

# ANÁLISIS LOCAL DE UNA RESONANCIA 1:2 EN SISTEMAS CON RETARDOS EN EL DOMINIO FRECUENCIA

Griselda R. Itovich<sup>b</sup>, Franco S. Gentile<sup>\*†</sup> y Jorge L. Moiola<sup>‡</sup>

<sup>b</sup> Escuela de Tecnología, Producción y Medio Ambiente - Sede Alto Valle - Universidad Nacional de Río Negro, Tacuarí 669, (8336ATG) Villa Regina, ARGENTINA, gitovich@unrn.edu.ar

<sup>\*</sup> Dpto. de Matemática - Universidad Nacional del Sur (UNS), <sup>†</sup> Instituto de Investigaciones en Ingeniería Eléctrica - IIIE (UNS-CONICET), <sup>‡</sup> Dpto. de Ing. Eléctrica y de Computadoras - UNS, Avda. Alem 1253, (B8000CPB) Bahía Blanca, ARGENTINA

**Resumen:** En este trabajo se muestran los comportamientos dinámicos cercanos a una resonancia 1:2 en sistemas con retardos, por medio de la metodología en el dominio frecuencia. Se hallaron y aproximaron los ciclos asociados a una u otra frecuencia, se efectuó el análisis de su estabilidad y se detectaron bifurcaciones de ciclos características.

**Palabras claves:** Resonancia 1:2, Dominio frecuencia, Bifurcación de Hopf

2000 AMS Subject Classification: 34K13 - 34K18 - 34K20 - 37L10 - 37N35 - 93C23

## 1. INTRODUCCIÓN

En general, en sistemas físicos, biológicos y de economía, existen interacciones que involucran estados anteriores, que deben modelarse con un conjunto de ecuaciones diferenciales con retardos (EDRs, ver [1],[5]). Por otra parte el desarrollo y uso de sistemas de control automático, también dio gran impulso al desarrollo de este área, a través de la noción de control realimentado. Resultan innumerables los aportes que se dan en esta temática ya sea por el análisis de ejemplos prácticos [5] o por resultados teóricos [1]. En este trabajo, se exponen algunas generalidades del marco teórico en la Sección 2 para luego presentar la metodología en la Sección 3. Posteriormente, se introduce la noción de estabilidad de ciclos y sus bifurcaciones en la Sección 4 y se caracteriza la resonancia 1:2 en la Sección 5. Los resultados obtenidos para el ejemplo considerado se muestran en la Sección 6 y por último, en la Sección 7 se dan algunas conclusiones.

## 2. BIFURCACIÓN DE HOPF EN SISTEMAS CON RETARDOS

Se considera un sistema de EDRs como

$$\dot{x} = F(x, x_\tau, \mu), \quad x_0(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad (1)$$

donde  $x = x(t)$ ,  $x \in R^n$ ,  $x_\tau = x(t - \tau)$ ,  $\tau > 0$  y  $\mu \in R$ ,  $F \in C^n(\Omega)$ , donde  $\Omega \subseteq R^{2n} \times R$ . Se supone que  $\hat{x}$  es un equilibrio de (1) y su estabilidad se deduce de la EDR lineal asociada, a saber,  $\dot{x} = D_0 x + D_1 x_\tau$ , donde  $D_0 = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{\hat{x}}$  y  $D_1 = \frac{\partial F}{\partial x_\tau} \Big|_{\hat{x}}$ , lo cual lleva a estudiar cuáles son las raíces de la ecuación característica  $P(r) = \det(rI_n - D_0 - D_1 e^{-r\tau}) = 0$ . Se sabe que  $\hat{x}$  es asintóticamente estable si todas las raíces de  $P$  tienen parte real negativa. Si al variar  $\mu$ , dos raíces complejas de  $P$  cruzan el eje imaginario y pasan al semiplano derecho, el equilibrio cambia su estabilidad y puede aparecer una bifurcación de Hopf (bH). Este es un fenómeno muy conocido para ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) y EDRs, que permite asegurar la aparición de soluciones periódicas [6]. Dado que el enfoque adoptado en este trabajo para el análisis de la bH es el dominio frecuencia, se profundizará este tema en el marco de siguiente sección.

## 3. ENFOQUE EN EL DOMINIO FRECUENCIA

Un problema modelado como (1) puede expresarse como

$$\dot{x} = A_0 x + A_1 x_\tau + Bu, \quad y = -Cx, \quad u = g(y_\tau, \mu), \quad (2)$$

donde se han introducido nuevas variables  $y \in R^m$  y  $u \in R^p$  para interpretarlo como un sistema realimentado y las matrices  $A_0, A_1, B$  y  $C$ , de órdenes apropiados dependen de  $\mu$ , en general. Aplicando transformada de Laplace y efectuando algunas operaciones, se llega a la ecuación de equilibrios  $G(0, \mu).g(y) = -y$ , donde  $G(s, \mu) = C(sI - A_0 - A_1 e^{-s\tau})^{-1}B$ . Hallando su solución  $\hat{y}$  y linealizando el sistema se obtiene la función característica que resuelve:  $h(\lambda, \mu, \tau, s) = \det(\lambda I - G(s, \mu)J e^{-s\tau}) = 0$ , donde  $J = \frac{\partial g}{\partial y_\tau} \Big|_{\hat{y}}$ . Se conoce el siguiente resultado:

Lema: Si el sistema (1) exhibe una bifurcación de Hopf en  $(\mu_0, \tau_0)$  para una frecuencia  $\omega_0$  entonces la matriz de la linealización del sistema realimentado que resulta de (2), a saber, la matriz  $G(s, \mu)Je^{-s\tau}$  tiene un único autovalor  $\hat{\lambda}$  que pasa por -1 en esa configuración y cuando  $s = i\omega_0$ .

En otras palabras, si existe una bH en  $(\mu_0, \tau_0)$  para  $\omega = \omega_0$ , esta configuración satisface que  $h(-1, \mu, \tau, i\omega) = 0$ . Separando partes real e imaginaria de esta expresión genérica, esto es

$$F_1(\mu, \tau, \omega) = \text{Re}[h(-1, \mu, \tau, i\omega)] = 0, \quad F_2(\mu, \tau, \omega) = \text{Im}[h(-1, \mu, \tau, i\omega)] = 0, \quad (3)$$

se obtiene un sistema de ecuaciones que determina una condición necesaria para la existencia de una bH.

Se utilizará el teorema de Hopf gráfico ([8] y [9]) donde la intersección de dos lugares geométricos en el plano complejo representa una solución periódica. Además, con este resultado se puede determinar la estabilidad local de las órbitas emergentes mediante el signo de

$$\sigma = -\text{Re}\left(\frac{\mathbf{w}^T G(i\omega_0, \mu_0) \mathbf{p}_1 e^{-i\omega_0 \tau_0}}{\mathbf{w}^T \frac{d}{ds} [G(s, \mu_0) J e^{-s\tau_0}]|_{s=i\omega_0} \mathbf{v}}\right), \quad (4)$$

donde  $\mathbf{w}^T$  y  $\mathbf{v}$  son los autovectores a izquierda y derecha de la matriz  $G(s, \mu)Je^{-s\tau}$  asociados con  $\hat{\lambda}$  y  $\mathbf{p}_1 = Q(V_{02} \otimes \mathbf{v} + 0,5\bar{\mathbf{v}} \otimes V_{22}) + 0,125L(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \otimes \bar{\mathbf{v}})$ , donde  $Q = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \Big|_{\hat{y}}$ ,  $L = \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \Big|_{\hat{y}}$  y  $V_{02} = -0,25H(0)Q\mathbf{v} \otimes \bar{\mathbf{v}}$ ,  $V_{22} = -0,25H(i2\omega)Q\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$ , con  $H(s) = (I_m + G(s, \mu)Je^{-s\tau})^{-1}G(s, \mu)$ . Si  $\sigma < (>)0$  el ciclo es estable (inestable), siempre que el equilibrio cambie su estabilidad en la bH.

También es posible construir fórmulas aproximadas para las soluciones a partir de la determinación de estimaciones de la amplitud  $\theta$  y de la frecuencia  $\omega$ . Estas expresiones resultan de un balance de armónicos de segundo orden o mayor, con un cálculo creciente de coeficientes según sea el caso [9].

#### 4. ESTABILIDAD Y BIFURCACIONES DE CICLOS

En el origen de la rama de ciclos, la estabilidad, según (4), es un dato conocido pero puede suceder que ésta cambie. Esto se conoce como bifurcación de ciclos (BC). Es ahí, donde aparecen escenarios dinámicos clásicos como duplicación de ciclos con frecuencias cercanas (bifurcación silla-nodo de ciclos), duplicación de ciclos con frecuencias en relación 1:2 (bifurcación de doble periodo de ciclos) o aparición de soluciones cuasiperiódicas (bifurcación Neimark-Sacker). Para determinar la estabilidad de una solución periódica, es necesario calcular sus multiplicadores de Floquet. Todo ciclo tiene un multiplicador trivial que toma el valor 1. Cuando algún multiplicador (no trivial) cruza la frontera del círculo unitario se da una BC y se clasifica según la descripción anterior. En EDRs, los multiplicadores del ciclo analizado forman el espectro del operador de monodromía y se busca una aproximación de dimensión finita del mismo. Así, la evolución de sus autovalores permite detectar las bifurcaciones del ciclo, como se describe en [2].

#### 5. LA RESONANCIA 1:2

Cuando falla alguna de las hipótesis del teorema de bH aparece una degeneración de Hopf (dH). Entre ellas, si la ecuación característica  $P(r) = 0$  tiene, para algún valor de  $\mu$ , dos pares de autovalores imaginarios puros como  $\pm i\omega_0$  y  $\pm i2\omega_0$  se presenta una singularidad conocida como Hopf doble resonante 1:2, que se asocia con ciertas BC como de doble periodo y también Neimark-Sacker. Esta degeneración ha sido analizada con distintas técnicas, como por ejemplo, formas normales y tipificada completamente en el contexto de EDOs [7].

#### 6. EJEMPLO

Se considera el modelo considerado por Campbell y Leblanc [3] que puede escribirse como

$$x'_1 = -\alpha x_1 - \frac{5}{2}x_2 + f(x_2(t - \tau)), \quad x'_2 = x_1, \quad (5)$$

donde  $\alpha$  es un parámetro y se supone que existe un punto de equilibrio  $E=(0, x_2^*)$  ( $f(x_2^*) = \frac{5}{2}x_2^*$ ). Tomando en cuenta la linealización de (5) en E, de acuerdo con la Sección 2, resulta  $P(r) = r^2 + \alpha r + \frac{5}{2} - f_1 e^{-r\tau} = 0$ , donde  $f_1 = f'(x_2^*)$ . Una condición necesaria para que aparezca una bH resulta de  $P(i\omega) = 0$  que se traduce en el sistema de ecuaciones de Hopf H:  $\{-\omega^2 + \frac{5}{2} - f_1 \cos \omega\tau = 0, \quad \alpha\omega + f_1 \sin \omega\tau = 0\}$ . De acuerdo con la Sección 5 una resonancia 1:2, cumple  $P(i\omega) = 0$  y  $P(i2\omega) = 0$  de donde resulta que  $\omega = 1$ ,  $\alpha = 0$ ,  $f_1 = -\frac{3}{2}$  y  $\tau = (2k - 1)\pi$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Volviendo con el sistema anterior, de aquí en adelante se considerará  $\alpha = 0$ , se pueden expresar las curvas de bH en el plano  $f_1 - \tau$  como  $f_{1(k)} = (-1)^k \left(\frac{5}{2} - \left(\frac{k\pi}{\tau}\right)^2\right)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  y la singularidad particular elegida es la que corresponde a  $S = (f_1, \tau) = \left(-\frac{3}{2}, \pi\right)$ . Para aplicar la metodología en el dominio frecuencia, es necesario dar una

realización del sistema (5) para que resulte como en (2) y para esto se definen las matrices

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = 0_2, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \quad 1),$$

de modo que  $y = -x_2$  y  $u = g(y_\tau) = f(-y_\tau)$ . Se considera el caso particular  $f(q) = f_1 q + 0,9q^2$ . Así los equilibrios resultan de la ecuación  $G(0)g(y) = -y$ . Como  $G(s) = \Delta^{-1}(s)$  donde  $\Delta(s) = s^2 + \frac{5}{2}$  se llega a  $f(-y) = -\frac{5}{2}y$ , que se resuelve con  $y = -x_2^*$ . En particular, se toma  $x_2^* = 0$  y así resulta  $E=(0,0)$ . De esta manera, el autovalor característico (ver el Lema de la Sección 3) se expresa como

$$\hat{\lambda} = G(s)J e^{-s\tau} = -f_1 e^{-s\tau} \Delta^{-1}(s). \quad (6)$$

De nuevo, analizando cuando esta última expresión toma el valor -1 para  $s = i\omega$  y al separar partes real e imaginaria, siguiendo (3) se obtiene el sistema H así como también las curvas bH. Estas curvas y otras auxiliares que surgen del desarrollo que sigue, cobran mucha importancia debido a que definen regiones en el entorno de la singularidad  $S$  donde se reconocen escenarios dinámicos particulares. De acuerdo con la realización efectuada (la variable de entrada  $u$  y la salida  $y$  son de dimensión 1, de modo que el sistema realimentado resulta SISO - *single input - single output*), los autovectores  $v$  y  $w$  son ambos iguales a 1 y otros vectores auxiliares, propios de la metodología, resultan nulos. De esta forma para hallar la expresión de (4) y determinar la estabilidad sobre las curvas de bH cercanas a  $S$  sólo resta el cálculo de  $p_1$  que resulta  $p_1(\omega) = -\frac{1}{8}f_2^2 \left( 2 \left( \frac{5}{2} - f_1 \right)^{-1} + (\Delta(i2\omega)e^{i2\omega\tau} - f_1)^{-1} \right)$ , donde  $f_2 = f''(x_2^*)$ . Analizando con las dos frecuencias críticas  $\omega = 1$  y  $\omega = 2$ , sobre las curvas  $f_{1(1)}$  y  $f_{1(2)}$  en un entorno de  $S$ , se llega a que  $\sigma < 0$  siempre excepto cuando  $P \in f_{1(1)}$  y  $f_1 \in I$ ,  $I = \left[ -\frac{3}{2}, -\frac{25}{22} \right]$ , donde  $\sigma > 0$  (ver Figura 1 (a)). Además se detectó un punto de dH, donde  $\sigma$  se anula, a saber  $T = (f_1, \tau) = \left( -\frac{25}{22}, \pi \left( \frac{11}{15} \right)^{0,5} \right)$  que se destaca en el análisis que sigue.

Aplicaremos el método frecuencial para detectar y aproximar las soluciones periódicas que aparecen en cercanías de  $S$ , vinculadas con una u otra frecuencia crítica ( $\omega = 1$  o  $\omega = 2$ ) usando armónicos hasta el orden cuarto [9]. En primer lugar, se consideran los ciclos asociados con la frecuencia  $\omega = 1$ , para una configuración de parámetros  $(f_1, \tau)$  cercana a  $S$ . Una primera aproximación de la frecuencia resulta de hallar el valor de  $\omega$  tal que  $\text{Im} \hat{\lambda}(i\omega) = 0$ , que notamos en adelante  $\tilde{\omega} = \frac{\pi}{\tau}$ . Con este dato y teniendo en cuenta la realización del sistema, se calculan dos complejos  $\xi_1$  y  $\xi_2$ , donde  $\xi_1 = -p_1(\tilde{\omega})G(i\tilde{\omega})$  y  $\xi_2 = -p_2(\tilde{\omega})G(i\tilde{\omega})$  siendo  $p_1(\tilde{\omega}) = -0,405 \left\{ \frac{2}{\eta(0)} + \frac{1}{\eta(2)} \right\}$ ,  $p_2(\tilde{\omega}) = -0,164025 \left\{ \frac{2|\eta(2)|^2\eta(3)+3|\eta(0)|^2\eta(3)+3|\eta(0)|^3}{[\eta(0)]^3|\eta(2)|^2\eta(3)} \right\}$ , donde  $\eta(k) = \left[ \frac{5}{2} - (k\tilde{\omega})^2 \right] (-1)^k - f_1$ .

Ahora se debe resolver la intersección entre el lugar geométrico del autovalor característico  $\hat{\lambda}$  (6) y el lugar geométrico de la amplitud  $L_2 = -1 + \xi_1\theta^2 + \xi_2\theta^4$ , para hallar las aproximaciones de amplitud  $\theta$  y frecuencia  $\omega$  de la solución periódica de la rama emergente de la curva  $f_{1(1)}$ , empleando armónicos hasta el orden cuarto. Esto lleva, después de algunos cálculos a la ecuación  $a\theta^4 + b\theta^2 + c = 0$ , donde  $a = p_2(\tilde{\omega})$ ,  $b = p_1(\tilde{\omega})$  y  $c = -\left( f_1 + \frac{5}{2} - \left( \frac{\pi}{\tau} \right)^2 \right)$ , de la que interesa sólo el número de raíces positivas y sus valores, que corresponden a la amplitud de una solución periódica. Para poder avanzar resulta clave conocer el signo de  $a$ ,  $b$  y  $c$  en el entorno de  $S$  y para esto conviene representar allí las curvas de Hopf  $f_{1(1)}$  y  $f_{1(2)}$ , así como una curva auxiliar  $f_{1(aux)} = \frac{15}{6} - \frac{8}{3} \left( \frac{\pi}{\tau} \right)^2$  que contiene al punto  $T$ , donde también se anula  $b = p_1(\tilde{\omega})$ . De esta forma se obtienen seis regiones, como puede apreciarse en la Figura 1 (a). Es fácil probar que  $a = p_2(\tilde{\omega}) < 0$ , en cercanías de  $S$ . También, hay que observar que las soluciones de la ecuación  $c = 0$ , son los puntos del gráfico de  $f_{1(1)}$ . Aplicando la regla de Descartes, es posible determinar o acotar el número de raíces positivas de una ecuación, atento al signo de sus coeficientes. Observando la Figura 1 (a), en este caso resulta que en las regiones 1 y 5 no existen soluciones positivas, en las regiones 2, 4 y 6 hay una sola raíz positiva y en la región 3 pueden existir dos o ninguna raíz positiva. Esto se debe a que en la región 3 hay una curva de BC de tipo silla-nodo que separa una porción donde hay dos soluciones de otra donde no hay ninguna. Este resultado pudo establecerse recién ahora con esta metodología puesto que usando aproximaciones de segundo orden no fue posible hacerlo. En la Figura 1 (b) está representada la continuación de la rama de ciclos que nace en  $(f_1, \tau) = (-1,2411; 2,8)$ , que se obtiene en forma numérica (Dde-Biftool) [4] y con la metodología en frecuencia usando cuarto orden. En resumen, estos resultados confirman la existencia y número de ciclos límites con frecuencia cercana  $\omega = 1$  en un entorno de  $S$ .

Para detectar las soluciones periódicas ligadas con la frecuencia crítica  $\omega = 2$ , se debe rehacer todo el análisis anterior ahora con la primera aproximación de la frecuencia  $\tilde{\omega} = \frac{2\pi}{\tau}$ . Del mismo modo, se puede confirmar la existencia de ciclos asociados con la frecuencia 2 sólo en las regiones 5 y 6 de la Figura 1 (a).

Por otra parte, se han detectado BC de tipo doble periodo, características de la resonancia 1:2, en la región 5, tanto en forma numérica [4] como con la metodología en frecuencia. A saber, con  $\tau = 3,4$ , empleando Dde-Biftool se detecta una tal bifurcación para un ciclo de amplitud  $\theta$  cercana a la unidad, para un valor  $f_1 \approx -1,1234$  y con una

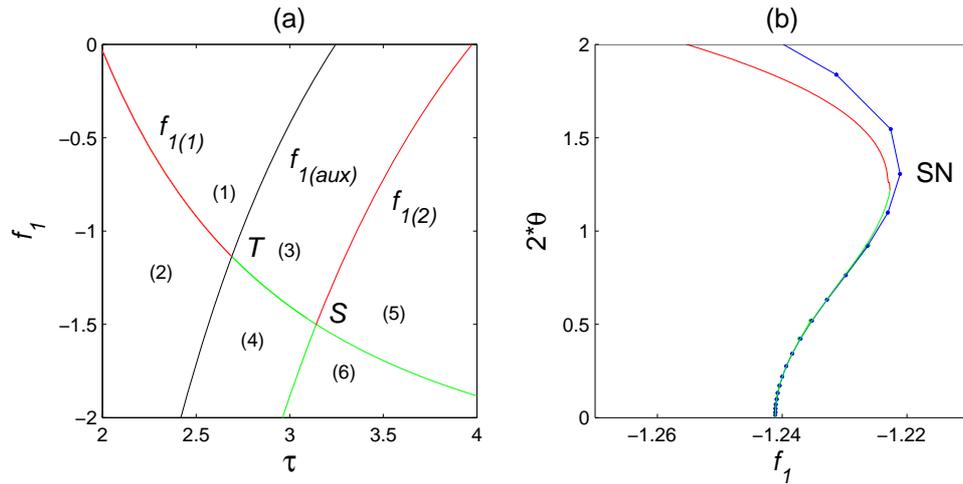


Figura 1: (a) Curvas de Hopf  $f_{1(1)}$  y  $f_{1(2)}$  que se cruzan en  $S$ . El equilibrio es estable en las regiones 1 y 3, e inestable en el resto. Ciclos emergentes estables (rojo) e inestables (verde). La curva en negro es  $f_{1(aux)}$ , que se cruza con  $f_{1(1)}$  en  $T$ , donde  $\sigma = 0$ . (b) Rama de ciclos que nace en  $(f_1, \tau) = (-1,2411; 2,8)$ , asociada con  $\omega = 1$ , que ocupa las regiones 3 y 4 (ver Figura 1 (a)). Los colores representan la estabilidad de la solución periódica. Dde-Biftool (azul). El punto de retroceso es un punto de BC de tipo silla-nodo (SN).

frecuencia  $\omega = 1,848$ . Por otra parte, utilizando la expresión aproximada del ciclo de orden 4 y la técnica de [2], se consigue ver que tal bifurcación se encuentra en  $f_1 \approx -1,1213$ . En este caso, el error relativo es del orden del 2 %, lo cual puede atribuirse a la amplitud del ciclo en esa configuración o a que la singularidad está alejada del punto de bH, en este caso para  $f_1 = -0,9151$ .

## 7. CONCLUSIONES

En este trabajo se analizó el entorno de una resonancia 1:2 en ecuaciones con retardo empleando la metodología en el dominio frecuencia. Esto permitió establecer la existencia de soluciones periódicas asociadas a una u otra frecuencia, así como la determinación de una expresión analítica aproximada que emplea armónicos hasta el cuarto orden, resultados que fueron contrastados numéricamente. Por otra parte, también se evaluó la estabilidad de los ciclos emergentes y se detectaron BC típicas en el escenario de la singularidad estudiada.

## AGRADECIMIENTOS

G. R. I. agradece la ayuda brindada por la UNRN (PI 40/A389) y F. S. G. y J. L. M. hacen un similar reconocimiento al CONICET. Este trabajo ha sido subvencionado por aportes de la SGCyT de la UNS (PGI 24/K064) y de ANPCyT (PICT-2014-2161) y de CONICET (PIP 112-201201-00144).

## REFERENCIAS

- [1] B. BALACHANDRAN, T. KALMAR-NAGY Y D. GILSINN, Delay Differential Equations: Recent Advances and New Directions, Springer, 2009.
- [2] E. BUTCHER Y B. MANN, Stability analysis and control of linear periodic delayed systems using Chebyshev and temporal finite element methods, en B. Balachandran et al. (eds), Delay Differential Equations, Springer, pp. 93-129, 2009.
- [3] S. CAMPBELL Y V. LEBLANC, Resonant Hopf-Hopf Interactions in Delay Differential Equations, Journal of Dynamical and Differential Equations, Vol. 10 Nro. 2 (1998), 327-345.
- [4] K. ENGELBORGHES, T. LUZYANINA Y D. ROOSE, Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using DDE-BIFTOOL, ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 28 Nro. 1 (2002), pp. 1-21.
- [5] T. ERNEUX, Applied Delay Differential Equations, STAMS 3, Springer, 2009.
- [6] J. HALE Y S. VERDUYN LUNEL, Introduction to Functional Differential Equations, AMS 99, Springer, Nueva York, 1993.
- [7] V. LEBLANC Y W. LANGFORD, Classification and unfoldings of 1:2 resonant Hopf bifurcation, Arch. Ration. Mech. Anal. 136 (1996), pp. 305-357.
- [8] A.I. MEES, Dynamics of Feedback Systems, John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1981.
- [9] J.L. MOIOLA Y G. CHEN, Hopf Bifurcation Analysis: A Frequency-Domain Approach, vol. 21, World Scientific, Singapur, 1996.