Ecuación de Ginzburg Landau compleja con un término potencial en espacios de Zhidkov

» **Agustin Besteiro**
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas CONICET - Universidad Abierta Interamericana, Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina
agustintomas.besteiro@uai.edu.ar

Resumen

Consideramos la ecuación de Ginzburg Landau compleja con un término de tipo potencial acotado en la recta real. Demostramos la existencia local de soluciones para el problema de valores iniciales en espacios de Zhidkov, como subespacio de las funciones uniformemente continuas utilizando métodos de splitting númerico.

PALABRAS CLAVE: ECUACIONES DE GINZBURG LANDAU – ECUACIONES DIFERENCIALES – METODOS DE SPLITTING

Complex Ginzburg Landau equations with a potential term in Zhidkov Spaces

Abstract

We consider the so-called Complex Ginzburg-Landau equations with a bounded potential term in the real line. We prove existence results concerned with the initial value problem for these equations in Zhidkov spaces, as a subspace of uniformly continuous functions, using Splitting methods.

KEYWORDS: GINZBURG LANDAU EQUATION – DIFFERENTIAL EQUATIONS – SPLITTING METHODS

1. Introducción

La ecuación de Ginzburg Landau compleja es una de las ecuaciones no lineales más estudiadas en la matemática y en la física. Describe de forma cualitativa y cuantitativa una gran cantidad de fenómenos como, por ejemplo, superconductividad, superfluidez, condensados de Bose- Einstein y cristales líquidos (Aranson, Kramer, 2002).

Nuestro objetivo es demostrar la existencia local de soluciones en un espacio muy particular como lo es el espacio de Zhidkov. Estos espacios fueron introducidos por P. Zhidkov (Zhidkov, 1987) y consisten en funciones definidas en la recta real, que son acotadas y uniformemente continuas, con derivadas de orden en el espacio de Lebesgue L^2. Las funciones en estos espacios ya han sido aplicadas en ecuaciones diferenciales en derivadas parciales para modelar los solitones oscuros (dark solitons), que son "sombras" de ondas viajeras, es decir soluciones que se escriben como $u(x, t) = u_v (x - vt)$. Por ejemplo, en (Efremidis, et al., 2000) se encuentran soluciones específicas de tipo soliton oscuro para una ecuación de Ginzburg Landau compleja no lineal. Este tipo de soluciones son importantes en otro tipo de ecuaciones como, por ejemplo, las ecuaciones de Schrödinger (Gallo, 2004).

Un ejemplo típico de una función en el espacio de Zhidkov planteada en (Kivshar, Luther-Davis, 1998) es:

$$u_v(x) = \sqrt{1-\frac{v^2}{2}}\tanh\left(\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{2}}x}{\sqrt{2}}\right)+\frac{i\,v}{\sqrt{2}}$$

Consideramos el siguiente sistema unidimensional:

$$\begin{cases} \partial_t u = \left(\alpha + i\beta\right)\partial_{xx}u + \gamma u + V(x)u \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \qquad (1)$$

Donde $u = u(x, t)$ es una función compleja con $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma \geq 0$ y $V(x)$ una función continua y acotada. El término lineal $(\alpha + i\beta)\partial_{xx}u$ es el que caracteriza las ecuaciones de Ginzburg Landau complejas, con sus respectivos coeficientes para diferenciar la parte real, de la parte compleja. El caso particular de tener $\beta = 0$, tendríamos solo la parte real, que corresponde a la ecuación del calor unidimensional. De la misma forma, si tomamos $\alpha = 0$, tenemos la ecuación de Schroedinger, famosa por su uso en la mecánica cuántica (Griffiths, 2004) y en la cual también podemos tener un término potencial como el de la ecuación planteada. Una gran cantidad de trabajo se ha hecho para demostrar la existencia local de soluciones en otros espacios, y con distintas no linealidades (Ginibre, Velo, 1996).

En nuestro caso, demostraremos la existencia local de soluciones en espacios de Zhidkov, utilizando métodos de Splitting temporales, para ecuaciones de evolución semilineales. Estos métodos ya han sido utilizados anteriormente para obtener resultados de buen planteo local en otras ecuaciones y espacios, como en ecuaciones de reacción difusión (Besteiro, Rial, 2018) y para soluciones en espacios de Peregrine (Besteiro, Rial, 2019). Estos métodos permiten particionar la variable temporal, para poder avanzar por separado con distintas partes de la ecuación. Los métodos de Splitting temporales fueron introducidos principalmente para hacer aproximaciones de soluciones de ecuaciones muy complejas, a través de algoritmos numéricos, como podemos apreciar en artículos específicos de ecuaciones no lineales de evolución (De Leo, Rial, Sánchez de la Vega, 2016). De esa forma, de acuerdo con que tan "fina" es la partición utilizada computacionalmente, uno obtendrá una mejor aproximación a la solución. Estos métodos ya han sido implementados en Clusters del departamento computación alta performance de la CNEA demostrando una fuerte aplicabilidad en distintos problemas (Alvarez, Rial, 2016). La novedad introducida recientemente, es la de aplicar estos métodos para obtener resultados puramente teóricos, como ya se ha hecho para la ecuación de Ginzburg Landau en espacios de Zhidkov con distintas no linealidades (Besteiro, 2019). La importancia principal de estos métodos es que permiten particionar la ecuación en la parte lineal y la parte no lineal. Esto significa que, en vez de tener un problema complejo, podemos plantear dos problemas derivados, más sencillos. En nuestro caso, alcanzará con plantear nuestro problema para la parte lineal, es decir, considerar la ecuación:

$$\partial_t u = (\alpha + i\beta)\,\partial_{xx} u + \gamma u$$
$$u(x,0) = u_0(x)$$

Y por otro lado la ecuación no lineal asociada al potencial:

$$\partial_t u = V(x)u$$
$$u(x,0) = u_0(x)$$

El artículo está organizado de la siguiente forma, en la sección 2, introduciremos las notaciones y resultados preliminares. En la sección 3 analizaremos el problema no lineal. Finalmente, en la sección 4 utilizaremos los métodos de Splitting temporal para unir todos los resultados previos, y obtener la existencia local de soluciones en el espacio de Zhidkov.

2. Notación y resultados preliminares

En esta sección introducimos algunas definiciones y resultados preliminares. Los espacios que trabajaremos son, las funciones uniformemente continuas, y los espacios de Lebesgue (los espacios L^p).

Definición 1: Definimos $C_u(\mathbb{R})$ como el espacio de las funciones uniformemente continuas en una dimensión real.

Definición 2: Definimos $L^\infty(\mathbb{R})$ como el espacio de las funciones medibles acotadas en una dimensión. La norma asociada es:

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup\{C \geq 0 : \left|f(x)\right| \leq C\ para\ casi\ todo\ x\}$$

Definición 3: Definimos como $L^2(\mathbb{R})$ como el espacio de las funciones medibles de cuadrado integrable, es decir, son las funciones que cumplen que:

$$\int_{\mathbb{R}} \left|u(x)\right|^2 dx < \infty$$

La norma asociada es:

$$\|u\|_{L^2} = (\int_{\mathbb{R}} \left|u(x)\right|^2 dx)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Definición 4: Definimos los espacios de Zhidkov para $k > d/2$, como

$$X^k(\mathbb{R}^d) = \{u \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap C_u(\mathbb{R}^d): \ \partial_j u \in L^2(\mathbb{R}^d), 1 \le \left|j\right| \le k\}$$

Es decir, las funciones uniformemente continuas y acotadas, con derivadas hasta orden k en el espacio L^2.

La norma asociada es:

$$\|u\|_{X^k} = \|u\|_{L^\infty} + \sum_{1 \le |a| \le k} \left\|\partial_a u\right\|_{L^2}$$

Observación: Los espacios de Zhidkov son cerrados con respecto a la norma definida anteriormente (Gallo, 2004).

Definición 5: Definimos como $U(t)$ al semigrupo que resuelve la siguiente ecuación diferencial lineal en una dimensión:

$$\partial_t u = \left(\alpha + i\beta\right) \partial_{xx} u + \gamma u$$

Si adicionalmente, tenemos la condición inicial $u(0,x) = u_0(x)$ entonces la solución del problema de valores iniciales de la ecuación lineal se puede escribir en términos de la convolución entre el semigrupo y la condición inicial:

$$U(t)u_0(x) = G_t(x) * u_{0(x)} = (\left(4\pi\, t\left(\alpha + i\beta\right)\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{\left[4t(\alpha + i\beta)\right]} + \gamma t}) * u_0(x)$$

El núcleo satisface:

$$\left|G_t(x)\right| = \left(4\pi t\left(\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha x^2}{\left[4t\left(\alpha^2+\beta^2\right)\right]}+\gamma t}$$

Con lo cual se puede demostrar que $G_t(x) \in L^1(\mathbb{R})$, es decir se cumple que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G_t(x)|\, dx < \infty$$

Proposición 6: La familia $\{U(t)\}$ $t \geq 0$ de operadores definidos como $U(t)u_0 = G_t * u_0$ es un semi-grupo fuertemente continuo.

Demostración: Ver proposición 2.2 en (Besteiro, Rial, 2018).

Lema (Desigualdad de Young): Si $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $v \in L^q(\mathbb{R}^d)$ y si además tenemos que:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$$

Con $1 \leq p,\ q \leq r \leq \infty$. Entonces

$$\left\|u * v\right\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}$$

Donde

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demostración: Ver teorema 3.9.4 en (Bogachev, 2007).

En el siguiente Lema, demostraremos que si la condición inicial, esta en el espacio de Zhidkov, en el caso de una derivada, y en una dimensión, entonces la evolución de la ecuación lineal mantiene la solución en el mismo espacio.

Observación: En general, no haremos referencia al espacio con respecto a la variable temporal, que, en nuestro caso, siempre serán las funciones continuas (usaremos como notación C y el conjunto de referencia). Si denotamos $u(t,x) \in C_u(\mathbb{R})$, nos estaremos refiriendo a

$$u(t,x) \in C\left(\left[0,T^*\left(u_0\right)\right), C_u(\mathbb{R})\right)$$

Lema 7: Si $u_0 \in X^1(\mathbb{R})$ entonces $U(t)u_0 \in X^1(\mathbb{R})$.

Demostración: Como sabemos que $u_0 \in X^1(\mathbb{R})$ entonces en particular $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Utilizaremos la desigualdad de Young para convoluciones.

$$\left\|U(t)u_0\right\|_{L^\infty} = \left\|G_t * u_0\right\|_{L^\infty} \leq \left\|G_t\right\|_{L^1}\left\|u_0\right\|_{L^\infty}$$

Como además, $G_t(x) \in L^1(\mathbb{R})$ entonces $\|G_t\|_{L1}\|u_0\|_{L^\infty} < \infty$. Por lo tanto, se tiene que

$$\left\|G_t\right\|_{L^1}\left\|u_0\right\|_{L^\infty} < \infty \text{ y } U(t)u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$$

Por otro lado, como $u_0 \in X^1(\mathbb{R})$ entonces $\partial_x u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces, usando otra vez, la desigualdad de Young para convoluciones y propiedades de la convolución con respecto a las derivadas, tenemos:

$$\left\|\partial_x(U(t)u_0)\right\|_{L^2} = \left\|\partial_x(G_t * u_0)\right\|_{L^2} = \left\|G_t * \partial_x u_0\right\|_{L^2} \leq \left\|G_t\right\|_{L^1}\left\|\partial_x u_0\right\|_{L^2} < \infty$$

Por lo tanto, $\partial_x(U(t)u_0) \in L^2(\mathbb{R})$ y como $U(t)u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, tenemos que $U(t)u_0 \in X^1(\mathbb{R})$.

Hemos visto, que si nuestra condición inicial u_0 está en $X^1(\mathbb{R})$ entonces la evolución que nos da la ecuación lineal $U(t)u_0 \in X^1(\mathbb{R})$. Para hacer el mismo análisis con la parte no lineal, debemos dar algunos resultados previos. Los siguientes resultados son bien conocidos y están detallados en la literatura especializada en el tema (Cazenave, Haraux, 1999):

Si F es una función localmente Lipschitz, para cada $z_0 \in C_u(\mathbb{R})$, entonces existe una solución única de la ecuación

$$\begin{cases} \partial_t z = F(z) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \qquad (2)$$

Definida en el intervalo $\big[0, T^*(z_0)\big)$. La solución de la ecuación (2) es también solución de la ecuación integral:

$$z(t) = z_0 + \int_0^t F\big(z(t')\big)\,dt'. \qquad (3)$$

Además, tenemos una de las siguientes alternativas:

$$T^*\big(z_0\big) = \infty$$

$$T^*\big(z_0\big) < \infty \text{ y } \big|z(t)\big| \to \infty \text{ cuando } t \to T^*(z_0).$$

Esto significa que, o tenemos existencia de soluciones globales en el tiempo, o bien tenemos existencia local, en donde el módulo de la solución tiende a infinito cuando se acerca al tiempo maximal.

Definimos como $N(t, .) : C_u(\mathbb{R}) \to C_u(\mathbb{R})$, al flujo generado por la ecuación (2), esto es, para cualquier $x \in \mathbb{R}$, $N(t, u_0)(x)$ es la solución del problema (2) con dato inicial $z_0 = u_0(x)$. Por lo tanto si $u(t) = N(t, u_0)$ tenemos:

$$u(x,t) = u_0(x) + \int_0^t F\big(u(x,t')\big)\,dt'$$

Usaremos un resultado sobre la existencia de soluciones en el espacio de las funciones uniformemente continuas:

Teorema 8: Existe una función $T^*: C_u(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ tal que para $u_0 \in C_u(\mathbb{R})$, existe un único $u \in C\big(\big[0, T^*(u_0)\big), C_u(\mathbb{R})\big)$ solución del problema (1) con $u(0) = u_0$. Mas aún, se tiene una de las siguientes alternativas:

ISSN 2591-5320

$$T^*(u_0) = \infty$$

$$T^*(u_0) < \infty \text{ y } \lim_{t \to T^*(u_0)} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| u(t) \right| = \infty$$

Demostración:

Ver teorema 4.3.4 de (Cazenave, Haraux, 1999).

3. Ecuación no lineal

En esta sección, analizaremos el problema no lineal, esto es

$$\begin{cases} \partial_t z = V(x) z \\ z(0) = z_0 \end{cases} \qquad (4)$$

Que es el problema (2), con $F(z) = V(x)z$. Al igual que lo hicimos en el Lema 7, con la ecuación lineal, podemos demostrar para el problema (4) que si la condición inicial está en el espacio $X^1(\mathbb{R})$, entonces la evolución de la ecuación no lineal también estará en el espacio $X^1(\mathbb{R})$. En este caso podremos ver la ventaja del método de Splitting, ya que, al separar la ecuación, tenemos que analizar para la parte no lineal, una ecuación diferencial ordinaria.

Lema 9: Si $u_0(x) = z_0 \in X^1(\mathbb{R})$, $V(X) < M$ y $\partial_x V(x) \in L^2(\mathbb{R})$ entonces la solución del problema (4), $z(t) \in X^1(\mathbb{R})$ para $t \in \big(0, T^*(z_0)\big)$.

Demostración:

La solución del problema (4) es $z(t) = z_0 e^{V(x)t}$. Como $z_0 \in X^1(\mathbb{R})$, en particular $z_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Como $V(x)$ es acotado, entonces $z(t) \in L^\infty(\mathbb{R})$. Por otro lado si derivamos con respecto a x tenemos que $\partial_x z = \partial_x(z_0) e^{V(x)t} + \partial_x(V(x)) z_0 e^{V(x)t}$. Como sabemos que $\partial_x(z_0) \in L^2(\mathbb{R})$ y que $\partial_x V(x) \in L^2(\mathbb{R})$, entonces $\partial_x(z_0) e^{V(x)t} \in L^2(\mathbb{R})$ y $\partial_x(V(x)) z_0 e^{V(x)t} \in L^2(\mathbb{R})$, ya que $z_0 \in L^\infty$ y $e^{V(x)t} \in L^\infty$. Por lo tanto, tenemos finalmente que $\partial_x z \in L^2(\mathbb{R})$ y $z(t) \in X^1(\mathbb{R})$.

4. Método de Splitting

En esta sección, utilizaremos el método de splitting desarrollado en (De Leo, Rial, Sánchez de la Vega, 2016). Esto nos permite unir los dos resultados importantes anteriores, el Lema 7 y el Lema 9, para el problema principal (1). El método de Splitting consiste, en particionar el intervalo temporal en partes iguales, y cada una de ellas a su vez, dividirlas en dos. De esta forma, con una parte evolucionará solo la ecuación lineal, y con la otra parte, la ecuación no lineal. Esta es la ventaja del método, que nos permite analizar por separado cada ecuación, convirtiendo el problema completo, en dos problemas *a-priori* más sencillos. La solución particionada, converge a la solución del problema original cuando los intervalos son cada vez mas pequeños. Ese es el resultado que necesitamos de (De Leo, Rial, Sánchez de la Vega, 2016), y que utilizaremos para demostrar nuestro resultado principal.

Teorema 10: Sea $u_0 \in X^1(\mathbb{R})$ entonces la solución del problema (1) $u(t) \in X^1(\mathbb{R})$ para $t \in (0,T^*(u_0))$.

Demostración:

Para

$$t \in \left[0,T^*\left(u_0\right)\right), \text{ sea } n \in \mathbb{N}, h = \frac{t}{n} \text{ y } \left\{W_{h,k}\right\}_{0\leq k\leq n}, \left\{V_{h,k}\right\}_{0\leq k\leq n}$$

las sucesiones dadas por:

$$W_{h,0} = u_0,$$

$$V_{h,k+1} = U\left(h\right)W_{h,k},$$

$$W_{h,k+1} = N\left(h, V_{h,k+1}\right), \quad k = 0,\ldots,n-1$$

Estas sucesiones recorren un intervalo temporal de forma intercalada. La sucesión $V_{h,k}$ es resultado de avanzar con la ecuación lineal y la sucesión $W_{h,k}$ evoluciona con la parte no lineal. La sucesión $W_{h,k}$ es la que termina el ciclo, por lo tanto, lo que vamos a demostrar es que $W_{h,k} \in X^1(\mathbb{R})$ para $k = 0,\ldots,n$ usando inducción. Para el caso $k = 0$ ya teníamos por como definimos la sucesión que $W_{h,0} = u_0 \in X^1(\mathbb{R})$. Para el paso inductivo, suponemos que $W_{h,k-1} \in X^1(\mathbb{R})$. Por el Lema 7, tenemos que $V_{h,k} = U(h)W_{h,k-1} \in X^1(\mathbb{R})$. Para el paso siguiente tenemos por el Lema 9, $W_{h,k} = N(h, V_{h,k}) \in X^1(\mathbb{R})$. Esto significa que completado el ciclo, la solución que avanza de forma particionada está en el mismo espacio de Zhidkov. Sin embargo, nuestro objetivo es demostrar que la solución de la ecuación (1) está en el espacio $X^1(\mathbb{R})$. La convergencia de la solución particionada hacia la solución de la ecuación (1) está garantizada por el Teorema 3.9 de (De Leo, Rial, Sánchez de la Vega, 2016), lo cual nos dice que $W_{h,n} \to u(t)$ cuando $n \to \infty$, es decir cuando las particiones temporales se hacen cada vez mas pequeñas. Finalmente, como $X^1(\mathbb{R})$ es cerrado, tenemos asegurada no solo la convergencia, sino que además la solución $u(t) \in X^1(\mathbb{R})$.

Observación: Es importante notar, que hemos utilizado el Splitting temporal para obtener un resultado teórico como lo es, el buen planteo de la ecuación de Ginzburg-Landau compleja con un término potencial, en espacios de Zhidkov. Es posible adaptar este mismo método para obtener una solución aproximada, mediante el uso computacional, haciendo particiones finas del intervalo temporal (Alvarez, Rial, 2016).

Agradecimientos: El autor desea agradecer a la Universidad Abierta Interamericana y al CONICET por el apoyo para el desarrollo de este trabajo

Bibliografía

» Alvarez, A., Rial, D.F. (2016). “Affine Combination of Splitting Type Integrators, Implemented with Parallel Computing Methods”. International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering, Vol. 9, No. 2: 150-153.

» Aranson, I. S., Kramer, L. (2002). “The world of the complex Ginzburg-Landau equation”. Reviews of Modern Physics, Vol. 74, No.1: 99-143.

» Besteiro, A.T., Rial, D.F. (2018). “Global existence for vector valued fractional reaction-diffusion equations”, arXiv preprint arXiv:1805.09985.

» Besteiro, A.T., Rial, D.F. (2019). “Existence of Peregrine type solutions in fractional reaction–diffusion equations”. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, Vol. 2019, No. 9: 1-9.

» Besteiro, A.T. (2019). “Polynomial complex Ginzburg-Landau equations in Zhidkov spaces”. Matematychni Studii, Vol. 52, No.1: 55-62.

» Bogachev, B. I. (2006). “Measure Theory”. Springer Science & Business Media.

» Cazenave, T., Haraux, A. (1999). “An Introduction to Semilinear Evolution Equations”.

» Oxford Lecture Ser. Math. Appl., Clarendon Press, Rev ed. edition.

» De Leo, M., Rial, D.F., Sánchez de la Vega, C. (2016). “High-order time-splitting methods for irreversible equations”, IMA Journal of Numerical Analysis, Vol. 36, No.4:1842-1866.

» Efremidis, N., Hizanidis K., Nistazakis H. E., Frantzeskakis D. J., Malomed B. A. (2000). “Stabilization of dark solitons in the cubic Ginzburg-Landau equation”. Physical Review E, Vol.63, No.5: 7410-7414.

» Gallo, C. (2004). “Schrödinger group on Zhidkov spaces”. Adv. Differential Equations, Vol. 9, No.5-6: 509-538.

» Ginibre, J., Velo, G., (1996). “The Cauchy problem in local spaces for the complex Ginzburg-Landau equation. I. Compactness methods”. Physica D, Vol. 95, No.3-4:191--228.

» Griffiths, D. (2004). “Introduction to. Quantum Mechanics”. Reed College, Prentice Hall second edition.

» Kivshar, Y. S., Luther-Davies, B. (1998). “Dark optical solitons: physics and applications”. Physics reports, Vol. 298, No.2-3: 81-197.

» Zhidkov, P. (1987). “The Cauchy problem for a nonlinear Schrödinger equation”. Joint Institute for Nuclear Research, Vol.19, No. 11.