‘Conocimiento especializado del contenido’ de estudiantes para profesor y docentes noveles de matemáticas. El caso de los cuerpos geométricos

Natalia Sgreccia y Marta Massa

Resumen: El conocimiento especializado del contenido constituye uno de los dominios de conocimiento requeridos para enseñar matemáticas. En este artículo se presentan resultados, vinculados con dicho dominio, como parte de una investigación realizada con estudiantes avanzadas y egresadas de un Profesorado de matemáticas de Argentina. La indagación estuvo orientada a caracterizar sus conocimientos para enseñar cuerpos poliedros y redondos en los dos primeros años de la escuela secundaria. El estudio, de tipo cualitativo-descriptivo, empleó como instrumento una entrevista abierta. Si bien las participantes dieron indicios de un conocimiento matemático bastante consolidado, se detectaron debilidades en la conformación de su conocimiento especializado del contenido.

Palabras clave: conocimiento especializado del contenido, formación de profesores de matemáticas, cuerpos geométricos

‘Specialized content knowledge’ of pre-service and novel teachers of Mathematics. The case of geometrical solids

Abstract: Specialized content knowledge constitutes one of the required domains of knowledge for teaching Mathematics. Related results with that domain are presented in this paper, as part of a research done on advanced and graduates students in Mathematics Teaching in Argentina. The research was oriented to characterize the knowledge for teaching solids in the two first years of secondary school. In this qualitative-descriptive study, an opened interview was used as instrument. While participants gave signs of a quite consolidated mathematical knowledge, weaknesses were identified in their specialized content knowledge.

Keywords: specialized content knowledge, Mathematics teacher education, geometrical solids.

Fecha de recepción: 30 de abril de 2012. Fecha de aceptación: 18 de noviembre de 2012.

INTRODUCCIÓN

Con frecuencia se observa una reducida competencia espacial en el desempeño de alumnos que ingresan a carreras universitarias que la requieren, tales como ingeniería, arquitectura, química, diseño y bellas artes, entre otras. Las debilidades observadas pueden relacionarse con el escaso tiempo destinado al desarrollo de la competencia espacial en la escolaridad previa, a pesar de estar la misma vinculada con el pensamiento crítico y la imaginación. Vázquez y Noriega Biggio (2010) analizan esta competencia sobre una muestra estadísticamente significativa de jóvenes que ingresan a la universidad e identifican un mayor desarrollo en los estudiantes que proceden de escuelas técnicas.

La enseñanza de la geometría que se realiza en las escuelas actualmente no refleja el reconocimiento atribuido a los sólidos como un buen soporte para desarrollar actividades de producción matemática. González, Guillén y Figueras (2007) señalan que tal exclusión podría deberse a la debilidad en la formación de los profesores en la didáctica de la geometría 3d.

La revisión sobre investigaciones en la formación de profesores de matemáticas realizada por Sánchez (2011) muestra cinco ejes de relevancia en este campo: creencias, visiones y concepciones de los profesores; prácticas docentes; conocimiento y habilidades de los profesores; relación entre teoría y práctica; práctica reflexiva. El eje conocimiento y habilidades de los profesores se vincula con aquello que debe disponer un docente para generar una buena enseñanza. Shulman (1986) inicia esta línea de investigación sobre la formación del profesor, con una propuesta de categorías para conceptualizar la clase de conocimiento requerido en la enseñanza de cualquier materia. Sin embargo, todavía no se le ha dado la suficiente importancia a este eje en los programas de formación de profesores (Pinto Sosa y González Astudillo, 2008), a pesar de haberse constituido en un tema de interés creciente en Educación Matemática.[1] Ball, Thames y Phelps (2008) avanzan en la línea de investigación de Shulman, orientándola hacia las matemáticas, e identifican seis dominios de *conocimiento matemático para enseñar*, uno de los cuales corresponde al *conocimiento especializado del contenido*.

En el área de geometría, Ribeiro, Monteiro y Carrillo (2010) analizan las implicaciones del *conocimiento matemático para enseñar* en la práctica docente en la escuela primaria, al abordar el contenido cubos. Concluyen que las carencias

[1] A partir de la tercera edición del *International Congress of Mathematical Education* en 1976, existe un grupo específico que trata la temática.

en el *conocimiento especializado del contenido*, evidenciadas ante la imposibilidad del docente para que su noción de cubo se despliegue en explicaciones y procedimientos matemáticos para hacerlo enseñable, repercuten en variados aspectos de la enseñanza de las matemáticas.

Gonzato, Díaz Godino y Neto (2011) elaboran cuestionarios para evaluar los *conocimientos didáctico-matemáticos* de profesores en formación para la educación primaria acerca de la visualización de objetos tridimensionales. Su modelo didáctico-matemático, basado en el "enfoque ontosemiótico" del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007; citados en Gonzato *et al.*, 2011), considera tres componentes en la faceta epistémica del conocimiento del contenido del profesor: dos de ellas, *conocimiento común del contenido* y *conocimiento especializado del contenido*, corresponden a las definidas por Ball *et al.* (2008), y se incorpora una tercera definida como *conocimiento ampliado del contenido*. En su estudio consideran cinco tipos de tareas relacionadas con dicha temática: la coordinación e integración de las vistas de objetos, la rotación de un objeto en el espacio, el plegado y desplegado de desarrollos, la composición y descomposición en partes de un objeto tridimensional y la generación de sólidos de revolución. Los resultados muestran que el profesor en formación consigue resolver correctamente las tareas relacionadas con los conocimientos *común y ampliado* del contenido, pero tiene dificultades en identificar los objetos y procesos puestos en juego en la resolución así como en justificar su proceder, dando indicios de debilidades en su *conocimiento especializado del contenido*.

Guillén (2000) indaga los objetos mentales conformados por estudiantes para profesor de escuela primaria para determinadas familias de sólidos que se presentan mediante diferentes representaciones físicas. Su perspectiva teórica se basa en el modelo de Van Hiele (1986) junto con el enfoque de Freudenthal (1983), e incorpora los procesos visuales y analíticos propuestos por Hershkowitz (1990) para interpretar la construcción de la imagen de un concepto, así como el efecto de ejemplos prototípicos y distractores. Algunas de las cuestiones planteadas[2] a los estudiantes entrevistados requieren respuestas donde se articulan nociones sustentadas en un conocimiento que corresponde a lo que Ball *et al.* (2008) denominan *especializado del contenido*. Los resultados de Guillén muestran que los ejemplos de poliedros que tienen mayor incidencia sobre el objeto

[2] Se muestra, por ejemplo, un modelo de un antiprisma pentagonal de base regular y se pregunta: ¿A qué familia pertenece? ¿Por qué dices que es un antiprisma? Si te fijaras en los vértices, ¿podrías decir algo? Y esta propiedad que has dicho, ¿la cumplen todos los antiprismas?

mental correspondiente son generalmente aquellos que se han caracterizado con mayor cantidad de atributos. Además, las representaciones físicas de los sólidos pueden condicionar la identificación de los mismos como ejemplos o no-ejemplos de una familia en situaciones de enseñanza o bien actuar como distractores visuales de las diferentes representaciones físicas de los sólidos. Guillén señala como factores que dan lugar a ideas erróneas: problemas de lenguaje, juicios basados en subfamilias o en parte de una figura; extensión de una propiedad de una familia de sólidos a otra, o de elementos del plano a elementos del espacio; aplicación incorrecta de relaciones de inclusión, exclusión o solapamiento; incomprensión de conceptos implicados en cierta propiedad. Algunos de estos resultados constituyen un aporte significativo para interpretar posibles dificultades en la organización del *conocimiento especializado del contenido* "sólidos" de los futuros profesores.

Asimismo, si se considera que el *conocimiento especializado del contenido* está vinculado con la capacidad de un profesor de matemáticas para representar con exactitud ideas matemáticas y proporcionar explicaciones matemáticas de reglas y procedimientos comunes, entonces resulta importante analizar las habilidades espaciales de los propios docentes y la manera en que las utilizan para representar espacialmente y transmitir el concepto representado. En este sentido, Gutiérrez (1998) efectúa un significativo aporte respecto de las representaciones en geometría 3d y sus transformaciones planas como contenido de enseñanza. Guirette y Zubieta (2010) examinan la lectura y construcción de dibujos geométricos en el quehacer matemático de un conjunto de profesores de escuela secundaria y de bachillerato en México. Identifican que el diagrama bien puede tener un papel heurístico, bien constituir un obstáculo en una situación geométrica. Reconocen que todos los profesores logran distinguir algunas propiedades geométricas y las relaciones que les permiten organizar un diagrama satisfactorio, así como esbozar una justificación. Sin embargo, señalan una gran dificultad por parte de los profesores para ofrecer un argumento, ya que no logran "desempaquetar del diagrama las relaciones pertinentes que, en sinergia, los hubiera llevado a esbozar una justificación satisfactoria" (p. 116), características que ponen en evidencia la debilidad en el *conocimiento especializado del contenido.*

Finalmente, cabe mencionar los aportes esperados en el desarrollo de las habilidades espaciales por el empleo de recursos de geometría dinámica tridimensional. Güven y Kosa (2008) analizan tales habilidades en un grupo de futuros profesores de matemáticas, desarrolladas mediante el empleo del *soft-*

ware Cabri3D. A diferencia de lo que suponían, encuentran un bajo desarrollo de habilidades espaciales en los participantes de su investigación. Consideran que esto puede deberse a la falta de oportunidades para crear y manipular modelos 3d, así como al habitual desplazamiento del foco hacia el cálculo de medidas. Samper, Perry, Camargo, Molina y Echeverry (2010) realizan un estudio sobre la formación de profesores para la educación secundaria con *software* de geometría dinámica, focalizando particularmente en la lógica de la demostración. Sostienen que, al respecto, es necesaria una labor decidida y sistemática para la formación del profesor.

Los resultados encontrados señalan debilidades formativas, de los profesores o futuros profesores, en geometría 3d y, en especial, en las orientaciones para transformarlos en contenidos a ser enseñados.

En Argentina se ha iniciado un proceso de acreditación de la formación universitaria de profesores de matemáticas, que plantea la necesidad de generar conocimientos que orienten sobre los modos más apropiados de desarrollar acciones formativas. Este estudio, que está situado en el eje conocimiento y habilidades de los profesores de matemáticas y que forma parte de una investigación más amplia, busca conocer: ¿cuáles son los rasgos que caracterizan el *conocimiento especializado del contenido* para enseñar *cuerpos poliedros y redondos* de los profesores? Interesa conocer las decisiones relacionadas con la adaptación de los contenidos geométricos 3d que realizan los docentes noveles y los futuros docentes para que sean enseñados en los dos primeros años de la escuela secundaria. El mismo se aborda mediante un estudio de caso que contempla:

- *una carrera*: Profesorado de matemáticas (PM) de la Universidad Nacional de Rosario (UNR), Argentina. En este país, la carrera de grado Profesorado de matemáticas existe diferenciada de la Licenciatura en matemáticas, que está orientada a la investigación (pura o aplicada) en esta disciplina. En Argentina, coexisten dos subsistemas formadores de profesores, dependientes de diferentes jurisdicciones gubernamentales: el *nacional*, que se realiza en carreras de Profesorado que se cursan en las Universidades, y el *provincial*, que se efectúa en los denominados Institutos de Formación Docente como formación superior no universitaria. En ambos tipos, a su vez, la gestión puede ser pública o privada;
- *dos tipos de actores*: estudiantes avanzados –que cursan el tercer o cuarto año de la carrera– y egresados en los últimos cinco años. Se considera

aquí a las personas que han sido formadas en el marco de la carrera con el Plan de Estudios 2002 vigente;

- *un nivel de enseñanza*: los primeros años de la escuela secundaria (alumnos con edades entre 12 y 14). La decisión de centrar el estudio en este nivel de escolaridad se debe a que el enfoque sintético de la geometría es requerido desde las disposiciones curriculares con mayor especificidad en los primeros años del secundario que en los últimos. Además, en esta etapa de la escolaridad, los alumnos transitan entre el nivel primario de educación (con tratamiento predominantemente intuitivo) y el secundario superior (con mayor formalización y abstracción). A nivel universitario, el tratamiento de la geometría es, en general, axiomático.

Se considera que esta investigación puede contribuir al desarrollo del área *formación de profesores de matemáticas* complementando, en geometría 3d y en la escuela secundaria, los estudios realizados por Ball[3] y su equipo, que giran mayoritariamente sobre el campo numérico en el nivel primario de educación. El estudio que aquí se expone busca ampliar la comprensión acerca del conocimiento especializado que los profesores de matemáticas poseen sobre *cuerpos geométricos*.

ENFOQUE TEÓRICO

Según Ball *et al.* (2008), la mayoría de la gente estaría de acuerdo en que conocer matemáticas es importante para su enseñanza. Sin embargo, lo que comprende tal conocimiento y su alcance aún amerita indagación desde la investigación especializada. Por y para ello estos autores proponen un conjunto de seis dominios de *conocimiento matemático para enseñar* que han de disponer los profesores:

Dominio 1. Conocimiento común del contenido: es el que poseen las personas que usan las matemáticas en cualquier ámbito científico o profesional, no solo de enseñanza.

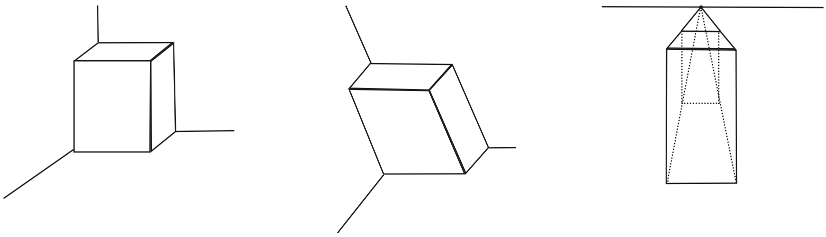
Dominio 2. Conocimiento en el horizonte matemático: permite establecer la manera en que los contenidos matemáticos se relacionan con otros en el currículum y ofrece una visión para entender las conexiones entre las diversas nociones matemáticas.

[3] Véase http://www-personal.umich.edu/~dball/

Dominio 3. Conocimiento especializado del contenido: atiende a los usos específicos que surgen en el proceso de enseñanza, a las adecuaciones, adaptaciones y secuenciaciones realizadas para transformarlo en contenido enseñable, aspectos que no se requieren en otras profesiones u oficios que recurren a las matemáticas. Comprende el conocimiento y habilidades matemáticas propias de los docentes, que generalmente no poseen otros adultos, aun cuando hubieran completado sus estudios superiores (Delaney, Ball, Hill, Schilling y Zopf, 2008). Este conocimiento involucra un trabajo de desmenuzamiento: organizar la estructura conceptual en que serán presentadas las ideas matemáticas; formular preguntas matemáticamente productivas; encontrar un ejemplo para construir un aspecto matemático específico; adaptar el contenido matemático de los libros de texto; reconocer qué está involucrado al usar una representación matemática particular; explicar y justificar por qué se efectúa cierto procedimiento o desarrollo y no otro. Estas tareas demandan un entendimiento y razonamiento exclusivo de la enseñanza, más allá del conocimiento matemático en sí que se está enseñando.

Análogamente a los ejemplos sugeridos por Ball (2010) puede señalarse que, en la enseñanza de cuerpos geométricos en la escuela secundaria, el *conocimiento especializado del contenido* se requiere cuando el profesor debe actuar ante situaciones como las siguientes:

- Para evaluar si los alumnos entienden qué es un prisma, el docente debería poder elegir, con fundamento, la representación plana que sería conveniente presentarles entre algunas como las que se muestran en la Figura 1. Para ello debe conocer que en cualquiera de ellas se distorsiona alguna de las propiedades del cuerpo y que se requiere el conocimiento de convenciones en la lectura visual (Guillén, 2010). Por ejemplo, el docente debe conocer que la proyección en perspectiva caballera se basa en el uso de un triedro trirrectángulo cuyas direcciones se toman como referencia; sobre dos de ellas se dibuja la cara frontal en su forma y dimensiones reales, y sobre la tercera dirección, que expresa la profundidad, se proyectan en forma oblicua las caras perpendiculares a la frontal aplicando un coeficiente de reducción. En la proyección isométrica, las tres aristas que convergen en un vértice se representan formando ángulos de 120° entre sí y conservando, en la representación plana, la relación con las medidas y el paralelismo entre las aristas paralelas del cuerpo. En la proyección en perspectiva frontal, el prisma se sitúa con sus caras paralelas al plano de dibujo y las aristas perpendiculares se proyectan sobre direcciones que convergen sobre un punto (denominado punto principal) en la línea del horizonte, en este caso solo la cara frontal no se distorsiona.

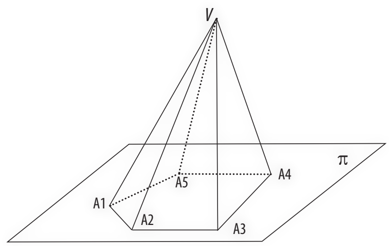


Proyección en perspectiva caballera — Proyección isométrica — Proyección en perspectiva frontal

Figura 1 Posibles representaciones planas de prismas

- El profesor de matemáticas debería poder transformar una definición de pirámide aprendida en su formación disciplinar universitaria, que constituye el *conocimiento común del contenido:*

Sean $A_1A_2\dots A_n$ un polígono contenido en un plano π y un punto $V \notin \pi$. El conjunto de los puntos que pertenecen a todos los segmentos $\overline{PV}$ donde $P \in A_1A_2\dots A_n$ se llama pirámide de vértice V y base $A_1A_2\dots A_n$ (Garguichevich, 2007: 279).



en una definición adaptada al nivel educativo en cuestión –omitiendo parcialmente notación simbólica e información matemática precisa– como las presentadas en libros de texto:
La pirámide es el poliedro que tiene una base poligonal y sus caras laterales triangulares. Todas las caras laterales concurren en un vértice llamado cúspide (Andrés, Latorre y Machiunas, 2000: 194).

> A los cuerpos que tienen todas las caras planas los llamamos poliedros. En las pirámides todas las caras, menos una, tienen un vértice en común (Barallobres, 1997: 41).

Dominio 4. Conocimiento del contenido y de los alumnos: integra conocimiento acerca de la cognición de los alumnos y los procesos matemáticos que devienen en ellos. Permite al docente prever respuestas, actitudes, dificultades y aciertos de sus alumnos en relación con el conocimiento matemático.

Dominio 5. Conocimiento del contenido y de la enseñanza: requiere una interacción entre el entendimiento matemático específico y los aspectos pedagógicos y didácticos que inciden en el aprendizaje del alumno. Comprende, entre otros, las formas didácticas de abordar el desarrollo de las matemáticas para hacer accesible su contenido a otros, los criterios para distinguir entre contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales que han de ser objeto de enseñanza, las orientaciones para gestionar la clase, la selección de los recursos didácticos, la organización de instrumentos adecuados para evaluar contenidos específicos.

Dominio 6. Conocimiento del contenido y del currículum: comprende los fundamentos, enfoques y organización vinculados con los programas y los materiales didácticos diseñados para la enseñanza de asignaturas y contenidos particulares en un nivel educativo determinado. Es un conocimiento vinculado con lo normado jurisdiccional e institucionalmente y que posibilita las decisiones y acciones como docente.

Ball *et al.* (2008) describen situaciones en las que se utilizan conocimientos de diferentes dominios. Así, por ejemplo, ante la resolución de un problema matemático realizada por un alumno, reconocer si la misma es correcta o incorrecta demanda *conocimiento común del contenido*; dilucidar qué anduvo mal mediante el análisis matemático del error, considerar los pasos seguidos y las suposiciones hechas implica un *conocimiento especializado del contenido*; reconocer que ha visto ese tipo de error antes en otros alumnos frente a situaciones de la misma naturaleza expresa un *conocimiento del contenido y de los alumnos*.

En el caso específico del *conocimiento matemático para enseñar* el Teorema de Euler para poliedros en la escuela secundaria, el *conocimiento común del contenido* se pone en juego al establecer las condiciones bajo las que se parte en cuanto a los entes matemáticos involucrados como hipótesis (poliedro convexo simple) y la propiedad matemática que se ha de satisfacer como tesis (la cantidad de vértices más la de aristas menos la de caras es dos). El *conocimiento* *en el horizonte matemático* involucra conocer que los poliedros convexos simples son un caso particular de la n-esfera, cuando n es nulo (o de un cuerpo sin agujeros, topológicamente equivalente a una esfera). En forma complementaria, este conocimiento implica saber justificar por qué Leonhard Euler (1707-1783) es considerado el principal matemático del siglo XVIII. El *conocimiento especializado del contenido* se activa para tomar decisiones en relación con la elección de ciertos poliedros entre un conjunto posible, para explorar empíricamente entre los que satisfacen o no la propiedad, y observar regularidades, para reconocer el tributo geométrico que connota la diferencia. *El conocimiento del contenido y de los alumnos* da indicios de posibles límites en el razonamiento geométrico de los alumnos (qué y hasta dónde podrán demostrar solos) y en qué parte quizás requieran un apoyo-guía del docente; saber en qué parte de la propiedad hay que tener especial cuidado debido a que suele acarrear dificultades cognitivas; considerar cuáles ejemplos posiblemente los alumnos perciben como más familiares, favoreciendo sus aprendizajes. *El conocimiento del contenido y de la enseñanza* se utiliza cuando se decide, por ejemplo, si la clase donde se explorará la relación de Euler en los poliedros convexos y se reconocerán los sólidos platónicos se desarrollará con la modalidad de taller –trabajando los alumnos en pequeños grupos, en la construcción de poliedros regulares con piezas plásticas con forma de polígonos regulares (triángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos y heptágonos) y bisagras para encastrarlas (Sgreccia y Massa, 2011)– o mediante acciones individuales de exploración utilizando recursos informáticos; para idear una secuencia de actividades de manera que los alumnos den evidencias de aprendizajes adecuados o erróneos. Finalmente, el *conocimiento del contenido y del currículum* es utilizado para comprender el entramado de la red de conocimientos previos y posteriores del eje Geometría en la articulación prevista en el Diseño Curricular Jurisdiccional (Ministerio de Educación de Santa Fe, 1999) que contextualiza la planificación de la unidad correspondiente.

METODOLOGÍA

Basados en un enfoque cualitativo-descriptivo (Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio, 2006), se recurrió a la entrevista escrita como técnica para recoger información. Esta forma de entrevista está indicada cuando se pretende recoger información preguntando a un grupo relevante de sujetos, a un costo viable, con un formato común en las preguntas (Gonzato *et al.*, 2011; Rodríguez Gómez, Gil Flores y García Jiménez, 1999). En una investigación más amplia se implementó la entrevista, mediante cinco cuestionarios para abordar aspectos relacionados con los seis dominios del *conocimiento matemático para enseñar* el contenido cuerpos geométricos.

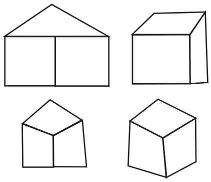
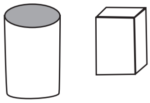
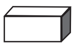
Los cuestionarios se estructuraron con un total de 29 preguntas abiertas, con la intención de que el interrogado respondiera en forma amplia con su propio vocabulario (Ander-Egg, 2003). Tales preguntas estuvieron orientadas a recoger hechos, acciones docentes, intenciones y opiniones relacionadas con el *conocimiento matemático para enseñar* cuerpos geométricos.

Fueron aplicados a 19 estudiantes avanzadas[4] y 13 egresadas recientes[5] del PM de la UNR. Se emplea el femenino, pues todas las participantes eran mujeres. Constituyen el 75% de las cohortes 2002-2007 (intervalo que comprende el año de inicio del Plan de Estudios y el año máximo de ingreso de los estudiantes de cuarto año al momento de realizar el trabajo de campo). Se administraron fuera del horario de clase, en forma individual y se respondieron secuencialmente durante un mes, de acuerdo con un cronograma pre-establecido y acordado con las participantes, quienes intervinieron voluntariamente en el estudio. El 25% restante, si bien manifestó interés en participar, no pudo ajustarse al cronograma por motivos de estudio o laborales.

En este artículo se analizan las seis cuestiones que se detallan en el Cuadro 1 y que involucran situaciones de aplicación, es decir, de conocimientos en acción (Perkins, 1992). Si bien las preguntas requirieron a las participantes elaborar aspectos relacionados con el *conocimiento del contenido y de la enseñanza* (dominio 5), las cuestiones se utilizaron también para identificar el contenido geométrico que se estaba adaptando para producir explicaciones, interpelaciones u orientaciones a fin de ponerlo en situación de enseñanza. Con esta última perspectiva, las cuestiones ofrecieron información relacionada con el *conocimiento especializado del contenido* cuerpos geométricos, dominio sobre el que se centra este artículo. En el Cuadro 1 se presentan, además, las categorías de análisis respectivas.

[4] Identificadas en lo sucesivo como A1… A19.
[5] Identificadas como B1… B13.

Cuadro 1 Cuestiones formuladas y categorías de análisis

Cuestiones	*Categorías de análisis*
 Suponga que sus alumnos dibujaron representaciones planas de cubos. ¿Cómo les explicaría que no son apropiadas?	**Representación plana de objetos 3d**, en ejemplos relativos a cubos. Interesa conocer el foco matemático que se tendría en cuenta para abordar la corrección del error manifiesto cuando los alumnos representan inadecuadamente en 2d un objeto básico 3d. Esto permite detectar en las participantes la identificación del contenido usado inapropiadamente y su forma de adecuarlo en la explicación.
 Quizás los alumnos tengan dificultades para entender que para cubrir la superficie lateral de estos cuerpos se usan trozos de papel de la misma forma. ¿Cómo actuaría para superarlas?	**Identificación de formas de partes de los cuerpos**, en particular de la superficie lateral de cilindros y prismas. Interesa conocer la manera en que las participantes adaptarían el contenido para guiar su tratamiento.
Si un alumno piensa que  y  son cuerpos diferentes, ¿cómo intervendría para superar esta dificultad?	**Exploración de invariantes geométricos**, teniendo en cuenta la posible identificación de cuerpos geométricos según su posición. Interesa indagar la adecuación que se prevé para construir la noción de invariante geométrico ante una concepción erróneamente configurada por el alumno: "los cuerpos difieren por su posición".
¿Cuáles son las dificultades de los alumnos con las que suele encontrarse, o supone que podría encontrarse, al enseñar cuerpos poliedros y redondos en los dos primeros años de la escuela secundaria?* ¿Cómo contribuye, o contribuiría, a superarlas?	**Contenido cuerpos poliedros y redondos en general**, pensando en un alumno de los primeros años de la escuela secundaria. El sentido es similar al anterior, pero indagándose ahora en todo el contenido cuerpos poliedros y redondos, en los dos primeros años del secundario.
Si un estudiante piensa que una pirámide de base cuadrada es un poliedro regular, ¿qué preguntas le haría para que modifique esta noción?	**Clasificación de poliedros**, contemplando el caso de una pirámide de base cuadrada. Interesa identificar el foco matemático sobre el que se centra la interpelación a los alumnos que están concibiendo erróneamente a cierto poliedro, y la secuenciación con la que se busca la reconstrucción conceptual.

* Esta pregunta es pertinente al dominio 4: *Conocimiento del contenido y los alumnos*. Por tal motivo no se analiza en este artículo.

Cuestiones	*Categorías de análisis*
Si un estudiante no reconoce al tetraedro como una pirámide, porque dice: "no encuentro su base", ¿cómo lo orientaría?	**Reconocimiento de elementos de los cuerpos**, en particular para encontrar la base de un tetraedro regular. Interesa reconocer los aspectos matemáticos que sustentan la adecuación del contenido para la identificación de la base de un tetraedro regular.

Para el procesamiento de la información se utilizó el análisis de contenido (Cabrera Ruiz, 2009; Mundina, 2005), reconociendo las ideas, significados y temas. Se trabajó en forma integrada tanto desde un plano teórico/prescriptivo –definiendo *a priori* un sistema de categorías asociadas con el dominio *conocimiento especializado del contenido*– como desde un plano empírico/inductivo –a partir de la detección de indicadores de cada categoría en las respuestas de las participantes, elaboración de modalidades y subcategorías.

RESULTADOS

Para cada categoría de análisis se presentan las subcategorías y modalidades emergentes del estudio. A cada modalidad antecede un par ordenado (a, b) donde "a" (entre 0 y 19) representa la cantidad de estudiantes y "b" (entre 0 y 13) la de egresadas que hicieron referencia a esa idea. Se transcriben algunas respuestas como ejemplo, indicándose entre paréntesis el código de la participante correspondiente. Cabe destacar que las modalidades no resultan mutuamente excluyentes.

REPRESENTACIÓN PLANA DE OBJETOS 3D

El foco matemático sobre el cual las participantes centraron sus explicaciones da cuenta de dos tipos de referentes, asumidos como subcategorías, con diferentes modalidades para una adecuación al nivel de escolaridad, según se muestra en el Cuadro 2.

Cuadro 2 Referente a la adecuación del foco matemático para la enseñanza

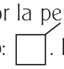
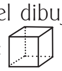
Subcategorías	*Modalidades*	*Ejemplos*
Características propias del cuerpo	(12, 7) Análisis de la forma de las caras.	El cubo tiene todas sus caras iguales, pues son cuadrados (A13).
	(6,1) Empleo de la definición de cubo y la clasificación general de poliedros.	Por definición un cubo o hexaedro regular es un poliedro de seis caras cuadradas congruentes. Un cubo, además de ser un hexaedro, puede ser clasificado también como paralelepípedo, recto y rectángulo, pues todas sus caras son de cuatro lados y paralelas dos a dos, e incluso como un prisma de base cuadrangular y altura equivalente al lado de la base (A16).
	(5,0) Observación de los ángulos diedros y triedros para reconocer la perpendicularidad de planos.	Sus ángulos son rectos (. . .) les haría observar las características de los triedros del cubo. Que observen los diedros que forman las caras del cubo, y que se convenzan de la perpendicularidad de las mismas (A8).
	(2,3) Comparación de la cantidad de elementos (vértices, caras, aristas) del objeto real y del representado.	Cuántas caras tiene un cubo y (. . .) que compare con cuántas se ven en el dibujo. Cuántas aristas y que compare, cuántos vértices y que compare (B5).
Asociaciones a la perspectiva	(14, 7) Visualización del paralelismo, como elemento clave de la perspectiva.	(Referidas a aristas) Las aristas visibles de la base (cuadrado) inferior tienen que verse paralelas a la base superior y (. . .) eso está fallando en estos dibujos (B7). (Referidas a caras) Les preguntaría si todos los pares de caras opuestas están en planos paralelos (A2).
	(3, 2) Consideración de las posiciones relativas entre el observador y el objeto 3d.	Suponiendo que el cubo en el que estás pensado tiene una de sus caras apoyada en una mesa, ¿cuál sería esa cara?; si el cubo está apoyado frente a nosotros, ¿cuál es la cara que veríamos de frente?, ¿veríamos alguna de las caras laterales?, ¿cuáles? (B4).
	(2, 2) Reconocimiento de los invariantes geométricos mediante perspectiva.	Sus caras no son cuadrados, son polígonos irregulares, ya que si observamos cada uno de los lados no son líneas rectas **de igual longitud**[*] (A17).

Prácticamente la mitad de las participantes (11, 4) organizó explicaciones en las cuales integra el criterio centrado en la perspectiva con la primera o cuarta modalidad del basado en la característica del objeto matemático *cubo*. De acuerdo con lo señalado por Gutiérrez (1998), tales explicaciones contemplan las propiedades matemáticas prioritarias en este tipo de representación. Así, se podría hablar de un criterio "semi-consolidado" en este conjunto de participantes.

[*]Se destaca en negrita la parte referida a la modalidad asociada. Puede observarse, como sucede en otros casos, que también hay elementos ("Sus caras no son cuadrados, son polígonos irregulares...") individualizados en otra modalidad ("Formas de las caras"). Para evitar la pérdida de sentido de su contenido, se transcribió la oración en forma completa.

Casi esa misma cantidad de participantes (6, 8) produjo explicaciones sustentadas en un único *foco matemático*: solo atendiendo a la *forma* (3, 5) o solo a la *perspectiva* basada en las posiciones relativas observador-objeto (3, 3). Una egresada (B3) no se basó en un referente *matemático* en su respuesta.

Las explicaciones de las participantes involucran tratamientos que aluden a tres tipos de adecuaciones del contenido matemático a fin de trabajar sobre el error: la relación representación plana-objeto imaginario; la relación representación plana-objeto concreto; habilidades específicas para una representación plana formalizada de objetos 3d, con códigos característicos, como es la perspectiva caballera. En relación con este último tratamiento, la egresada B11 señaló particularidades del contenido en cuestión, así como un orden explícito en el que se procedería en la explicación:

> (...) para dibujar un cubo, que es una figura tridimensional, en una hoja, es decir en dos dimensiones, hay que respetar el paralelismo entre las aristas. Para dibujar un cubo procedemos de la siguiente manera: Paso 1: dibujamos una de sus caras como un paralelogramo cuyos lados sean iguales (un rombo), en particular podemos dibujar un cuadrado. Ejemplo: . Paso 2: trazamos una arista que tenga como extremo uno de los vértices dibujados. Por la perspectiva, su longitud debe ser algo menor a las demás aristas ya dibujadas. Ejemplo: . Paso 3: trazamos ahora todas las aristas que son paralelas a la dibujada en el paso 2. Las longitudes de estas aristas deben ser iguales a la longitud de la arista dibujada en el paso 2. La arista que queda "dentro" de la cara dibujada en el paso 1 debe hacerse con trazo punteado para dejar en claro que no pertenece al mismo plano que la cara dibujada en el paso 1. Ejemplo:  Paso 4: completamos la cara paralela a la dibujada en el paso 1 uniendo los vértices a los que hasta ahora concurría una única arista teniendo en cuenta las aristas que deben ser paralelas. Las aristas que en el dibujo quedan "dentro" de la figura dibujada deben hacerse con trazo punteado. Ejemplo: 

El análisis de aquellas respuestas en las que se refirieron en simultáneo al *foco matemático* de la cuestión con las *habilidades matemáticas* cuyo desarrollo promoverían en los alumnos, desde el tratamiento del contenido en el nivel de escolaridad contemplado, permitieron reconocer una gradación de criterios (A, B y C) según se muestra en la Figura 2.

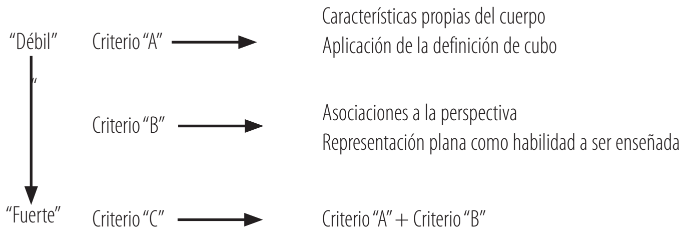


Figura 2 Gradación de los criterios identificados

El criterio más débil es el "A" que hace foco matemático solo en las *características propias del cuerpo*, sin asociar la *perspectiva* en su explicación, y en cuanto a la adecuación del contenido para ser enseñado, solo considera la *aplicación de la definición de cubo*. Un criterio más fortalecido es el "B", que integra un foco matemático con *asociaciones a la perspectiva* mediante adaptaciones del contenido que conciben a la *representación plana como habilidad a ser enseñada*. Finalmente, un criterio que contemple los dos anteriores se entiende como el más fuerte, por cuanto tiene en cuenta en forma más completa el aspecto geométrico en tratamiento.

Identificación de formas de partes de los cuerpos

Las explicaciones matemáticas de las participantes para superar la dificultad de reconocer al rectángulo como figura común en el desarrollo de la superficie lateral del cilindro y del prisma, pudieron ser agrupadas según las dos subcategorías que se presentan en el Cuadro 3. Tales subcategorías corresponden a actividades que las participantes sugieren para adaptar el contenido geométrico en cuestión para construir la relación entre figuras en el plano y en el espacio tridimensional.

Para superar la dificultad, las participantes señalaron en forma directa, con cuatro variantes o modalidades, a la *construcción de la relación 2d-3d*, donde predominó la propuesta de *forrado* y *(des)armado* de cuerpos, lo cual resulta atinado, pues apunta al objeto en estudio. También, con mayor tendencia en el grupo de estudiantes, se avanzó hacia la noción matemática de *desarrollo plano* de los cuerpos geométricos involucrados.

Cuadro 3 Identificación de formas de partes de los cuerpos

Subcategorías	*Modalidades*	*Ejemplos*
Construcción de la relación 2d-3d	(10,7) Forrado de cuerpos, mediante la envoltura con papel.	Haría que los alumnos tomen un trozo de papel con forma rectangular con las medidas adecuadas y que cubran ellos mismos la superficie lateral de un cilindro y luego que cubran la superficie lateral de un prisma (B11).
Construcción de la relación 2d-3d	(8, 4) Armado de cuerpos.	Les pediría que tomen una hoja y que con sus manos unan un par de sus lados opuestos (A8). Les haría recortar dos rectángulos iguales y luego los dos círculos y las dos bases del prisma y se los haría notar mediante la construcción de ambos cuerpos (A13).
	(6, 5) Desarmado de cuerpos.	Que los alumnos desarmen cilindros y prismas hechos en cartulina para visualizar el desarrollo de su superficie lateral y comprobar que ambas resultan rectangulares (B9).
	(5, 1) Desarrollo plano (o plantilla, reticulado) de cuerpos.	Trabajar con cartulinas, armando ambos cuerpos, para que observen que el desarrollo del cilindro es un rectángulo y dos círculos, y el desarrollo del prisma es un rectángulo y dos cuadrados, con lo cual efectivamente podrán concluir que ambas superficies laterales tendrán la misma forma, es decir, forma rectangular (A6).
Contextualización del contenido	(7, 5) Vinculación con medidas, al restringir el análisis a superficies laterales congruentes.	Les pediría que corten dos rectángulos de cartulina, papel de regalo o cualquier material (del área lateral considerada) y forren el prisma y luego el cilindro, de esta manera **pueden ver que usan la misma cantidad de papel y pueden cubrir ambos cuerpos. Luego, se podría verificar esto mediante las fórmulas de área lateral de cada cuerpo** (B3).
	(1, 6) Modelización, a partir del empleo de objetos cotidianos.	La manipulación de objetos es muy importante para el estudio en geometría. La aproximación de figuras y cuerpos con objetos o cosas de la vida real es importante para que el alumno "vea" las matemáticas que lo rodean (partes o cosas de una casa como ventana, paredes, puerta, mesa, una habitación, etc.; pelotas, un barrilete, un cucurucho, un dado, una pileta, un rollo de papel y más). (A8).

Solo una egresada no logró enunciar una secuenciación conceptual para trabajar la relación 3d-2d involucrada en la cuestión, expresando simplemente: *Haría que los dibujaran en su carpeta* (B2).

En la subcategoría *contextualización del contenido* se incluyeron modalidades asociadas con respuestas que vincularon al contenido geométrico en cuestión con otros contenidos (primera modalidad) o con orientaciones para la construcción de ciertos modelos (modelización) como abstracción a partir de objetos concretos (segunda modalidad).

A pesar que la figura que acompaña la cuestión muestra claramente diferencias en las dimensiones de los dos cuerpos, llama la atención la cantidad de participantes (casi 40%) que desplazó el foco de la actividad hacia las medidas, como se aprecia en el Cuadro 3. Con el agregado de *mismo tamaño* a la condición de *misma forma* establecida en la consigna, sesgaron sus orientaciones a un caso particular sobre la base de cálculo de áreas. Esto sugiere una tendencia hacia lo numérico/algebraico como criterio para propiciar la superación de una dificultad de naturaleza geométrica.

La modelización, a partir del empleo de objetos cotidianos para superar eventuales dificultades asociadas a la identificación de formas, fue notoriamente más considerada por parte de las egresadas. Se aprovecharon en algunos casos las particularidades propias del objeto para relacionarlo con el tópico relativo a la superficie lateral que aquí se está tratando.

Exploración de invariantes geométricos

Fue posible identificar que las respuestas acerca de la exploración de invariantes en la situación planteada podían ser agrupadas, por su contenido, en dos subcategorías según se muestra en el Cuadro 4.

Las participantes otorgaron prioritariamente una importancia relevante a los movimientos de los cuerpos en el espacio, destacando la *manipulación de objetos*. La cuarta parte de estudiantes y una egresada formularon un criterio semejante, pero se diferenciaron del primer grupo en que organizarían tal manipulación trabajando con *diferentes objetos congruentes entre sí*, a fin de orientar comparativamente la observación sobre material concreto y no dejarlo limitado al recuerdo de las posiciones ocupadas temporalmente por un mismo cuerpo al ser movido. Cuatro estudiantes y una egresada se refirieron a las distintas *posiciones relativas del observador con respecto al cuerpo*, poniendo de manifiesto una noción más amplia del concepto de movimiento en sus mentes, en el sentido de imagen dinámica de acuerdo con Gutiérrez (1996).

Cuadro 4 Exploración de invariantes geométricos

Subcategorías	*Modalidades*	*Ejemplos*
Movimientos en el espacio	(11, 9) Manipulación de un mismo cuerpo para conocer invariancia de forma y tamaño.	Si a un cuerpo lo movemos en el espacio, sigue siendo el mismo cuerpo, no cambia. No importa la posición en la que esté (si lo giro, lo tumbo, lo doy vuelta. . .), el cuerpo seguirá siendo el mismo. ("Si él está acostado o parado, ¿cambia?... ¡No!, ¡sigue siendo él!") (B1).
	(5, 1) Manipulación de cuerpos congruentes para estudiar la invariancia mediante la reproducción de la situación dada.	Llevar los dos cuerpos iguales y colocarlos en las posiciones del dibujo para luego mover solo uno, y así llevarlo a la misma posición del otro (A14).
	(4, 1) Posiciones relativas entre el observador y el cuerpo geométrico.	Uno es el otro en una posición diferente o visto desde otro sitio, pero que en realidad sí es el mismo. Para complementar esto, tomaría algún objeto y le pediría que lo mirara desde lugares diferentes, por ejemplo: de costado, de arriba y de frente (A11).
Otros procedimientos matemáticos para la exploración de invariantes	(5, 5) Descripción de características y definición.	Dos cuerpos son distintos si algunas de las caras son distintas, por ejemplo si un cuerpo tiene una cara rectangular y el otro tiene una cara triangular, o si difieren en la cantidad de caras, de aristas o de vértices (A18).
	(2, 1) (Des)armado de ambos cuerpos.	Armar los dos cuerpos al mismo tiempo y ponerlos en la situación planteada; luego "acostar" el que está parado, luego desarmar los cuerpos y ver que tienen el mismo patrón (A3).
	(0, 3) Vinculación con medidas (área total, volumen).	Charlar con los alumnos y concluir que, si fueran diferentes cuerpos, tendrían distintas capacidades, entonces realizar los cuerpos y comprobar que ellos tienen la misma capacidad, por ejemplo, llenando ambos cuerpos con la misma cantidad de arena, arroz, polenta o algún material del estilo (B3). Podemos calcular su volumen, la superficie total de sus caras, etc., y mostrarle que, a pesar de que consideremos la longitud de otra arista como la altura del prisma y otro paralelogramo como base, hay propiedades del cuerpo que no se modifican (B11).
	(2, 0) Aplicación de propiedades invariantes del prisma frente a movimientos rígidos.	Utilizaría las propiedades del prisma y de ese prisma en particular para probar que es el mismo cuerpo, pero posicionado distinto (A4).
	(2, 0) Comparación de elementos a partir de su identificación.	Podrían marcar con colores los elementos que tienen en común y, al finalizar, observarán que son iguales (A13).

En cuanto a otros procedimientos matemáticos –distintos a los movimientos en el espacio– para realizar la exploración solicitada, predominó la *descripción de las características y definición*. Aquí cabe mencionar que una egresada atendió a una condición necesaria, pero no suficiente, al expresar: *Les haría un cuadrito para completar con el número de vértices, caras y aristas de cada uno de los cuerpos* (B8). Es decir, no tiene en cuenta que esos datos no son excluyentes, ya que existen cuerpos con igual cantidad de vértices, caras y aristas pero que son distintos (por ejemplo, un cubo y un prisma de base cuadrangular no regular).

También hubo alusiones al (des)armado de ambos cuerpos para compenetrarse más en el patrón que los sostiene (como es posible apreciar en la respuesta de la estudiante A3), uso de propiedades invariantes del cuerpo en cuestión ante movimientos que no alteran su forma ni tamaño (A4) y la identificación de elementos congruentes entre los cuerpos (A13).

Algunas participantes recurrieron a las nociones de capacidad y volumen como criterio de comparación, trasladando y restringiendo la cuestión geométrica a una de medida (según expresaron B3 y B11). Estas participantes no percibieron que se puede dar el caso de tener cuerpos con igual medida de volumen y, asimismo, ser distintos (por ejemplo un cono y un cilindro, donde las bases sean las mismas y la altura del primero sea tres veces la altura del segundo). Así, se aprecia que, intentar superar esta dificultad puede, a su vez, constituirse en un obstáculo didáctico, por cuanto el docente elige orientar a sus alumnos de una manera que resulta inapropiada y, por lo tanto, no solo no soluciona la dificultad de origen, sino que introduce un sesgo matemático.

Contenido cuerpos poliedros y redondos en general

A partir del análisis de las respuestas de las participantes, emergieron las tres modalidades que se muestran en el Cuadro 5.

Primeramente, cabe observar la notoria diferencia en cantidad de respuestas que concentró la primera modalidad (casi 80% de las participantes) en comparación con las restantes.

En cuanto a la *construcción del contenido cuerpos poliedros y redondos* en la escuela secundaria *con soporte de algún recurso*, en todos los casos se asoció alguna habilidad matemática con el uso que tal soporte estaría favoreciendo desarrollar: manipulación, visualización, (des)armado, clasificación, representación, aplicación. Las participantes atendieron a los procesos graduales de adecuación del contenido para identificar semejanzas y diferencias, reconocer características y elaborar criterios de clasificación. Estos aspectos se trabajarían sobre objetos concretos o bien recurriendo a lo digital y virtual.

Cuadro 5 Contenido cuerpos poliedros y redondos en general

Modalidades	*Ejemplos*
(15,10) Construcción del contenido con soporte de algún recurso.	(Reconocimiento de diferencias y semejanzas en sus características) Hay que hacerles ver que están por todas partes (. . .) Yo trataría de buscar en la vida real ejemplos de poliedros y cuerpos redondos (. . .) para que ellos mismos clasifiquen (B13). (Armado y desarmado) Llevar a la escuela los cuerpos construidos en distintos materiales y poder desplegarlos para trabajar con la superficie lateral y total (B7). (Visualización de representaciones virtuales) Usar programas matemáticos que permitan hacer dichas representaciones para una mejor visualización (A3).
(3, 3) Representación 2d de objetos 3d.	Aclarar a los alumnos que los objetos geométricos son ideas que viven en nuestra mente pero que en la realidad podemos ver representaciones de estas ideas y que podemos dibujar estos objetos en 2 dimensiones usando ciertas convenciones (B11).
(2 ,0) Fijación de conceptos y notación.	Hacer un repaso de las figuras geométricas elementales. Para poder consolidar los conceptos básicos y así poder pasar a las dificultades de los cuerpos poliedros y redondos (. . .) Utilizando un vocabulario correspondiente, por ejemplo, para indicar los elementos de los prismas y de las pirámides, desarrollo plano; ortoedro y cubo (A5).

En menor medida se particularizó la *representación plana* de objetos tridimensionales basada en reglas propias del dibujo técnico o sistema de representación (como dijo la egresada B11). Muy pocas participantes mencionaron acciones centradas en profundizar sobre aspectos conceptuales o ligados a la notación matemática. Cabe observar que resulta llamativo que, al ubicarse en el contenido *cuerpos poliedros y redondos*, las participantes hayan hecho más referencias a los *poliedros* que a los *redondos*.

Clasificación de poliedros

El análisis del *contenido* y el *tipo* de las preguntas formuladas por las participantes permitió identificar los conocimientos y habilidades que ponen en juego al momento de interpelar a alumnos para que revisen sus ideas. En el Cuadro 6 se detallan las modalidades asociadas con dos enfoques (global y analítico) en relación con el *contenido* de las preguntas.

Puede observarse que la mayoría de las participantes orientó su pregunta al foco del problema: las *caras* de la pirámide, para desarrollar un proceso *analítico*. Lo encuadraron tanto en un análisis *estático* –estudio del cuerpo en reposo–, como *dinámico* –al recurrir a la producción de movimientos con cuerpos piramidales reales para visualizar la cara desigual–, con predominio del primero sobre el segundo. En todos los casos se procuró distinguir la forma de la base (cuadrado) de la de las caras laterales (triángulos).

Cuadro 6 Contenido de las preguntas

Subcategorías	*Modalidades*	*Ejemplos*
Enfoque global (centrado en el objeto pirámide)	(10,7) Reflexión acerca de la definición del objeto en estudio.	¿Cómo sabemos si un cuerpo es un poliedro? Este cuerpo (. . .) ¿Cómo sabemos ahora que un poliedro es regular? (B11).
	(4,2) Reflexión centrada en las condiciones necesarias y suficientes para que un poliedro sea regular.	¿Cumple entonces esta pirámide con todas y cada una de las condiciones pedidas para ser un poliedro regular? (B9).
Enfoque analítico (centrado en los elementos constitutivos del poliedro dado)	(14, 13) Caras.	(Análisis estático) Le preguntaría si ese cuerpo posee todas sus caras iguales. Si me contesta que sí, considerando que la base no forma parte de las caras, le preguntaría cuáles son "todas" las caras de un cuerpo poliedro (A2). (Análisis dinámico) Apoya la pirámide en el banco, ¿qué figuras son sus caras laterales, es decir, las caras que puedes ver sin levantarla? Ahora levántala y mira su base, ¿qué figura es?, ¿es la misma que las laterales? (B10).
	(2,0) Ángulos.	¿La suma de los ángulos interiores de cada cara es igual a la suma de los ángulos interiores de la base? (A3).
	(2,0) Cantidad de aristas concurrentes en cada vértice.	Les mostraría que en uno de los vértices (el que está "arriba") convergen más aristas que en los otros (A13).

Solo una estudiante y una egresada se focalizaron en la comparación con un poliedro regular más familiar, para enfatizar los roles de las caras como frontera y de la base como apoyo: *Según ese razonamiento, ¿un cubo tendría 5 caras? (porque no cuenta aquella sobre la cual se apoya)* (B12).

Pocas se detuvieron a analizar los ángulos de la pirámide, ya sea en la cantidad que concurre en un vértice (según expresó la estudiante A1: *¿Cuántos ángulos se unen en cada vértice del poliedro?*) como en la comparación de la suma de los ángulos interiores de las caras laterales con la base (A3). La estudiante A13 expresó una idea similar a la de A1, pero aludiendo a aristas en lugar de vértices.

Muchas participantes acudieron también a un enfoque *global* apelando a la *definición* de poliedro regular para detectar qué propiedad no se estaba cumpliendo. Por ejemplo B11 secuenció el interrogatorio de acuerdo con las características de: *cuerpo poliedro* (definición general) – *este cuerpo* (ejemplificación concreta) – *poliedro regular* (definición general específica). En particular, algunas participantes avanzaron hacia un mayor detenimiento en torno a las condiciones necesarias y suficientes para que un poliedro sea regular (como el registro de la egresada B9 en el Cuadro 6).

Un detalle del *tipo de las preguntas* propuestas se muestra en el Cuadro 7. En cada modalidad se detalla, además, en qué contribuye para la formación matemática cada tipo de pregunta en cuestión. Lo deseable sería encontrar un espectro nutrido de distintos tipos de preguntas en las orientaciones de las participantes, en consonancia con lo sugerido por Morata Sebastián y Rodríguez Sánchez (1997). Ante la situación planteada, que da cuenta de un pensamiento clasificatorio parcialmente desacertado por parte de un alumno con respecto a un cuerpo geométrico, las alusiones hacia las preguntas del tipo *por qué* y *cómo* favorecerían la *justificación o explicación con base conceptual* así como la *explicitación de procedimientos por parte de los alumnos*.

Cuadro 7 Tipo de preguntas formuladas

Modalidades	***Ejemplos***
(12, 9) Preguntas cerradas, para expresar acuerdo/desacuerdo con respecto a algún concepto o propiedad geométrica.	¿Las caras son todas iguales? (A4). ¿Cada una de sus caras indistintamente puede servir de base? (A12). ¿Sobre cada vértice converge siempre el mismo número de caras? (A16). ¿Verifica las condiciones que definen a un poliedro regular? (B11).
(9, 8) Preguntas del tipo "qué", para promover inferencias o descripciones relativas al cuerpo.	¿Qué sucede si roto el cuerpo y dejo como base uno de los triángulos equiláteros? (A5). ¿Qué características tiene un poliedro regular? (A11).
(5, 4) Preguntas del tipo "cuáles/quiénes", hacia la búsqueda de identificaciones de contenidos.	¿Cuál es la definición de polígono regular? (A18). ¿Quiénes son sus caras? (B13).
(4,3) Preguntas del tipo "cómo", que contemplan la explicitación de procedimientos matemáticos.	¿Cómo la llevarías a poliedro regular? (A18).
(1,2) Preguntas del tipo "cuántos/as", dirigidas a la realización de descripciones cuantificadas.	¿Cuántos ángulos se unen en cada vértice del poliedro? (A1). ¿Cuántas caras tiene tu cuerpo? (B13).
(1, 2) Preguntas del tipo "por qué", que promueven la justificación o explicación con base conceptual.	¿Por qué la pirámide de base cuadrada no es un poliedro regular? (A19). ¿Por qué no consideras que la base es una cara? (B12).
(2, 0) Preguntas del tipo "cuándo", que buscan las condiciones de regularidad.	¿Cuándo un polígono es regular? (A7).

En relación con el tipo de las preguntas, hubo un importante predominio de aquellas *cerradas*, orientadas a señalar acuerdo/desacuerdo con una premisa formulada por el docente, sobre las más abiertas del tipo *por qué*, que promueven la justificación por parte del alumno (66% *vs*. 9%). También fueron frecuentes las preguntas del tipo *qué*, orientadas a la identificación y reconocimiento de características y, en algunos casos, a la producción de inferencias (como por ejemplo la pregunta que formulara A5).

La formulación de preguntas matemáticamente productivas en la clase concierne al *conocimiento especializado del contenido*. Una posible forma de ordenar los tipos de preguntas emergentes en este estudio, de acuerdo con la demanda de elaboración conceptual que requieren para ser respondidas, es la que se muestra en la Figura 3.

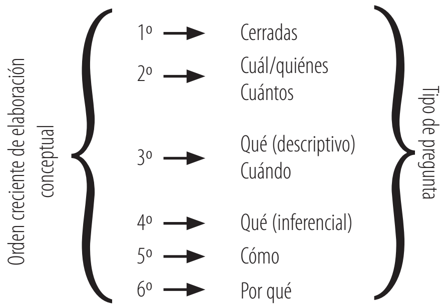


Figura 3 Posible orden en la formulación de preguntas matemáticamente productivas

Como se puede apreciar en el Cuadro 7, la manera de interpelar por parte de las participantes de la investigación se ubicó predominantemente en los primeros niveles del ordenamiento presentado en la Figura 3. La forma en que el docente realiza sus preguntas también se constituye en indicador del alcance que pretende otorgar al tratamiento del contenido matemático. Por otro lado, cabe destacar que dos participantes (1,1) no formularon preguntas explícitamente.

Reconocimiento de elementos de los cuerpos

Las respuestas se interpretaron contemplando aquellas habilidades que las participantes consideraron que se requieren para avanzar en la organización de la estructura conceptual del conocimiento geométrico 3d en cuestión (Cuadro 8).

Cuadro 8 Reconocimiento de elementos de los cuerpos

Subcategorías	***Modalidades***	***Ejemplos***
Identificación de la forma y rol de las caras	(12, 12) Comprobación, mediante movimientos en el espacio, que cualquier cara puede ser base.	Que coloque el cuerpo en distintas posiciones (que vaya apoyando el cuerpo sobre sus distintas caras) y que observe qué sucede intentando que el alumno vea que cualquier cara puede ser su base (B7).
	(7, 9) Caracterización de la base como cara de apoyo del tetraedro que se opone a la cúspide.	Que haga una marca en una de las caras del tetraedro y lo apoye sobre esa marca en el banco, que vea que el punto que queda arriba es el vértice de dicha pirámide (B5).
	(5, 4) Distinción del rol de la base del de las caras laterales.	Es un poliedro limitado por una base, un polígono cualquiera (en este caso un triángulo equilátero), y por caras, que son triángulos y coinciden en un punto (A16).
	(4, 2) Reconocimiento que la base de la pirámide puede ser cualquier polígono, en particular un triángulo.	La base de una pirámide no necesariamente es un cuadrilátero. Luego, por ejemplo, la base de una pirámide podría ser un pentágono, un hexágono, ¡y un triángulo también! (B1).
	(4, 0) Reconocimiento de la congruencia entre las caras del poliedro.	Le haría notar que, en un tetraedro, todas sus caras pueden ser la base del mismo, pues todas sus caras son congruentes (A11).
Comparación con otras figuras geométricas	(4, 1) Establecimiento de relaciones con otro poliedro más familiar.	Que piense qué pasa en un cubo, le preguntaría cuál es la base en este cuerpo, me parece que los alumnos ven más las propiedades en él, y les sería más fácil reconocer que cualquiera de sus lados puede ser su base (A9).
	(1, 0) Establecimiento de relaciones, por analogía, con una figura bidimensional.	Lo relacionaría con un triángulo equilátero en el cual, tomando cualquiera de los tres lados como base, el triángulo sigue siendo el mismo (A13).
Aplicación de propiedades geométricas	(10, 3) Empleo de definiciones o ejemplificaciones.	Que tome cualquier triángulo como base y que pruebe que cumple con las propiedades de una pirámide (A4).
	(0, 2) Realización de construcciones geométricas.	(En 2d) Hacemos los dibujos correspondientes y observamos que la última pirámide dibujada, la cual tiene base triangular, es un tetraedro (B1). (En 3d) Podría construir un tetraedro con él para que pueda percatarse de esta posibilidad (B2).

La mayoría propuso realizar *movimientos* del cuerpo en el espacio para evidenciar que cualquier cara puede ser tomada como base, incluso *apoyando* el tetraedro sobre distintas caras. Esto denota la importancia atribuida a la manipulación de cuerpos reales para reconocer al tetraedro como poliedro regular.

Casi la tercera parte de las participantes se concentró en *distinguir el rol de las caras* del tetraedro, según sea base o cara lateral, para reconocer su doble función en el cuerpo en estudio. También, en menor proporción, se centraron en el *reconocimiento de la forma de la base*: puede ser cualquier polígono y, en particular, un triángulo, suponiendo que posiblemente los alumnos tengan más arraigado el modelo de pirámide con un cuadrilátero en la base, como se infiere a partir de lo mencionado por la egresada B1.

Cabe destacar la emergencia de algunas apreciaciones puntuales respecto de la *congruencia de las caras del cuerpo*, para comprender que cualquier cara lateral puede actuar como base en el tetraedro regular.

Parecería que todas las modalidades asociadas con la *identificación de la forma y rol de las caras* intentan que el alumno pueda desprenderse de un eventual modelo mental estático de pirámide, como el generado por la manera en que habitualmente aparece representada en los libros de texto.

También, aunque en baja frecuencia, se introdujeron *comparaciones con otras figuras geométricas* ya sea por considerarlas más familiares en 3d –por ejemplo, el cubo (A9) o la pirámide de base cuadrada– o por tratarse de contenidos previos en 2d –por ejemplo, el triángulo (A13).

La mitad de las estudiantes y la cuarta parte de las egresadas recurriría a la comparación entre las *definiciones* de poliedro regular y de pirámide en un intento clasificatorio del tetraedro. Solo dos egresadas realizarían *construcciones geométricas*, ya sea en 2d (B1) como en 3d (B2).

CONCLUSIONES

El estudio ha permitido reconocer rasgos de diferentes criterios que docentes noveles o futuros docentes adoptan al realizar adecuaciones y adaptaciones para transformar el contenido *cuerpos poliedros y redondos* en contenido enseñable.

En relación con las categorías de análisis adoptadas (Cuadro 1) y procurando una secuenciación que atienda a un progresivo nivel de abstracción, el *conocimiento especializado del contenido* cuerpos geométricos que evidencia este grupo de participantes se caracteriza por:

- El **reconocimiento de los elementos de los cuerpos** se orienta hacia la generación de un modelo mental no estático, aunque con escasa tendencia a involucrar las construcciones geométricas para ello. En esta modelización se opera reconociendo la variación de los roles de distintos elementos de acuerdo con diferentes orientaciones espaciales: las caras, en tanto fronteras, pueden actuar como base atendiendo a su ubicación como apoyo. Esta adecuación abre camino a una *mirada especializada* que avanza hacia el análisis de las partes, en particular de los ángulos diedros y triedros, al trascender una mirada global que no presta atención a los detalles.
- La **clasificación de cuerpos 3d**, en particular de los poliedros, se basa en una reflexión más bien general del objeto en estudio y avanza hacia un nivel de análisis centrado en la forma de las caras del cuerpo en cuestión. Escasamente se propicia la detención para reconocer condiciones necesarias y suficientes, y profundizar sobre las mismas para establecer los criterios de clasificación.

  La forma de pensar una interpelación para propiciar la construcción del conocimiento geométrico en cuestión está mayoritariamente centrada en el señalamiento de acuerdos/desacuerdos o en promover descripciones e inferencias. Según la secuencia de preguntas presentada en la Figura 3, no se avanza demasiado hacia niveles de profundidad y completitud del contenido involucrado; es decir, justificaciones relativas a conceptos involucrados o procedimientos matemáticos seguidos.

  La conformación de un *conocimiento especializado* requiere operar en dos niveles de trabajo con respecto a las clasificaciones geométricas: uno se corresponde con ubicar cierto cuerpo en una clasificación dada y otro está asociado con la definición de criterios para organizar una clasificación. De esta manera se focaliza la producción matemática en los componentes geométricos cruciales (por identificación de lo primordial y lo accesorio) que diferencian o asemejan ciertos cuerpos entre sí y se organizan en una estructura.
- En la **exploración de invariantes geométricos** de los cuerpos, que son sometidos a movimientos rígidos en el espacio, las orientaciones matemáticas mayoritariamente se formulan atendiendo a la manipulación de un mismo cuerpo geométrico ubicándolo en distintas posiciones espaciales, o bien, como han adoptado otras participantes, recurriendo a objetos congruentes en posiciones diferentes. En ambos casos se realiza una

comparación: en el primero, del objeto concreto con una representación mental de la ubicación inicial que el alumno debe mantener activa en su mente mientras se producen los cambios de posición; en el segundo, entre dos objetos concretos que deben reconocerse como congruentes. Si bien ha sido baja la cantidad de participantes que lo expresaron, se observan casos en los que recurren a algunas de las medidas asociadas a los objetos en cuestión para sostener matemáticamente la exploración requerida. Esto sugiere una debilidad en el *conocimiento común del contenido* en relación con la noción de invariancia.

Este rasgo da idea de cuál sería el soporte disciplinar docente al propiciar la exploración de invariantes geométricos 3d en un nivel de escolaridad específico. Esta es una actividad no menor, si se tiene en cuenta lo sugerido por Jones (2000) en cuanto a considerar a la invariancia como uno de los conceptos geométricos clave a desarrollar en la escuela secundaria.

- En la **identificación de formas comunes** de las superficies laterales de cilindros y prismas, un número importante de participantes opta apropiadamente por el procedimiento de forrar o (des)armar cuerpos. Sin embargo, el estudio muestra que un grupo no despreciable adiciona la condición de *igual tamaño* a la de *igual forma* al exigir que las superficies laterales sean congruentes como figuras geométricas. Esto evidencia un corrimiento de la naturaleza esencialmente geométrica de la cuestión hacia un enfoque más bien algebraico/numérico. Con ello se introduce una mirada sesgada en la delimitación del atributo *forma*.

  Precisar criterios matemáticos para establecer relaciones entre las formas de las superficies laterales de cuerpos distintos con un sostén geométrico consistente, otorga una funcionalidad esencial al contenido para que el docente secuencie, de forma oportuna, la identificación involucrada. Esto se orienta a un nivel, aunque sea básico, de desmenuzamiento del objeto geométrico 3d como totalidad/globalidad para superar, consecuentemente, un primer nivel de pensamiento geométrico de Van Hiele (1986).
- En cuanto a la **representación plana de objetos 3d,** como se muestra en la Figura 2, se reconocen tres criterios utilizados para organizar conceptualmente una explicación matemática. El hecho de que prácticamente la mitad de las participantes adopta el criterio "C" connota la complejidad que produce la comprensión y lectura de la representación plana de objetos 3d. En este tipo de representación se integran las características

específicas del objeto geométrico con los códigos asociados a la proyección sobre el plano, aspecto al que Gutiérrez (1998) hace referencia.

Las participantes que aplican el criterio "B" se centran en la complejidad de la habilidad geométrica en cuestión para organizar la representación y la lectura. Dejan en un segundo plano conocimientos sobre las características del cubo, contenido que presuponen afianzado en la estructura conceptual del alumno.

La mayor debilidad es la mostrada por las participantes asociadas con el criterio "A", que dan por sentado que un alumno en la primera etapa de la escolaridad secundaria, ya ha organizado una mirada en perspectiva. Esto supone una debilidad en el *conocimiento especializado* de la geometría 3d, desconociendo que la perspectiva es un componente crucial en los procesos de representación de lo tridimensional.

Desde el *conocimiento matemático para enseñar*, este resultado adquiere una funcionalidad específica para orientar la formación docente, teniendo en cuenta la fuerte presencia del soporte 2d (papel, pantalla) para representar objetos 3d. Se concluye que es deseable la promoción de una fluida relación 2d-3d desde la representación gráfica, para que el futuro profesor disponga de herramientas adecuadas.

Este estudio muestra que en la adecuación del contenido *cuerpos poliedros y redondos* para ser enseñado no se avanza demasiado en el reconocimiento o aplicación de propiedades matemáticas intrínsecas de los cuerpos, tales como: configuración de los elementos en una estructura poliedral, condiciones para la construcción geométrica de un cierto cuerpo geométrico, particularidades de los sólidos de revolución.

Tener en mente orientaciones oportunas con sustento matemático consistente, pensadas a partir de lo que pueda llegar a resultar trabajoso para un alumno del nivel educativo en cuestión, se constituye en un eslabón elemental en el *conocimiento matemático para enseñar cuerpos poliedros y redondos* en la escuela secundaria El docente tiene, así, indicios de los aspectos matemáticos que resulta de interés atender en la enseñanza y a los que debe prestar especial atención por su posibilidad de conllevar dificultades intrínsecas para su comprensión.

Este conjunto de posibles acciones en las que se requiere hacer uso de componentes particulares del *conocimiento especializado del contenido* debe ser objeto de trabajo durante la formación inicial de un docente. Su importancia radica en que el grado de desarrollo de capacidades para pensar y decidir las adecuaciones conceptuales requeridas para la construcción de determinado contenido de geometría tridimensional y organizar secuenciaciones pertinentes para determinado nivel educativo condiciona, limita o favorece su enseñanza.

A partir de las debilidades identificadas en esta indagación en el *conocimiento especializado del contenido* se propone, en el marco de la formación de profesores de matemáticas, la generación de actividades de producción de propuestas de acción ante determinadas situaciones en las que el conocimiento geométrico 3d se piense en función a su enseñanza. Básicamente, se procura que el contenido geométrico abordado como formación disciplinar básica se adapte a distintos niveles de enseñanza como expresión de un *conocimiento especializado* a través de algunas actividades como se mencionan a continuación:

- Orientar un proceso reflexivo de producción matemática, para que la comprensión trascienda la mera percepción sensorial, cuando se recurre a la experimentación empírica con objetos concretos 3d para favorecer la superación de dificultades. En este sentido, es conveniente profundizar y avanzar sobre las propuestas de Guillén (2000), situadas en el nivel primario de educación. Las actividades de descripción de familias de sólidos deberán acompañarse con: ejemplos y tareas adecuadamente seleccionadas que relacionen familias de sólidos y sus propiedades, explicitación de los aspectos a observar al comparar la descripción de diferentes familias de sólidos, reconocimiento de propiedades que se enuncian para familias de sólidos y subfamilias que no las verifican.
- Reconocer la conceptualización geométrica como un proceso integrado a la representación gráfica, basado en la noción de perspectiva.
- Dar sentido prospectivo para la enseñanza al error del alumno generando instancias de reconocimiento de aquellas nociones geométricas previas que obstaculizan la organización de representaciones planas de objetos tridimensionales.
- Favorecer el desarrollo de la perspectiva y la visualización de peculiaridades, con actividades que puedan introducirse, por ejemplo, de la siguiente manera:

Leonardo da Vinci (1452-1519) hizo modelos de poliedros con tiras de madera. Cuando uno de tales modelos se ve en perspectiva teniendo el centro de una de las caras justo frente al ojo, esta cara aparece como un polígono y las demás caras dentro del polígono. Al dibujo con esta perspectiva se lo conoce como diagrama de Schlegel, en honor a Victor Schlegel (1843-1905), quien profundizó el estudio de esta herramienta en propiedades topológicas y combinatorias de lo politopos. Por ejemplo, el tetraedro regular y el hexaedro regular se ven como en la Figura 4. Trace los diagramas de Schlegel de los restantes sólidos platónicos.

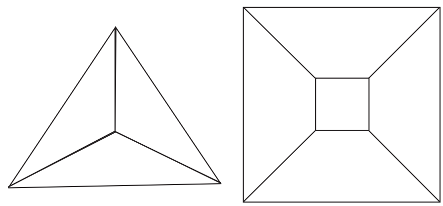


Figura 4 Diagramas de Schlegel del tetraedro regular y del hexaedro regular

- Propiciar una mirada en detalle de los elementos de los cuerpos, con variadas formas de representación matemática que permitan un desmenuzamiento del contenido, construcción del lenguaje matemático y codificación simbólica. Por ejemplo, a medida que se avance en la escolaridad secundaria, introducir la nomenclatura de Ludwig Schläfli (1814-1895), en la cual un poliedro queda caracterizado por un par ordenado $\{p, q\}$, en donde p es el número de lados que tiene una cara del polígono, y q es el número de caras que concurren en un vértice. Así, el tetraedro regular está caracterizado por el símbolo $\{3, 3\}$. De este modo, la interpretación de la misma posibilitará dar respuesta a cuestiones como: ¿qué símbolo de Schläfli corresponde a cada uno de los restantes sólidos platónicos?, ¿pueden existir poliedros regulares con los siguientes símbolos de Schläfli: $\{3, 6\}$; $\{4, 5\}$; $\{5, 5\}$?
- Organizar y analizar argumentaciones matemáticas consistentes para la construcción de conocimientos geométricos a partir de un interrogatorio que atienda a la explicitación de procedimientos, la justificación de ideas y la demostración matemática.

Se coincide con Ball (2009) en que uno de los desafíos en la formación de profesores de matemáticas es el desarrollo del *conocimiento especializado del contenido* cuya construcción en la etapa de formación inicial podría potenciarse. Este artículo ha intentado aportar posibilidades concretas de trabajo a partir de las necesidades formativas reconocidas en los hallazgos de la investigación.

Reconocimientos

Trabajo realizado en el marco del Proyecto de Investigación 19/I310 de la Universidad Nacional de Rosario, y de la Beca Tipo II del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. Argentina.

Datos de las autoras

Natalia Sgreccia y Marta Massa
Universidad Nacional de Rosario y Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. Argentina
sgreccia@fceia.unr.edu.ar; mmassa@fceia.unr.edu.ar

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ander-Egg, E. (2003). *Métodos y Técnicas de Investigación Social IV. Técnicas para la recogida de datos e información*, Buenos Aires, Lumen.

Andrés, M., Latorre, M.C. y Machiunas, M.V. (2000), *Matemática 7EGB*, Buenos Aires, Santillana.

Ball, D. (2009). "Developing teachers' mathematical knowledge for teaching", Conferencia presentada en la California Commission on Teacher Credentialing, Ann Arbor, 21 de mayo de 2009 (Disponible en: http://www-personal.umich.edu/~dball/presentations/052109_CTC.pdf, consultado el 10 de octubre de 2010).

Ball, D. (2010). "Learning to do mathematics as a teacher", Conferencia presentada en la *Annual Conference of the National Council of Supervisors of Mathematics,* San Diego, 22 de abril de 2010 (Disponible en: http://wwwpersonal.umich.edu/~dball/presentations/042110_NCSM.pdf, consultado el 20 de enero de 2011).

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). "Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special?" En *Journal of Teacher Education,* vol. 59, núm. 5, pp. 389-407.

Barallobres, G. (1997). *Matemática 7*, Buenos Aires, Aique.

Cabrera Ruiz, I. (2009). "El análisis de contenido en la investigación educativa: propuesta de fases y procedimientos para la etapa de evaluación de la información", En *Pedagogía Universitaria*, vol. 14, núm. 3, pp. 71-93.

Delaney, S., Ball, D., Hill, H., Schilling, S. y Zopf, D. (2008). "'Mathematical knowledge for teaching': Adapting U. S. measures for use in Ireland". En *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 11, núm. 3, pp. 171-197.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht, Reidel.

Garguichevich, G. (2007). *Geometría del plano y del espacio*, Rosario, Universidad Nacional de Rosario.

González, E., Guillén, G. y Figueras, O. (2007). "Diseño de un estudio sobre la puesta en práctica de un modelo de enseñanza para la geometría de los sólidos para la formación continua de profesores de educación básica". En P. Bolea, M. Camacho, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo y M. González (Eds.), *Investigación en Educación Matemática*. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM, Tenerife.

Gonzato, M., Díaz Godino, J. y Neto, T. (2011). "Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales". En *Educación Matemática*, vol. 23, núm. 3, pp. 5-37.

Guillén, G. (2000). "Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas". En *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 18, núm. 1, pp. 35-53.

Guillén, G. (2010). "¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación?" En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.), *Investigaciones en Educación Matemática XIV*, Lleida, SEIEM, pp. 21-68.

Guirette, R. y Zubieta, G. (2010). "Lectura y construcción que hacen algunos profesores del diagrama o dibujo geométrico en el quehacer matemático". En *Educación Matemática*, vol. 22, núm. 2, pp. 93-121.

Gutiérrez, A. (1996). "The aspect of polyhedra as a factor influencing the students' ability for rotating them". En A. Batturo (Ed.), *New directions in geometry education*, Brisbane, Centre for Math. and Sc. Education, pp. 23-32.

Gutiérrez, A. (1998). "Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial". En *Ema*, vol. 3, núm. 3, pp. 193-220.

Güven, B. y Kosa, T. (2008). "The effect of dynamic geometry software on student mathematics teachers' spatial visualization skills". En *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, vol. 7, núm. 4, pp. 100-107.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2006). *Metodología de la investigación* (4º ed.), México, D. F., Mc Graw Hill.

Hershkowitz, R. (1990). "Psychological Aspects of Learning Geometry". En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Cambridge, Cambridge UP, pp. 70-95.

Jones, K. (2000). "Critical Issues in the Design of the Geometry Curriculum". En B. Barton (Ed.), *Readings in Mathematics Education*, Auckland, Universidad de Auckland, pp. 75-90.
Ministerio de Educación de Santa Fe. (1999). *Diseño Curricular Jurisdiccional para el Tercer Ciclo de la EGB. Fundamentación pedagógica general y área Matemática*, Santa Fe, Ministerio de Educación de Santa Fe.
Morata Sebastián, R. y Rodríguez Sánchez, M. (1997). "La interrogación como recurso didáctico. Análisis del uso de la pregunta didáctica practicado en dos áreas de conocimiento en el nivel de Formación Profesional". En *Didáctica*, 9, pp. 153-170.
Mundina, J. (2005). "Análisis de contenido. Posibilidades de aplicación en la investigación educativa". En R*evista Interuniversitaria de Formación de Profesorado*, vol. 19, núm. 2, pp. 157-174.
Perkins, D. (1992). *La escuela inteligente. Del adiestramiento de la memoria a la educación de la mente*, Barcelona, Gedisa.
Pinto Sosa, J. y González Astudillo, M. (2008). "El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada?". En *Educación Matemática*, vol. 20, núm. 3, pp. 83-100.
Ribeiro, C., Monteiro, R. y Carrillo, J. (2010). "¿Es el conocimiento matemático del profesorado específico de su profesión? Discusión de la práctica de una maestra". En *Educación Matemática*, vol. 22, núm. 2, pp. 123-138.
Rodríguez Gómez, G., Gil Flores, J. y García Jiménez, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*, Sevilla, Aljibe.
Samper, C., Perry, P., Camargo, L., Molina, O. y Echeverry, A. (2010). "Geometría dinámica: Su contribución a la comprensión de condicionales de la forma si-entonces". En *Educación Matemática*, vol. 22, núm. 3, pp. 119-142.
Sánchez, M. (2011). "A review of research trends in mathematics teacher education", *PNA*, vol. 5, núm. 4, pp. 129-145.
Sgreccia, N. y Massa, M. (2011). "Sólidos platónicos". En *Novedades Educativas*, núm. 249, pp. 58-63.
Shulman, L. (1986). "Those who understand: Knowledge growth in teaching". En *Educational Researcher*, vol. 15, núm. 2, pp. 4-14.
Van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education*, Orlando, Academic.
Vázquez, S. M. y Noriega Biggio, M. (2010). "La competencia espacial. Evaluación en alumnos de nuevo ingreso a la universidad". En *Educación Matemática*, vol. 22, núm. 2, pp. 65-91.