

XXXV JORNADAS NACIONALES

DE DOCENTES DE MATEMÁTICA DE FACULTADES
DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y AFINES



UNIVERSIDAD
NACIONAL DE SALTA



FACULTAD DE CIENCIAS
ECONÓMICAS,
JURÍDICAS Y SOCIALES

OCTUBRE
2021

SALTA



XXXV Jornadas Nacionales de Docentes de Matemática de Facultades de Ciencias
Económicas y afines; Compilación de Natalia de los Ángeles Sandez Pernas ... [et
al.] ;

Editado por Natalia de los Ángeles Sandez Pernas ... [et al.]. - 1a ed - Salta :
Universidad

Nacional de Salta, 2021.

Libro digital, DOCX

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-987-633-577-5

1. Matemática Aplicada. 2. Estadísticas. 3. Educación Universitaria, ed.
CDD 510

ISBN 978-987-633-577-5



9 789876 335775

El evento fue declarado de interés profesional por:

El Consejo Profesional de Ciencias Económicas de Salta (Resolución de presidencia N° 84 / 2021)

Declararon de Interés Académico el evento, las Facultades de Ciencias Económicas de las siguientes Universidades:

Universidad Adventista de La Plata (Resolución N° 2 / 21)

Universidad Nacional de Entre Ríos (Resolución N° 293/ 21)

Universidad Nacional de Formosa (Resolución N° 205 /21)

Universidad Nacional de Salta (Resolución DECECO N° 503 / 21)

Autoridades de la Universidad Nacional de Salta

Rector Cr. Víctor Hugo Claros

Vicerrectora Dra. Graciela del Valle Morales

Autoridades de la Facultad de Ciencias Económicas, Jurídicas y Sociales Universidad Nacional de Salta

Decano Mg. Lic. Miguel Martín Nina

Vicedecana Mg. Prof. Angélica Elvira Astorga de Barcena

Autoridades de la Asociación de Docentes de Matemática de Facultades de Ciencias Económicas y Afines

Presidente Mg. Silvia Inés Padró

(Universidad Nacional de Entre Ríos)

Vicepresidente Mg. Diana Raquel Kohan

(Universidad Nacional de Entre Ríos)

**COMISIÓN ORGANIZADORA DE LAS XXXV JORNADAS NACIONALES DE DOCENTES DE MATEMÁTICA
DE FACULTADES DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y AFINES**

Comisión Principal

Presidente: Cr. Dante Quiroga

Secretario: Cr. Enzo Álvarez

Tesorero: Mg. Cr. Jorge Nina

Protesorero: Cr. Manuel Quintana

Comisión de desarrollo tecnológico

Ing. Miguel Soto

Cr. Enzo Álvarez

Mg. Prof. Angelica Elvira Astorga

Lic. Claudio Ivan Barrios

Cr. Celso Silisque

Comisión Académica

Prof. Betina Abad

Prof. Josefina Lávaque Fuentes

Prof. Paola Guardatti

Cr. Enzo Álvarez

Cr. Dante Quiroga

Prof. Claudia González

Ing. Irma Martínez

Sr. Daniel Condori

Comisión de Asuntos Académicos y Organización de Actividades

Cr. Einer Batista

Prof. Graciela Méndez

Cr. Nicolas Gómez Lérica

Prof. Josefina Lávaque Fuentes

Cr. Celso Francisco Silisque

Prof. Ricardo Burgos

Sr. Daniel Condori

Comisión de Compaginación de Libro de Trabajos Finales

Lic. Natalia Sáñez Pernas

Prof. Mercedes Silva

Prof. Ricardo Burgos

Prof. Claudia González

Comisión Técnica

Cr. Enzo Álvarez

Lic. Natalia Sáñez Pernas

Comisión de Comunicación y Prensa

Lic. Lorena Rojas

Lic. Juan Manuel Ibarra

Srta. Paola Tolaba

Sr. José Pabón

Comisión Evaluadora de los Trabajos del Premio Ing. Ricardo Carbajo

Mg. Prof. Angélica Elvira Astorga

Ing. Eduardo Casado

Cr. Dante Quiroga

INDICE

CAPÍTULO 1: Ponencias	7
MATEMÁTICA APLICADA	
Fundamentos Matemáticos del Modelo de Aprendizaje de una Red Neuronal Artificial Multicapa	7
Resolución de un Modelo de Programación Lineal Utilizando R	16
Análisis de Algunos Indicadores en la Distribución Presupuestaria en las Universidades Públicas Argentinas	25
Aplicación de los Multiplicadores de Lagrange a la Economía	34
Aproximación del Capital en un Determinado Período y de la Producción Media A Partir de la Convergencia de Sumas Integrales	42
ESTADÍSTICA APLICADA	
Aplicación de Herramientas Estadísticas para Empresa de Retail	51
Procesamiento Didáctico de Teoría de Colas con el Apoyo Tecnológico de Rstudio. Recomendaciones y Desafíos	60
Caracterización de la Exportación Argentina de Carnes y Derivados Bovinos Aplicando Métodos Multivariados	70
La Prueba de Kolmogorov-Smirnov Aplicada a un Caso de Antropometría Aporte y Propuesta Interdisciplinaria Mediante el Uso de Tecnología	78
Análisis del Mercado de Derivados de la Energía y sus Implicancias en la Postpandemia	86
Métodos Estadísticos Aplicables a la Auditoría de Estados Contables	96
El Método de Momentos Generalizado (GMM). Aplicación en un Modelo Estadístico Sencillo	104
EDUCACIÓN MATEMÁTICA	
Percepción de Resiliencia de Estudiantes de Álgebra en Contexto de Pandemia	115
Tics Aplicadas en las Clases Remotas de Inferencia Estadística	123
Enseñanza Remota de Emergencia Implementada para Cursos Masivos de Álgebra y Análisis Matemático de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires.....	131
Jornadas Nacionales de Docentes de Matemáticas de Facultades de Ciencias Económicas y Afines. Análisis e Interpretación de Estados Contables, Competencias Matemáticas Empleadas. Análisis Documental.....	141
La Metodología de Evaluación en Álgebra Aplicada: Su Incidencia en el Rendimiento Académico	151
Metodologías de Enseñanza en Álgebra: Su Impacto en el Rendimiento Académico de los Estudiantes de Ciencias Económicas	162
Imágenes del Concepto de los Estudiantes de Ciencias Económicas Respecto a las Inecuaciones Lineales con Valor Absoluto	171
Una Experiencia de Evaluación en la Virtualidad	182
La Participación Activa de los Estudiantes en el Aprendizaje del Cálculo con Modalidad Virtual	191
Influencia de la Vulnerabilidad Educativa en la Condición Académica de los Alumnos de Matemática en Época de Pandemia	202

Materiales Didácticos Digitales ¿Cuáles Prefieren los Estudiantes? Análisis en Dos Materias del Área Matemática.....	214
Traspasando la Virtualidad: Necesidades y Emociones del Docente y del Estudiante	222
Análisis Matemático II, Migración del Aula Presencial al Aula Virtual	229
Enseñando Estadística en la Virtualidad Durante el ASPO-DISPO	237
El Aula Virtual de Matemática II Antes y Durante la Pandemia: La Mirada de los Alumnos	248
Una Experiencia en el Dictado en la Virtualidad	259
Evidencias de Progresos Hacia la Auto-Regulación, A Partir del Uso del Aula Virtual en Matemática I	268
Grafos y Matrices Insumo – Producto. Una Experiencia en la Facultad de Economía y Administración de la Universidad Nacional del Comahue	279
Evolución en Tiempo Discreto de una Operatoria Financiera	290
CAPÍTULO 2: Premio Carbajo	299
CAPÍTULO 3: Cursos.....	300
EL PRESUPUESTO PERSONAL COMO HERRAMIENTA DE MATEMÁTICA APLICADA	300
INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DE SUPERVIVENCIA.....	304
ANÁLISIS DE LA VARIANZA (ANOVA).....	306
MODELIZACIÓN MATEMÁTICA, UN DESAFÍO Y UNA OPORTUNIDAD	308

ALPHA, CHIANG. WAINWRIGHT, KEVIN. (2006). *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*. México D.F.. Editorial Mc Graw Hill.

ALLEN, R.G.D. (1968). *Análisis Matemático para Economistas*. Madrid-España. Editorial Aguilar.

NICHOLSON, Walter. (1997) *Teoría Microeconómica*. Madrid, España. Editorial McGraw-Hill.

HENDERSON, JAMES. QUANDT, Richard. (1975). *Teoría Microeconómica: Una Aproximación Matemática*. Barcelona-España. Ediciones Ariel.

Aproximación del Capital en un Determinado Período y de la Producción Media A Partir de la Convergencia de Sumas Integrales

Parma Andrea¹ – Fernandez María José²

¹CMA / CIMBAGE- IADCOM, Facultad de Ciencias Económicas – UBA - Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas.

²CONICET. Instituto Interdisciplinario de Economía Política de Buenos Aires (IIEP - BAIREs)

¹andraparma38@gmail.com - ²mariajfernandez@economicas.uba.ar

Especialidad: Matemática Aplicada

Palabras Clave: Integral definida, Suma de Riemann, Aplicaciones económicas, Paneles interactivos.

Resumen

En este trabajo, se plantea a los alumnos de las asignaturas de Cálculo de las Facultades de Ciencias Económicas, dos situaciones problemáticas del ámbito económico, la formación del capital en un cierto período de tiempo y el cálculo de la producción media, que emplean en su resolución el concepto de integrales definidas, simple y doble respectivamente. Para ello, el alumno, guiado por el docente, podrá visualizar diferentes aproximaciones geométricas de la solución de los problemas presentados, empleando una sucesión de particiones y una Suma de Riemann para cada una de ellas, asistido mediante paneles interactivos elaborados con dos herramientas informáticas: Geogebra y Descartes.

El empleo de las TIC como recurso didáctico en la enseñanza de las asignaturas del área matemática, representa un gran desafío para los docentes, y más aún cuando se trabaja con la modalidad virtual. El uso de ciertos programas como el Geogebra, Descartes, Mathematica, entre otros, permiten resolver operaciones engorrosas, visualizar gráficas en el plano y en el espacio, realizar cálculos simbólicos. A su vez, brindan la posibilidad de generar paneles interactivos que permiten analizar los cambios producidos en un modelo específico a través de la modificación de ciertos parámetros.

El objetivo de este trabajo es facilitar al alumno el proceso de asimilación del concepto de integral definida a través de la indagación y la elaboración de conclusiones, logrando de esta manera la construcción de un conocimiento significativo.

1. Introducción

De las investigaciones pedagógicas contemporáneas, surge la necesidad de reducir las dificultades de aprendizaje que presentan los alumnos al iniciar el estudio de algunos contenidos básicos de cálculo (García *et al.*, 2016). En este caso particular, nos dedicaremos al concepto de integral definida simple y doble y su aproximación a través de la suma de Riemann, empleando el método del punto medio. La intención de este trabajo es contribuir a la mejora del proceso enseñanza-aprendizaje. Para ello se propone, como disparador, dos situaciones

problemáticas de contexto económico.

Se emplearán paneles interactivos desarrollados en *Geogebra* y *Descartes*, buscando promover el uso de las TIC como herramienta fundamental en la enseñanza. El propósito de estos paneles es permitir que los estudiantes descifren, analicen mediante pruebas y aprendan por sí mismos. De esta forma, podrán asimilar el concepto de forma significativa, apoyándose en software de uso libre orientados a la Matemática.

Las integrales definidas son objetos matemáticos que permiten calcular no solo áreas y volúmenes, sino también otros elementos en diversas disciplinas. La visualización geométrica de las sucesivas sumas de Riemann nos ayudan a aproximar su valor, a partir del concepto de área de una región que la llamaremos $G(f, a, b)$ o volumen de un prisma que llamaremos $V(f; R)$ con su división o partición en varias formas simples de modo tal que el único requisito es que no se solapen entre sí (tales como rectángulos o prismas). El uso de paneles interactivos ayuda a comprender de manera apropiada conceptos tales como: suma inferior, suma superior y suma media. Además, a medida que esas particiones van siendo cada vez más pequeñas, el valor de esa suma o la doble suma se aproxima mejor al valor de la integral definida. Por otro lado, las aplicaciones económicas resultan ser una excelente herramienta para lograr que los alumnos se motiven a la hora de adquirir conceptos no tan amigables.

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera. En primer lugar, se expone el concepto de suma de Riemann para funciones $y = f(x)$, se muestra el panel desarrollado en *Geogebra* y se aborda un problema económico de formación de capital. Con dicho panel, se resuelve el primer problema. En segundo lugar, se expone el concepto de doble suma de Riemann para funciones $z = f(x, y)$ y se presenta un panel interactivo desarrollado en *Descartes*. Se plantea un problema de producción media y se resuelve utilizando la aplicación desarrollada. Por último, se realizan algunos comentarios finales.

2. Integral Definida simple aplicada a funciones escalares

En primer lugar, vamos a revisar el concepto de integral definida simple aplicada a funciones escalares. Supongamos que queremos calcular el área comprendida entre $y = f(x)$; $x = a$; $x = b$; $y = 0$, siendo $f(x)$ continua y $f(x) \geq 0$. A esta área la vamos a llamar G y se puede observar en la Figura 1.

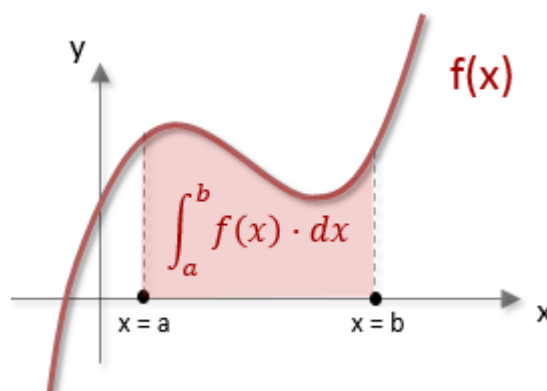


Figura 1. Integral definida aplicada a funciones escalares.

Fuente: <https://www.matematicas10.net/2017/06/propiedades-de-la-integral-definida.html>

En la integral de Riemann, el área del conjunto $G(f, a, b)$ se aproxima mediante rectángulos (Figura 2). Para ello, primero se divide el intervalo $[a, b]$ en un número finito de subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, $1 \leq k \leq n$, cuyas longitudes pueden ser distintas y con una única

condición de que no se solapen:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

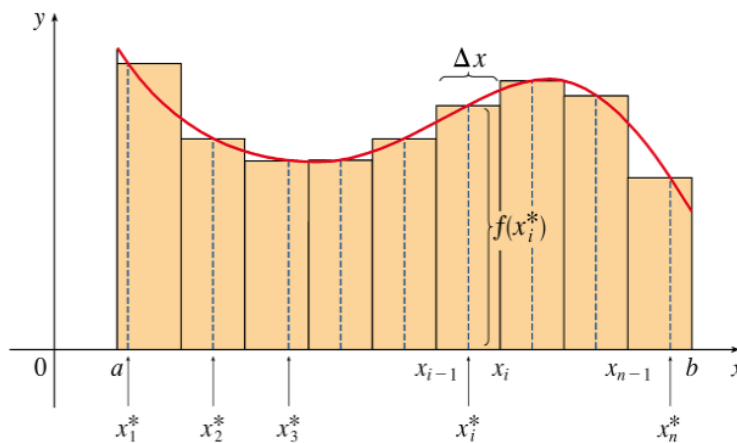


Figura 2. Suma de Riemann.

Fuente: <https://docplayer.es/20516432-Integrales-dobles-guia-electronica-de-estudio-para-el-estudiante.html>

Definición: Sea $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$, y elijamos un punto $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ en cada uno de los intervalos de la misma. El número:

$$\sigma(f, P) = \sum_{k=1}^n f(x_k^*) (x_k - x_{k-1})$$

se llama una *Suma de Riemann* de f para la partición P (Pérez González, et al., 2006)

Esta sumatoria representa la suma de las áreas de todos los rectángulos representados en la Figura 2, cuya base es la longitud de cada subintervalo y la altura está representada por la imagen de un punto x_k^* de cada subintervalo.

Definición: Dada una partición $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$, definimos $M_k = \sup f[x_{k-1}, x_k]$ y $m_k = \inf f[x_{k-1}, x_k]$. Así podremos definir dos sumas de Riemann (Pérez González, et al., 2006)

Suma superior: $S(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1})$

Suma inferior: $I(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1})$

Dado que para todo $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ se verifica que $m_k \leq f(x_k^*) \leq M_k$, deducimos que para toda suma de Riemann $\sigma(f, P)$, de f para la partición P es $I(f, P) \leq \sigma(f, P) \leq S(f, P)$.

Para cada partición hay una única suma superior y otra inferior.

Si consideramos que $\max \Delta P_n \rightarrow 0$ o $n \rightarrow \infty$, se supone que $S(f, P)$ es una buena aproximación por exceso del área $G(f, a, b)$ e $I(f, P)$ es una buena aproximación por defecto del área $G(f, a, b)$ (Pérez González, et al., 2006)

Teorema de convergencia de las sumas integrales: Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ una función integrable, $\{P_n\}$ una sucesión de particiones de $[a, b]$ tal que $\{\Delta(P_n)\} \rightarrow 0$ y $\sigma(f, P_n)$ una suma de Riemann de f para la partición P_n . Se verifica que (Pérez González, et al., 2006):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f, P_n) = \int_a^b f(x) dx$$

2.1. Problema Económico. Cálculo de formación de capital.

Si el Flujo de Inversión neta está descrito por $I(t) = 3\sqrt{t}$ siendo t la cantidad de años e I la inversión en miles de dólares. ¿Cuál será la formación del capital durante el período de tiempo $[1;4]$, es decir durante el segundo, tercer y cuarto año? (Chiang, *et al.*, 1999).

Podemos observar que la tasa de formación de capital en el momento t es igual al flujo de Inversión Neta $I(t)$:

$$\frac{dK}{dt} = I(t) \Rightarrow K(t) = \int I(t)dt$$

Entonces se puede obtener la trayectoria temporal del capital integrando la función que describe el flujo de inversión neta.

Por otro lado, la formación de capital en un período determinado viene dada por la siguiente integral definida:

$$\int_a^b I(t)dt = K(t)]_a^b = K(b) - K(a)$$

Con esta integral definida se puede resolver el problema planteado de la siguiente manera:

$$\int_1^4 3\sqrt{t}=14.$$

Esta aproximación se puede representar en forma geométrica a través de las sumas superiores e inferiores. Para ello, se realizó un panel interactivo en *Geogebra*, que permite visualizar el problema (Figura 3).

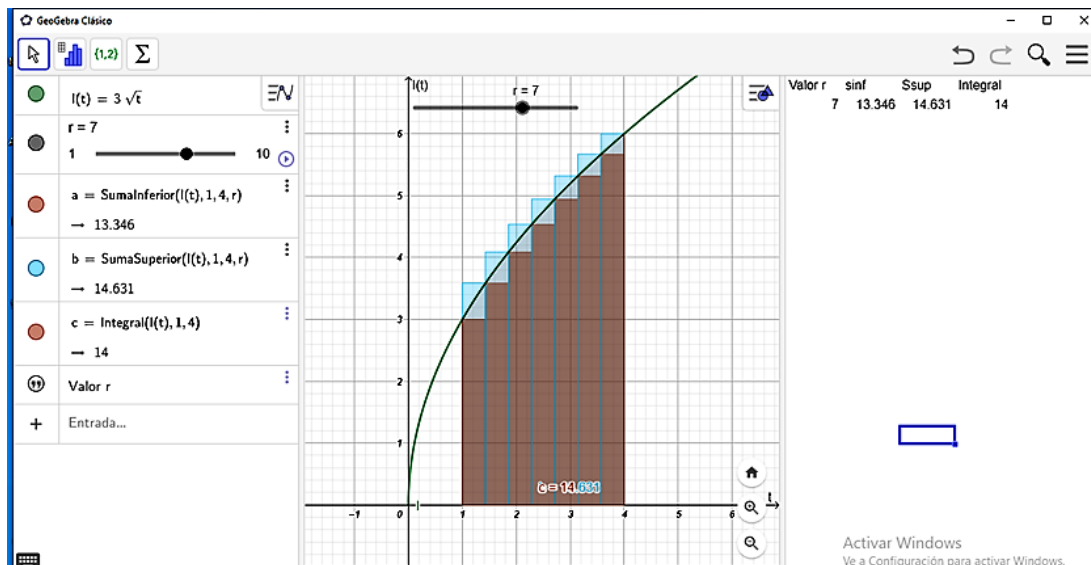


Figura 3. Panel Interactivo integral simple ($r=10$).

Fuente: Elaboración propia.

En este panel se puede colocar cualquier función. Para resolver nuestro problema, se empleó la función $I(t) = 3\sqrt{t}$ que aparece representada en verde. Luego, se puede observar la suma inferior (calculando las áreas de los rectángulos representados en marrón) y la suma superior (calculando las áreas de los rectángulos representados en celeste). En el panel, se puede elegir en cuantos rectángulos se puede dividir el área desplazando la barra debajo del $r = k$. El objetivo de esta barra es observar que, a medida que se van aumentando la cantidad de subdivisiones del intervalo, las aproximaciones por suma superior y suma inferior se van acercando al valor de la integral. Es decir, cuanto más subdividimos el intervalo, mejor es la aproximación (Figura 4).

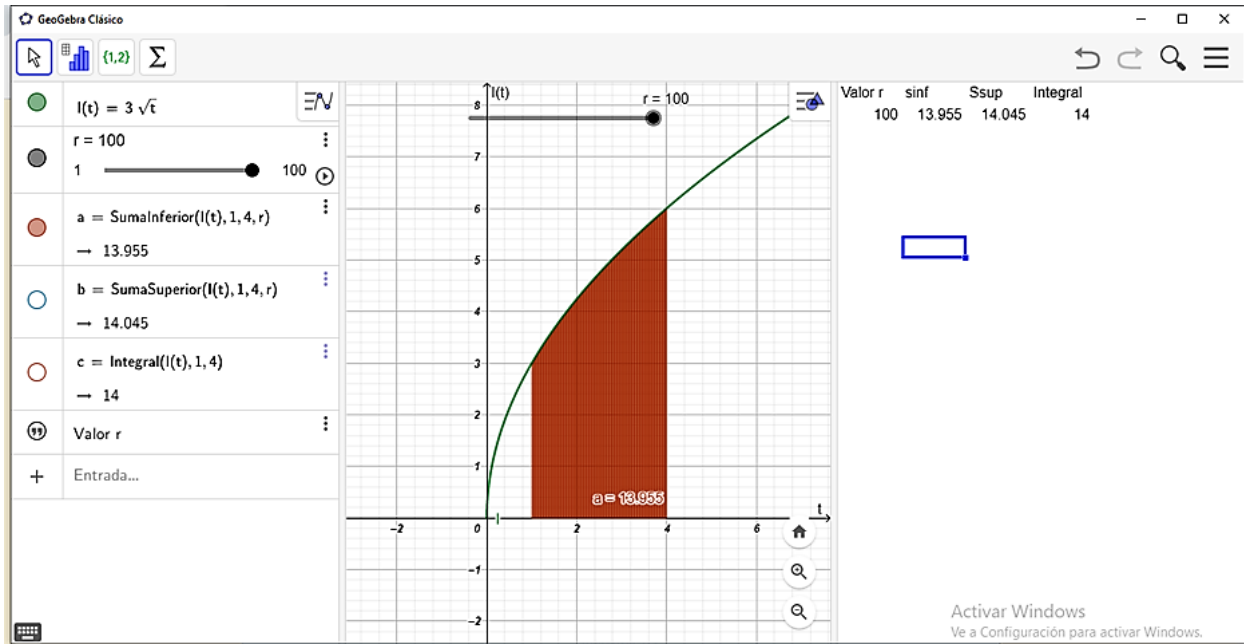


Figura 4. Panel Interactivo integral simple r=100.

Fuente: Elaboración propia.

3. Cálculo de Volumen Integral Doble para $z=f(x,y)$ continua y no negativa

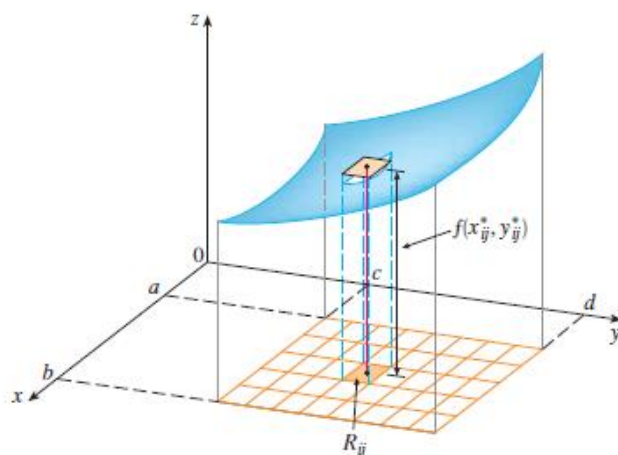
Vamos a extender el concepto de integral simple al concepto de integral doble aproximando el volumen de un cuerpo limitado superiormente por una superficie $z = f(x, y)$ e inferiormente por un rectángulo donde $a \leq x \leq b$ e $c \leq y \leq d$. Lo llamaremos $V(f; R)$ (Figura 5).

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

Figura 5. Integral doble

Fuente: Stewart, et al., 2012



Subdividimos el intervalo $[a, b]$ en m partes $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ y el intervalo $[c, d]$ en n partes $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$, de modo tal que en la base de este cuerpo nos queda una cuadrícula donde cada elemento es un rectángulo de área ΔA_{ij} .

Si tomamos un punto cualquiera de ese rectángulo (x_{ij}^*, y_{ij}^*) y calculamos la imagen del punto $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ y luego multiplicamos esa imagen por el área del rectángulo $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A_{ij}$, tendremos el volumen de un prisma que lo llamaremos volumen del prisma ij . Sumando todos los prismas que podremos conformar en esta cuadrícula obtendremos el volumen aproximado del cuerpo (Figura 6). Esta doble sumatoria la podemos asociar a la suma de Riemann, $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A_{ij}$ (Stewart, et al.,2012).

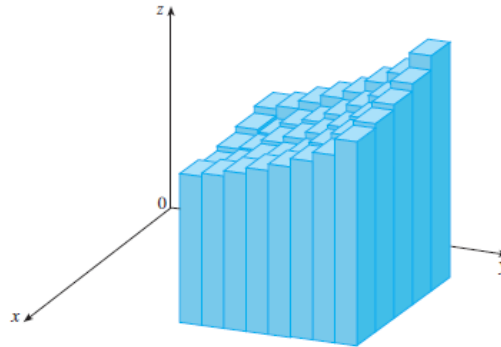


Figura 6. Integral doble

Fuente: Stewart, et al.,2012

También podemos decir que $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{ij} \Delta A_{ij} \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A_{ij} \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{ij} \Delta A_{ij}$, donde m_{ij} representa el mínimo absoluto que toma la función en un rectángulo r_{ij} cualquiera y M_{ij} representa el máximo absoluto que toma la función en un rectángulo r_{ij} cualquiera. Así tendremos que la suma de Riemann $\sigma(f, P) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A_{ij}$ está comprendida entre la suma inferior $I(f, P) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{ij} \Delta A_{ij}$ y la suma superior $S(f, P) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{ij} \Delta A_{ij}$, donde:

$$I(f, P) \leq \sigma(f, P) \leq S(f, P)$$

Si aplicamos el límite cuando m y n tienden a infinito:

$$\lim_{(m,n) \rightarrow (\infty, \infty)} I = \lim_{(m,n) \rightarrow (\infty, \infty)} \sigma = \lim_{(m,n) \rightarrow (\infty, \infty)} S = \iint_R f(x, y) dx dy$$

diremos que ese valor es el valor del volumen del cuerpo V y lo asociamos al concepto de la integral doble en el recinto R de la función.

Definición. La integral doble de f sobre el rectángulo R es (Stewart, et al.,2012).

$$V(f, R) = \iint_R f(x, y) dA = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A_{ij}$$

si el límite existe.

Para visualizar los conceptos anteriormente explicados, se utilizó un panel (Álvarez Saiz, et al, 2019) elaborado en programa Descartes (Figura 7). En el mismo permite calcular en forma aproximada el volumen de un cuerpo limitado superiormente por una función $z = f(x, y)$ editable e inferiormente por un rectángulo también elegible por el usuario.

En este caso probamos con:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 / 0 \leq z \leq 9 - x^2 - y^2, (x, y) \in \mathcal{R}^2\}$$

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 / -3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 3\}$$

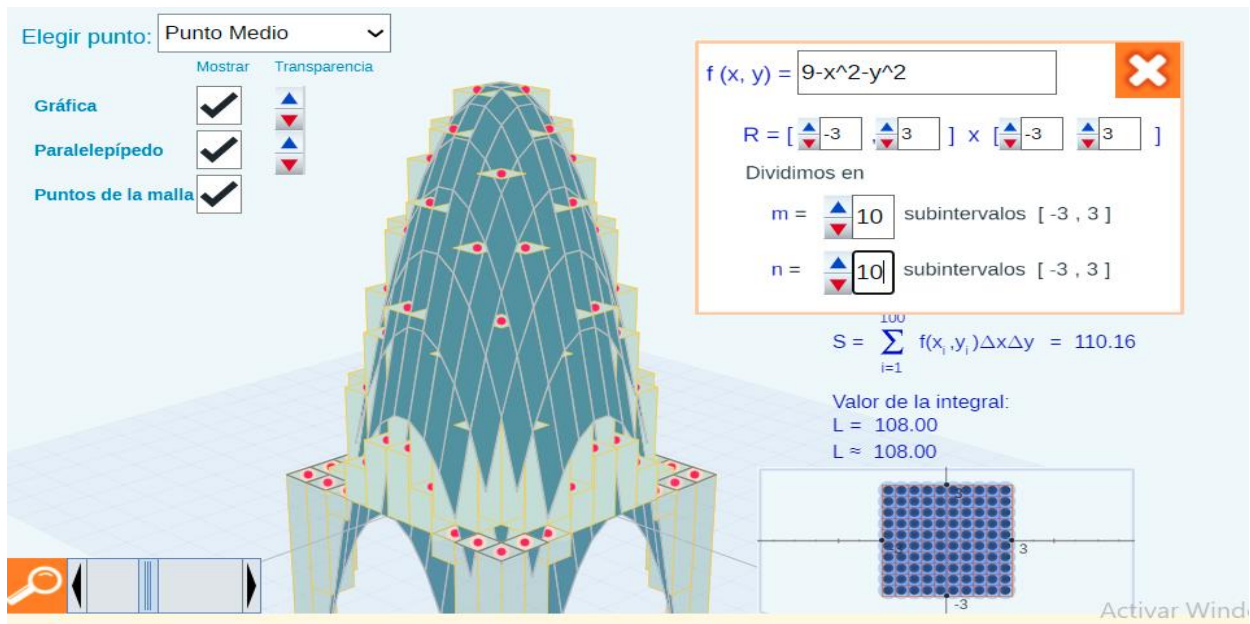


Figura 7. Panel Interactivo integral doble.

Fuente: Álvarez Saiz, et al, 2019

Luego, se puede seleccionar en cuantas particiones se quiere dividir los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$. Finalmente, se podrá observar el valor de la suma de Riemann, en este caso tomando el punto medio $(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij})$ de cada rectángulo r_{ij} de la cuadrícula para hallar $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$. También se puede visualizar el valor de la integral y concluir que, a medida que aumentamos los valores de m y n , la suma de Riemann converge al valor de la Integral Doble.

3.1. Problema Económico. Valor promedio de una función de producción sobre una región.

La función de producción de Cobb – Douglas para una industria es:

$$Q(x, y) = \frac{1}{2} x^2 y^2$$

Estimar el nivel de producción medio si x varía entre 0 y 3 unidades, e y varía entre 0 y 4.

Para resolver este problema definimos el valor promedio de una función sobre una región.

Definición: Si f es integrable sobre la región plana R , entonces el *valor promedio* de f sobre R es:

$$\frac{1}{A} \iint_R f(x, y) dA$$

donde A es el área de R .

Entonces, para nuestro ejemplo, la producción media está dada por la siguiente expresión:

$$\bar{Q} = \frac{1}{A} \int_0^4 \int_0^3 Q(x, y) dx dy = \frac{1}{12} \int_0^4 \int_0^3 \frac{1}{2} x^2 y^2 dx dy = \frac{1}{24} \int_0^4 \int_0^3 x^2 y^2 dx dy = 8$$

La producción media en nuestro ejemplo es 8.

Ahora, con los datos del problema, vamos a trabajar nuevamente con el panel elaborado en Descartes (Álvarez Saiz, et al, 2019). Se ingresan todos los datos del problema. Elegimos $m = 5$ y $n = 6$. De esta manera, el rectángulo de la base queda dividido en 30 elementos r_{ij} , donde en cada uno de ellos vamos a considerar el punto medio para calcular $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ para cada uno de estos 30 rectángulos. En este caso, la suma nos arroja un valor de 7.86, mientras que el valor de la integral es 8. También se puede elegir tomar los valores inferiores y superiores para realizar y comparar la suma media, con la inferior y la superior (Figura 8).

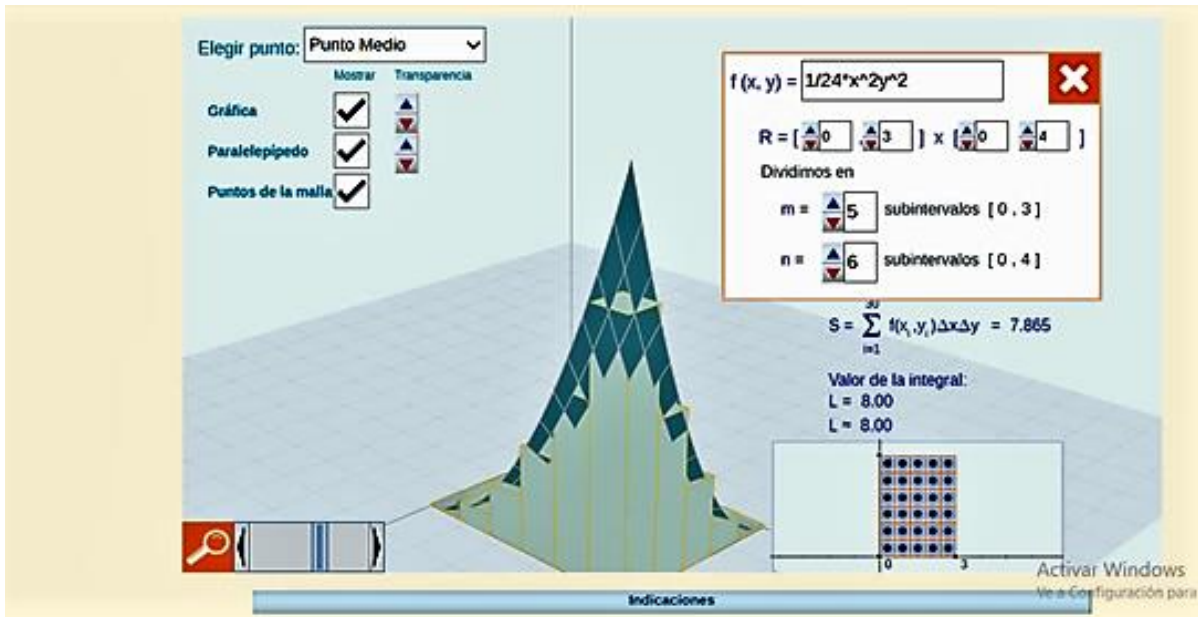


Figura 8. Problema Económico integral doble.

Fuente: Álvarez Saiz, *et al*, 2019

Si aumentamos los valores de m y n se puede observar que el valor de la aproximación se va acercando cada vez más al valor real de la integral.

4. Comentarios finales

A la hora de añadir conceptos fundamentales en los programas de las materias de cálculo, la visualización resulta crucial para una incorporación efectiva. Además, si dicha visualización se puede hacer en forma interactiva, el proceso resulta más motivador y duradero.

La posibilidad de presentar aplicaciones económicas interesantes en materias tempranas en el recorrido de la carrera genera una ventaja, debido a que los alumnos muestran mayor interés y entusiasmo que frente a ejercicios no económicos.

Las nuevas tecnologías resultan fundamentales para agilizar la interacción del alumno con ciertas herramientas tecnológicas que permiten ensayar diferentes posibilidades variando el valor de parámetros y más aún si las mismas son de acceso abierto. La posibilidad de observar, manipular, y ensayar en tiempo real resulta un avance significativo en la dinámica tanto de las clases presenciales como las virtuales.

En trabajos futuros se abordarán distintas aplicaciones económicas con el objetivo de presentarlas desde este mismo enfoque.

Bibliografía

Alvarez Saiz, E. (2019). *Sumas de Riemann sobre rectángulos*, Santander. Red Educativa Digital Descartes.

Apostol, T. (1999). *Calculus. Volumen 2*, México, Reverté S.A.

Balbás de la Corte, A.; Gil fana, J. A.; Gutierrez Valdeón, S. (1991). *Análisis Matemático para la Economía I. Cálculo diferencial*. Madrid, AC, Thomson.

Chiang, A. (1999). *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*. México, Editorial McGraw-Hill.

García, L., Álvarez, A., Hernández, R., Barrera, J. (2016). "WxMaxima en la enseñanza de las Matemáticas. Caso de las sumas de Riemann". *Revista de Sistemas y Gestión Educativa*, Diciembre 2016, Vol.3 No.9, pp.20-26.

Perez Gonzalez, J. (2006). *Cálculo Diferencial e Integral*. Granada (cap. 8), Universidad de Granada

Stewart, J. (2012). *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*. México, Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.