INVERSIÓN DE LAS TRANSFORMADAS DE RADON Y DE FOURIER A PARTIR DE MUESTREO ALEATORIO

Porten Erika[†], Medina Juan Miguel[‡] y Morvidone Marcela[†‡]

[†] *Centro de Matemática Aplicada, Universidad Nacional de San Martín, 25 de Mayo y Francia, San Martín, Buenos Aires, Argentina, erikaporten@gmail.com*

[‡] *Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Buenos Aires e Instituto Argentino de Matemática "A.P. Calderón" -CONICET, Paseo Colón 850, Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina, jmedina@fi.uba.ar*

[†‡] *Centro de Matemática Aplicada, Universidad Nacional de San Martín, 25 de Mayo y Francia, San Martín, Buenos Aires, Argentina, mmorvidone@unsam.edu.ar*

Resumen:

La teoría matemática de varios problemas de procesamiento de señales e imágenes se basa en invertir una transformada integral, en nuestro caso de interés serán las de Radon y Fourier. Muchas veces esto se realiza mediante un conjunto de mediciones realizadas, o muestreo, sobre un conjunto a lo sumo numerable de puntos. Por otra parte los teoremas de muestreo clásicos asumen que dichas muestras son tomadas sobre una grilla regular y que la transformada de Fourier de la señal cumple alguna condición, por ejemplo ser de banda limitada. Sin embargo, en la práctica éstas hipótesis suelen no cumplirse por lo que en este trabajo proponemos analizar la reconstrucción de una señal a partir de muestras tomadas aleatoriamente.

Palabras clave: *Transformada de Radon, Transformada de Fourier, Muestreo de Shannon, Proceso de Poisson, Integración Estocástica.*
2000 AMS Subject Classification: 44A12 - 42A38 - 94A20 - 60H05

1. INTRODUCCIÓN

En la literatura encontraremos muchos algoritmos para el muestreo de señales e inversión de la transformada de Radon. En este trabajo pondremos nuestra atención en el clásico teorema de Whittaker-Shannon y en el método conocido como *Back-projection* (o retroproyección), que utiliza este resultado para reconstruir la transformada de Radon de f a partir de una muestra regular de puntos, y propondremos una modificación para obtener un resultado similar tomando una muestra de puntos $\{p_k\}$ elegidos de manera aleatoria mediante un proceso de Poisson de parametro λ. Para ello necesitaremos algunos resultados preliminares.

2. INTEGRAL ESTOCÁSTICA

Una de las herramientas utilizadas será la integral estocástica respecto a un proceso de Poisson [4]. Resumiremos algunas definiciones y resultados conocidos adaptados a nuestra problemática.

Definición 1 *Medida estocástica*
Sea A un boreliano de $\mathbb{R}$ y $\{t_k\}$ números reales elegidos mediante un proceso de Poisson de parametro λ. Definimos la medida esctocástica $M(A) = \#\{t_k \in A\} = \sum_{t_k} \delta_{t_k}(A)$, donde $\delta_{t_k}(A) = \begin{cases} 1 & si \quad t_k \in A \\ 0 & si \quad t_k \notin A \end{cases}$.

Definición 2 *Integral esctocástica para funciones simples*
Dada M una medida estocástica y $g = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}(I_k)$ con $\alpha_k \in \mathbb{R}$ e I_k intervalos disjuntos de $\mathbb{R}$, definimos

$$\int_{\mathbb{R}} g\, dM = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k M(I_k) = \sum_{t_{k'}} g(t_{k'})$$

Luego, como esta integral es una variable aleatoria, podemos calcular su esperanza y su varianza:

Proposición 1 *Sea g una función simple, entonces:*

$$(i)\, E\left(\int_{\mathbb{R}} g\, dM\right) = \lambda \int_{\mathbb{R}} g\, dt\,, \quad (ii)\, Var\left(\int_{\mathbb{R}} g\, dM\right) = \lambda \int_{\mathbb{R}} g^2 dt$$

Nos interesa definir la integral para una clase de funciones mas amplia que las simples. Si para g simple llamamos:

$$I(g) := \int_{\mathbb{R}} g\, dM - \lambda \int_{\mathbb{R}} g\, dt,$$

entonces observemos que se cumple que

$$||I(g)||^2_{L^2(\Omega,\mathbf{P})} = Var(I(g)) = \lambda \int_{\mathbb{R}} g^2\, dt = \lambda ||g||^2_{L^2(\mathbb{R},dt)}$$

y, por lo tanto, viendo a I como un operador lineal podemos extenderlo de manera única para toda $g \in L^2(\mathbb{R}, dt)$ tomando límite en norma L^2 de funciones simples. De esta manera queda definido $I : L^2(\mathbb{R}, dt) \longrightarrow L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$, y lo denotaremos de manera simbólica:

$$\int_{\mathbb{R}} g\, dM - \lambda \int_{\mathbb{R}} g\, dt := I(g)\,.$$

Luego se puede probar que si tomamos $g \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$ vale la siguiente igualdad para la integral estocástica:

$$\int_{\mathbb{R}} g\, dM = \sum_{t_k} g(t_k)$$

y además se sigue cumpliendo la Proposición 1 para $g \in L^2(\mathbb{R})$ arbitraria.

Finalmente para $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$ introducimos [3]:

Definición 3

$$P_\lambda(\xi) = \frac{1}{\lambda} \sum_{t_k} f(t_k) e^{-i\xi t_k}\,,$$

que, como veremos a continuación, resulta un estimador insesgado de $\widehat{f}(\xi)$. En efecto, si consideramos $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$ podemos expresar este operador como una integral estocástica

$$P_\lambda(\xi) = \frac{1}{\lambda} \sum_{t_k} f(t_k) e^{-i\xi t_k} = \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\xi t}\, dM$$

y, como consecuencia de las propiedades de la integral estocástica, calcular su esperanza y varianza:

Proposición 2 *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, entonces:*

$$E(P_\lambda(\xi)) = \frac{1}{\lambda} E\left(\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\xi t}\, dM \right) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\xi t}\, dt = \widehat{f}(\xi)\,,$$

$$Var(P_\lambda(\xi)) = E\left(|P_\lambda(\xi) - \widehat{f}(\xi)|^2 \right) = \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f|^2\, dt \underset{\lambda \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Con estas definiciones y propiedades estamos en condiciones de enunciar un teorema que es una versión estocástica del teorema de Whittaker-Shannon y una variante de éste para la inversa de la Transformada de Radon.

3. Muestreo aleatorio

3.1. Versión estocástica del teorema de Whittaker-Shannon

Teorema 1 *Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, definimos*

$$S_\lambda f(t) = \frac{1}{\lambda} \sum_{t_k} f(t_k) \Phi(t - t_k) \tag{1}$$

con $\Phi = \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_A)$, donde $|A| < \infty$. Entonces

$$P\left(||S_\lambda f - f||_\infty > \epsilon \right) \leq \frac{|A| ||f||_{L^2}}{\sqrt{\lambda} \epsilon} + \frac{1}{\epsilon} \int_{A^c} |\widehat{f}|\, d\xi.$$

Nota 1 *Si $f \in L^2$ es de banda limitada, $\int_{A^c} \widehat{f}(\xi)\, d\xi = 0$ para A suficientemente grande. Además, $\widehat{S_\lambda f} = P(\xi)\mathbb{1}_A$. Por otra parte, se observa cierta similitud con la fórmula original de Shannon, sin embargo al ser ésto una aproximación, A en este caso puede no ser acotado e incluso no cumplir condiciones más generales como las propuestas por [1].*

Prueba.

$$E\left(||S_\lambda f - f||_\infty\right) \leq E\left(||\widehat{S_\lambda f} - \widehat{f}||_{L^1}\right) \leq E\left(\int_A |\widehat{S_\lambda f} - \widehat{f}| d\xi\right) + \int_{A^c} |\widehat{f}| d\xi$$

$$\leq \int_A E\left(|\widehat{S_\lambda f} - \widehat{f}|\right)\, d\xi + \int_{A^c} |\widehat{f}| d\xi = \int_A E\left(\left|\frac{1}{\lambda}\sum_{t_k} f(t_k)e^{-i\xi t_k} - \widehat{f}\right|\right)\, d\xi + \int_{A^c} |\widehat{f}| d\xi$$

Pero esta última ecuación, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz y la Proposición 3, queda acotada por:

$$\leq \int_A \left(E\left(\left|\frac{1}{\lambda}\sum_{t_k} f(t_k)e^{-i\xi t_k} - \widehat{f}\right|^2\right)\right)^{1/2} d\xi + \int_{A^c} |\widehat{f}| d\xi$$

$$\leq \int_A \frac{1}{\sqrt{\lambda}} ||f||_{L^2}\, d\xi + \int_{A^c} |\widehat{f}| d\xi = \frac{|A|\ ||f||_{L^2}}{\sqrt{\lambda}} + \int_{A^c} |\widehat{f}| d\xi$$

Por último, aplicando la desigualdad de Chebyshev

$$\begin{aligned} P\left(||S_\lambda f - f||_\infty > \epsilon\right) \leq & \frac{E\left(||S_\lambda f - f||_\infty\right)}{\epsilon} \\ \leq & \frac{|A|||f||_{L^2}}{\sqrt{\lambda}\epsilon} + \frac{1}{\epsilon}\int_{A^c} |\widehat{f}|\, d\xi. \end{aligned}$$

□

Finalmente, apliquemos estas mismas ideas a la inversión de la transformada de Radon.

3.2. Aplicación a la inversión de la transformada de Radon

Sabemos que la transformada de Radon

$$R_\theta f(p) = \int_{x\cos(\theta) + y\,\mathrm{sen}(\theta)} f(x, y) dx dy$$

nos permite reconstruir la señal de f a partir del siguiente método de reconstrucción (Back-projection)[2]:

$$f(x, y) = \int_0^\pi Q_\theta(x\cos(\theta) + y\,\mathrm{sen}(\theta))\, d\theta$$

donde

$$Q_\theta(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{R_\theta f}(q)|q|e^{i2\pi pq}\, dq$$

Si tomamos la aproximación para la transformada de Radon a partir de una muestra de puntos p_k

$$R_\theta f(p) \cong S_\lambda(R_\theta f(p))(p) = \frac{1}{\lambda}\sum_{p_k} R_\theta f(p_k)\Phi(p - p_k)$$

podemos reemplazar $\widehat{R_\theta f}(q)$ por $S_\lambda\widehat{(R_\theta f(p))}(q)$ en la expresión de Q_θ y de esa forma obtendríamos

$$\widetilde{Q_{\theta,\lambda}}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_\lambda\widehat{(R_\theta f(p))}(q)|q|e^{i2\pi pq}\, dq$$

$$\tilde{f}(x, y) = \int_0^\pi \widetilde{Q_{\theta,\lambda}}(p)\, d\theta$$

Proposición 3 *Sea $f \in L^2$, $|A| < \infty$ y tal que $\int_A |q|\, dq < C$*

$$P\left(||Q_\theta(p) - \widetilde{Q_{\theta,\lambda}}(p)||_\infty > \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{C}{\sqrt{\lambda}}||R_\theta f||_{L^2} + \int_{A^c} |\widehat{R_\theta f}(g)||q|\, dq\right)$$

La demostración es similar a la del anterior teorema.
Prueba.

$$\begin{aligned}
P\left(||Q_\theta(p) - \widetilde{Q_{\theta,\lambda}}(p)||_\infty > \epsilon\right) &\leq \frac{E\left(|Q_\theta(p) - \widetilde{Q_{\theta,\lambda}}(p)|\right)}{\epsilon} \\
&\leq \frac{1}{\epsilon} E\left(\left|\int_{-\infty}^{\infty} \left(\widehat{R_\theta f}(q) - S_\lambda(\widehat{R_\theta f}(p))\right) |q|\, dq\right|\right) \\
&\leq \frac{1}{\epsilon}\left(\int_A E\left(|\widehat{R_\theta f}(q) - S_\lambda(\widehat{R_\theta f}(p))|\right) |q|\, dq + \int_{A^c} |\widehat{R_\theta f}(q)||q|\, dq\right) \\
&\leq \frac{1}{\epsilon}\left(\int_A \left(E\left(|\widehat{R_\theta f}(q) - S_\lambda(\widehat{R_\theta f}(p))|^2\right)\right)^{1/2} |q|\, dq + \int_{A^c} |\widehat{R_\theta f}(q)||q|\, dq\right) \\
&\leq \frac{1}{\epsilon}\left(\int_A \left(\frac{1}{\lambda}||R_\theta f||_{L^2}^2\right)^{1/2} |q|\, dq + \int_{A^c} |\widehat{R_\theta f}(q)||q|\, dq\right) \\
&\leq \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}||R_\theta f||_{L^2} \int_A |q|\, dq + \int_{A^c} |\widehat{R_\theta f}(q)||q|\, dq\right)
\end{aligned}$$

□

Teorema 2 *Sea $f \in L^2$ y $|A| < \infty$ tal que $\int_A |q|\, dq < C$*

$$P\left(|f - \tilde{f}| > \epsilon\right) \leq \frac{\pi}{\epsilon}\left(\frac{C}{\sqrt{\lambda}}||R_\theta f||_{L^2} + \int_{A^c} |\widehat{R_\theta f}(q)||q|\, dq\right)$$

Prueba. Observemos que $|f - \tilde{f}| \leq \int_0^\pi ||Q_\theta(x\cos(\theta) + y\,\mathrm{sen}(\theta)) - \widetilde{Q_{\theta,\lambda}}(x\cos(\theta) + y\,\mathrm{sen}(\theta))||_\infty\, d\theta$
Con lo cual $\{|f - \tilde{f}| > \epsilon\} \subseteq \{||Q_\theta(p) - \widetilde{Q_{\theta,\lambda}}(p)||_\infty > \frac{\epsilon}{\pi}\}$, y finalmente

$$P\left(|f - \tilde{f}| > \epsilon\right) \leq P\left(||Q_\theta(p) - \widetilde{Q_{\theta,\lambda}}(p)||_\infty > \frac{\epsilon}{\pi}\right) \leq \frac{\pi}{\epsilon}\left(\frac{C}{\sqrt{\lambda}}||R_\theta f||_{L^2} + \int_{A^c} |\widehat{R_\theta f}(q)||q|\, dq\right)$$

□

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos presentado un esquema de aproximación por medio de muestras tomadas aleatoriamente para la reconstrucción de una señal y la inversión de la transformada de Radon. Como se puede observar en los resultados principales (Teoremas 1 y 2), el error de aproximación que se comete está controlado tanto por el aliasing como por la intensidad con la que se obtienen las muestras.

REFERENCIAS

[1] M. G. BEATY, M.M. DODSON, *The WKS theorem, spectral translates and Plancherel's formula*, J. Fourier Anal. Appl., vol. 10 (2), pp.179-199, 2004.

[2] S. R. DEANS, *The Radon Transform and Some of its Applicatios*, Wiley and Sons, New York, 1983.

[3] A. PAPOULIS, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes.* McGraww-Hill Series in Electrical Engineering, 1991.

[4] P. PROTTER, *Stochastic Integration and Differential Equations.* Springer, 1990.