# Capítulo 7

# Que no entre quien no sepa topología

*Pablo Amster*

## 7.1. Revelación de un amor

Corría el año 1629 cuando el filósofo inglés Thomas Hobbes se encontraba de visita en París. Entonces tuvo una sorprendente revelación, que habría de cambiar el rumbo de su pensamiento. Según relata un amigo suyo, J. Autrey, en *A Brief Life of Thomas Hobbes, 1588-1679*:

> *Tenía 40 años cuando por primera vez se fijó en la geometría; y ello aconteció accidentalmente. Encontrábase en la biblioteca de un caballero; abiertos estaban los Elementos de Euclides, y fue la Proposición 47, El. libri I. Leyó la Proposición. Por Dios (pues de cuando en cuando gustaba de proferir un exaltado Juramento, para mayor énfasis) ¡esto es imposible! Leyó pues la Demostración, en la que aludía a una Proposición previa; proposición que también leyó. La cual mencionaba otra anterior, que leyó también. et sic deinceps [y así sucesivamente] hasta quedar al fin demostrativamente convencido de aquella verdad. Ello le hizo enamorarse de la geometría.*

A partir de ese día, comenzó a proclamar cosas tales como: “No entiende teología quien no entiende filosofía” y “no entiende filosofía quien no sabe matemáticas”, que deben haber causado cierta inquietud entre los filósofos (y más aún entre los teólogos).

Para el lector que no se conozca de memoria los cinco libros de Euclides, conviene aclarar que la tan misteriosa “Proposición 47” no es otra que el más célebre enunciado geométrico de todos los tiempos, aquel que se conoce como *Teorema de Pitágoras*. Y las proclamas de Hobbes remiten sin duda a la inscripción que se hallaba a la entrada de la renombrada Academia de Platón: “Que no entre quien no sepa Geometría”.

Esta puede parecer una acogida un tanto extraña para el visitante desprevenido, bastante diferente de las frases de bienvenida que suelen leerse en los felpudos. Sin embargo, refleja toda una doctrina. Para Platón, el mundo real es una copia de un mundo de ideas, que se rige por la idea del Bien y fue construido por un Demiurgo o creador. Pero la piedra fundamental de su creación es matemática; más concretamente, podemos decir que no se trata de una sino de cinco piedras. En efecto, el principio fundamental de la creación lo constituyen aquellos cinco poliedros regulares que hoy se conocen como *cuerpos platónicos*: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el icosaedro y el dodecaedro. Los cuatro primeros corresponden a los cuatro elementos (fuego, tierra, aire y agua), mientras que el último se reserva para dar al universo el toque final, su última pincelada: como dice el *Timeo* de Platón, "Dios se sirvió de él [el dodecaedro] para componer el orden final del Todo". La importancia que se concedió a estos cinco sólidos es tan grande, que hay quienes sostienen que los Elementos de Euclides son apenas una narración detallada (y sin duda excelente) de la teoría de los cuerpos platónicos.

A pesar de su aparente ingenuidad, la influencia de las ideas platónicas persiste hasta nuestros días[1]; en cierto sentido, esa es la razón por la que la matemática tiene tanta presencia en los programas de estudio, desde el primer año de la escuela hasta el último.

Pero los tiempos han cambiado desde entonces. Para los griegos, la matemática se reducía casi exclusivamente a la geometría: lo demás era apenas un apoyo, un puñado de instrumentos auxiliares para estudiar las verdades concernientes a ese mundo minuciosamente descripto en los Elementos. Sin embargo, la matemática actual se compone de muy diversas ramas de gran importancia: incluso la propia geometría, se ha extendido y desarrollado a tal punto que la geometría "clásica" o euclidiana es tan sólo una pequeña porción. Y, de alguna forma, puede decirse que la auténtica base del pensamiento geométrico se encuentra en una de estas nuevas ramas, que comenzaría surgir unos veinte siglos después de Euclides. En efecto, fue el gran matemático y filósofo G. Leibniz quien esbozó sus primeros fundamentos en unas cartas que escribió allá por 1679 y le dio el nombre de *Analysis Situs*; luego Euler avanzó otro poco. Pero recién en el siglo XIX esta nueva rama cobraría un rol preponderante, con los trabajos de Möbius y en especial de Listing, quien le dio el nombre con el que hoy se la conoce: *Topología*.

En este capítulo presentaremos las ideas básicas de esta nueva y extraña "geometría", en la que los objetos y las figuras parecen cobrar formas distintas. En especial, veremos que la topología prescinde por completo de la noción de *métrica* o distancia: las propiedades que estudia no son de carácter *cuantitativo* sino más bien c*ualitativo*.

Ahora bien, a pesar de su gran nivel de abstracción, la topología posee numerosas aplicaciones en los más variados terrenos. En particular, en las próximas páginas mostraremos cómo es posible verificar a partir de ella un notable hecho de carácter puramente geométrico, en el más clásico sentido de la palabra: la inexistencia de otros poliedros regulares aparte de los mencionados por Platón. De algún modo, las aplicaciones de esta clase parecen confirmar la opinión de otro gran matemático, el francés Poincaré en su libro *Últimos Pensamientos*:

> *[...] es para favorecer tal intuición [la geométrica] que el geómetra tiene necesidad de dibujar figuras o, por lo menos, representárselas mentalmente. Ahora bien, si desprecia las propiedades métricas o proyectivas de estas figuras, si sólo se atiene a sus propiedades puramente cualitativas, solamente entonces la intuición geométrica interviene verdaderamente. No es que quiera decir con esto que la geometría métrica reposa sobre la lógica pura, que en ella no intervenga ninguna verdad intuitiva, pero estas son intuiciones de otra naturaleza, análogas a las que desempeñan un papel esencial en aritmética y álgebra.*

[1] El inglés Alfred Whitehead llevó esta aseveración al extremo, cuando anunció que "toda la filosofía occidental es apenas una colección de notas a la filosofía de Platón". Como cabe imaginar, esta observación no cayó del todo bien a sus colegas filósofos.

Como sea, no deja de resultar sorprendente que un enunciado tan "métrico", que se refiere a los cuerpos platónicos pueda comprobarse apelando a ideas tan no-métricas, de orden exclusivamente topológico. No es aventurado imaginar que, de haberse topado con una demostración así, Hobbes se habría enamorado también de esta cautivante disciplina, nacida cincuenta años después de su "exaltado Juramento".

## 7.2. Débil es la geometría

En la sección previa hemos presentado a la topología como una suerte de "geometría no métrica". Pero esto que parece un contrasentido refleja en realidad un aspecto profundo de la matemática, como veremos a continuación.

Para comenzar, recordemos aquella antigua frase que dice: la geometría es el arte de razonar sobre figuras mal hechas. Esto se ve cuando inferimos alguna propiedad a partir de un dibujo: trazamos unas líneas (acaso en la arena, intentando imitar a Arquímedes) y observamos que las alturas de un triángulo se cortan en un único punto, o que la recta tangente a una circunferencia resulta perpendicular al radio. Sin embargo, de algún modo, estamos razonando sobre figuras mal hechas, especialmente en el sentido platónico mencionado en la sección previa: los dibujos no concuerdan con los objetos perfectos, ideales de la geometría. Pero pese a su imperfección, el dibujo es una valiosa ayuda a nuestra intuición, pues nos permite vislumbrar ciertas propiedades. De alguna manera, nos convencemos de que el dibujo "mal hecho" nos dice algo que es cierto; entonces llega el momento de recurrir a los postulados geométricos, para efectuar la demostración como Euclides manda. Recién en ese momento podemos dar por válidas las propiedades intuidas, presentidas en el dibujo.

Poincaré va un poco más allá, y se pregunta: ¿qué es una figura mal hecha? En la geometría euclidiana, dos figuras son equivalentes si se puede poner una sobre otra empleando únicamente rotaciones y traslaciones; desde este punto de vista hay que decir que el dibujo de la figura 7.1 es un círculo algo mal hecho.

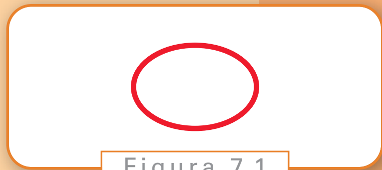

Figura 7.1

En cambio, no lo es para la geometría proyectiva desarrollada en el capítulo anterior: un círculo es equivalente a una elipse porque, a grandes rasgos, una de las figuras es una "perspectiva" de la otra. Pero aun aceptando perspectivas tan amplias, todo el mundo pensará sin duda que la curva de la figura 7.2 es una circunferencia MUY mal hecha. Todo atisbo de geometría parece haber quedado olvidado en ese sinuoso recorrido que en casi nada se asemeja a la circunferencia original.

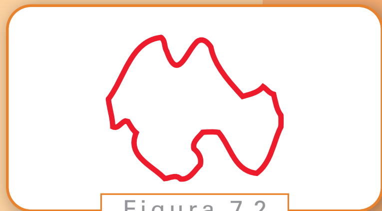

Figura 7.2

Sin embargo, para la topología todavía se trata de figuras equivalentes: como se puede sospechar, el secreto reside en el "casi" del párrafo previo. Poincaré lo presenta del siguiente modo:

*Supongamos un modelo cualquiera y la copia de este modelo, realizada por un dibujante poco diestro; las proporciones están alteradas; las rectas, trazadas por una mano temblorosa, han sufrido importunas desviaciones y presentan curvaturas malhadadas. Desde el punto de vista de la geometría proyectiva, las dos figuras no son equivalentes; por el contrario, lo son, desde el punto de vista del* Analysis Situs.

Esto justifica un poco mejor nuestra anterior circunferencia tembleque, y sus malhadadas curvas: un artista plástico sentiría que esta copia tan mal hecha es un fracaso, capaz de motivarlo a "colgar los pinceles". Sin embargo, las propiedades topológicas de la circunferencia se conservan: se trata de sus aspectos más esenciales; mejor dicho, los que hacen a su esencia topológica.

Según hemos mencionado informalmente, la topología pasa por alto las "cantidades" y sólo se fija en "cualidades": dos objetos $O_1$ y $O_2$ son equivalentes siempre que se pueda pasar de uno al otro por medio de cierto tipo de transformación, denominada *homeomorfismo*. En términos más o menos rigurosos, se trata de una función $f : O_1 \rightarrow O_2$ que tiene las siguientes propiedades:

**1.** Es continua.

**2.** Es biyectiva.

**3.** La función inversa $f^{-1} : O_2 \rightarrow O_1$ es continua.

Para entender esto, resulta conveniente dar una noción aproximada de la idea de *continuidad*, que en el espacio común y corriente responde a la noción intuitiva de *deformación*, sin cortes o desgarraduras. En un curso básico de análisis matemático, se suele decir que una función es continua cuando a medida que nos aproximamos a cualquier valor $x$, los valores de la función se aproximan a su imagen $f(x)$. Pero esta definición, al margen de que le falta rigor, presenta el inconveniente de que la idea de "aproximarse" lleva implícita alguna noción de distancia. Para nuestros fines alcanza con aclarar que existe una manera de corregir este defecto, de modo que si cierta familia de puntos *converge* (en un sentido que se puede hacer preciso) a un valor $x$, entonces las respectivas imágenes de dichos puntos convergen a $f(x)$. Esta idea algo vaga es suficiente para entender que un homeomorfismo, que es una función continua "ida y vuelta" -es decir, con inversa continua- preserva determinadas propiedades de los objetos, los denominados *invariantes topológicos*. Una circunferencia conserva muchas de sus propiedades por más que se la estire, se la comprima un poco o se la deforme. Mientras no la cortemos o peguemos algunos de sus puntos entre sí, seguirá siendo una curva cerrada, sin autointersecciones. Esta particularidad que tiene la topología de ser tan "flexible" justifica aquel nombre coloquial con que también se la conoce: geometría del caucho. El resultado es una geometría con menos axiomas que la usual, que hace la vista gorda a las diferencias de orden "métrico" y sólo se concentra en otros aspectos más esenciales. Una geometría -por así decirlo- más permisiva: por eso suele decirse también que es una *geometría débil*.

## 7.3. Formulo, luego existo

En esta sección nos ocuparemos de una de las fórmulas más notables de la geometría de poliedros, conocida como *Fórmula de Euler* aunque, como sugiere el subtítulo, el primero que la demostró fue Descartes[2]. Nuestra intención es mostrar que para cualquier poliedro simple vale la relación

$$V + C - A = 2,$$

en donde $V$, $C$ y $A$ denotan, respectivamente, el número de vértices, caras y aristas. Pero antes de dar una prueba debemos aclarar el contexto en el que vamos a trabajar. Sin entrar en mayores detalles, diremos que un poliedro simple es aquel que resulta topológicamente equivalente a una esfera: de alguna forma, podemos imaginar que lo "inflamos" hasta obtener una pelota de fútbol. En el fondo, esto no parece tan desacertado, pues uno de los diseños más comunes de tan popular objeto está basado en un poliedro que pensó y dibujó un gran hombre del Renacimiento: Leonardo da Vinci.

Para nuestros fines es conveniente observar que todo poliedro simple se puede llevar a un plano de la siguiente manera: basta con eliminar una de sus caras, y "estirarlo" sobre el plano como si se tratase de un antiguo pergamino. Por ejemplo, en la figura 7.3 tenemos un posible aplanamiento de un cubo.

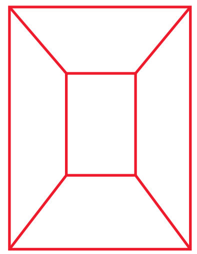

Figura 7.3

Es claro que el proceso obliga a alterar algunas de las caras y aristas del poliedro, y en consecuencia las dimensiones también se modifican respecto del original. Sin embargo, el número de vértices y aristas se conserva. Aunque sí se produce un cambio en el número de caras, pues hemos perdido una en el camino: de este modo, la fórmula que debemos probar para esta clase de redes planas de polígonos es la siguiente:

$$V + C - A = 1.$$

Para ello, vamos a definir una serie de operaciones "admisibles", que transformarán este gráfico en otro, para el cual la relación será obvia. Las operaciones son:

1. agregar una arista que una dos vértices no conectados previamente. De esta forma, $V$ se mantiene, mientras que el número de caras y de aristas aumenta en una unidad. Esto quiere decir que el número $V + C - A$ no se modifica;

2. si un triángulo de la red comparte exactamente dos lados con el resto, se puede eliminar la arista no compartida, como se observa en la figura 7.4.

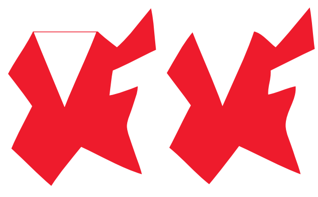

Figura 7.4

[2] El matemático alemán Felix Klein dijo una vez que si un teorema lleva el nombre de un matemático, entonces es seguro que este matemático no es su autor. Esto es algo exagerado, aunque hay ejemplos bastante notables, como el binomio de Newton, el triángulo de Pascal, o el propio teorema de Pitágoras.

El número de vértices queda igual, pero se elimina una cara y una arista: nuevamente, la cantidad $V + C - A$ se conserva.

**3.** si un triángulo de la red comparte un solo lado con el resto, se puede eliminar el vértice y las dos aristas correspondientes (ver figura 7.5)
De esta forma, el número de caras y el de vértices disminuye en una unidad, y el de aristas disminuye en dos unidades. Una vez más el valor $V + C - A$ permanece inalterado.

Figura 7.5

En base a estas operaciones, se puede proceder de la siguiente manera: en primer lugar, agregamos todas las diagonales que hagan falta, hasta que quede una red compuesta exclusivamente por triángulos. Luego vamos eliminando estos triángulos uno a uno, haciendo uso de las dos operaciones restantes. De este modo, llegaremos finalmente a un triángulo, en donde $V = 3 = A$, y $C = 1$, de modo que la fórmula es válida. Cabe aclarar que nuestro argumento intuitivo puede hacerse más riguroso, de modo que se convierta en una verdadera demostración. Se puede verificar, sin mucha dificultad, llevando a cabo la reducción descripta partiendo por ejemplo de un dodecaedro: en primer lugar, hay que aplanarlo, quitándole una de sus caras y estirando la figura hueca que queda, como si se tratase de un coqueto centro de mesa compuesto de pentágonos. Luego, bastará con agregar dos diagonales a cada pentágono para obtener una red de triángulos, que se irán desvaneciendo uno a uno por medio de las operaciones 2 y 3, como se observa en el siguiente gráfico:

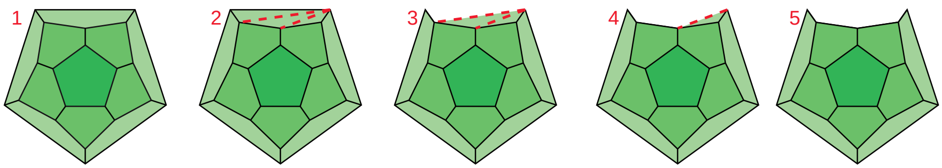


Figura 7.6

A modo de comentario final de esta sección, vale la pena observar que el valor 2 que aparece en la fórmula de Euler-Descartes puede verse directamente como una propiedad *de la esfera*, pues vale para cualquier subdivisión poligonal que se trace sobre ella. Se trata de un invariante topológico, que se denomina “característica”. La característica de una esfera (y de cualquier otra superficie equivalente a ella) es 2. Para otras superficies diferentes, dicho valor característico es distinto.

## 7.4. Los cinco platónicos

En esta sección brindaremos, tal como hemos anunciado, una demostración elemental de ese hecho geométrico que tanto cautivó a los griegos: existen solamente cinco poliedros simples regulares, vale decir, cuyas caras son polígonos regulares iguales. Nuestra herramienta principal va a ser topológica: la fórmula de Euler-Descartes.

En primer lugar, conviene efectuar una observación muy sencilla, que se desprende justamente de la regularidad de un poliedro: si el número de lados por cara es $n$, y el número (siempre el mismo) de aristas concurrentes en cada vértice es $k$, entonces vale

$$\mathrm{k}V = 2A, \qquad nC = 2A.$$

Esto es así, en efecto, ya que cada arista tiene dos vértices, y es compartida por exactamente dos caras. La fórmula de Euler-Descartes se reescribe entonces de la siguiente manera:

$$\frac{2A}{k} + \frac{2A}{n} - A = 2$$

o, equivalentemente

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{A}.$$

Vamos a ver que $k$ o $n$, al menos uno de ellos, tiene que ser igual a 3. En primer lugar, es evidente que $k, n \geq 3$, y si fueran ambos mayores se tendría entonces que $k, n \geq 4$. Resultaría entonces que

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0,$$

lo que es absurdo.

Ahora, si $k = 3$, se obtiene que

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{3} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{6-n}{6n},$$

de donde se concluye que $n < 6$. Los valores posibles son:

- $n = 3$ y $A = 6$, que corresponden al tetraedro.
- $n = 4$ y $A = 12$, que corresponden al cubo.
- $n = 5$ y $A = 30$, que corresponden al dodecaedro.

Observemos ahora que, en la fórmula anterior, los roles de $k$ y $n$ se pueden intercambiar. Por eso, si planteamos ahora $n = 3$ obtenemos las siguientes posibilidades:

- $k = 3$ y $A = 6$, que corresponden al tetraedro;
- $k = 4$ y $A = 12$, que corresponden al octaedro;
- $k = 5$ y $A = 30$, que corresponden al icosaedro.

Claramente, el primer caso se repite, lo que hace un total de cinco poliedros. Quizás sea demasiado pronto para enamorarse, pero debemos reconocer que la demostración tiene su encanto...

## 7.5. Algunas actividades

La demostración de la sección previa es muy seductora, en especial porque da cuenta de un hecho sorprendente, que constituye uno de los pilares del misticismo platónico. Pero sin necesidad de ponernos tan místicos podemos ver, a modo de ejercicio, algunas otras propiedades geométricas que se deducen de la fórmula de Euler-Descartes. Como dice el matemático francés H. Lebesgue en su trabajo *Quelques conséquences simples de la formule d'Euler*, el número de propiedades que se puede obtener con el procedimiento que veremos es infinito; nos limitaremos a deducir apenas unos hechos básicos, tales como:

1. Todo poliedro simple contiene un triángulo o una tríada (es decir, un vértice con tres aristas concurrentes).
2. Todo poliedro simple tiene una cara con menos de 6 lados.

Se puede intentar una prueba, antes de continuar. En esencia, el razonamiento es muy similar al de la sección previa. Sin embargo, ahora no hay valores únicos de $k$ y $n$; por eso, resulta conveniente denominar por ejemplo $C_n$ al número de caras que tienen $n$ lados, y $V_k$ al número de vértices que tienen $k$ aristas concurrentes. Esto tiene sentido obviamente para $k, n \geq 3$, y además es claro que los números $C_n$ y $V_k$ sólo pueden ser distintos de 0 para un número finito de valores de $n$ y $k$. Por ejemplo, supongamos que el valor máximo de lados por cara es $n$, y el valor máximo de aristas concurrentes por vértice es $k$; se tiene entonces:

$$C = C_3 + C_4 + \ldots + C_n, \; V = V_3 + V_4 + \ldots + V_k .$$

Por otra parte, contando la cantidad total de caras y vértices, se deducen las siguientes fórmulas:

$$3C_3 + 4C_4 + . . . + NC_n = 2A\,, \quad 3V_3 + 4V_4 + . . . + KV_k = 2A\,.$$

Multipliquemos a los dos términos de la fórmula de Euler-Descartes por 4; de esta forma resulta:

$$4(C_3 + . . . + C_n) + 4(V_3 + . . . + V_k) - 4A = 8.$$

A su vez, escribiendo

$$4A = 2A + 2A = 3C_3 . . . + NC_n + 3V_3 + . . . + KV_k\,,$$

podemos reagrupar los términos de la igualdad anterior para obtener:

$$(4 - 3)C_3 + (4 - 4)C_4 + . . . + (4 - N)C_n + (4 - 3)V_3 + (4 - 4)V_4 + . . . + (4 - K)V_k = 8.$$

Finalmente, observemos que, en la última expresión, sólo resultan positivos los coeficientes correspondientes a $C_3$ y $V_3$, ambos iguales a 1: esto prueba que

$$C_3 + V_3 \geq 8.$$

Como consecuencia, hemos demostrado la primera de las afirmaciones. En verdad, hemos demostrado algo más: en todo poliedro simple el número total de triángulos y tríadas es *por lo menos* igual a 8.

Para ver la segunda propiedad, podemos multiplicar ahora a la igualdad de Euler-Descartes por 6, y escribir $6A = 2A + 4A$, de modo que

$$6(C_3 + . . . + C_n) - 2A + 6(V_3 + . . . + V_k) - 4A = 12.$$

La identidad que se obtiene ahora es

$$(6 - 3)C_3 + (6 - 4)C_4 + . . . + (6 - n)C_n + (6 - 6)V_3 + (6 - 8)V_4 + . . . + (6 - 2k)V_k = 12.$$

En este nuevo caso, los únicos coeficientes positivos son los correspondientes a $C_3$, $C_4$ y $C_5$, y vale

$$3C_3 + 2C_4 + C_5 \geq 12.$$

Como antes, lo que se prueba es un enunciado algo más fuerte, más preciso que la afirmación original que pretendíamos demostrar: en todo poliedro simple, el número de caras de menos de 6 lados es como mínimo igual a 12.

A modo de ejercicio, se puede intentar probar el siguiente enunciado, concerniente a una clase especial de poliedros:

**Ejercicio 1** **En un poliedro simple cuyas caras no contienen triángulos o cuadriláteros (es decir, $C_3 = C_4 = 0$) y todos sus vértices son tríadas (es decir, $V = V_3$), existe siempre algún pentágono que toca a otro pentágono, o bien a un hexágono.**

La demostración es algo más complicada, pero resulta de multiplicar a la fórmula de Euler-Descartes por 14, y escribir $14A = 4A + 10A$.