La resolución de la paradoja implica admitir que la mecánica cuántica ortodoxa es una teoría incompleta, que los estados de superposición no son reales y que las probabilidades que aparecen en dicha teoría deben considerarse epistémicas. La aceptación de la paradoja, por último, implica admitir que la teoría es completa, que los estados de superposición son reales y que las probabilidades que se presentan en la teoría son objetivas.

En conclusión, la paradoja de Einstein-de Broglie, aunque no prueba la incompletitud de la mecánica cuántica, ni la existencia de variables ocultas, ni el carácter epistémico de las probabilidades, presenta un desafío para toda posición realista que pretenda ofrecer una ontología coherente y completa para la teoría cuántica ortodoxa. La interpretación física de la superposición de estados permanece hasta nuestros días como el mayor obstáculo para obtener una imagen del mundo cuántico. Por consiguiente, no es razonable esperar que pueda proporcionarse una ontología viable para la teoría cuántica hasta que se esclarezca la manera de entender los estados superpuestos, o bien se reemplace la teoría standard por alguna teoría alternativa. Todo indica que el costo de cualquiera de estas dos empresas será muy alto y que no podrá llevarse a cabo sin renunciar a algunos presupuestos fundamentales de la ontología del realismo clásico.

Agradecimientos

Este trabajo se benefició de diversas conversaciones que mantuve con Christian de Ronde acerca del principio de superposición y, más en general, acerca del problema de la interpretación de la mecánica cuántica. Agradezco también los comentarios de Silvio Chibeni y Osvaldo Pessoa Jr. a una versión previa, mucho más breve, de este artículo.

Sometido: 30 de octubre de 2015; aceptado: 30 de junio de 2016.

Bibliografía

Cad. Hist. Fil. Ci., Campinas, Série 4, v. 2, n. 1, p. 193-228, jan.-jun. 2016.

- ALBERT, D. (1992). *Quantum mechanics and experience*. Cambridge (MA): Harvard University Press.
- AULETTA, G. & WANG, S. W. (2014). *Quantum mechanics for thinkers*. Singapore: Pan Stanford.
- BACCIAGALUPPI, G. & VALENTINI, A. (2009). *Quantum theory at the crossroads: reconsidering the 1927 Solvay Conference*. New York: Cambridge University Press.
- BITBOL, M. (1996). *Mécanique quantique: une introduction philosophique*. Paris: Flammarion.
- BOHM, D. (1951). *Quantum theory*. New York: Prentice-Hall. Reimpreso en New York: Dover, 1989.
- (1952). A suggested interpretation of the quantum theory in terms of hidden variables. Parts I. II. *Physical Review* 85: 165-79, 180-93.
- (1957). *Causality and chance in modern physics*. London: Routledge.
- BOHM, D. & HILEY, B. (1993). *The undivided universe: an ontological interpretation of quantum theory*. London: Routledge.
- DE BROGLIE, L. (1959). L'interprétation de la mécanique ondulatoire. *Journal de Physique et le Radium* 20: 963-79.
- (1963). *Étude critique des bases de la l'interprétation actuelle de la mécanique ondulatoire*. Paris: Gauthier-Villars.
- (1973). De la mécanique ondulatoire à la mécanique quantique (l'aller et le retour). In: LOCHAK, G. (ed.). *Louis de Broglie: une itinéraire scientifique*. Paris: Éditions La Découverte, 1987, p. 126-45.

- DIRAC, P. ([1930] 1967). *The principles of quantum mechanics*. 4^a ed. Oxford: Clarendon.
- DÜRR, D. & TEUFEL, S. (2009). *Bohmian mechanics: the physics and mathematics of quantum theory*. Berlin: Springer.
- DÜRR, D.; GOLDSTEIN, S. & ZANGHÌ, N. (2013). *Quantum physics without quantum philosophy*. Berlin: Springer.
- EINSTEIN, A. (1936). Physics and Reality. *Journal of the Franklin Institute* 221: 349-82. Reimpreso en *Ideas and Opinions*. New York: Crown, 1954, p. 290-323.
- (1947). Letter to Max Born. In: BORN, M. (ed.). *The Born-Einstein Letters*. London: Macmillan, 1971, p. 157-58.
- (1948). Quanten-Mechanik und Wirklichkeit. *Dialectica* 2: 320-24. En inglés: Quantum mechanics and reality. In: BORN, M. (ed.). *The Born-Einstein Letters*. London: Macmillan, 1971, p. 168-73.
- EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B. & ROSEN, N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review* 47: 777-80.
- FINE, A. (1996). *The shaky game: Einstein, realism, and the quantum theory*. 2^a ed. Chicago: University of Chicago Press.
- GHIRARDI, G. (2005). *Sneaking a look at God's cards: unraveling the mysteries of quantum mechanics*. Princeton: Princeton University Press.
- GHIRARDI, G.; RIMINI, A. & WEBER, T. (1986). Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems. *Physical Review D* 34: 470-91.
- GILLIES, D. (2000). *Philosophical theories of probability*. London: Routledge.

- GOTTFRIED, K. & YAN, T.-M. (2003). *Quantum mechanics: fundamentals*. 2^a ed. New York: Springer.
- GOUESBET, G. (2013). *Hidden worlds of quantum physics*. New York: Dover.
- HELD, C. (2014). Einstein's boxes: incompleteness of quantum mechanics without a separation principle. *Foundations of Physics* 45: 1002-18.
- HOLLAND, P. (1993). *The quantum theory of motion*. Cambridge (GB): Cambridge University Press.
- JAEGER, G. (2009). *Entanglement, information, and the interpretation of quantum mechanics*. Berlin: Springer.
- MAUDLIN, T. (2011). *Quantum non-locality and relativity*. 3^a ed. Oxford: Wiley-Blackwell.
- NORSEN, T. (2005). Einstein's boxes. *American Journal of Physics* 73: 164-76.
- OMNÈS, R. (1999). *Understanding quantum mechanics*. Princeton: Princeton University Press.
- PERES, A. (2002). *Quantum theory: concepts and methods*. New York: Kluwer.
- REDHEAD, M. (1987). *Incompleteness, nonlocality, and realism: a prolegomenon to the philosophy of quantum mechanics*. Oxford: Clarendon.
- RIGGS, P. (2009). *Quantum causality: conceptual issues in the causal theory of quantum mechanics*. Dordrecht: Springer.
- RUETSCHKE, L. (2011). *Interpreting quantum theories*. New York: Oxford University Press.
- SELLERI, F. (1994). *Le grand débat de la théorie quantique*. Paris: Flammarion.

- SCHLOSSHAUER, M. (2007). *Decoherence and the quantum-to-classical transition*. Berlin: Springer.
- SCHRÖDINGER, E. (1935). Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik. *Naturwissenschaften* 23: 807-12, 823-48, 844-49. En inglés: The present situation in quantum mechanics. A translation of Schrödinger's "Cat Paradox" Paper. Trad. J.D. Trimmer. In: WHEELER, J.A. & ZUREK, W.H. (eds.) (1983). *Quantum theory and measurement*. Princeton: Princeton University Press, p. 152-67.
- SHIMONY, A. (2007). Aspects of nonlocality in quantum mechanics. In: EVANS, J. & THORNDIKE, A. (eds.). *Quantum mechanics at the crossroads: new perspectives from history, philosophy, and physics*. Berlin: Springer, p. 107-23.
- VON NEUMANN, J. (1932). *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Berlin: Springer. En inglés: *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Trad. R.T. Beyer. Princeton: Princeton University Press, 1955.
- WEINBERG, S. (2013). *Lectures on quantum mechanics*. New York: Cambridge University Press.