

Propiedades Lipschitzianas para el Par Dual en Optimización Lineal Cónica

by

Andrea Beatriz Ridolfi

Universidad Nacional de San Luis
Facultad de Ciencias Físico, Matemáticas y Naturales

TESIS PARA OPTAR AL DOCTORADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS

Submitted in Partial Fulfillment of the
Requirements for the Degree of

Asesora: Dra. Virginia Norma Vera de Serio

The University of New Mexico

Albuquerque, New Mexico

December, 2014

©2014, Andrea Beatriz Ridolfi

A Victor, Sofía, Rocío y Claudia.

Agradecimientos

Quiero agradecer a todos los que me acompañaron y me alentaron en tantos años de estudio.

En primer lugar, a mi directora Virginia, a quien admiro y respeto. Por su dedicación, su tiempo, su generosidad y su excelencia. Por abrirme las puertas de su hogar y ofrecerme mucho más que su conocimiento. Por su confianza y su calidad humana. Además quiero agradecerle a Felipe su apoyo desinteresado y su aval para que pudiera obtener la beca de CONICET, a quien también agradezco y con la cual fue posible realizar estos estudios. A Marco, con quien fue un honor trabajar, por enriquecerme con su experiencia. También a aquellos profesores de mi carrera de Licenciatura, en la Facultad de Ciencias Físico, Matemáticas y Naturales de la Universidad Nacional de San Luis, que supieron ser más que profesores. Por sus consejos y su confianza, en especial a Ruth, Felipe, Monona y Pepe, quienes dejaron su huella en mí y me dieron la formación y el estímulo para seguir este camino.

A Victor, mi compañero del alma, por su amor, por su paciencia, sus renunciadas, su apoyo, y simplemente por ser quién es. A mis soles, Sofía y Rocío, que con sus pocos añitos me han dado tanto, que han sabido esperar con paciencia y resignación a su mamá y han llenado de luz mis días.

A mis queridos padres, que han sentido como propio el esfuerzo de este trabajo, acompañándome siempre y acudiendo cuando los necesito. A mis abuelos, por ser las raíces de la familia que tengo. A mi querida hermana, que con su fuerza me anima, y me muestra las cosas que son verdaderamente importantes. A mi hermano Mauro y a Celina, que me tienden una mano. A Rodolfo, por recibirnos en San Luis con tanta generosidad. A mis sobrinas y sobrinos, porque alegran mis días. A mis Tías y a Viviana, por su preocupación y cariño.

A Cristina y Ricardo, por su confianza y por recibirme con tanto cariño en su familia.

A Estela, por escucharme, acompañarme y sostenerme en este difícil tramo de mi vida.

También a mis amigos, que me han apoyado y acompañado, en especial a Jorge y Fabiola que nos reciben siempre con tanto cariño en nuestros viajes a Mendoza y han venido al rescate junto con Segu y Leo. A Carla, por estar siempre a mi lado. A Cecilia y Piru, por su amistad.

A mis colegas y compañeros de trabajo en San Rafael. A Carlos, por su generosidad, su apoyo, su confianza y por enseñarme a ver las cosas de otro modo. A Francisca, por comprenderme y abrirme su puerta cuando llegué a San Rafael. A Vero, Susana, Graciela y Estela por su amistad, su compañía y por toda la ayuda que me brindan. A Silvana y Daniel, por hacer ameno mi lugar de trabajo. A Vero y Mercedes, por ofrecerme su ayuda en mis viajes a Mendoza.

A todos aquellos que confiaron en mí.

Propiedades Lipschitzianas para el Par Dual en Optimización Lineal Cónica

by

Andrea Beatriz Ridolfi

RESUMEN OF TESIS PARA OPTAR AL DOCTORADO EN
CIENCIAS MATEMÁTICAS

Submitted in Partial Fulfillment of the
Requirements for the Degree of

Asesora: Dra. Virginia Norma Vera de Serio

The University of New Mexico

Albuquerque, New Mexico

December, 2014

Propiedades Lipschitzianas para el Par Dual en Optimización Lineal Cónica

by

Andrea Beatriz Ridolfi

Universidad Nacional de San Luis

Facultad de Ciencias Físico, Matemáticas y Naturales

Ph.D., Electrical Engineering, University of New Mexico, 2014

Resumen

Este trabajo analiza la estabilidad de los conjuntos factibles de un problema de optimización lineal cónica en dimensión infinita y de su dual asociado. A través del concepto de coderivada se establece una caracterización de la propiedad de tipo Lipschitz de las aplicaciones conjunto factible de ambos problemas. Se obtiene una fórmula para el cálculo de la constante Lipschitz de la aplicación factible del problema primal en cierto punto, que coincide con la norma de la coderivada en dicho punto. El caso del dual es más complejo y se obtienen estimaciones de esta cota. Por otro lado se utiliza la noción de derivada gráfica para estimar la cota lipschitziana del problema dual en dimensión finita. Se comparan los resultados obtenidos al calcular la constante Lipschitz utilizando la coderivada y la derivada gráfica.

Índice general

List of Figures	XI
Glossary	XIII
1. Introducción	1
2. Preliminares	6
2.1. Preliminares	6
2.2. Notaciones básicas y definiciones	9
2.2.1. Topologías	9
2.2.2. Conjuntos convexos	10
2.2.3. Funciones convexas y multifunciones	11
2.3. Propiedad de Lipschitz y regularidad métrica	13
2.4. Coderivada	16
2.5. Aplicaciones conjunto factible	18
2.6. Una representación más conveniente de los problemas	19

Índice general

2.7. Areas de aplicación de la optimización lineal	22
3. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema primal	24
3.1. Caracterización de la coderivada	27
3.2. Estabilidad de tipo Lipschitz y cálculo de su cota.	38
3.3. Ejemplos: Cotas lipschitzianas para el primal	47
4. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema dual	49
4.1. Independencia de \tilde{Q}	50
4.2. Caracterización de la coderivada	56
4.3. Estabilidad de tipo Lipschitz y estimación de su cota.	63
4.4. Ejemplos: Cotas lipschitzianas para el dual	70
5. Derivada gráfica	73
5.1. Cono tangente y derivada gráfica	73
5.2. Estimación de la norma interior de la derivada gráfica	76
5.3. Ejemplos: Cotas lipschitzianas con derivada gráfica para el dual	85
5.4. Comentarios	91
A. Apéndice	93
References	96

Índice de figuras

2.1.	F es de tipo Lipschitz en $(0,0)$	15
2.2.	No se cumple la propiedad de tipo Lipschitz en $(0,0)$	16
5.1.	Cono tangente para Ω no convexo.	74
5.2.	Coderivada y derivada gráfica en espacios reflexivos	75
5.3.	Si $1 + \bar{c}_1^* - \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 = 0$, entonces $T(\bar{c}^*, \bar{\mu}) = T(0, \hat{\mu})$	87
5.4.	Caso 2.2: $\inf \{ \ \mu\ _1 \mid \mu_2 \leq \mu_1 - c_1 \} = c_1$	88
5.5.	Caso 2.2: $\inf \{ \ \mu\ _1 \mid \mu_2 \leq \mu_1 - c_1, \mu \in \mathbb{R}_+^3 \} = c_1$	89

Glosario

\mathbb{N}	conjunto de enteros positivos.
\mathbb{R}	conjunto de números reales.
$\ell_\infty(T)$	conjunto de las funciones acotadas de T en \mathbb{R} .
$\ell_{\infty+}$	cono no negativo del espacio de las funciones acotadas en \mathbb{N} .
$x^* \mapsto \ x^*\ ^{-1}$	aplicación que asigna a cada x^* no nulo, el valor $\ x^*\ ^{-1}$.
Q^0	cono dual de Q .
B_0	cono pre-dual de B .
\mathbf{B}_Y	bola unitaria abierta en el espacio normado Y .
$\overline{\mathbf{B}}_Y$	clausura fuerte de la bola unitaria en el espacio normado Y .
\mathbb{R}^S	espacio lineal de las funciones de S en \mathbb{R} .
$\mathbb{R}^{(S)}$	espacio de funciones $\lambda \in \mathbb{R}^S$ con soporte finito.
$\mathbb{R}_+^{(S)}$	cono no negativo en $\mathbb{R}^{(S)}$ donde $\lambda_s \geq 0$ para todo $s \in S$.
(P)	problema primal.
$(P)(b, c^*)$	problema primal con perturbaciones b y c^* .
(D)	problema dual.
$(D)(b, c^*)$	problema dual con perturbaciones b y c^* .
$N(\hat{x}; \Omega)$	cono normal a Ω en \hat{x} .
$T(\hat{x}; \Omega)$	cono tangente a Ω en \hat{x} .
$\mu_\nu \xrightarrow{w^*} \mu$	convergencia con la topología débil estrella.
$x_j \rightarrow x$	convergencia con la topología de la norma.
sup	supremo.
inf	ínfimo.

Glosario

máx	máximo.
mín	mínimo.
$\text{dom } f$	dominio efectivo de f .
$\text{gph } f$	gráfico de f .
$\text{epi } f$	epígrafo de f .
$\text{conv } \Omega$	cápsula convexa de Ω .
$\text{cone } \Omega$	cápsula cónica de Ω .
w -lím	límite con la topología débil.
w^* -lím	límite con la topología débil estrella.
lím inf	límite inferior.
lím sup	límite superior.
$\text{int } \Omega$	interior topológico de Ω .
$\text{cl } \Omega$	clausura de Ω con respecto a la topología de la norma.
$\text{cl}^w \Omega$	clausura de Ω con respecto a la topología débil.
$\text{cl}^* \Omega$	clausura de Ω con respecto a la topología débil estrella.
f^*	función conjugada de f .
$\text{dist}(y, \Omega)$	distancia de un punto y a un conjunto Ω .
s.a.	sujeto a.
$\text{lip } F$	cota lipschitz de F .
$\text{reg} F$	módulo de regularidad de F .
$\text{sur} F$	tasa de suryección de F .
$D^* F$	coderivada de F .
DF	derivada gráfica de F .
A^T	matriz traspuesta de A .
$\ H\ ^+$	norma exterior de H .
$\ H\ ^-$	norma interior de H .
X^*	espacio dual de X .
X^{**}	espacio dual de $(X^*, \ \cdot\)$, donde $\ \cdot\ $ es la norma operador.

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo analiza la estabilidad de un problema de optimización lineal cónica en dimensión infinita dado por:

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{Sup} \quad \langle \bar{c}^*, x \rangle \\ & \text{s.a.} \quad \langle a_t^*, x \rangle \leq \bar{b}_t, \quad t \in T, \\ & \quad \quad x \in Q, \end{aligned}$$

y de su dual asociado:

$$\begin{aligned} (D) \quad & \text{Inf} \quad \langle \mu, \bar{b} \rangle \\ & \text{s.a.} \quad A^* \mu \in \bar{c}^* - Q^0 \\ & \quad \quad \mu \geq 0, \end{aligned}$$

donde T es un conjunto de índices arbitrario, posiblemente infinito, Q es un cono convexo cerrado en un espacio real de Banach X , \bar{b}_t , $t \in T$, son números reales y a_t^* , $t \in T$, y \bar{c}^* pertenece a X^* (espacio dual topológico de X). Finalmente A^* es el operador adjunto del operador lineal $A : X \rightarrow \ell_\infty(T)$ definido por $Ax := (\langle a_t^*, x \rangle)_{t \in T}$, donde $\ell_\infty(T)$ es el espacio real de Banach de todas las funciones acotadas en T con la norma supremo.

Capítulo 1. Introducción

El análisis de la estabilidad se llevará a cabo a través del estudio de los conjuntos factibles de ambos problemas considerando perturbaciones $b \in \ell_\infty(T)$ y $c^* \in X^*$, respectivamente, además se realizará un análisis cuantitativo a través de la estimación de cotas lipschitzianas de las respectivas aplicaciones conjunto factible.

A través del concepto de coderivada se establece una caracterización de la propiedad de tipo Lipschitz de las aplicaciones conjunto factible de ambos problemas. Se obtiene una fórmula para el cálculo de la constante de Lipschitz de la aplicación factible del problema primal en cierto punto, que coincide con la norma de la coderivada en dicho punto. El caso del dual es más complejo y se obtienen estimaciones de esta cota. Por otro lado se utiliza la noción de derivada gráfica para obtener el cálculo de la cota lipschitziana del problema dual en dimensión finita.

La coderivada es una suerte de derivada de multifunciones, provee extensiones del operador derivada adjunta a aplicaciones no suaves y multivaluadas. En el caso de funciones (univaluadas), ésta se reduce al clásico operador derivada adjunta en el punto en cuestión. Mientras que la derivada generalizada tangencialmente extiende el concepto de derivada clásica a aplicaciones arbitrarias (multivaluadas).

Mordukhovich [18], estudia la diferenciación generalizada de aplicaciones multivaluadas empleando la *aproximación geométrica/gráfica*, que relaciona construcciones tipo derivada en aplicaciones con aproximación infinitesimal de sus gráficos. Tales aproximaciones gráficas surgen en la diferenciación clásica cuando Fermat (1636) usa la noción original de derivada de una función polinomial en un punto dado vía la *pendiente de la tangente* a su gráfica. La aproximación geométrica de Fermat fue fuertemente desarrollada en el contexto moderno por Aubin [2], quien definió, en 1981, una noción de derivada para una aplicación multivaluada via el *cono contingente* a su gráfico en el punto en cuestión, y también por Pshenichnyi [20],[19] para sus primeros desarrollos.

Capítulo 1. Introducción

Por otro lado Mordukhovich encara otra línea de aproximación gráfica para la diferenciación generalizada e introduce en 1980, [17], la noción de *coderivada* para aplicaciones multivaluadas a través del cono normal básico a su gráfico. Este es conceptualmente diferente de la derivada tangencial en la línea de Aubin y Pshenichnyi debido a la *ausencia de dualidad* entre conos tangentes y normal en contextos no convexos, claro que, para aplicaciones suaves y gráficas convexas, los dos enfoques son equivalentes. La coderivada provee extensiones del operador derivada adjunta a aplicaciones no suaves y multivaluadas, mientras la derivada generalizada tangencialmente extiende el concepto de derivada clásica a aplicaciones arbitrarias.

Una diferencia entre aproximaciones tangenciales y normales es que la primera provee aproximaciones locales a conjuntos en el espacio primal y la otra en el espacio dual e incluye información dual en el estudio del comportamiento local. Aplicando este concepto a gráficos de aplicaciones multivaluadas, las aproximaciones tangenciales generan derivadas direccionales de funciones y derivadas gráficas de multifunciones mientras que las aproximaciones normales se relacionan con los subdiferenciales de funciones y coderivadas de multifunciones.

Las aplicaciones multivaluadas son de especial interés en el análisis variacional y en el campo de la optimización, en particular ante la necesidad de analizar el comportamiento de los conjuntos de soluciones factibles y de soluciones óptimas con respecto a perturbaciones de sus parámetros. Aquí se utilizan las nociones de estabilidad lipschitziana.

Una extensión apropiada de la clásica propiedad de Lipschitz a aplicaciones multivaluadas fue desarrollada por Aubin [3], motivado por aplicaciones del análisis de estabilidad en problemas de optimización convexa. La *propiedad de Aubin* (así llamada en [22]) es una localización del comportamiento lipschitziano en un entorno de un punto dado del gráfico de la aplicación. Mordukhovich, en [18], utiliza el término de *Lipschitz-like* para nombrar a esta propiedad, ya que considera que refleja mejor

Capítulo 1. Introducción

su naturaleza. En este trabajo, acordando con Mordukhovich, la llamaremos *de tipo Lipschitz*.

Esta propiedad trae aparejado el cálculo de una constante que se utiliza a menudo para cuantificar la estabilidad de soluciones de un problema o en la tasa de convergencia de algún método numérico para determinar una solución.

La propiedad de tipo Lipschitz alrededor de un punto está relacionada con la acotación local de la norma de la coderivada, lo cual hace que esta propiedad se estudie en el contexto del análisis variacional. Las referencias más cercanas que llevan esta relación al análisis de la estabilidad de un problema de optimización, y en las cuales se inspira este trabajo, se encuentran en [4], [15] y [14].

Este trabajo consta de 5 capítulos, el presente, introductorio. El Capítulo 2 desarrolla conceptos preliminares sobre las topologías débiles, las funciones convexas, las aplicaciones multivaluadas, la propiedad de tipo Lipschitz y su relación con la regularidad métrica. Luego, el Capítulo 3 se enfoca en el problema primal y se establece una caracterización de la estabilidad lipschitziana para la aplicación conjunto factible en cierto punto de su gráfico, bajo cierta condición (fuerte de Slater) para el punto en cuestión. El resultado principal de este capítulo (ver Teorema 23) es calcular la cota lipschitziana de dicha aplicación con una fórmula que depende de los datos del problema, e igualarla a la norma de la coderivada. En la Sección 3.3 se muestra un ejemplo donde se calcula la cota lipschitziana a través de esta fórmula. El Capítulo 4 se enfoca en el problema dual asociado. La representación de éste dependerá de cierto conjunto generador del cono de restricción. En la Sección 4.1 se obtienen condiciones que garantizan la independencia de la elección de este conjunto generador, así como también caracterizaciones de la estabilidad lipschitziana similares a las obtenidas en el capítulo anterior. La Sección 4.3 se centra en el cálculo de la cota lipschitziana de la aplicación conjunto factible del problema dual, pero esta vez no se obtiene una igualdad sino una estimación de esta cota a través de una fórmula de

Capítulo 1. Introducción

cálculo en función de los datos del problema, aparecen constantes que dependen de las características del cono de restrcción y del conjunto generador elegido. También aquí se establece una relación entre la cota lipschitziana y la norma de la coderivada. En la Sección 4.4, retomando el ejemplo de la Sección 3.3, se encuentra el problema dual asociado y se calcula la cota lipschitziana utilizando la fórmula hallada. En el Capítulo 5 se presenta la derivada gráfica como herramienta alternativa para obtener la cota lipschitziana, se analiza sólo el caso del problema dual en dimensión finita y se encuentra una estimación de la cota Lipschitziana en función del cono tangente. Se verifican los resultados utilizando el ejemplo dado en la Sección 4.4 y se comparan las ventajas y desventajas de estos cálculos a través de las distintas herramientas.

En el artículo [16] aparecen algunos resultados del Capítulo 3 (enunciados, sin demostración) y otros del Capítulo 4. En dicho artículo también se estudia sobre la teoría de la dualidad y se establece que, bajo ciertas condiciones, no existe salto de dualidad (es decir el valor óptimo del problema primal coincide con el valor óptimo del problema dual), lo cual potencia las posibles aplicaciones de estos problemas.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Preliminares

El problema primal está definido en un espacio de Banach real X , el cual puede ser de dimensión infinita, admitiendo infinitas restricciones indexadas por un conjunto arbitrario T y con coeficientes acotados. Más precisamente, los elementos del problema primal son los siguientes:

- Un conjunto no vacío $\{a_t^*, t \in T\} \subset X^*$, donde X^* es el espacio dual topológico de X con el par canónico $\langle \cdot, \cdot \rangle$ entre X^* y X .

Si no hay confusión, usaremos la misma notación $\| \cdot \|$ tanto para la norma en X como para la norma en su dual X^* definida por

$$\|x^*\| := \sup \{ \langle x^*, x \rangle \mid x \in X, \|x\| \leq 1 \},$$

para x^* en X^* . Asumimos que el conjunto $\{a_t^*, t \in T\}$ es fijo, arbitrario y acotado en X^* . Como consecuencia de esto y de la desigualdad generalizada de Cauchy-Schwarz

Capítulo 2. Preliminares

tenemos, para cada $x \in X$,

$$(\langle a_t^*, x \rangle)_{t \in T} \in \ell_\infty(T),$$

donde $\ell_\infty(T)$ es el espacio de Banach de todas las funciones acotadas en T con la norma de Chebyshev

$$\|\cdot\|_\infty : \ell_\infty(T) \mapsto \mathbb{R}, \quad \|b\|_\infty := \sup_{t \in T} |b_t|$$

(el subíndice “ ∞ ” será omitido cuando no exista confusión). Cuando el conjunto de índices T es compacto y los coeficientes a_t^* son funciones continuas en T , $\ell_\infty(T)$ se reduce al clásico espacio $C(T)$ de las funciones continuas sobre conjuntos compactos.

- Q es un cono convexo cerrado con interior no vacío en X , que define un orden en X dado por: $x_1 \succeq x_2$ si y sólo si $x_1 - x_2 \in Q$.
- $\bar{b} \equiv (\bar{b}_t)_{t \in T}$ es fijo y arbitrario.
- $\bar{c}^* \in X^*$ es fijo y arbitrario.

El problema primal está definido por:

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{Sup} \quad \langle \bar{c}^*, x \rangle \\ & \text{s.a.} \quad \langle a_t^*, x \rangle \leq \bar{b}_t, \quad t \in T, \\ & \quad \quad x \in Q. \end{aligned}$$

Si introducimos el operador lineal $A : X \rightarrow \ell_\infty(T)$ definido por $Ax := (\langle a_t^*, x \rangle)_{t \in T}$, podemos re-escribir el problema primal como

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{Sup} \quad \langle \bar{c}^*, x \rangle \\ & \text{s.a.} \quad Ax \leq \bar{b}, \\ & \quad \quad x \in Q. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Capítulo 2. Preliminares

Gracias a la acotación del conjunto $\{a_t^*, t \in T\}$, el operador lineal A es acotado, además

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{t \in T} |\langle a_t^*, x \rangle| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{t \in T} \|a_t^*\| \|x\| = \sup_{t \in T} \|a_t^*\|,$$

y, para cada $t \in T$,

$$\|a_t^*\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle a_t^*, x \rangle| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{t \in T} |\langle a_t^*, x \rangle| = \|A\|,$$

por lo tanto $\|A\| = \sup_{t \in T} \|a_t^*\|$.

Introducimos ahora el *problema dual asociado* de la siguiente manera:

$$(D) \quad \begin{aligned} \text{Inf} \quad & \langle \mu, \bar{b} \rangle \\ \text{s.a.} \quad & A^* \mu \in \bar{c}^* - Q^0 \\ & \mu \geq 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde $\mu \in \ell_\infty(T)^*$, espacio dual topológico de $\ell_\infty(T)$. $A^* : \ell_\infty(T)^* \rightarrow X^*$ es el operador adjunto de A , es decir

$$\langle A^* \mu, x \rangle = \langle \mu, Ax \rangle, \text{ para cada } \mu \in \ell_\infty(T)^* \text{ y cada } x \in X.$$

Q^0 es el cono dual de Q

$$Q^0 := \{q^* \in X^* \mid \langle q^*, q \rangle \leq 0 \text{ para todo } q \in Q\}. \tag{2.3}$$

Los conjuntos factibles asociados a estos problemas son

$$\begin{aligned} F_P &:= \{x \in X \mid Ax \leq \bar{b} \text{ y } x \in Q\}, \text{ y} \\ F_D &:= \{\mu \in \ell_\infty(T)^* \mid A^* \mu \in \bar{c}^* - Q^0 \text{ y } \mu \geq 0\}; \end{aligned}$$

sus valores óptimos son

$$v_P := \sup_{x \in F_P} \langle \bar{c}^*, x \rangle \quad \text{y} \quad v_D := \inf_{\mu \in F_D} \langle \mu, \bar{b} \rangle,$$

por último, los conjuntos óptimos son,

$$\mathcal{S}_P := \{x \in F_P \mid \langle \bar{c}^*, x \rangle = v_P\}, \quad \text{y} \quad \mathcal{S}_D := \{\mu \in F_D \mid \langle \mu, \bar{b} \rangle = v_D\},$$

respectivamente.

2.2. Notaciones básicas y definiciones

2.2.1. Topologías

Sea Z un espacio de Banach y Z^* su espacio dual, los símbolos w y w^* indican la topología débil y débil estrella, respectivamente, w -lím y w^* -lím representan los límites débil y débil estrella, respectivamente. A su vez, $\text{int } \Omega$ y $\text{cl } \Omega$ son el interior y la clausura de un subconjunto $\Omega \subset Z$ con respecto a la topología de la norma, respectivamente, $\text{cl}^w \Omega$ indica la clausura de Ω en la topología débil y $\text{cl}^* \Phi$ denota la clausura con respecto a la topología débil estrella de un subconjunto $\Phi \subset Z^*$. Recordemos que, para conjuntos convexos, su clausura fuerte y débil coinciden.

Enunciamos a continuación algunas propiedades y el Teorema de Alaoglu que nos serán útil a lo largo de este trabajo. Sus respectivas demostraciones pueden encontrarse en [5, p. 235]

- La función norma $z \mapsto \|z\|$ es w -semicontinua inferiormente en Z .
- La función norma $z^* \mapsto \|z^*\|$ es w^* -semicontinua inferiormente en Z^* .
- La función $z^* \mapsto \langle z^*, \hat{z} \rangle$ es w^* -continua: para cada $\hat{z} \in Z$. (Se cumple por definición de topología débil estrella)

Teorema 1 (Teorema de Alaoglu) *Sea Z un espacio de Banach, entonces la bola unitaria cerrada*

$$S = \{z^* \in Z^* \mid \|z^*\| \leq 1\}$$

es w^ -compacta. Por lo tanto un subconjunto de Z^* es w^* -compacto si y sólo si es w^* -cerrado y acotado.*

Capítulo 2. Preliminares

Asimismo, trabajaremos con diferentes pares duales $\{Z, Z^*\}$, Z dotado con la topología original de la norma y Z^* con la topología débil estrella. En particular, (ver en [8, IV.5.1]), existe un isomorfismo isométrico entre $\ell_\infty(T)^*$ y el espacio de las medidas acotadas y aditivas

$$ba(T) = \{\mu: 2^T \rightarrow \mathbb{R}: \mu \text{ acotada y aditiva}\},$$

determinado por la identidad

$$\langle \mu, p \rangle = \int_T p_t \mu(dt) \quad \text{con } p = (p_t)_{t \in T} \in \ell_\infty(T).$$

La norma dual en $\ell_\infty(T)^*$ es la variación total:

$$\mu \in \ell_\infty(T)^* \rightarrow \|\mu\| := \sup_{A \subset T} \mu(A) - \inf_{B \subset T} \mu(B).$$

Si consideramos $\mu \in \ell_\infty(T)^*$, esta norma coincide con $\|\mu\| = \sup_{\|b\|_\infty \leq 1} |\langle \mu, b \rangle|$, donde $b \in \ell_\infty(T)$.

Cuando $\mu \geq 0$ tenemos $\|\mu\| = \mu(T)$, ya que $\mu(\emptyset) = 0$.

2.2.2. Conjuntos convexos

Dado un conjunto arbitrario de índices S , denotamos por \mathbb{R}^S al espacio lineal de las funciones de S en \mathbb{R} , por $\mathbb{R}^{(S)}$ al espacio de funciones $\lambda = (\lambda_s)_{s \in S} \in \mathbb{R}^S$ con soporte finito, es decir, $\lambda_s \neq 0$ para a lo sumo finitos $s \in S$, y por $\mathbb{R}_+^{(S)}$ al cono positivo en $\mathbb{R}^{(S)}$ donde $\lambda_s \geq 0$ para todo $s \in S$.

Dado un subconjunto $\Omega \subset Z$ de un espacio de Banach Z , la cápsula convexa de Ω es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a Ω . Esta se denota por $\text{conv } \Omega$ y coincide con el conjunto de todas las combinaciones convexas de sus elementos, si $\Omega \neq \emptyset$. Es decir, $z \in \text{conv } \Omega$ si y sólo si existe $\lambda = (\lambda_w)_{w \in \Omega} \in \mathbb{R}_+^{(\Omega)}$ con $\sum_{w \in \Omega} \lambda_w = 1$ tal que $z = \sum_{w \in \Omega} \lambda_w w$. La cápsula cónica de Ω es la intersección de todos los conos convexos conteniendo el origen, se denota por $\text{cone } \Omega$ y coincide con

Capítulo 2. Preliminares

el conjunto de todas las combinaciones no negativas de sus elementos. (Entendemos por cono a un conjunto no vacío que contiene todos los rayos $\{\lambda u \mid \lambda > 0\}$ siendo u un vector no nulo cualquiera de este conjunto). Si $\Omega = \emptyset$, adoptamos la convención $\text{cone } \Omega = \{0\}$.

Para $\Omega \subset Z$, convexo, no vacío y $\hat{x} \in \Omega$, denotamos por $N(\hat{x}; \Omega)$ al *Cono Normal* a Ω en \hat{x} definido por:

$$N(\hat{x}; \Omega) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x - \hat{x} \rangle \leq 0 \text{ para todo } x \in \Omega\}. \quad (2.4)$$

Este cono coincide con el Cono Normal (básico, limitante) dado en [18, Definition 1.1] por ser Ω un conjunto convexo (ver [18, Proposition 1.5]).

También utilizaremos la siguiente propiedad de separación fuerte (ver [24, Theorem 1.1.7]):

Teorema 2 (Teorema de separación fuerte) *Sea Z un espacio localmente convexo, sean A y $B \subset Z$ dos conjunto convexos no vacíos, entonces $0 \notin \text{cl}(A - B)$ si, y sólo si, existe $z^* \in Z^*$ tal que*

$$\sup_{z \in A} \langle z^*, z \rangle < \inf_{z \in B} \langle z^*, z \rangle.$$

2.2.3. Funciones convexas y multifunciones

Para una función convexa $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, el *dominio efectivo*, *gráfico* y *epígrafo* de f son:

$$\begin{aligned} \text{dom } f &= \{x \in X : f(x) < +\infty\}, \\ \text{gph } f &= \{(x, f(x)) \in X \times \mathbb{R} : x \in \text{dom } f\}, \quad \text{y} \\ \text{epi } f &= \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : x \in \text{dom } f \text{ y } f(x) \leq r\}, \end{aligned}$$

Capítulo 2. Preliminares

respectivamente. Si además f es una función propia (es decir, que tome valor finito en al menos un punto), la *función conjugada* f^* de f está dada por:

$$f^* : X^* \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad \text{donde}$$

$$f^*(\nu) = \sup\{\langle \nu, x \rangle - f(x) : x \in \text{dom } f\}. \quad (2.5)$$

Para un conjunto convexo $C \subset X$, la *función indicatriz* $I_C : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ está dada por

$$I_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{si } x \notin C, \end{cases}$$

en particular, la función conjugada $I_C^* : X^* \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ coincide con la *función soporte* del conjunto convexo C :

$$I_C^*(\nu) = \sup\{\langle \nu, x \rangle : x \in C\}. \quad (2.6)$$

Además, cuando C es un cono convexo, tenemos

$$I_{C^0}(\nu) = I_C^*(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu \in C^0 \\ +\infty & \text{si } \nu \notin C^0 \end{cases}, \quad (2.7)$$

donde C^0 es el cono dual definido en (2.3).

La notación $F : Z \rightrightarrows Y$ indica que para cada elemento z de Z , $F(z)$ es un subconjunto de Y . Esta aplicación la llamamos *aplicación multivaluada* (o *multifunción*). Denotamos, respectivamente, su *dominio*, *imagen o rango*, *gráfico* y *aplicación inversa* por:

$$\begin{aligned} \text{dom } F &= \{z \in Z \mid F(z) \neq \emptyset\}, \\ \text{Im } F &= \{y \in Y \mid y \in F(z) \text{ para algún } z \in Z\} = \bigcup_{z \in Z} F(z) \\ \text{gph } F &= \{(z, y) \in Z \times Y \mid y \in F(z)\}, \\ F^{-1} &: Y \rightrightarrows Z, \quad F^{-1}(y) = \{z \in Z \mid (z, y) \in \text{gph } F\}. \end{aligned}$$

Recordemos que una multifunción es *a valores convexos* si $F(z)$ es un conjunto convexo en Y , para cada $z \in Z$, es *homogénea positiva* cuando su gráfico es un cono y es *gráfico convexo* si su gráfico es un conjunto convexo en $Z \times Y$.

2.3. Propiedad de Lipschitz y regularidad métrica

Si Z e Y son espacios normados, decimos que $F : Z \rightrightarrows Y$ es de *tipo Lipschitz* alrededor de $(\hat{z}, \hat{y}) \in \text{gph } F$ ("*Locally Lipschitz-like*" según [18, pág. 47]) con módulo $\ell \geq 0$ si existen entornos U de \hat{z} y V de \hat{y} tal que

$$F(z_1) \cap V \subset F(z_2) + \ell \|z_1 - z_2\| \overline{\mathbf{B}}_Y, \quad \text{para cualquier } z_1, z_2 \in U \quad (2.8)$$

donde $\overline{\mathbf{B}}_Y$ representa la bola unitaria cerrada en el espacio Y . El ínfimo de los módulos ℓ sobre todas las combinaciones $\{\ell, U, V\}$ que cumplan (2.8) se llama *cota exacta lipschitziana* de F alrededor de (\hat{z}, \hat{y}) y se denota por $\text{lip } F(\hat{z}, \hat{y})$.

La propiedad local de tipo Lipschitz es también conocida como propiedad *seudo lipschitziana* o *propiedad de Aubin* de multifunciones. Notar que (2.8) nos muestra que esta propiedad es estable con respecto a pequeñas perturbaciones del punto de referencia. Debido a esto cumple un papel importante en lo referido a la estabilidad de soluciones con respecto a perturbaciones, tasa de convergencia en aproximaciones, procedimientos numéricos, etc. La cota exacta lipschitziana, que se utiliza a menudo para cuantificar la estabilidad de soluciones de un problema o en la tasa de convergencia de algún método numérico para determinar una solución, por ejemplo el método de Newton (ver [1]).

Es conocido que la cota exacta lipschitziana de F alrededor de (\hat{z}, \hat{y}) admite la siguiente representación vía la función distancia de un punto a un conjunto:

$$\text{lip } F(\hat{z}, \hat{y}) = \limsup_{(z,y) \rightarrow (\hat{z}, \hat{y})} \frac{\text{dist}(y, F(z))}{\text{dist}(z, F^{-1}(y))}$$

Capítulo 2. Preliminares

donde $\inf \emptyset = \infty$ y $0/0 := 0$. Acordamos que $\text{lip } F(\widehat{z}, \widehat{y}) = \infty$ si F no es de tipo Lipschitz alrededor de $(\widehat{z}, \widehat{y})$.

Se dice que $M : Y \rightrightarrows Z$ con $\text{dom } M \neq \emptyset$, es *métricamente regular* alrededor de $(\widehat{y}, \widehat{z}) \in \text{gph } M$ con módulo $\mu > 0$ si existen entornos V de \widehat{y} y U de \widehat{z} tal que

$$\text{dist}(y, M^{-1}(z)) \leq \mu \text{dist}(z, M(y)), \quad \text{para cualquier } y \in V \text{ y } z \in U. \quad (2.9)$$

El ínfimo de los módulos μ sobre todas las combinaciones $\{\mu, V, U\}$ que cumplan (2.9) se llama *cota exacta (tasa/módulo) de regularidad* de M alrededor de $(\widehat{y}, \widehat{z})$ y se denota por $\text{reg}M(\widehat{y}, \widehat{z})$.

Se dice que $M : Y \rightrightarrows Z$ con $\text{dom } M \neq \emptyset$, tiene la propiedad de *cubrimiento local* o es *abierta con tasa lineal* alrededor de $(\widehat{y}, \widehat{z}) \in \text{gph } M$ con módulo $k > 0$ si existen entornos V de \widehat{y} y U de \widehat{z} tal que para cada $y \in V$ y cada $r > 0$

$$[M(y) + kr \mathbf{B}_Z] \cap V \subset M(y + r \mathbf{B}_Y) \quad (2.10)$$

o equivalentemene

$$\mathbf{B}_Z(M(y), rk) \cap V \subset M(\mathbf{B}_Y(y, r))$$

donde \mathbf{B}_Y y \mathbf{B}_Z representan las bolas unitarias abiertas en los espacios Y y Z respectivamente y $\mathbf{B}_Z(x, r) = x + r\mathbf{B}_Z$. El supremo de los módulos k sobre todas las combinaciones $\{k, V, U\}$ que cumplan (2.10) se llama *cota exacta de cubrimiento (tasa de suryección* (ver [15, p.256])) de M alrededor de $(\widehat{y}, \widehat{z})$ y se denota por $\text{sur}M(\widehat{y}, \widehat{z})$.

La regularidad métrica es una propiedad de multifunciones que garantiza localmente cierto tipo de comportamiento suryectivo. Es equivalente a la propiedad de cubrimiento (ver [18, Theorem 1.52]) que nos indica que el radio de un cubrimiento por bolas en el codominio (cubrimiento formado por bolas de un mismo radio llamado *radio del cubrimiento*) es proporcional al radio de un cubrimiento por bolas en el dominio. Además se establece la relación

$$\text{reg}M(\widehat{y}, \widehat{z}) = [\text{sur}M(\widehat{y}, \widehat{z})]^{-1}.$$

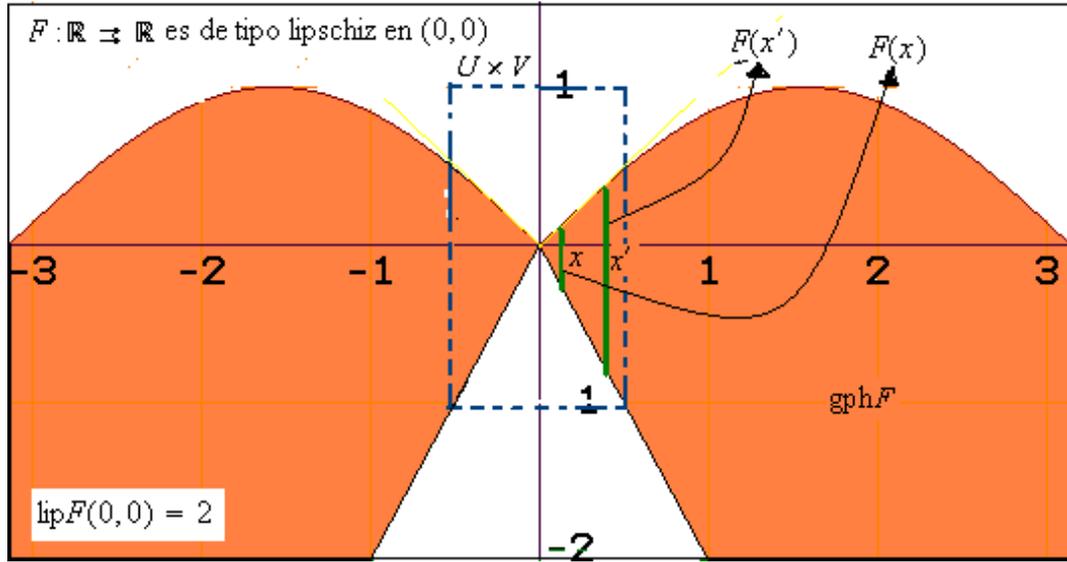


Figura 2.1: F es de tipo Lipschitz en $(0,0)$

Por otro lado, la propiedad de tipo Lipschitz de una aplicación arbitraria $F : Z \rightrightarrows Y$ entre espacios de Banach con $\text{dom } F \neq \emptyset$ es equivalente a la propiedad de regularidad métrica de la aplicación inversa $F^{-1} : Y \rightrightarrows Z$ (ver [18, Subsección 1.2.3], y sus referencias) con el mismo módulo. Así,

$$\text{lip } F(\hat{z}, \hat{y}) = \text{reg } F^{-1}(\hat{y}, \hat{z}) = [\text{sur } F^{-1}(\hat{y}, \hat{z})]^{-1}. \quad (2.11)$$

A continuación enunciamos parte del clásico Teorema de Robinson- Ursescu [7, Theorem 5B.4]

Teorema 3 Sea $M : Y \rightrightarrows Z$ una multifunción gráfico convexo cerrado y sea $(\hat{y}, \hat{z}) \in \text{gph } M$, entonces son equivalentes:

- (i) $\hat{y} \in \text{int}(\text{Im } M)$.
- (ii) M es métricamente regular alrededor de (\hat{y}, \hat{z}) .

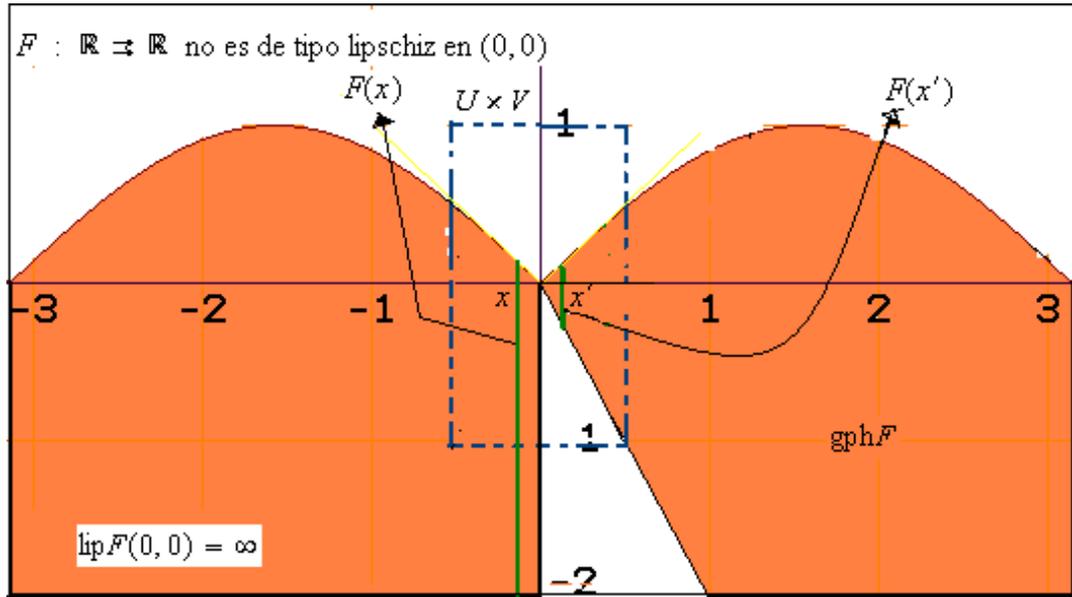


Figura 2.2: No se cumple la propiedad de tipo Lipschitz en $(0,0)$

2.4. Coderivada

Para $F : Z \rightrightarrows Y$ con $\text{dom } F \neq \emptyset$, llamamos *coderivada de F en $(\hat{z}, \hat{y}) \in \text{gph } F$* (Normal Coderivative según [18], pág 41) a la multifunción homogénea positiva

$$D^*F(\hat{z}, \hat{y}) : Y^* \rightrightarrows Z^*$$

definida por:

$$D^*F(\hat{z}, \hat{y})(y^*) := \{z^* \in Z^* \mid (z^*, -y^*) \in N((\hat{z}, \hat{y}); \text{gph } F)\}, \quad y^* \in Y^*, \quad (2.12)$$

donde $N((\hat{z}, \hat{y}); \text{gph } F)$ es el cono normal al $\text{gph } F$ en (\hat{z}, \hat{y}) definido en [18, Definition 1.1], que, en nuestro caso, coincidirá con el cono normal dado en (2.4) ya que trabajaremos en un contexto en el cual el gráfico de F es convexo. La norma de esta coderivada está definida por

$$\|D^*F(\hat{z}, \hat{y})\| := \sup \{\|z^*\| \mid z^* \in D^*F(\hat{z}, \hat{y})(y^*), \|y^*\| \leq 1\}. \quad (2.13)$$

Capítulo 2. Preliminares

En [18, Definition 1.32] se denota por $D_N^*F(\widehat{z}, \widehat{y})$ a esta coderivada haciendo referencia a su construcción a través del cono normal (básico limitante) y además para diferenciarla de la *coderivada mixta* $D_M^*F(\widehat{z}, \widehat{y})$, la cual lleva este nombre por considerar en su construcción la convergencia de norma en el espacio Y y la convergencia débil estrella en el espacio Z . A continuación enunciamos un teorema obtenido de [18, Proposición 1.37 y Theorem 1.44 (i)], cuando F tiene gráfico convexo, adaptando la notación a la del presente trabajo.

Teorema 4 *Sea $F : Z \rightrightarrows Y$ con $\widehat{z} \in \text{dom } F$. Si el gráfico de F es convexo y F es de tipo Lipschitz alrededor de $(\widehat{z}, \widehat{y}) \in \text{gph } F$ entonces*

$$\|D^*F(\widehat{z}, \widehat{y})\| \leq \text{lip } F(\widehat{z}, \widehat{y}) < \infty \quad (2.14)$$

y

$$D^*F(\widehat{z}, \widehat{y})(0) = \{0\}.$$

Teniendo en cuenta [15, Theorem 3], para una aplicación multivaluada $F^{-1} : Y \rightrightarrows Z$ a valores convexos, se dice que F^{-1} es *perfectamente regular* en $(\widehat{y}, \widehat{z}) \in \text{gph } F^{-1}$ si, y sólo si,

$$\text{sur}F^{-1}(\widehat{y}, \widehat{z}) = \inf \{\|y^*\| \mid y^* \in D^*F^{-1}(\widehat{y}, \widehat{z})(z^*), \|z^*\| = 1\}.$$

La siguiente proposición se demuestra en [16, Pag. 4] y nos muestra que bajo ciertas condiciones se obtiene la igualdad en (2.14).

Proposición 5 *Si $F^{-1} : Y \rightrightarrows Z$ es a valores convexos y perfectamente regular en $(\widehat{y}, \widehat{z}) \in \text{gph } F^{-1}$, entonces*

$$\text{lip } F(\widehat{z}, \widehat{y}) = \|D^*F(\widehat{z}, \widehat{y})\|$$

Capítulo 2. Preliminares

Una condición suficiente para que una aplicación multivaluada sea perfectamente regular en un punto de su gráfico se encuentra en [15, Proposition 5], la cual será utilizada en el capítulo 4 y la enunciamos a continuación

Proposición 6 *Sea $F : Z \rightrightarrows Y$ a valores convexos, con $\text{int } F(Z) \neq \emptyset$. Sea $(\hat{z}, \hat{y}) \in \text{gph } F$ y $S_{\text{gph } F - (\hat{z}, \hat{y})}(z^*, y^*)$ la función soporte del conjunto convexo $\text{gph } F - (\hat{z}, \hat{y})$ en el punto $(z^*, y^*) \in Z^* \times Y^*$. Si existe un subconjunto w^* -compacto \bar{Q} de la esfera unitaria en Y^* tal que $y^* \in \bar{Q}$, siempre que $\|y^*\| = 1$ y $S_{\text{gph } F - (\hat{z}, \hat{y})}(z^*, y^*) < \infty$, entonces F es perfectamente regular en (\hat{z}, \hat{y}) .*

2.5. Aplicaciones conjunto factible

Si admitimos perturbaciones $b \in \ell_\infty(T)$ del término independiente \bar{b} fijo, y $c^* \in X^*$ del elemento que define la función objetivo \bar{c}^* , podemos considerar los problemas primal y dual perturbados

$$\begin{aligned} (P) (b, c^*) : \quad & \text{Sup} \quad \langle \bar{c}^* + c^*, x \rangle \\ & \text{s.a.} \quad \langle a_t^*, x \rangle \leq \bar{b}_t + b_t, \quad t \in T, \\ & \quad \quad x \in Q, \end{aligned} \tag{2.15}$$

y

$$\begin{aligned} (D) (b, c^*) : \quad & \text{Inf} \quad \langle \mu, \bar{b} + b \rangle \\ & \text{s.a.} \quad A^* \mu \in \bar{c}^* + c^* - Q^0 \\ & \quad \quad \mu \geq 0. \end{aligned}$$

Para estudiar la estabilidad del par dual consideraremos las *aplicaciones conjunto factible* $\mathcal{F}_P : \ell_\infty(T) \rightrightarrows X$ y $\mathcal{F}_D : X^* \rightrightarrows \ell_\infty(T)^*$ definidas como:

$$\mathcal{F}_P(b) := \{x \in X \mid Ax \leq \bar{b} + b, \quad x \in Q\}, \quad y \tag{2.16}$$

$$\mathcal{F}_D(c^*) := \{\mu \in \ell_\infty(T)^* \mid A^* \mu \in \bar{c}^* + c^* - Q^0, \quad \mu \geq 0\},$$

cuyas respectivas aplicaciones inversas son

$$\mathcal{F}_P^{-1}(x) := \begin{cases} Ax - \bar{b} + \ell_\infty(T)_+, & \text{si } x \in Q, \\ \emptyset, & \text{si } x \notin Q, \end{cases} \quad \text{y}$$

$$\mathcal{F}_D^{-1}(\mu) := \begin{cases} A^*\mu - \bar{c}^* + Q^0, & \text{si } \mu \geq 0, \\ \emptyset, & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

Nuestro objetivo es caracterizar las propiedades de tipo Lipschitz de las aplicaciones conjunto factible \mathcal{F}_P y \mathcal{F}_D , alrededor de los puntos $(0, \hat{x}) \in \text{gph } \mathcal{F}_P$ y $(0, \hat{\mu}) \in \text{gph } \mathcal{F}_D$ respectivamente, y obtener, para ambas aplicaciones, cotas exactas lipschitzianas. A través de este trabajo, el parámetro principal de la aplicación conjunto factible del problema primal es la función cero $b = 0$ en $\ell_\infty(T)$, y el parámetro principal de la aplicación conjunto factible del problema dual es la función $c^* = 0$ en X^* .

2.6. Una representación más conveniente de los problemas

De forma similar a la definición de cono dual dada en (2.3), para un conjunto no vacío $B \subset X^*$, definimos el *cono pre dual*

$$B_0 := \{x \in X \mid \langle x^*, x \rangle \leq 0, \text{ para todo } x^* \in B\}.$$

Por otro lado, para $A \subset X$, llamamos *bi dual* de A al cono $(A^0)_0$. Es conocido que (ver por ejemplo [24, Theorem 1.1.9], ó [6, Chapter V, Theorem 1.8, Corollary 1.9]), si X es un espacio localmente convexo, $\emptyset \neq A \subset X$ y $\emptyset \neq B \subset X^*$, entonces

$$(A^0)_0 = \text{cl}(\text{cone}(A)), \quad \text{y}$$

$$(B_0)^0 = \text{cl}^*(\text{cone}(B))$$

Capítulo 2. Preliminares

en nuestro caso, como Q es un cono no vacío convexo cerrado en X , se cumple que

$$Q = \text{cl}(\text{cone } Q) = (Q^0)_0.$$

Ahora, por ser Q^0 un cono, si $\langle q^*, x \rangle \leq 1$ para cada $q^* \in Q^0$, entonces $\lambda \langle q^*, x \rangle = \langle \lambda q^*, x \rangle \leq 1$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, luego $\langle q^*, x \rangle \leq 0$. Recíprocamente $\langle q^*, x \rangle \leq 0$ implica $\langle q^*, x \rangle \leq 1$. Así quedan probadas las equivalencias

$$\begin{aligned} x &\in Q = (Q^0)_0 \\ &\Leftrightarrow \langle q^*, x \rangle \leq 0 \text{ para todo } q^* \in Q^0 \\ &\Leftrightarrow \langle q^*, x \rangle \leq 1 \text{ para todo } q^* \in Q^0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Similarmente, para el cono w^* -cerrado $W = \{\mu \in \ell_\infty(T)^* \mid \mu \geq 0\}$ del problema dual, se cumple la igualdad $W = (W_0)^0$ y la equivalencia

$$\mu \in W = (W_0)^0 \Leftrightarrow \langle p, \mu \rangle \leq 1 \text{ para todo } p \in W_0,$$

donde $W_0 = \{p \in \ell_\infty(T) : p \leq 0\} = \ell_\infty(T)_-$.

Por otro lado, si consideramos un conjunto $\tilde{Q} \subset Q$, cerrado, acotado, que no contenga el vector nulo y genere al cono Q , la condición $A^*\mu \in \bar{c}^* + c^* - Q^0$ es equivalente a que $\langle \mu, Aq \rangle \geq \langle \bar{c}^* + c^*, q \rangle$ para todo $q \in \tilde{Q}$,

Así, podemos reformular los problemas perturbados como

$$\begin{aligned} (P) (b, c^*) : \quad &\text{Sup} \quad \langle \bar{c}^* + c^*, x \rangle \\ &\text{s.a.} \quad \langle a_t^*, x \rangle \leq \bar{b}_t + b_t, \quad t \in T, \\ &\quad \langle q^*, x \rangle \leq 1, \quad q^* \in Q^0, \end{aligned} \tag{2.18}$$

y

$$\begin{aligned} (D) (b, c^*) : \quad &\text{Inf} \quad \langle \mu, \bar{b} + b \rangle \\ &\text{s.a.} \quad \langle \mu, Aq \rangle \geq \langle \bar{c}^* + c^*, q \rangle, \quad q \in \tilde{Q} \\ &\quad \langle \mu, p \rangle \geq -1 \quad p \in \ell_\infty(T)_+. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Capítulo 2. Preliminares

Notemos que la nueva representación de $(D)(b, c^*)$ depende de \tilde{Q} y debería denotarse $(D)(b, c^*, \tilde{Q})$, haremos abuso de notación para facilidad de lectura. Esta representación es más conveniente que la anterior porque nos permite utilizar resultados sobre estabilidad que ya han sido obtenidos para problemas con restricciones lineales o convexas, como los lemas que presentamos en esta sección ya que, en el caso del primal, la restricción $x \in Q$ se representa a través de restricciones de desigualdades lineales. Lo mismo sucede con el problema dual. Por otro lado, la ventaja de utilizar la equivalencia (2.17) es que se puede trabajar con la conocida condición de Slater que presentamos a continuación.

Definición 7 \mathcal{F}_P satisface la condición fuerte de Slater en $b = (b_t)_{t \in T}$ si existe $\hat{x} \in Q$ tal que

$$\sup_{t \in T} (\langle a_t^*, \hat{x} \rangle - \bar{b}_t - b_t) < 0. \quad (2.20)$$

Se dice que $\hat{x} \in Q$ es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_P en $b = (b_t)_{t \in T}$ si \hat{x} satisface la condición (2.20).

Nota 8 Observemos que si $x_0 \in Q$ es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_P en 0 , y si $0 < \vartheta < 1$ es tal que $\sup_{t \in T} (\langle a_t^*, x_0 \rangle - \bar{b}_t) \leq -\vartheta < 0$, entonces, para $b = (b_t)_{t \in T} \in \ell_\infty(T)$ con $\|b\| \leq \frac{\vartheta}{2}$,

$$\begin{aligned} \langle a_t^*, x_0 \rangle - \bar{b}_t - b_t &\leq -\vartheta - b_t \leq -\vartheta + \|b\| \\ &\leq -\vartheta + \frac{\vartheta}{2} = -\frac{\vartheta}{2} < 0. \end{aligned}$$

Así x_0 es punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_P en b con $b \in \ell_\infty(T)$ suficientemente cerca de 0 .

Definición 9 \mathcal{F}_D satisface la condición fuerte de Slater en c^* si existe $\hat{\mu} \geq 0$ tal que

$$\inf_{q \in \tilde{Q}} (\langle \hat{\mu}, Aq \rangle - \langle \bar{c}^* + c^*, q \rangle) > 0. \quad (2.21)$$

Capítulo 2. Preliminares

Se dice que $\hat{\mu} \geq 0$ es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_D en c^* si $\hat{\mu}$ satisface la condición (2.21).

Observemos que, a diferencia del problema primal, la condición fuerte de Slater para \mathcal{F}_D en c^* depende de la elección del conjunto \tilde{Q} . Sin embargo, en Nota 33 de la Sección 4.1 veremos que bajo ciertas características del cono Q , esta condición es independiente de la elección de \tilde{Q} e incluso se conservan los mismos puntos fuertes de Slater.

Como resultado precedente utilizaremos el siguiente lema de [9, Theorem 4.1] el cual dice que:

Lema 10 (Lema Asintótico de Farkas) Sea $\sigma = \{f_t(x) \leq 0, \quad t \in T; \quad x \in C\}$ un sistema consistente, donde C es un conjunto convexo cerrado no vacío de X y $f_t : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función propia, convexa, semicontinua inferiormente (lsc) para todo $t \in T$. Sea $z^* \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces son equivalentes:

(i) Si $x \in C$ y $f_t(x) \leq 0$ para todo $t \in T$, entonces $\langle z^*, x \rangle \leq \alpha$. (Es decir, $\langle z^*, x \rangle \leq \alpha$ es una consecuencia de σ).

(ii) $(z^*, \alpha) \in \text{cl}^* \text{ cone } \{\bigcup_{t \in T} \text{epi } f_t^* \cup \text{epi } I_C^*\}$.

2.7. Areas de aplicación de la optimización lineal

El problema (P) se lo llama también problema de optimización cónica lineal y se encuentra dentro de los llamados problemas de optimización cónica. Esta es una forma universal de programación convexa ya que cada conjunto convexo es la intersección de un hiperplano con un cono apropiado en un espacio de mayor dimensión. Una de las ventajas de la forma cónica es que la mayoría de los problemas convexos con interesantes aplicaciones pueden ser reformulados como problemas cónicos

Capítulo 2. Preliminares

resolubles en tiempo polinomial, aunque en muchos casos ellos sean problemas no suaves.

Llamamos programación lineal semi-infinita (PLSI) cuando la dimensión del espacio X de las variables de decisión ó el conjunto de índices T (pero no ambos) del problema (P) sin restricciones al cono es infinito. Observemos que, si la dimensión del espacio X es finita, la representación dada en (2.18) corresponde a un problema de PLSI. Algunos modelos de ésta surgen en la economía matemática, teoría de juego, probabilidad y estadística (ver [12]). También tiene grandes aplicaciones reales en programación semidefinida, telecomunicaciones y problemas de control. Un resumen actualizado de estas aplicaciones se encuentra en [11] y [13].

Mencionaremos en particular dos tipos de aplicaciones:

Problema de los momentos: En [23] se discute en detalle una aplicación de la teoría de la dualidad abstracta de problemas lineales cónicos al problema de los momentos. Allí se presenta un problema original de la forma (2.1), donde la variable de decisión μ está en cierto espacio X de medidas signadas de dimensión infinita, mientras que $A\mu$ está en un espacio de dimensión finita, Q es el cono convexo generado por el conjunto de medidas de probabilidad $\{\mu \in X \mid \mu \geq 0 \text{ y } \mu(T) = 1\}$ y se busca maximizar el valor esperado de una función particular con respecto a las medidas de probabilidad. El problema dual asociado queda representado como un PLSI y se prueba que bajo ciertas condiciones no hay salto de dualidad (es decir, el valor óptimo del problema primal coincide con el valor óptimo del problema dual).

Control óptimo: En [10] se establece que los problemas de control óptimo promedios a largo plazo (problemas de horizonte infinito) son asintóticamente equivalentes a los problemas de programación lineal en dimensión infinita, a su vez, éstos pueden ser aproximados por problemas de programación lineal finita, cuyas soluciones pueden ser usadas para construcciones numéricas de control óptimo.

Capítulo 3

Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema primal

En [4] la estabilidad de la factibilidad del problema primal y la existencia de un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_P están relacionadas con cierto conjunto llamado conjunto característico. En nuestro caso, también debemos considerar la condición $x \in Q$. Por lo tanto, a partir de la representación (2.18), definimos, como en [4], el *conjunto característico* de $\mathcal{F}_P(b)$ (o del problema primal $(P)(b, c^*)$) como el subconjunto convexo de $X^* \times \mathbb{R}$ generado por el conjunto de coeficientes del sistema de restricciones:

$$C_P(b) := \text{conv} \left(\{(a_t^*, \bar{b}_t + b_t) \mid t \in T\} \cup \{(q^*, 1) \mid q^* \in Q^0\} \right). \quad (3.1)$$

Con respecto a este conjunto se considerará la topología producto en $X^* \times \mathbb{R}$. La siguiente proposición establece algunas equivalencias con la propiedad de que \mathcal{F}_P sea de tipo Lipschitz alrededor de (b, x) para todo $x \in \mathcal{F}_P(b)$, en particular la equivalencia (iii) se traduce como “el problema primal $P(b, c^*)$ es *establemente consistente*”,

Capítulo 3. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema primal

de aquí es que al estudiar las propiedades de tipo Lipschitz de \mathcal{F}_P estamos a la vez estudiando la estabilidad de la consistencia del problema primal.

Proposición 11 *Sea $b \in \text{dom } \mathcal{F}_P$ para el problema primal $P(b, c^*)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) *Existe $\hat{x} \in Q$ que es punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_P en b .*
- (ii) $(0, 0) \notin \text{cl}^* C_P(b)$.
- (iii) $b \in \text{int}(\text{dom } \mathcal{F}_P)$
- (iv) \mathcal{F}_P es de tipo Lipschitz alrededor de (b, x) para todo $x \in \mathcal{F}_P(b)$.

Además, si Q tiene interior no vacío, todas las condiciones anteriores son equivalentes a:

- (v) *Existe un punto $\bar{x} \in X$ tal que $(b, \bar{x}) \in \text{int}(\text{gph } \mathcal{F}_P)$.*

Demostración. La demostración de (i) \Leftrightarrow (ii), es una aplicación directa de [4, Lemma 2.3] al sistema

$$\sigma = \left\{ \langle a_{\hat{t}}^*, x \rangle \leq \bar{b}_{\hat{t}} + b_{\hat{t}}, \quad \hat{t} \in \hat{T}, \quad x \in X \right\},$$

donde $\hat{T} = T \cup Q^*$ (unión disjunta),

$$a_{\hat{t}}^* = \begin{cases} a_t^* & \text{si } \hat{t} = t \in T \\ q^* & \text{si } \hat{t} = q^* \in Q^0 \end{cases}, \quad \text{y} \quad \bar{b}_{\hat{t}} = \begin{cases} \bar{b}_t & \text{si } \hat{t} = t \in T \\ 1 & \text{si } \hat{t} = q^* \in Q^0 \end{cases},$$

cuidando de perturbar sólo $b_{\hat{t}}$ para $\hat{t} = t \in T$, (e.d. $b_{\hat{t}} = 0$ para $\hat{t} = q^* \in Q^0$) y, por (2.17), observando que si $\hat{x} \in Q$ es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_P en b en nuestro problema, también lo es para el sistema σ . Recíprocamente, si $\hat{x} \in X$ es un punto fuerte de Slater para el sistema σ en b , con $b_{\hat{t}} = 0$ para $\hat{t} = q^* \in Q^0$, entonces, $\hat{x} \in Q$ y es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_P en b .

(i) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) y (v) \Rightarrow (iii) Las demostraciones son las mismas que las dadas en [4, Lemma 2.3], considerando $\hat{x} \in Q$.

Capítulo 3. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema primal

(i) \Rightarrow (v) Sea $\hat{q} \in \text{int } Q$ fijo. Si $\hat{x} \in Q$ es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_P en b , sea

$$\sup_{t \in T} (\langle a_t^*, \hat{x} \rangle - \bar{b}_t - b_t) \leq -\vartheta < 0,$$

para algún $\vartheta > 0$. Sea

$$M := \sup_{t \in T} \|a_t^*\| < +\infty$$

y

$$\lambda := \frac{\vartheta}{6(1+M)(\|\hat{q}\|+1)} > 0.$$

$\hat{x} + \lambda\hat{q} \in \text{int } Q$, (por ser Q cono convexo, si $B(\hat{q}, \varepsilon) \subset Q$, entonces $B(\lambda\hat{q}, \lambda\varepsilon) \subset Q$ y por lo tanto $B(\hat{x} + \lambda\hat{q}, \lambda\varepsilon) = \hat{x} + B(\lambda\hat{q}, \lambda\varepsilon) \subset Q$).

Ahora sea $r > 0$ tal que $\hat{x} + \lambda\hat{q} + u \in Q$ para $\|u\| < r$. Si $u \in X$ y $b' \in \ell_\infty(T)$ cumplen que $\|u\| < \min\left\{r, \frac{\vartheta}{6(M+1)}\right\}$ y $\|b'\|_\infty < \frac{\vartheta}{6}$, entonces

$$\begin{aligned} \langle a_t^*, \hat{x} + \lambda\hat{q} + u \rangle - \bar{b}_t - b_t - b'_t &\leq \langle a_t^*, \hat{x} \rangle + \|a_t^*\| (\lambda\|\hat{q}\| + \|u\|) - \bar{b}_t - b_t - b'_t \\ &\leq -\vartheta + M \left(\frac{\vartheta\|\hat{q}\|}{6(1+M)(\|\hat{q}\|+1)} + \frac{\vartheta}{6(1+M)} \right) + \frac{\vartheta}{6} \\ &\leq -\frac{\vartheta}{2} \\ &< 0, \end{aligned}$$

para todo $t \in T$. Por lo tanto $(b, \bar{x}) \in \text{int}(\text{gph } \mathcal{F}_P)$ para $\bar{x} = \hat{x} + \lambda\hat{q}$. ■

Nota 12 Observemos que en la demostración (i) \Rightarrow (v), si $\hat{x} \in \text{int}(Q)$, se puede elegir $\rho > 0$ tal que $\hat{x} + u \in \text{int}(Q)$ para $\|u\| < \rho$. Si $\|u\| < \frac{\min\{\rho, \vartheta\}}{2(M+1)}$ y $b' \in \ell_\infty(T)$ con $\|b'\|_\infty < \frac{\vartheta}{2}$, luego

$$\begin{aligned} \langle a_t^*, \hat{x} + u \rangle - \bar{b}_t - b_t - b'_t &\leq \langle a_t^*, \hat{x} \rangle + \|a_t^*\| \|u\| - \bar{b}_t - b_t - b'_t \\ &\leq -\vartheta + M \frac{\vartheta}{2(M+1)} + \frac{\vartheta}{2} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Capítulo 3. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema primal

para todo $t \in T$. Por lo tanto podemos concluir que si \hat{x} es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_P en b , y además es un punto interior de Q , entonces $(b, \hat{x}) \in \text{int}(\text{gph } \mathcal{F}_P)$.

3.1. Caracterización de la coderivada

A partir de ahora se utilizará δ_{t_0} para denotar la “medida de Dirac” en $t_0 \in T$, la cual cumple que

$$\langle \delta_{t_0}, b \rangle = b_{t_0} \text{ para cada } b = (b_t)_{t \in T} \in \ell_\infty(T).$$

Para $(b, x) \in \ell_\infty(T) \times X$ y $(\mu, x^*) \in \ell_\infty(T)^* \times X^*$, se considerará el producto

$$\langle (\mu, x^*), (b, x) \rangle = \langle \mu, b \rangle + \langle x^*, x \rangle. \quad (3.2)$$

Se hará uso de ambas notaciones, la primera cuando se trabaja en el espacio producto y la segunda para cuestiones calculatorias, generalmente.

Proposición 13 Sea $(\hat{b}, \hat{x}) \in \text{gph } \mathcal{F}_P$ y sea $(\mu, x^*) \in \ell_\infty(T)^* \times X^*$. Entonces

$$(\mu, x^*) \in N \left((\hat{b}, \hat{x}); \text{gph } \mathcal{F}_P \right) \quad (3.3)$$

si y sólo si

$$\left(\mu, x^*, \langle \mu, \hat{b} \rangle + \langle x^*, \hat{x} \rangle \right) \in \text{cl}^* \left(\text{cone} \left\{ (-\delta_t, a_t^*, \bar{b}_t), t \in T \right\} + \{0\} \times Q^0 \times \mathbb{R}_+ \right). \quad (3.4)$$

Además, $(\mu, x^*) \in N \left((\hat{b}, \hat{x}); \text{gph } \mathcal{F}_P \right)$ implica que $\mu \leq 0$.

Demostración. Esta demostración se desarrollará siguiendo los mismos argumentos que en [4, Proposition 3.1]. Observemos que en nuestro caso

$$\text{gph } \mathcal{F}_P = \left\{ (b, x) \in \ell_\infty(T) \times X \mid \langle (-\delta_t, a_t^*), (b, x) \rangle \leq \bar{b}_t, t \in T; (b, x) \in \ell_\infty(T) \times Q \right\}$$

Capítulo 3. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema primal

Aplicando el Lema Asintótico de Farkas (Lema 10, Sección 2.6) a $C = \ell_\infty(T) \times Q$ y a $f_t(b, x) := \langle (-\delta_t, a_t^*), (b, x) \rangle - \bar{b}_t$, para cada $t \in T$, obtenemos que (3.3) es equivalente a

$$\left(\mu, x^*, \left\langle \mu, \widehat{b} \right\rangle + \left\langle x^*, \widehat{x} \right\rangle \right) \in \text{cl}^* \text{ cone } \left\{ \bigcup_{t \in T} \text{epi } f_t^* \cup \text{epi } I_C^* \right\}, \quad (3.5)$$

(en (3.5) utilizamos la notación del lado derecho de (3.2)). En vista de (2.5) y (2.7)

$$\begin{aligned} f_t^*(\mu, x^*) &= \sup \{ \langle (\mu, x^*), (b, x) \rangle - \langle (-\delta_t, a_t^*), (b, x) \rangle + \bar{b}_t : (b, x) \in \ell_\infty(T) \times X \} \\ &= \sup \{ \langle \mu + \delta_t, b \rangle + \langle x^* - a_t^*, x \rangle + \bar{b}_t : (b, x) \in \ell_\infty(T) \times X \}, \end{aligned}$$

e $I_C^*(\mu, x^*) = I_{\{0\} \times Q^0}(\mu, x^*),$

luego

$$\text{epi } I_C^* = \{0\} \times Q^0 \times \mathbb{R}_+ \quad \text{y} \quad \text{gph } f_t^* = \{(-\delta_t, a_t^*, \bar{b}_t)\}, \quad (3.6)$$

entonces

$$\begin{aligned} \text{cone } \left\{ \bigcup_{t \in T} \text{epi } f_t^* \cup \text{epi } I_C^* \right\} &= \text{cone } \left\{ \bigcup_{t \in T} \text{gph } f_t^* \cup \text{gph } I_C^* \cup \{(0, 0, 1)\} \right\} \\ &= \text{cone } \left\{ \bigcup_{t \in T} \text{gph } f_t^* \cup \text{epi } I_C^* \right\}. \end{aligned}$$

La clausura débil estrella de este último conjunto, por [9, Lemma 2.1] (ya que $\text{epi } I_C^*$ es un cono convexo no vacío) y (3.6) es

$$\begin{aligned} \text{cl}^* \text{ cone } \left\{ \bigcup_{t \in T} \text{gph } f_t^* \cup \text{epi } I_C^* \right\} &= \text{cl}^* \text{ cone } \left\{ \bigcup_{t \in T} \text{gph } f_t^* + \text{epi } I_C^* \right\} \\ &= \text{cl}^* \left(\text{cone } \left\{ (-\delta_t, a_t^*, \bar{b}_t), t \in T \right\} + \{0\} \times Q^0 \times \mathbb{R}_+ \right). \end{aligned}$$

Reemplazando en (3.5) obtenemos la expresión deseada. Además de (3.4) es evidente que $\mu \leq 0$. ■

A continuación establecemos una caracterización de la coderivada de \mathcal{F}_P en un punto $(0, \widehat{x})$, siendo \widehat{x} una solución del problema nominal.

Capítulo 3. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema primal

Teorema 14 Sea $\hat{x} \in \mathcal{F}_P(0)$ para la aplicación conjunto factible $\mathcal{F}_P : \ell_\infty(T) \rightrightarrows X$. Entonces $\mu \in D^*\mathcal{F}_P(0, \hat{x})(x^*)$ si y sólo si

$$(\mu, -x^*, -\langle x^*, \hat{x} \rangle) \in \text{cl}^* \text{ cone} \left(\left\{ (-\delta_t, a_t^*, \bar{b}_t), t \in T \right\} + \{0\} \times Q^0 \times \{0\} \right). \quad (3.7)$$

Demostración. (\Leftarrow) Sigue inmediatamente aplicando la Proposición 13 a $\hat{b} = 0$.

(\Rightarrow) Sea $\hat{x} \in \mathcal{F}_P(0)$ y $\mu \in D^*\mathcal{F}_P(0, \hat{x})(x^*)$, entonces, por la definición de coderivada dada en (2.12), $(\mu, -x^*) \in N((0, \hat{x}); \text{gph } \mathcal{F}_P)$ y por Proposición 13,

$$(\mu, -x^*, -\langle x^*, \hat{x} \rangle) \in \text{cl}^* \left(\text{cone} \left\{ (-\delta_t, a_t^*, \bar{b}_t), t \in T \right\} + \{0\} \times Q^0 \times \mathbb{R}_+ \right)$$

(observemos que $(\mu, -x^*, -\langle x^*, \hat{x} \rangle) = (\mu, -x^*, \langle \mu, 0 \rangle + \langle -x^*, \hat{x} \rangle)$),

luego existen redes $\{\lambda^\nu\}_{\nu \in \mathcal{N}} \subset \mathbb{R}_+^{(T)}$, $\{q_\nu^*\}_{\nu \in \mathcal{N}} \subset Q^0$ y $\{\gamma_\nu\}_{\nu \in \mathcal{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tales que

$$(\mu, -x^*, -\langle x^*, \hat{x} \rangle) = w^* \text{-} \lim_{\nu} \left[\sum_{t \in T} \lambda_t^\nu (-\delta_t, a_t^*, \bar{b}_t) + (0, q_\nu^*, \gamma_\nu) \right]. \quad (3.8)$$

Aplicando esta expresión a $(0, \hat{x}, -1)$, queda

$$\begin{aligned} 0 &= 0 - \langle x^*, \hat{x} \rangle + \langle x^*, \hat{x} \rangle = \lim_{\nu} \left[\sum_{t \in T} \lambda_t^\nu (\langle a_t^*, \hat{x} \rangle - \bar{b}_t) + \langle q_\nu^*, \hat{x} \rangle - \gamma_\nu \right] \\ &\leq \liminf_{\nu} (-\gamma_\nu) \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

ya que $\langle a_t^*, \hat{x} \rangle - \bar{b}_t \leq 0$, para todo $t \in T$ y $\langle q_\nu^*, \hat{x} \rangle \leq 0$, para todo $\nu \in \mathcal{N}$. Luego

$$\liminf_{\nu} (-\gamma_\nu) = 0,$$

y como cada $\gamma_\nu \geq 0$, obtenemos que

$$\lim_{\nu} \gamma_\nu = \lim_{\nu} (-\gamma_\nu) = 0. \quad (3.10)$$

Capítulo 3. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema primal

Por (3.8) y (3.10) tenemos que

$$\begin{aligned}
 (\mu, -x^*, -\langle x^*, \hat{x} \rangle) &= w^* \text{-} \lim_{\nu} \left[\sum_{t \in T} \lambda_t^{\nu} (-\delta_t, a_t^*, \bar{b}_t) + (0, q_{\nu}^*, \gamma_{\nu}) \right] \\
 &= w^* \text{-} \lim_{\nu} \left[\sum_{t \in T} \lambda_t^{\nu} (-\delta_t, a_t^*, \bar{b}_t) + (0, q_{\nu}^*, 0) + \gamma_{\nu} (0, 0, 1) \right] \\
 &= w^* \text{-} \lim_{\nu} \left[\sum_{t \in T} \lambda_t^{\nu} (-\delta_t, a_t^*, \bar{b}_t) + (0, q_{\nu}^*, 0) \right]. \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

Así $(\mu, -x^*, -\langle x^*, \hat{x} \rangle) \in \text{cl}^* \text{ cone} \left(\left\{ (-\delta_t, a_t^*, \bar{b}_t), t \in T \right\} + \{0\} \times Q^0 \times \{0\} \right)$. ■

Corolario 15 Sea $\hat{x} \in \mathcal{F}_P(0)$ para la aplicación conjunto factible $\mathcal{F}_P : \ell_{\infty}(T) \rightrightarrows X$. Si $\mu \in D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})(x^*)$ entonces existe una red $\{(\lambda^{\nu}, q_{\nu}^*)\}_{\nu \in \mathcal{N}} \subset \mathbb{R}_+^{(T)} \times Q^0$ tal que

$$\begin{aligned}
 -x^* &= w^* \text{-} \lim_{\nu \in \mathcal{N}} \left(\sum_{t \in T} \lambda_t^{\nu} a_t^* + q_{\nu}^* \right), \\
 -\langle x^*, \hat{x} \rangle &= \lim_{\nu \in \mathcal{N}} \sum_{t \in T} \lambda_t^{\nu} \bar{b}_t
 \end{aligned}$$

y

$$\|\mu\| = \langle -\mu, e \rangle = \lim_{\nu \in \mathcal{N}} \sum_{t \in T} \lambda_t^{\nu},$$

donde $e \in \ell_{\infty}(T)$, con $e_t = 1$, para todo $t \in T$. En particular si \hat{x} es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_P en 0, entonces $\|\mu\| = 0$.

Demostración. Las dos primeras igualdades se obtienen directamente de (3.11) del Teorema 14, además

$$-\mu = w^* \text{-} \lim_{\nu \in \mathcal{N}} \sum_{t \in T} \lambda_t^{\nu} \delta_t.$$

Ahora, sea $e \in \ell_{\infty}(T)$, tal que $e_t = 1$, para todo $t \in T$, entonces

$$\sum_{t \in T} \lambda_t^{\nu} = \left\langle \sum_{t \in T} \lambda_t^{\nu} \delta_t, e \right\rangle \rightarrow \langle -\mu, e \rangle.$$

Capítulo 3. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema primal

Ya que la norma en el espacio dual X^* es w^* -semicontinua inferiormente, tenemos que

$$\|\mu\| \leq \liminf_{\nu} \left\| \sum_{t \in T} \lambda_t^{\nu} \delta_t \right\| \leq \liminf_{\nu} \sum_{t \in T} \lambda_t^{\nu} = \langle -\mu, e \rangle, \quad (3.12)$$

por otro lado, por la definición de norma, tenemos

$$\|\mu\| = \sup_{\|b\|_{\infty} \leq 1} |\langle \mu, b \rangle| \geq \langle \mu, -e \rangle, \quad (3.13)$$

de (3.12) y (3.13) concluimos que $\|\mu\| = \langle -\mu, e \rangle$.

Ahora, si \hat{x} es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_P en 0, sea $\vartheta > 0$ tal que

$$\sup_{t \in T} (\langle a_t^*, \hat{x} \rangle - \bar{b}_t) \leq -\vartheta < 0,$$

luego similar a (3.9) en la demostración del Teorema 14, aplicando $(-x^*, -\langle x^*, \hat{x} \rangle)$ a $(\hat{x}, -1)$, tenemos que

$$0 = \lim_{\nu} \left[\sum_{t \in T} \lambda_t^{\nu} (\langle a_t^*, \hat{x} \rangle - \bar{b}_t) + \langle q_{\nu}^*, \hat{x} \rangle - \gamma_{\nu} \right] \leq \liminf_{\nu} -\vartheta \sum_{t \in T} \lambda_t^{\nu} \leq 0,$$

y así $0 = \lim_{\nu} \sum_{t \in T} \lambda_t^{\nu} = \|\mu\|$. ■

Lema 16 Sea $\hat{x} \in \mathcal{F}_P(0)$ para la aplicación conjunto factible $\mathcal{F}_P : \ell_{\infty}(T) \rightrightarrows X$.

(i) Si \hat{x} es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_P en 0, entonces el conjunto

$$S_P := \{x^* \in X^* \mid (x^*, \langle x^*, \hat{x} \rangle) \in \text{cl}^* C_P(0)\}$$

es vacío.

(ii) Si \hat{x} no es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_P en 0, entonces el conjunto S_P es no vacío y w^* -cerrado.

(iii) Si \hat{x} no es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_P en 0 y \mathcal{F}_P satisface la condición fuerte de Slater en 0, entonces $0 \notin S_P$ y la función $x^* \mapsto \|x^*\|^{-1}$ alcanza un máximo en S_P .

Demostración. (ii) Si \hat{x} no es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_P en 0, entonces existe una sucesión $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset T$ tal que $\lim_k (\langle a_{t_k}^*, \hat{x} \rangle - \bar{b}_{t_k}) = 0$. Como $\{a_t^*, t \in T\}$ es acotado en X^* entonces, por el Teorema de Alaoglu, el conjunto $\text{cl}^*\{a_t^*, t \in T\}$ es w^* -compacto, luego existe una subred $\{a_{t_\nu}^*\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ de la sucesión $\{a_{t_k}^*\}_{k \in \mathbb{N}}$ que w^* -converge a algún elemento $u^* \in \text{cl}^*\{a_t^*, t \in T\}$. Así $\langle u^*, \hat{x} \rangle = \lim_\nu \langle a_{t_\nu}^*, \hat{x} \rangle = \lim_\nu \bar{b}_{t_\nu}$, por lo tanto

$$(u^*, \langle u^*, \hat{x} \rangle) = w^*\text{-lím}_\nu (a_{t_\nu}^*, \bar{b}_{t_\nu}) \in \text{cl}^* \{(a_t^*, \bar{b}_t), t \in T\}.$$

Como

$$\text{cl}^* \{(a_t^*, \bar{b}_t), t \in T\} \subset \text{cl}^* \text{conv} [\{(a_t^*, \bar{b}_t), t \in T\} \cup \{(q^*, 1), q^* \in Q^0\}] = \text{cl}^* C_P(0),$$

concluimos que S_P es no vacío. Queda probar que S_P es w^* -cerrado, pero S_P es la preimagen de $\text{cl}^* C_P(0)$ bajo la aplicación w^* -continua: $x^* \mapsto (x^*, \langle x^*, \hat{x} \rangle)$ y así es w^* -cerrado en X^* .

(iii) Supongamos que $x^* = 0 \in S_P$, entonces $(0, 0) \in \text{cl}^* C_P(0)$, lo que contradice la equivalencia (i) \Leftrightarrow (ii) de la Proposición 11 ya que por hipótesis $b = 0 \in \text{dom } \mathcal{F}_P$ y \mathcal{F}_P satisface la condición fuerte de Slater en $b = 0$, por lo tanto $0 \notin S_P$. Como, además, por (i) de esta proposición, S_P es no vacío y w^* -cerrado, entonces la función $x^* \mapsto \|x^*\|^{-1}$ alcanza un máximo en S_P (ver Proposición 68 en Anexo).

(i) Si \hat{x} es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_P en 0, consideremos $0 < \vartheta < 1$ tal que

$$\sup_{t \in T} (\langle a_t^*, \hat{x} \rangle - \bar{b}_t) \leq -\vartheta < 0,$$

si $(x^*, \beta) \in \text{cl}^* C_P(0)$ entonces existen redes $\{\lambda_t^\nu\}_{t \in T} \subset \mathbb{R}_+^{(T)}$ y $\{\gamma_{q^*}^\nu\}_{q^* \in Q^0} \subset \mathbb{R}_+^{(Q^0)}$ tales que $\sum_{t \in T} \lambda_t^\nu + \sum_{q^* \in Q^0} \gamma_{q^*}^\nu = 1$, para todo $\nu \in \mathbb{N}$, y

$$(x^*, \beta) = w^*\text{-lím}_\nu \left[\sum_{t \in T} \lambda_t^\nu (a_t^*, \bar{b}_t) + \sum_{q^* \in Q^0} \gamma_{q^*}^\nu (q^*, 1) \right].$$

Aplicando esta expresión al vector $(\hat{x}, -1)$ queda

$$\begin{aligned} \langle x^*, \hat{x} \rangle - \beta &= \lim_{\nu} \left[\sum_{t \in T} \lambda_t^{\nu} (\langle a_t^*, \hat{x} \rangle - \bar{b}_t) + \sum_{q^* \in Q^0} \gamma_{q^*}^{\nu} (\langle q^*, \hat{x} \rangle - 1) \right] \\ &\leq -\vartheta \limsup_{\nu} \left(\sum_{t \in T} \lambda_t^{\nu} + \sum_{q^* \in Q^0} \gamma_{q^*}^{\nu} \right) = -\vartheta < 0, \end{aligned}$$

ya que $\langle q^*, \hat{x} \rangle - 1 \leq -1 \leq -\vartheta$ para todo $q^* \in Q^0$. Luego $\langle x^*, \hat{x} \rangle \neq \beta$ y así S_P es vacío. ■

El siguiente lema nos provee una especie de recíproco del Corolario 15 en el sentido de que, en éste último, partimos de μ con $\mu \in D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})(x^*)$ y obtenemos una red que converge a $-x^*$, en cambio en el lema partimos de x^* que es límite de una red (similar a la del Corolario 15) y obtenemos $\mu \in D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})(-x^*)$. El hecho de que esta red esté formada por determinadas combinaciones convexas nos garantiza $\|\mu\| = 1$.

Lema 17 *Sea $\hat{x} \in \mathcal{F}_P(0)$ para la aplicación conjunto factible $\mathcal{F}_P : \ell_{\infty}(T) \rightrightarrows X$ y sea S_P el conjunto definido en el Lema 16. Si \hat{x} no es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_P en 0, entonces para cada $x^* \in S_P$, existe $\mu \in \ell_{\infty}(T)^*$ tal que $\mu \in D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})(-x^*)$ y $\|\mu\| = 1$.*

Demostración. Sea $x^* \in S_P = \{x^* \in X^* \mid (x^*, \langle x^*, \hat{x} \rangle) \in \text{cl}^* C_P(0)\}$, entonces existen redes $\{\lambda^{\nu}\}_{\nu \in \mathcal{N}} \subset \mathbb{R}_+^{(T)}$, y $\{\gamma^{\nu}\}_{\nu \in \mathcal{N}} \subset \mathbb{R}_+^{(Q^0)}$ tales que

$$\sum_{t \in T} \lambda_t^{\nu} + \sum_{q^* \in Q^0} \gamma_{q^*}^{\nu} = 1, \quad (3.14)$$

para todo $\nu \in \mathcal{N}$, y

$$(x^*, \langle x^*, \hat{x} \rangle) = w^* \text{-} \lim_{\nu} \left[\sum_{t \in T} \lambda_t^{\nu} (a_t^*, \bar{b}_t) + \sum_{q^* \in Q^0} \gamma_{q^*}^{\nu} (q^*, 1) \right]. \quad (3.15)$$

Capítulo 3. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema primal

Aplicando esta expresión al vector $(\hat{x}, -1)$, queda

$$0 = \lim_{\nu} \left[\sum_{t \in T} \lambda_t^{\nu} (\langle a_t^*, \hat{x} \rangle - \bar{b}_t) + \sum_{q^* \in Q^0} \gamma_{q^*}^{\nu} (\langle q^*, \hat{x} \rangle - 1) \right],$$

de forma similar a (3.9)-(3.10), en la demostración del Teorema 14, obtenemos

$$\lim_{\nu} \sum_{q^* \in Q^0} \gamma_{q^*}^{\nu} = 0. \quad (3.16)$$

Por otro lado, tomando $\mu_{\nu} \in \ell_{\infty}(T)^*$ dado por $\mu_{\nu} := -\sum_{t \in T} \lambda_t^{\nu} \delta_t$, $\nu \in \mathcal{N}$, tenemos

$$\begin{aligned} \|\mu_{\nu}\| &= \sup_{\|b\|_{\infty} \leq 1} |\langle \mu_{\nu}, b \rangle| = \sup_{\|b\|_{\infty} \leq 1} \left| \left\langle -\sum_{t \in T} \lambda_t^{\nu} \delta_t, b \right\rangle \right| = \sup_{\|b\|_{\infty} \leq 1} \left| -\sum_{t \in T} \lambda_t^{\nu} \langle \delta_t, b \rangle \right| \\ &= \sup_{\|b\|_{\infty} \leq 1} \left| \sum_{t \in T} \lambda_t^{\nu} b_t \right| \leq \sum_{t \in T} \lambda_t^{\nu} \sup_{\|b\|_{\infty} \leq 1} \|b\|_{\infty} = \sum_{t \in T} \lambda_t^{\nu} \leq 1, \end{aligned}$$

para todo $\nu \in \mathcal{N}$. Por el teorema de Alaoglu la red $\{\mu_{\nu}\}_{\nu \in \mathcal{N}}$ está dentro de una bola w^* -compacta, luego existe una subred (supongamos que es la misma) y $\mu \in \ell_{\infty}(T)^*$ tal que $\mu_{\nu} \xrightarrow{w^*} \mu$, de la misma manera que se demostró en el Corolario 15, se cumple que

$$\|\mu\| = \langle -\mu, e \rangle = \lim_{\nu \in \mathcal{N}} \sum_{t \in T} \lambda_t^{\nu}.$$

En vista de (3.14) y (3.16) obtenemos

$$\|\mu\| = 1.$$

Ahora de (3.15), (3.16) y de la definición de μ_{ν} , tenemos que

$$\begin{aligned} (\mu, x^*, \langle x^*, \hat{x} \rangle) &= w^* \text{-} \lim_{\nu} \left[\sum_{t \in T} \lambda_t^{\nu} (-\delta_t, a_t^*, \bar{b}_t) + \sum_{q^* \in Q^0} \gamma_{q^*}^{\nu} (0, q^*, 0) \right] \\ &\in \text{cl}^* \text{ cone} \left(\{(-\delta_t, a_t^*, \bar{b}_t), t \in T\} + \{0\} \times Q^0 \times \{0\} \right), \end{aligned}$$

luego aplicando el Teorema 14, $\mu \in D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})(-x^*)$. ■

Capítulo 3. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema primal

El lema anterior relaciona $x^* \in S_P$ con $\mu \in D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})(-x^*)$, esta relación se verá reflejada en el siguiente teorema y nos permitirá obtener una fórmula para calcular la norma de la coderivada en $(0, \hat{x})$ utilizando un conjunto definido en función de los datos del problema primal (observemos que S_P se construye a partir del conjunto característico). Esta fórmula nos servirá posteriormente para el cálculo de la cota exacta lipschitziana de \mathcal{F}_P alrededor de este punto.

Teorema 18 *Sea $\hat{x} \in \mathcal{F}_P(0)$ para la aplicación conjunto factible $\mathcal{F}_P : \ell_\infty(T) \rightrightarrows X$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- (i) *Si \hat{x} es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_P en 0, entonces $\|D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})\| = 0$.*
(ii) *Si \mathcal{F}_P satisface la condición fuerte de Slater en 0 y \hat{x} no es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_P en 0, entonces $\|D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})\| > 0$ y está dada por*

$$\begin{aligned} \|D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})\| &= \max \{ \|x^*\|^{-1} \mid (x^*, \langle x^*, \hat{x} \rangle) \in \text{cl}^* C_P(0) \} \\ &= \max \{ \|x^*\|^{-1} \mid x^* \in S_P \}, \end{aligned}$$

donde S_P es el conjunto definido en el Lema 16.

- (iii) *Si \mathcal{F}_P no satisface la condición fuerte de Slater en 0, entonces*

$$\|D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})\| = \infty = \sup \{ \|x^*\|^{-1} \mid (x^*, \langle x^*, \hat{x} \rangle) \in \text{cl}^* C_P(0) \}. \quad (3.17)$$

Demostración. (i) Si \hat{x} es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_P en 0, por Corolario 15, $\|\mu\| = 0$ cuando $\mu \in D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})(x^*)$, luego

$$\|D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})\| = \sup \{ \|\mu\| \mid \mu \in D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})(x^*), \|x^*\| \leq 1 \} = 0.$$

(ii) Si \hat{x} no es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_P en 0, por (ii) del Lema 16, el conjunto $S_P = \{x^* \in X^* \mid (x^*, \langle x^*, \hat{x} \rangle) \in \text{cl}^* C_P(0)\}$ es no vacío y para cada $x^* \in S_P$, por Lema 17, existe $\mu \in \ell_\infty(T)^*$ tal que

$$\mu \in D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})(-x^*) \quad \text{con} \quad \|\mu\| = 1. \quad (3.18)$$

Capítulo 3. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema primal

Además, $x^* \neq 0$ ya que por (iii) del Lema 16, $0 \notin S_P$. Como $\text{gph } D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})$ es un cono (por ser la coderivada una multifunción homogénea positiva), (3.18) implica que

$$\|x^*\|^{-1} \mu \in D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})(-\|x^*\|^{-1} x^*),$$

luego

$$\begin{aligned} \|D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})\| &= \sup \{ \|\mu\| \mid \mu \in D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})(z^*), \|z^*\| \leq 1 \} \\ &\geq \| \|x^*\|^{-1} \mu \| \\ &= \|x^*\|^{-1}, \end{aligned}$$

como esta desigualdad es válida para cualquier $x^* \in S_P$ y (por (iii) del Lema 16) la función $x^* \mapsto \|x^*\|^{-1}$ alcanza un máximo en S_P , obtenemos que

$$\begin{aligned} \|D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})\| &\geq \max \{ \|x^*\|^{-1} \mid x^* \in S_P \} \\ &= \max \{ \|x^*\|^{-1} \mid (x^*, \langle x^*, \hat{x} \rangle) \in \text{cl}^* C_P(0) \}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Resta probar la desigualdad opuesta. Por las definiciones de coderivada y cono normal dadas en (2.12) y (2.4) respectivamente, tenemos que

$$\begin{aligned} \mu &\in D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})(-x^*) \\ &\Leftrightarrow (\mu, x^*) \in N((0, \hat{x}); \text{gph } \mathcal{F}_P) \\ &\Leftrightarrow \langle (\mu, x^*), (b, x) - (0, \hat{x}) \rangle \leq 0 \text{ para todo } (b, x) \in \text{gph } \mathcal{F}_P \\ &\Leftrightarrow \langle \mu, b \rangle + \langle x^*, x \rangle \leq \langle x^*, \hat{x} \rangle \text{ para todo } (b, x) \in \text{gph } \mathcal{F}_P. \end{aligned}$$

En particular, cuando $x^* = 0$, la última equivalencia da $\langle \mu, b \rangle \leq 0$ para todo $b \in \text{dom } \mathcal{F}_P$. Ahora bien, por hipótesis, $0 \in \text{dom } \mathcal{F}_P$ y \mathcal{F}_P satisface la condición fuerte de Slater en $b = 0$, luego, la equivalencia (i) \Leftrightarrow (iii) de la Proposición 11 asegura que

Capítulo 3. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema primal

$0 \in \text{int}(\text{dom } \mathcal{F}_P)$, por lo tanto $\mu \in D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})(0)$ si, y sólo si, $\mu = 0$. Así, podemos separar el supremo en la fórmula del módulo de la coderivada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \|D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})\| &= \sup \{ \|\mu\| \mid \mu \in D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})(x^*), \|x^*\| \leq 1 \} \\ &= \sup \{ \|\mu\| \mid \mu \neq 0, \mu \in D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})(x^*), 0 < \|x^*\| \leq 1 \}, \end{aligned}$$

considerando por convención, para $\emptyset \subset \mathbb{R}_+$, $\sup \emptyset = 0$.

Supongamos que $\mu \in D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})(-x^*)$, $\mu \neq 0$, $0 < \|x^*\| \leq 1$, por Corolario 15 existe una red $\{(\lambda^\nu, q_\nu^*)\}_{\nu \in \mathcal{N}} \subset \mathbb{R}_+^{(T)} \times Q^0$ tal que

$$\begin{aligned} -x^* &= w^* \text{-} \lim_{\nu \in \mathcal{N}} \left(\sum_{t \in T} \lambda_t^\nu a_t^* + q_\nu^* \right), \\ -\langle x^*, \hat{x} \rangle &= \lim_{\nu \in \mathcal{N}} \sum_{t \in T} \lambda_t^\nu \bar{b}_t, \\ \|\mu\| &= \langle -\mu, e \rangle = \lim_{\nu \in \mathcal{N}} \sum_{t \in T} \lambda_t^\nu. \end{aligned}$$

Definamos $x_\nu^* := \sum_{t \in T} \lambda_t^\nu a_t^* + q_\nu^*$ y consideremos la red

$$\eta_\nu := \sum_{t \in T} \lambda_t^\nu + \varepsilon_\nu \text{ tal que } \varepsilon_\nu > 0 \text{ y } \varepsilon_\nu \rightarrow 0,$$

luego $\eta_\nu \rightarrow \|\mu\|$, además,

$$\frac{1}{\eta_\nu} \left(x_\nu^*, \sum_{t \in T} \lambda_t^\nu \bar{b}_t + \varepsilon_\nu \right) = \left(\sum_{t \in T} \frac{\lambda_t^\nu}{\eta_\nu} a_t^* + \frac{\varepsilon_\nu}{\eta_\nu} (\varepsilon_\nu)^{-1} q_\nu^*, \sum_{t \in T} \frac{\lambda_t^\nu}{\eta_\nu} \bar{b}_t + \frac{\varepsilon_\nu}{\eta_\nu} \right) \in C_P(0)$$

pues, de (3.1), $C_P(0) = \text{conv}(\{(a_t^*, \bar{b}_t) : t \in T\} \cup \{(q^*, 1) : q^* \in Q^0\})$ y

$$\sum_{t \in T} \frac{\lambda_t^\nu}{\eta_\nu} + \frac{\varepsilon_\nu}{\eta_\nu} = \frac{1}{\eta_\nu} \left(\sum_{t \in T} \lambda_t^\nu + \varepsilon_\nu \right) = 1.$$

Luego

$$\begin{aligned} -(\|\mu\|^{-1} x^*, \langle \|\mu\|^{-1} x^*, \hat{x} \rangle) &= -\|\mu\|^{-1} (x^*, \langle x^*, \hat{x} \rangle) \\ &= w^* \text{-} \lim_{\nu} \frac{1}{\eta_\nu} \left(x_\nu^*, \sum_{t \in T} \lambda_t^\nu \bar{b}_t + \varepsilon_\nu \right) \in \text{cl}^* C_P(0), \end{aligned}$$

y como $0 < \|x^*\| \leq 1$,

$$\|\mu\| \leq \|-\|\mu\|^{-1} x^*\|^{-1} \leq \max \{ \|z^*\|^{-1} \mid (z^*, \langle z^*, \hat{x} \rangle) \in \text{cl}^* C_P(0) \}. \quad (3.20)$$

Ya que (3.20) vale para cualquier $\mu \in D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})(-x^*)$, con $\mu \neq 0$ y $0 < \|x^*\| \leq 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \|D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})\| &= \max \{ 0, \sup \{ \|\mu\| \mid \mu \neq 0, \mu \in D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})(x^*), 0 < \|x^*\| \leq 1 \} \} \\ &\leq \max \{ \|z^*\|^{-1} \mid (z^*, \langle z^*, \hat{x} \rangle) \in \text{cl}^* C_P(0) \}, \end{aligned}$$

con esta desigualdad y la dada en (3.19), queda probada la igualdad deseada.

(iii) Si \mathcal{F}_P no satisface la condición fuerte de Slater en 0, la equivalencia (i) \Leftrightarrow (ii) de la Proposición 11 asegura que $0 \in C_P(0)$, por lo tanto $0 \in S_P$ y así el supremo en (3.17) es ∞ . Además, por el Lema 17, existe $\mu \neq 0$ tal que $\mu \in D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})(0)$, luego $\lambda \mu \in D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})(0)$ para cada $\lambda > 0$ (por ser $\text{gph } D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})$ un cono), así

$$\|D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})\| = \sup \{ \|\mu\| \mid \mu \in D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})(x^*), \|x^*\| \leq 1 \} = \infty.$$

■

3.2. Estabilidad de tipo Lipschitz y cálculo de su cota.

Teorema 19 *Sea $\hat{x} \in \mathcal{F}_P(0)$ para la aplicación conjunto factible $\mathcal{F}_P : \ell_\infty(T) \rightrightarrows X$, entonces \mathcal{F}_P es de tipo Lipschitz alrededor de $(0, \hat{x})$ si y sólo si $D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})(0) = \{0\}$.*

Demostración. (\Rightarrow) La demostración es la misma que [18, Teorema 1.44]. Allí se prueba que $D_M^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})(0) = \{0\}$, pero en este caso, por ser $\text{gph } \mathcal{F}_P$ convexo, se cumple que $D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})(0) = D_N^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})(0) = D_M^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})(0)$ (ver (2.14)).

Capítulo 3. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema primal

(\Leftarrow) Sea $D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})(0) = \{0\}$ y supongamos que \mathcal{F}_P no es de tipo Lipschitz alrededor de $(0, \hat{x})$. Por hipótesis $b = 0 \in \text{dom } \mathcal{F}_P$, por las equivalencias (i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iv) de Proposición 11, \hat{x} no es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_P en 0 y $(0, 0) \in \text{cl}^* C_P(0)$. Así $0 \in S_P = \{x^* \in X^* \mid (x^*, \langle x^*, \hat{x} \rangle) \in \text{cl}^* C_P(0)\}$ y por el Lema 17 existe $\mu \in \ell_\infty(T)^*$, con $\|\mu\| = 1$, tal que $\mu \in D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})(0) = \{0\}$. Esta contradicción vino de suponer que \mathcal{F}_P no es de tipo Lipschitz alrededor de $(0, \hat{x})$, por lo tanto \mathcal{F}_P es de tipo Lipschitz alrededor de $(0, \hat{x})$. ■

Presentaremos ahora varios lemas que nos permitirán luego establecer una fórmula para el cálculo de la cota exacta lipschitziana. A continuación establecemos una extensión de la fórmula de la distancia de Ascoli, aplicada a un sistema con restricciones cónicas.

Lema 20 *Supongamos que \mathcal{F}_P satisface la condición fuerte de Slater en 0. Para cada $x \in X$ y $b \in \ell_\infty(T)$ suficientemente cerca de 0, tenemos la siguiente fórmula de Ascoli*

$$\text{dist}(x, \mathcal{F}_P(b)) = \max_{(x^*, \alpha) \in \text{cl}^* C_P(b)} \frac{[\langle x^*, x \rangle - \alpha]_+}{\|x^*\|},$$

donde $[\gamma]_+ = \max\{0, \gamma\}$ con $\gamma \in \mathbb{R}$ y bajo la convención $\frac{0}{0} := 0$.

Si además X es reflexivo,

$$\text{dist}(x, \mathcal{F}_P(b)) = \max_{(x^*, \alpha) \in C_P(b)} \frac{[\langle x^*, x \rangle - \alpha]_+}{\|x^*\|}.$$

Demostración. Es una aplicación directa de [4, Lema 4.3] a

$$\mathcal{F}_P(b) := \{x \in X : \langle a_t^*, x \rangle \leq \bar{b}_t + b_t, t \in T; \quad \langle q^*, x \rangle \leq 1, \quad q^* \in Q^0\}.$$

■

Lema 21 *Para cada $b \in \ell_\infty(T)$, $x \in X$ con $(b, x) \notin \text{gph } \mathcal{F}_P$, y $\mathcal{F}_P^{-1}(x) \neq \emptyset$, tenemos la fórmula de distancia*

$$0 < \text{dist}(b, \mathcal{F}_P^{-1}(x)) = \sup_{t \in T} [\langle a_t^*, x \rangle - \bar{b}_t - b_t]_+ = \sup_{(x^*, \alpha) \in \text{cl}^* C_P(b)} [\langle x^*, x \rangle - \alpha]_+.$$

Capítulo 3. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema primal

Demostración. En primer lugar $\text{dist}(b, \mathcal{F}_P^{-1}(x)) > 0$ ya que $(b, x) \notin \text{gph } \mathcal{F}_P$. Observemos que $b^1 \in \mathcal{F}_P^{-1}(x)$ si, y sólo si, existe $p \in \ell_\infty(T)_+$ tal que $\langle a_t^*, x \rangle - \bar{b}_t + p_t = b_t^1$, luego

$$0 < \text{dist}(b, \mathcal{F}_P^{-1}(x)) = \inf_{b^1 \in \mathcal{F}_P^{-1}(x)} \|b^1 - b\| = \inf_{p \in \ell_\infty(T)_+} \sup_{t \in T} |\langle a_t^*, x \rangle - \bar{b}_t + p_t - b_t|$$

Si $\langle a_t^*, x \rangle - \bar{b}_t - b_t \leq 0$ para algún $t \in T$ se puede tomar p_t de manera que $\langle a_t^*, x \rangle - \bar{b}_t + p_t - b_t = 0$, y el nuevo b^1 así obtenido satisfaga $b^1 \in \mathcal{F}_P^{-1}(x)$. Por lo tanto, al tomar ínfimo sobre p , queda

$$0 < \text{dist}(b, \mathcal{F}_P^{-1}(x)) = \sup_{t \in T} [\langle a_t^*, x \rangle - \bar{b}_t - b_t]_+.$$

Como $(a_t^*, \bar{b}_t + b_t) \in \text{cl}^* C_P(b)$ para todo $t \in T$, tenemos

$$\sup_{t \in T} [\langle a_t^*, x \rangle - \bar{b}_t - b_t]_+ \leq \sup_{(x^*, \alpha) \in \text{cl}^* C_P(b)} [\langle x^*, x \rangle - \alpha]_+.$$

Para obtener la desigualdad opuesta, veamos que si $(x^*, \alpha) \in C_P(b)$, entonces existen $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$, y $\gamma \in \mathbb{R}_+^{(Q^0)}$ tal que $\left[\sum_{t \in T} \lambda_t + \sum_{q^* \in Q^0} \gamma_{q^*} \right] = 1$ y

$$(x^*, \alpha) = \sum_{t \in T} \lambda_t (a_t^*, \bar{b}_t + b_t) + \sum_{q^* \in Q^0} \gamma_{q^*} (q^*, 1),$$

luego

$$\begin{aligned} \langle x^*, x \rangle - \alpha &= \sum_{t \in T} \lambda_t (\langle a_t^*, x \rangle - \bar{b}_t - b_t) + \sum_{q^* \in Q^0} \gamma_{q^*} (\langle q^*, x \rangle - 1) \\ &\leq \sum_{t \in T} \lambda_t \sup_{t \in T} [\langle a_t^*, x \rangle - \bar{b}_t - b_t]_+ \\ &= \sum_{t \in T} \lambda_t \text{dist}(b, \mathcal{F}_P^{-1}(x)) \\ &\leq \text{dist}(b, \mathcal{F}_P^{-1}(x)) \end{aligned}$$

(en la primera desigualdad se utiliza que $x \in Q$ ya que $\mathcal{F}_P^{-1}(x) \neq \emptyset$).

Como para cada $x \in X$ la función $x^* \mapsto \langle x^*, x \rangle$ es w^* -continua, tomando w^* -límite se cumple la desigualdad

$$\langle x^*, x \rangle - \alpha \leq \text{dist}(b, \mathcal{F}_P^{-1}(x)), \quad (3.21)$$

Capítulo 3. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema primal

para cada $(x^*, \alpha) \in \text{cl}^* C_P(b)$.

Como $\mathcal{F}_P^{-1}(x) \neq \emptyset$ y $(b, x) \notin \text{gph } \mathcal{F}_P$ (y así $x \in Q$, y $x \notin \mathcal{F}_P(b)$), existe $t_0 \in T$ tal que $\langle a_{t_0}^*, x \rangle - \bar{b}_{t_0} - b_{t_0} > 0$, tomando supremo en (3.21) y teniendo en cuenta que $(a_{t_0}^*, \bar{b}_{t_0} + b_{t_0}) \in \text{cl}^* C_P(b)$, tenemos

$$0 < \sup_{(x^*, \alpha) \in \text{cl}^* C_P(b)} [\langle x^*, x \rangle - \alpha] = \sup_{(x^*, \alpha) \in \text{cl}^* C_P(b)} [\langle x^*, x \rangle - \alpha]_+ \leq \text{dist}(b, \mathcal{F}_P^{-1}(x)),$$

con lo que queda probada la igualdad deseada. ■

Lema 22 *El gráfico de la aplicación multivaluada que asigna a cada $b \in \ell_\infty(T)$ el conjunto $\text{cl}^* C_P(b) \subset X^* \times \mathbb{R}$, es cerrado en la topología producto (norma) \times (débil estrella) \times (euclídea) de $\ell_\infty(T) \times X^* \times \mathbb{R}$.*

Demostración. La demostración es la misma de [4, Lema 4.5]. ■

A continuación presentamos el teorema principal de este capítulo, el cual nos provee una fórmula de cálculo de la cota lipschitziana de la aplicación factible del problema primal en cierto punto y nos muestra cómo esta cota puede ser nula, positiva o infinita, dependiendo de la condición fuerte de Slater tanto del problema como del punto en cuestión.

Teorema 23 *Sea $\hat{x} \in \mathcal{F}_P(0)$ para la aplicación conjunto factible $\mathcal{F}_P : \ell_\infty(T) \rightrightarrows X$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- (i) *Si $\hat{x} \in Q$, es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_P en 0, entonces $\text{lip } \mathcal{F}_P(0, \hat{x}) = 0$.*
- (ii) *Si \mathcal{F}_P satisface la condición fuerte de Slater en 0 pero \hat{x} no es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_P en 0, entonces la cota exacta lipschitziana de \mathcal{F}_P alrededor de $(0, \hat{x})$ está dada por*

$$0 < \text{lip } \mathcal{F}_P(0, \hat{x}) = \max \{ \|x^*\|^{-1} \mid (x^*, \langle x^*, \hat{x} \rangle) \in \text{cl}^* C_P(0) \} < \infty. \quad (3.22)$$

(iii) Si \mathcal{F}_P no satisface la condición fuerte de Slater en 0, entonces \mathcal{F}_P no es de tipo Lipschitz alrededor de $(0, \hat{x})$ y

$$\text{lip } \mathcal{F}_P(0, \hat{x}) = \infty = \sup \{ \|x^*\|^{-1} \mid (x^*, \langle x^*, \hat{x} \rangle) \in \text{cl}^* C_P(0) \}. \quad (3.23)$$

Demostración. Para demostrar (i) y (ii), como $\hat{x} \in \mathcal{F}_P(0)$ y \mathcal{F}_P satisface la condición fuerte de Slater en 0, por la Proposición 11, $0 \in \text{int}(\text{dom } \mathcal{F}_P)$ y \mathcal{F}_P es de tipo Lipschitz alrededor de $(0, \hat{x})$, luego $\text{lip } \mathcal{F}_P(0, \hat{x}) < \infty$ y podemos encontrar una sucesión

$$(b_j, x_j) \rightarrow (0, \hat{x}), \text{ con } b_j \in \text{dom } \mathcal{F}_P, \quad (3.24)$$

tal que

$$\text{lip } \mathcal{F}_P(0, \hat{x}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\text{dist}(x_j, \mathcal{F}_P(b_j))}{\text{dist}(b_j, \mathcal{F}_P^{-1}(x_j))}. \quad (3.25)$$

Sea $M := \sup_{t \in T} \|a_t^*\|$

(i) Supongamos que $\hat{x} \in \mathcal{F}_P(0)$ es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_P en 0. Sea $0 < \vartheta < 1$ tal que $\sup_{t \in T} (\langle a_t^*, \hat{x} \rangle - \bar{b}_t) \leq -\vartheta < 0$. Tomemos j lo suficientemente grande de manera que $\|x_j - \hat{x}\| < \frac{\vartheta}{4(M+1)}$ y $\|b_j\| < \frac{\vartheta}{4}$.

Si $\mathcal{F}_P^{-1}(x_j) = \emptyset$, $\text{dist}(b_j, \mathcal{F}_P^{-1}(x_j)) = \text{inf } \emptyset := \infty$ y $0 < \text{dist}(x_j, \mathcal{F}_P(b_j)) < \infty$ (pues $x_j \notin \mathcal{F}_P(b_j)$ y $b_j \in \text{dom } \mathcal{F}_P$).

Si $\mathcal{F}_P^{-1}(x_j) \neq \emptyset$, entonces $x_j \in Q$ y

$$\begin{aligned} \langle a_t^*, x_j \rangle - \bar{b}_t - (b_j)_t &= \langle a_t^*, x_j - \hat{x} \rangle + \langle a_t^*, \hat{x} \rangle - \bar{b}_t - (b_j)_t \\ &\leq M \|x_j - \hat{x}\| - \vartheta + \|b_j\| \\ &\leq M \frac{\vartheta}{4(M+1)} - \vartheta + \frac{\vartheta}{4} \leq -\frac{\vartheta}{2} < 0, \end{aligned}$$

luego $x_j \in \mathcal{F}_P(b_j)$ y $\text{dist}(x_j, \mathcal{F}_P(b_j)) = 0 = \text{dist}(b_j, \mathcal{F}_P^{-1}(x_j))$.

Así, en ambos casos, bajo las convenciones $\frac{1}{\infty} := 0$ y $\frac{0}{0} := 0$, el cociente es

$$\frac{\text{dist}(x_j, \mathcal{F}_P(b_j))}{\text{dist}(b_j, \mathcal{F}_P^{-1}(x_j))} = 0,$$

Capítulo 3. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema primal

para j suficientemente grande, por lo tanto $\text{lip } \mathcal{F}_P(0, \hat{x}) = 0$.

(ii) Supongamos que \mathcal{F}_P satisface la condición fuerte de Slater en 0 y que $\hat{x} \in \mathcal{F}_P(0)$ no es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_P en 0. Aplicando (iv) en la Proposición 11, tenemos que \mathcal{F}_P es de tipo Lipschitz alrededor de $(0, \hat{x})$ por el Teorema 4, se cumple que $0 < \|D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})\| \leq \text{lip } \mathcal{F}_P(0, \hat{x}) < \infty$.

Así, por la representación dada en (ii) del Teorema 18, tenemos la desigualdad:

$$0 < \text{máx} \{ \|x^*\|^{-1} \mid (x^*, \langle x^*, \hat{x} \rangle) \in \text{cl}^* C_P(0) \} \leq \text{lip } \mathcal{F}_P(0, \hat{x}). \quad (3.26)$$

Para obtener la desigualdad opuesta consideremos la sucesión dada en (3.24), como $\text{lip } \mathcal{F}_P(0, \hat{x}) > 0$ podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $(b_j, x_j) \notin \text{gph } \mathcal{F}_P$ y $\mathcal{F}_P^{-1}(x_j) \neq \emptyset$ (de lo contrario, al igual que en (i), el cociente de (3.25) quedaría igual a cero), y tomar j suficientemente grande, de manera que \mathcal{F}_P satisfaga la condición fuerte de Slater en b_j (ver Nota 8).

Si tomamos $(x^*, \alpha) \in C_P(b_j)$, existen $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ y $\gamma \in \mathbb{R}_+^{(Q^0)}$ tales que

$$\sum_{t \in T} \lambda_t + \sum_{q^* \in Q^0} \gamma_{q^*} = 1 \quad \text{y} \quad (x^*, \alpha) = \sum_{t \in T} \lambda_t (a_t^*, \bar{b}_t + b_{jt}) + \sum_{q^* \in Q^0} \gamma_{q^*} (q^*, 1).$$

Luego para cada j , aplicando (x^*, α) a $(x_j, -1)$, se tiene

$$\begin{aligned} \langle x^*, x_j \rangle - \alpha &= \sum_{t \in T} \lambda_t (\langle a_t^*, x_j \rangle - \bar{b}_t - b_{jt}) + \sum_{q^* \in Q^0} \gamma_{q^*} (\langle q^*, x_j \rangle - 1) \\ &\leq \sum_{t \in T} \lambda_t (\langle a_t^*, x_j - \hat{x} \rangle + \langle a_t^*, \hat{x} \rangle - \bar{b}_t - b_{jt}) \\ &\leq \sum_{t \in T} \lambda_t (M \|x_j - \hat{x}\| + \|b_j\|) \\ &\leq M \|x_j - \hat{x}\| + \|b_j\| \end{aligned} \quad (3.27)$$

(la primera desigualdad proviene del hecho de que $x_j \in Q$). Ya que, para cada $x \in X$, la aplicación $x^* \mapsto \langle x^*, x \rangle$ es continua con respecto a la topología débil estrella, la desigualdad anterior se cumple para $(x^*, \alpha) \in \text{cl}^* C_P(b_j)$. Ahora si tomamos supremo

Capítulo 3. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema primal

sobre $\text{cl}^* C_P(b_j)$ (al igual que en la demostración del Lema 21, podemos asegurar que el supremo es positivo), tenemos

$$0 < \sup_{(x^*, \alpha) \in \text{cl}^* C_P(b_j)} [\langle x^*, x_j \rangle - \alpha]_+ \leq M \|x_j - \widehat{x}\| + \|b_j\|. \quad (3.28)$$

Consideremos el conjunto

$$C_+(b_j, x_j) := \{(x^*, \alpha) \in \text{cl}^* C_P(b_j) : \langle x^*, x_j \rangle - \alpha > 0\},$$

el cual es no vacío, pues $(b_j, x_j) \notin \text{gph } \mathcal{F}_P$, y denotemos

$$M_j := \sup \{\|x^*\|^{-1} \mid (x^*, \alpha) \in C_+(b_j, x_j)\}.$$

Si $(0, \alpha) \in C_+(b_j, x_j)$, tenemos que $-\alpha = \langle 0, x_j \rangle - \alpha > 0$ pero por otro lado, como $(0, \alpha) \in \text{cl}^* C_P(b_j)$ y $b_j \in \text{dom } \mathcal{F}_P$, por Lema 10, para $z \in \mathcal{F}_P(b_j)$ se cumple que $0 = \langle 0, z \rangle \leq \alpha$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $(0, \alpha) \notin C_+(b_j, x_j)$.

Luego $0 < \|x^*\|^{-1} \leq M_j < \infty$ si $(x^*, \alpha) \in C_+(b_j, x_j)$, y por los Lemas 20 y 21,

$$\begin{aligned} \frac{\text{dist}(x_j, \mathcal{F}_P(b_j))}{\text{dist}(b_j, \mathcal{F}_P^{-1}(x_j))} &= \frac{\sup_{(x^*, \alpha) \in \text{cl}^* C_P(b_j)} \frac{[\langle x^*, x_j \rangle - \alpha]_+}{\|x^*\|}}{\sup_{(x^*, \alpha) \in \text{cl}^* C_P(b_j)} [\langle x^*, x_j \rangle - \alpha]_+} \\ &= \frac{\sup_{(x^*, \alpha) \in C_+(b_j, x_j)} \frac{\langle x^*, x_j \rangle - \alpha}{\|x^*\|}}{\sup_{(x^*, \alpha) \in C_+(b_j, x_j)} (\langle x^*, x_j \rangle - \alpha)} \\ &\leq \sup_{(x^*, \alpha) \in C_+(b_j, x_j)} \|x^*\|^{-1} \\ &= M_j. \end{aligned}$$

En vista de (3.25), haciendo $j \rightarrow \infty$, podemos obtener la estimación:

$$\text{lip } \mathcal{F}_P(0, \widehat{x}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\text{dist}(x_j, \mathcal{F}_P(b_j))}{\text{dist}(b_j, \mathcal{F}_P^{-1}(x_j))} \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} M_j =: K \quad (3.29)$$

Desde ahora imitaremos los pasos dados en la demostración del Teorema 4.6 en [4].

Ya que $\text{lip } \mathcal{F}_P(0, \widehat{x}) > 0$, existe una sucesión $\{\beta_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, tal que $0 < \beta_j < M_j$ para

Capítulo 3. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema primal

$j \in \mathbb{N}$ y $\lim_{j \rightarrow \infty} \beta_j = K > 0$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$, tomemos ahora $(x_j^*, \alpha_j) \in C_+(b_j, x_j)$ con $\beta_j < \|x_j^*\|^{-1}$ (esto es posible por la definición de M_j y la elección de β_j). Como la sucesión $\{x_j^*\}_{j \in \mathbb{N}}$ es acotada (pues $K > 0$, $\|x_j^*\| < \frac{1}{\beta_j}$ y la sucesión $\{\frac{1}{\beta_j}\}$ es convergente), se puede extraer una subred $\{x_\nu^*\}_{\nu \in \mathcal{N}}$ que w^* -converge a algún $x^* \in X^*$.

Denotemos por $\{b_\nu\}, \{x_\nu\}, \{\alpha_\nu\}, \{\beta_\nu\}$ a las correspondientes subredes. De (3.27)

$$\langle x_\nu^*, x_\nu \rangle - \alpha_\nu \leq M \|x_\nu - \hat{x}\| + \|b_\nu\|,$$

luego, por (3.24), $\langle x_\nu^*, x_\nu \rangle - \alpha_\nu \rightarrow 0$.

Por otro lado

$$\langle x^*, \hat{x} \rangle - \alpha_\nu = \langle x^* - x_\nu^*, \hat{x} \rangle + \langle x_\nu^*, \hat{x} - x_\nu \rangle + \langle x_\nu^*, x_\nu \rangle - \alpha_\nu,$$

considerando que $\{\|x_\nu^*\|\}_{\nu \in \mathcal{N}}$ es acotada, $x_\nu \rightarrow \hat{x}$, $\langle x_\nu^*, x_\nu \rangle - \alpha_\nu \rightarrow 0$ y

$$x_\nu^* \xrightarrow{w^*} x^*, \tag{3.30}$$

se obtiene que

$$\alpha_\nu \rightarrow \langle x^*, \hat{x} \rangle. \tag{3.31a}$$

Por el Lema 22, en vista de (3.30), (3.31a), como $b_\nu \rightarrow 0$, y $(x_\nu^*, \alpha_\nu) \in \text{cl}^* C_P(b_\nu)$ para cada $\nu \in \mathcal{N}$, tenemos $(x^*, \langle x^*, \hat{x} \rangle) \in \text{cl}^* C_P(0)$, pero la Proposición 11 asegura que $(0, 0) \notin \text{cl}^* C_P(0)$, luego $x^* \neq 0$. Por la w^* -semicontinuidad inferior de $\|\cdot\|$ y como $\beta_\nu < \|x_\nu^*\|^{-1}$ y $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \beta_\nu = K$, tenemos

$$0 < \|x^*\| \leq \liminf_{\nu \in D} \|x_\nu^*\| \leq \lim_{\nu} \frac{1}{\beta_\nu} = \frac{1}{K}. \tag{3.32}$$

Además, de (ii) del Lema 16, la función $x^* \mapsto \|x^*\|^{-1}$ alcanza un máximo en el conjunto $S_P = \{x^* \in X^* \mid (x^*, \langle x^*, \hat{x} \rangle) \in \text{cl}^* C_P(0)\}$, así de (3.29) y (3.32) obtenemos

$$\text{lip } \mathcal{F}_P(0, \hat{x}) \leq K \leq \|x^*\|^{-1} \leq \max \{\|z^*\|^{-1} \mid (z^*, \langle z^*, \hat{x} \rangle) \in \text{cl}^* C_P(0)\}. \tag{3.33}$$

Capítulo 3. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema primal

En vista de (3.26) y (3.33) queda probada la igualdad indicada en (3.22).

(iii) Si \mathcal{F}_P no satisface la condición fuerte de Slater en 0, la equivalencia (i) \Leftrightarrow (iv) de la Proposición 11 asegura que \mathcal{F}_P no es de tipo Lipschitz alrededor de $(0, \hat{x})$, luego $\text{lip } \mathcal{F}_P(0, \hat{x}) = \infty$. La última igualdad de (3.23) se obtiene en forma similar a la demostración de (iii) del Teorema 18. ■

Corolario 24 *Sea $\hat{x} \in \mathcal{F}_P(0)$ para la aplicación conjunto factible $\mathcal{F}_P : \ell_\infty(T) \rightrightarrows X$. Entonces*

$$\text{lip } \mathcal{F}_P(0, \hat{x}) = \|D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})\|. \quad (3.34)$$

Demostración. La igualdad (3.34) se obtiene directamente comparando los Teoremas 18 y 23, ya que si $\hat{x} \in Q$ es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_P en 0, tanto la cota exacta lipschitziana como la norma de la coderivada valen 0, si \hat{x} no es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_P en 0 pero \mathcal{F}_P satisface la condición fuerte de Slater en 0, ambas tienen la misma fórmula de cálculo, y por último, si \mathcal{F}_P no satisface la condición fuerte de Slater en 0, ambas valen ∞ . ■

Nota 25 *El Corolario anterior se puede obtener también como consecuencia de que \mathcal{F}_P^{-1} es perfectamente regular en $(\hat{x}, 0)$, siguiendo argumentos similares a los usados en [14, Proposition 5].*

3.3. Ejemplos: Cotas lipschitzianas para el primal

Ejemplo 26 (A) Sea $X = \mathbb{R}^2$ con la norma euclídea, $T = \{1, 2, 3\}$ y sea $P(b, c^*)$ el problema primal dado por

$$(P)(b, c^*) : \quad \begin{aligned} \text{Sup} \quad & x_1 + x_2 + c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 1 + b_1, \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 + b_2, \\ \text{s.a.} \quad & x_2 \leq 3 + b_1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

donde $\bar{c}^* = (1, 1)$; $\bar{b} = (1, 2, 3)$; $a_1^* = (1, 2)$; $a_2^* = (-1, 1)$; $a_3^* = (0, 1)$; $Q = \mathbb{R}_+^2$; y

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observemos que $\hat{x} = (1, 0) \in \mathcal{F}_P(0)$ pero no es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_P en $b = 0$, sin embargo \mathcal{F}_P satisface la condición fuerte de Slater en $b = 0$ (por ejemplo para $\bar{x} = (\frac{1}{2}, 0)$), así, podemos aplicar la fórmula dada en (ii) del Teorema 23. Por otro lado

$$C_P(0) = \text{conv} \left[\{(1, 2, 1); (-1, 1, 2); (0, 1, 3)\} \cup (\mathbb{R}_-^2 \times \{1\}) \right],$$

ya que $\mathbb{R}_-^2 \times \{1\}$ es un conjunto convexo, podemos decir que

$$(x^*, \langle x^*, \hat{x} \rangle) = (x_1^*, x_2^*, x_1^*) \in \text{cl } C_P(0)$$

si, y sólo si,

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_1^* \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \lambda_1^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_4^n \begin{pmatrix} x_1^n \\ x_2^n \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.35)$$

Capítulo 3. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema primal

para ciertos λ_i^n donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_i^n \geq 0$, $i = 1, \dots, 4$, $\sum_{i=1}^4 \lambda_i^n = 1$, $x_1^n \leq 0$ y $x_2^n \leq 0$.

Como

$$\|D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})\| = \text{máx} \{ \|x^*\|^{-1} \mid (x^*, \langle x^*, \hat{x} \rangle) \in \text{cl } C_P(0) \},$$

deseamos obtener un vector $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ de menor norma que satisfaga $(x_1^*, x_2^*, x_1^*) \in \text{cl } C_P(0)$. Además, en vista de la última igualdad de (3.35), la componente x_1^* debe ser mayor o igual a 1. Este vector es $x^* = (1, 0)$, el cual se obtiene en (3.35) con, por ejemplo, $\lambda_1^n = \frac{n-1}{n}$, $\lambda_2^n = \lambda_3^n = x_1^n = 0$, $\lambda_4^n = \frac{1}{n}$, $x_2^n = -2n$.

Luego

$$\text{lip } \mathcal{F}_P(0, \hat{x}) = \|D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})\| = \|(1, 0)\|^{-1} = 1.$$

El siguiente ejemplo no aporta diferencia con el ejemplo anterior pero servirá para futuras comparaciones con el caso del problema dual.

Ejemplo 27 (B) Retomamos el ejemplo anterior, pero ahora consideramos el espacio $X = \mathbb{R}^2$ con la norma

$$\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{donde} \quad \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| \quad \text{para} \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Su espacio dual es $X^* = \mathbb{R}^2$ con la norma

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{donde} \quad \|x^*\|_\infty = \text{máx} \{|x_1^*|, |x_2^*|\} \quad \text{para} \quad x^* = (x_1^*, x_2^*) \in \mathbb{R}^2.$$

Observemos que se conserva el mismo conjunto característico $C_P(0)$ por lo tanto se deben satisfacer las condiciones dadas en (3.35) y de la misma manera obtenemos

$$\text{lip } \mathcal{F}_P(0, \hat{x}) = \|D^* \mathcal{F}_P(0, \hat{x})\| = \|(1, 0)\|_\infty^{-1} = 1.$$

Nota 28 Observar que la constante de Lipschitz del problema primal depende de la norma elegida en el espacio X , por lo tanto las constantes obtenidas en los ejemplos (A) y (B) no tienen por qué coincidir.

Capítulo 4

Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema dual

Analizaremos ahora las propiedades relacionadas a la estabilidad lipschitziana de la aplicación conjunto factible del problema dual. Mostraremos que éstas son similares a las encontradas en el capítulo anterior, referidas al problema primal. Una diferencia importante entre ambos problemas es que aquí las perturbaciones $\langle c^*, q \rangle$ del lado derecho de las restricciones dadas en (2.19) no están libres, responden a una estructura y por lo tanto no se puede aplicar directamente la teoría desarrollada en [4].

Trabajaremos con la siguiente representación del problema dual dada en (2.19) de la Sección 2.6

$$\begin{aligned} (D)(b, c^*) : \quad & \text{Inf} \quad \langle \mu, \bar{b} + b \rangle \\ \text{s.a.} \quad & \langle \mu, Aq \rangle \geq \langle \bar{c}^* + c^*, q \rangle, \quad q \in \tilde{Q} \\ & \langle \mu, p \rangle \geq -1 \quad p \in \ell_\infty(T)_+. \end{aligned}$$

Recordemos que \tilde{Q} es un conjunto cerrado, acotado, que no contiene el vector nulo y genera el cono Q . En este caso, el conjunto característico de $\mathcal{F}_D(c^*)$ (o del problema dual $(D)(b, c^*)$) depende de la elección del conjunto \tilde{Q} y está definido como el siguiente subconjunto convexo de $\ell_\infty(T) \times \mathbb{R}$:

$$C_D(c^*) := \text{conv} \left(\left\{ (Aq, \langle \bar{c}^* + c^*, q \rangle) : q \in \tilde{Q} \right\} \cup \{(p, -1) : p \in \ell_\infty(T)_+\} \right).$$

Si bien una correcta notación sería $C_D(c^*; \tilde{Q})$, para simplificar la notación y en vista de los resultados de la siguiente sección, prescindiremos de la especificación de \tilde{Q} .

4.1. Independencia de \tilde{Q}

El siguiente lema nos permitirá luego elegir libremente un conjunto \tilde{Q} , para la representación del problema dual, sin temor a perder la condición de estabilidad de éste. (Ver Nota 33).

Lema 29 *Dado un cono convexo cerrado no vacío Q , si existe un conjunto generador cerrado y acotado \tilde{Q} con $0 \notin \text{cl conv } \tilde{Q}$, y \tilde{Q}_1 es otro conjunto cerrado, acotado que genera al cono Q y que no contiene al origen, entonces $0 \notin \text{cl conv } \tilde{Q}_1$. Es decir, la condición $0 \notin \text{cl conv } \tilde{Q}$ es independiente de la elección de \tilde{Q} .*

Demostración. Sea $z \in \text{cl conv } \tilde{Q}_1$, luego existe una sucesión $\{z_n\} \subset \text{conv } \tilde{Q}_1$ tal que

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n, \tag{4.1}$$

Capítulo 4. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema dual

donde para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $\{\lambda^n\} \in \mathbb{R}_+^{(\tilde{Q}_1)}$ y A_n tal que

$$\begin{aligned} z_n &= \sum_{q \in A_n} \lambda_q^n q, \\ A_n &\subset \tilde{Q}_1 \quad \text{es un conjunto finito,} \\ \lambda_q^n &> 0 \quad \text{para cada } q \in A_n \quad \text{y} \\ \sum_{q \in A_n} \lambda_q^n &= 1. \end{aligned}$$

Por otro lado, para cada $q \in \tilde{Q}_1$ existe $\alpha_q > 0$ y $v_q \in \tilde{Q}$ tal que

$$q := \alpha_q v_q. \tag{4.2}$$

Llamemos

$$\eta_n := \sum_{q \in A_n} \lambda_q^n \alpha_q > 0 \quad \text{y} \quad v_n := \sum_{q \in A_n} \frac{\lambda_q^n \alpha_q}{\eta_n} v_q \in \text{conv } \tilde{Q}, \tag{4.3}$$

luego

$$z_n = \sum_{q \in A_n} \lambda_q^n q = \sum_{q \in A_n} \lambda_q^n \alpha_q v_q = \eta_n \sum_{q \in A_n} \frac{\lambda_q^n \alpha_q}{\eta_n} v_q = \eta_n v_n. \tag{4.4}$$

Como $\{v_n\}$ es una sucesión acotada y $0 \notin \text{cl conv } \tilde{Q}$ entonces $\{\eta_n\}$ es acotada superiormente. Además por ser \tilde{Q} es acotado, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\|v_n\| = \left\| \sum_{q \in A_n} \frac{\lambda_q^n \alpha_q}{\eta_n} v_q \right\| \leq \sup_{v \in \tilde{Q}} \|v\| \sum_{q \in A_n} \frac{\lambda_q^n \alpha_q}{\eta_n} = \sup_{v \in \tilde{Q}} \|v\| =: R.$$

Sea

$$N := \inf_{q \in \tilde{Q}_1} \|q\|,$$

$N > 0$ por ser \tilde{Q}_1 cerrado en un espacio de Banach y $0 \notin \tilde{Q}_1$. Luego, de (4.2)

$$0 < N \leq \|q\| = \alpha_q \|v_q\| \leq \alpha_q R,$$

para cada $q \in \tilde{Q}_1$, y así

$$\eta_n = \sum_{q \in A_n} \lambda_q^n \alpha_q \geq \frac{N}{R} \sum_{q \in A_n} \lambda_q^n = \frac{N}{R} > 0,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, luego $\{\eta_n\} \subset \mathbb{R}$ es acotada inferiormente, por lo tanto existe $0 < \eta < \infty$ y una subsucesión $\{\eta_{n_k}\}$ de $\{\eta_n\}$ tal que $\eta_{n_k} \rightarrow \eta$. Sean $\{z_{n_k}\}$ y $\{v_{n_k}\}$ las correspondientes subsucesiones de $\{z_n\}$ y $\{v_n\}$, de (4.1) y (4.4) obtenemos que

$$v_{n_k} \rightarrow \frac{1}{\eta} z,$$

ya que $0 \notin \text{cl conv } \tilde{Q}$ y en vista de (4.3) obtenemos que $\frac{1}{\eta} z \neq 0$, por lo tanto $z \neq 0$. Así hemos probado que $0 \notin \text{cl conv } \tilde{Q}_1$. ■

Al igual que en el problema primal, establecemos, entre otras, una equivalencia que relaciona el conjunto característico con la existencia de un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_D en c^* .

Proposición 30 *Sea $c^* \in \text{dom } \mathcal{F}_D$ para el problema dual $D(b, c^*)$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) *Existe $\hat{\mu} \geq 0$ que es punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_D en c^* .*
- (ii) *$(0, 0) \notin \text{cl}^* C_D(c^*)$.*
- (iii) *$c^* \in \text{int}(\text{dom } \mathcal{F}_D)$ y $0 \notin \text{cl conv } \tilde{Q}$.*

Demostración. (i) \Leftrightarrow (ii) y (i) \Rightarrow (iii) se obtienen siguiendo los mismos pasos que en la demostración de la Proposición 11. Además si $0 \in \text{cl conv } \tilde{Q}$, entonces es evidente que ningún $\hat{\mu}$ puede ser punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_D en c^* .

(iii) \Rightarrow (i) Si $c^* \in \text{int}(\text{dom } \mathcal{F}_D)$ entonces $c^* + c'^* \in \text{dom } \mathcal{F}_D$ para $\|c'^*\| \leq \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Como $0 \notin \text{cl conv } \tilde{Q}$, por la propiedad de separación fuerte, existe $x^* \in X^*$, con $\|x^*\| = 1$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle x^*, q \rangle \geq \beta > 0 \text{ para todo } q \in \tilde{Q}.$$

Capítulo 4. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema dual

Para $c^* = \varepsilon x^*$, existe $\hat{\mu} \geq 0$ tal que

$$-\langle \hat{\mu}, Aq \rangle + \langle \bar{c}^* + c^* + c'^*, q \rangle \leq 0 \quad \text{para todo } q \in \tilde{Q}.$$

Ya que $\langle c'^*, q \rangle = \varepsilon \langle x^*, q \rangle \geq \varepsilon\beta > 0$ para todo $q \in \tilde{Q}$, se tiene que

$$-\langle \hat{\mu}, Aq \rangle + \langle \bar{c}^* + c^*, q \rangle \leq -\langle c'^*, q \rangle \leq -\varepsilon\beta < 0,$$

así

$$\inf_{q \in \tilde{Q}} (\langle \hat{\mu}, Aq \rangle - \langle \bar{c}^* + c^*, q \rangle) > 0$$

y $\hat{\mu} \geq 0$ es punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_D en c^* . ■

Nota 31 En la condición (ii), como $(0, 0) \in \ell_\infty(T) \times \mathbb{R}$ y $C_D(c^*)$ es un conjunto convexo, se puede reemplazar $(0, 0) \in \text{cl}^* C_D(c^*)$ por $(0, 0) \in \text{cl} C_D(c^*)$. La elección de esta notación se debe a que siempre consideraremos la topología débil estrella en $\ell_\infty(T)^{**}$ (ver Proposición 66 en Apéndice A).

A continuación establecemos también una equivalencia entre la propiedad de tipo Lipschitz de la aplicación \mathcal{F}_D y la estabilidad de la consistencia del problema dual.

Proposición 32 Sea $c^* \in \text{dom } \mathcal{F}_D$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $c^* \in \text{int}(\text{dom } \mathcal{F}_D)$.

(ii) \mathcal{F}_D es de tipo Lipschitz alrededor de (c^*, μ) para todo $\mu \in \mathcal{F}_D(c^*)$.

Demostración. (i) \Leftrightarrow (ii) Es consecuencia de que la propiedad de tipo Lipschitz de una aplicación arbitraria $F : Z \rightrightarrows Y$ entre espacios de Banach con $\text{dom } F \neq \emptyset$ es equivalente a la propiedad de regularidad métrica de la aplicación inversa $F^{-1} : Y \rightrightarrows Z$ y del Teorema 3 (Teorema de Robinson- Ursescu) ya que $\mathcal{F}_D^{-1} : \ell_\infty(T)^* \rightrightarrows X^*$

Capítulo 4. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema dual

está definida entre espacios de Banach (con la topología de la norma) y es una multifunción con gráfico convexo cerrado en $\ell_\infty(T)^* \times X^*$. ■

En vista de las Proposiciones 29, 30 y 32, concluimos que las condiciones (i) y (ii) de la Proposición 30 también son independientes de la elección de \tilde{Q} . Queda así justificado el abuso de notación al utilizar $(D)(b, c^*)$ en la representación del problema dual y no indicar en dicha notación la elección de \tilde{Q} , lo que se resume en el siguiente Corolario.

Corolario 33 *Si Q es un cono convexo cerrado para el cual existe un conjunto generador \tilde{Q} cerrado y acotado tal que $0 \notin \text{cl conv } \tilde{Q}$, entonces, para $c^* \in \text{dom } \mathcal{F}_D$, las condiciones*

(i) \mathcal{F}_D *satisface la condición fuerte de Slater en c^* ,*

(ii) $(0, 0) \notin \text{cl}^* C_D(c^*)$,

son independientes de la elección de \tilde{Q} y equivalentes a la propiedad

(iii) \mathcal{F}_D *es de tipo Lipschitz alrededor de (c^*, μ) para todo $\mu \in \mathcal{F}_D(c^*)$.*

Presentamos ahora una equivalencia a la condición $0 \notin \text{cl conv } \tilde{Q}$ que utilizaremos luego para estimar tanto la norma de la coderivada como la cota exacta lipschitziana.

Proposición 34 *Dado un conjunto \tilde{Q} acotado en un espacio real de Banach X , entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

i) $0 \notin \text{cl conv } \tilde{Q}$.

ii) *Existe un número real $r > 0$ y $\bar{x}^* \in X^*$, con $\|\bar{x}^*\| = 1$ tal que $r \leq \langle \bar{x}^*, q \rangle$ para todo $q \in \tilde{Q}$.*

Demostración. i) \Rightarrow ii) Es inmediato de la propiedad de separación fuerte.

ii) \Rightarrow i) Se deduce del hecho de que \bar{x}^* es lineal y continuo. ■

Nota 35 La existencia de un conjunto \tilde{Q} generador de Q con $0 \notin \text{cl conv } \tilde{Q}$ implica que el cono Q tiene vértice (es decir, si $q \in Q$, entonces $-q \notin Q$). En dimensión finita, por el teorema de Caratheodory, se cumple la equivalencia entre estas dos características del cono Q , sin embargo en dimensión infinita no es así, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Presentaremos ahora un sistema definido sobre un cono con vértice Q , y un conjunto \tilde{Q} generador, cerrado y acotado, tal que $0 \in \text{cl conv } \tilde{Q}$ y $c^* = 0 \notin \text{int}(\text{dom } \mathcal{F}_D)$, por lo tanto \mathcal{F}_D no es de tipo Lipschitz alrededor de $(0, \mu)$ para ningún $\mu \in \mathcal{F}_D(0)$.

Ejemplo 36 Sea $T = \{t_0\}$ y $X = c_0$ el espacio de Banach de las sucesiones reales acotadas convergentes a 0, con la norma supremo. Entonces $X^* = \ell_1(\mathbb{N}) = \ell_1$ y $X^{**} = \ell_\infty(\mathbb{N}) = \ell_\infty$.

Sean Q el cono con vértice $\{q \in c_0 \mid q_n \geq 0, n \in \mathbb{N}\}$ y $a_{t_0}^* = \bar{c}^* = \left(\frac{1}{n!}\right)_{n=1}^\infty \in \ell_1$.

El conjunto $\tilde{Q} := \{q \in Q \mid \|q\| = 1\}$ es cerrado, acotado, no contiene al vector nulo y genera el cono Q , sin embargo $0 \in \text{cl conv } \tilde{Q}$, en efecto, sea $e^k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \tilde{Q}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ tal que $e_k^k = 1$ y $e_j^k = 0$ si $j \neq k$, y sea

$$z_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} e^k \in \text{conv } \tilde{Q},$$

luego $\|z_n\| = \frac{1}{n}$ y así $z_n \rightarrow 0$. Además, en vista de la Proposición 29, no existe otro conjunto \tilde{Q} cerrado, acotado, con $0 \notin \tilde{Q}$ y generador de Q tal que $0 \notin \text{cl conv } \tilde{Q}$.

Por otro lado, como $A^* = A = a_{t_0}^*$, para $\hat{\mu} = 1 \in \ell_\infty(\{t_0\})^* = \mathbb{R}$, se tiene que $A^* \hat{\mu} = A^* 1 = a_{t_0}^* = \bar{c}^* \in \bar{c}^* - Q^0$, así $\hat{\mu} = 1 \in \mathcal{F}_D(0) = \{\mu \in \mathbb{R}_+ \mid A^* \mu \in \bar{c}^* - Q^0\}$.

Además $0 \notin \text{int}(\text{dom } \mathcal{F}_D)$. Efectivamente, para $\varepsilon > 0$, consideremos

$$c_\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{e} \left(\frac{1}{(n-1)!} \right)_{n=1}^\infty \in \ell_1, \quad \text{donde } e = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}$$

luego $\|c_\varepsilon^*\| = \frac{\varepsilon}{e} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n-1)!} = \frac{\varepsilon}{e} e = \varepsilon$ y si $\mu \in \mathcal{F}_D(c_\varepsilon^*)$, entonces $\mu \in \mathbb{R}_+$ y

$$\mu \langle a_{t_0}^*, q \rangle \geq \langle \bar{c}^*, q \rangle + \langle c_\varepsilon^*, q \rangle, \quad \text{para todo } q \in \tilde{Q},$$

Capítulo 4. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema dual

como $a_{t_0}^* = \bar{c}^*$ se tiene que

$$(\mu - 1) \langle \bar{c}^*, q \rangle \geq \langle c_\varepsilon^*, q \rangle, \text{ para todo } q \in \tilde{Q}.$$

En particular, para $e^k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \tilde{Q}$, obtenemos que $(\mu - 1) \frac{1}{k!} \geq \frac{\varepsilon}{(k-1)!e}$, y así

$$(\mu - 1) \geq \frac{\varepsilon k!}{(k-1)!e} = \frac{\varepsilon k}{e}, \text{ para todo } k \in \mathbb{N},$$

lo cual es un absurdo, por lo tanto $\mathcal{F}_D(c_\varepsilon^*) = \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$ y esto implica que $0 \notin \text{int}(\text{dom } \mathcal{F}_D)$.

En vista de la Proposición 32, \mathcal{F}_D no es de tipo Lipschitz alrededor de $(0, 1)$.

4.2. Caracterización de la coderivada

En esta sección presentaremos una caracterización del cono normal al gráfico de \mathcal{F}_D en $(\hat{c}^*, \hat{\mu})$, la que nos facilitará el cálculo de la norma de la coderivada. Tengamos en cuenta que, tanto en la siguiente proposición como en el Teorema 38, si $(x^{**}, b^{**}) \in X \times \ell_\infty(T)$ entonces se puede reemplazar en (4.5) y (4.6) la clausura débil estrella por la clausura fuerte porque estamos considerando conjuntos convexos (ver Proposición 66 en Apéndice A).

Proposición 37 Sea $(\hat{c}^*, \hat{\mu}) \in \text{gph } \mathcal{F}_D$ y sea $(x^{**}, b^{**}) \in X^{**} \times \ell_\infty(T)^{**}$. Entonces

$$(x^{**}, b^{**}) \in N((\hat{c}^*, \hat{\mu}); \text{gph } \mathcal{F}_D)$$

si y sólo si $-(x^{**}, b^{**}, \langle \hat{c}^*, x^{**} \rangle + \langle \hat{\mu}, b^{**} \rangle)$ pertenece a

$$\text{cl}^* \left(\{(-q, Aq, \langle \bar{c}^*, q \rangle), \quad q \in Q\} + \{0\} \times \ell_\infty(T)_+ \times (-\mathbb{R}_+) \right). \quad (4.5)$$

Demostración. Se siguen los mismos pasos que en la demostración de la Proposición 13 considerando el conjunto

$$\text{gph } \mathcal{F}_D = \left\{ (c^*, \mu) \in X^* \times \ell_\infty(T)^* \mid \begin{array}{l} \langle (c^*, \mu), (-q, Aq) \rangle \geq \langle \bar{c}^*, q \rangle, \quad q \in \tilde{Q} \\ \text{y } \langle (c^*, \mu), (0, p) \rangle \geq 1, \quad p \in \ell_\infty(T)_+ \end{array} \right\}.$$

■

Al igual que en el problema primal, establecemos una caracterización de la coderivada de \mathcal{F}_D en un punto $(0, \hat{\mu})$, siendo $\hat{\mu}$ una solución del problema dual nominal.

Teorema 38 *Sea $\hat{\mu} \in \mathcal{F}_D(0)$ para la aplicación conjunto factible $\mathcal{F}_D : X^* \rightrightarrows \ell_\infty(T)^*$ donde X es un espacio de Banach. Si $(x^{**}, b^{**}) \in X^{**} \times \ell_\infty(T)^{**}$, entonces $x^{**} \in D^*\mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})(b^{**})$ si y sólo si*

$$(x^{**}, b^{**}, \langle \hat{\mu}, b^{**} \rangle) \in \text{cl}^* \left(\{(q, Aq, \langle \bar{c}^*, q \rangle), q \in Q\} + \{0\} \times \ell_\infty(T)_+ \times \{0\} \right) \quad (4.6)$$

Demostración. La demostración sigue los mismos pasos que la realizada en el Teorema 14. ■

Corolario 39 *Bajo las condiciones del teorema anterior, si $x^{**} \in D^*\mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})(b^{**})$ entonces existe una red $\{(\tilde{q}_\nu, p_\nu, \lambda_\nu)\}_{\nu \in \mathcal{N}} \subset \tilde{Q} \times \ell_\infty(T)_+ \times \mathbb{R}_+$ tal que*

$$x^{**} = w^* \text{-} \lim_{\nu \in \mathcal{N}} \lambda_\nu \tilde{q}_\nu, \quad (4.7)$$

$$b^{**} = w^* \text{-} \lim_{\nu \in \mathcal{N}} (\lambda_\nu A \tilde{q}_\nu + p_\nu), \quad \text{y} \quad (4.8)$$

$$\langle \hat{\mu}, b^{**} \rangle = \lim_{\nu \in \mathcal{N}} \langle \bar{c}^*, \lambda_\nu \tilde{q}_\nu \rangle. \quad (4.9)$$

En particular, si $\hat{\mu}$ es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_D en 0, entonces $x^{**} = 0$.

Demostración. A partir de (4.6) del teorema anterior y teniendo en cuenta que \tilde{Q} es un conjunto generador de Q , obtenemos (4.7)-(4.9)

Capítulo 4. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema dual

Supongamos que $\hat{\mu}$ es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_D en 0, y sea $\theta > 0$, tal que

$$\inf_{q \in \tilde{Q}} (\langle \hat{\mu}, Aq \rangle - \langle \bar{c}^*, q \rangle) \geq \theta > 0. \quad (4.10)$$

Combinando (4.7) y (4.9) obtenemos

$$\lim_{\nu \in \mathcal{N}} \langle \hat{\mu}, \lambda_\nu A\tilde{q}_\nu + p_\nu \rangle = \langle \hat{\mu}, b^{**} \rangle = \lim_{\nu \in \mathcal{N}} \langle \bar{c}^*, \lambda_\nu \tilde{q}_\nu \rangle, \quad (4.11)$$

de (4.10) y (4.11)

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\nu \in \mathcal{N}} (\langle \hat{\mu}, \lambda_\nu A\tilde{q}_\nu + p_\nu \rangle - \langle \bar{c}^*, \lambda_\nu \tilde{q}_\nu \rangle) \\ &\geq \limsup_{\nu \in \mathcal{N}} \lambda_\nu (\langle \hat{\mu}, A\tilde{q}_\nu \rangle - \langle \bar{c}^*, \tilde{q}_\nu \rangle) \\ &\geq \theta \limsup_{\nu \in \mathcal{N}} \lambda_\nu. \end{aligned}$$

Como $\theta > 0$ y $\lambda_\nu \geq 0$, tenemos que $\lim_{\nu \in \mathcal{N}} \lambda_\nu = 0$. Ahora, por ser \tilde{Q} un conjunto acotado, de (4.7) y de la w^* -semicontinuidad inferior de la norma en X^{**} , obtenemos

$$\|x^{**}\| \leq \liminf_{\nu \in \mathcal{N}} \|\lambda_\nu \tilde{q}_\nu\| = \liminf_{\nu \in \mathcal{N}} \lambda_\nu \|\tilde{q}_\nu\| \leq \left(\lim_{\nu \in \mathcal{N}} \lambda_\nu \right) \left(\sup_{\nu \in \mathcal{N}} \|\tilde{q}_\nu\| \right) = 0.$$

Por lo tanto $x^{**} = 0$. ■

Lema 40 Sea $\hat{\mu} \in \mathcal{F}_D(0)$ para la aplicación conjunto factible $\mathcal{F}_D : X^* \rightrightarrows \ell_\infty(T)^*$

(i) Si $\hat{\mu}$ es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_D en 0, entonces el conjunto

$$S_D := \{b^{**} \in \ell_\infty(T)^{**} \mid (b^{**}, \langle \hat{\mu}, b^{**} \rangle) \in \text{cl}^* C_D(0)\}$$

es vacío.

(ii) Si $\hat{\mu}$ no es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_D en 0, entonces el conjunto S_D es no vacío y w^* -cerrado.

(iii) Si $\hat{\mu}$ no es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_D en 0 pero \mathcal{F}_D satisface la condición fuerte de Slater en 0, entonces $0 \notin S_D$ y la función $b^{**} \mapsto \|b^{**}\|^{-1}$ alcanza un máximo en S_D .

Demostración. La demostración es similar a la del Lema 16, en este caso, para (ii) usamos que $\ell_\infty(T)^*$, con la topología de la norma, es un espacio de Banach, luego

$$\begin{aligned} \|Aq\|_{**} &= \sup \{ |\langle \mu, Aq \rangle| \mid \mu \in \ell_\infty(T)^*, \|\mu\| \leq 1 \} \\ &= \|Aq\|_\infty \\ &= \sup \{ |\langle a_t^*, q \rangle| \mid t \in T \} \\ &\leq \sup \{ \|q\| \mid q \in \tilde{Q} \} \sup \{ \|a_t^*\| \mid t \in T \}, \end{aligned}$$

para cada $q \in \tilde{Q}$. ■

En el siguiente lema se intenta reproducir los resultados del Lema 17 en el contexto del problema dual, es decir, partir de cierto $b^{**} \in \ell_\infty(T)^{**}$ que es límite de una red y obtener $x^{**} \in X^{**}$ con $x^{**} \in D^* \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})(b^{**})$. Pero, a diferencia del caso primal, para garantizar $x^{**} \neq 0$ debemos pedirle una condición al conjunto \tilde{Q} , además, al no conocer cuál es exactamente el espacio X^{**} , no podemos asegurar $\|x^{**}\| = 1$, debido a esto, sólo se obtiene una estimación de ella.

Lema 41 *Sea $\hat{\mu} \in \mathcal{F}_D(0)$ para la aplicación conjunto factible $\mathcal{F}_D : X^* \rightrightarrows \ell_\infty(T)^*$ y S_D el conjunto definido en el Lema 40. Si $\hat{\mu}$ no es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_D en 0 entonces para cada $b^{**} \in S_D$ existe $z^{**} \in X^{**}$ tal que $z^{**} \in D^* \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})(b^{**})$. Además si $0 \notin \text{cl conv } \tilde{Q}$, existen dos constantes positivas r y R que dependen sólo del conjunto \tilde{Q} tal que $r \leq \|z^{**}\| \leq R$.*

Demostración. Sea $b^{**} \in S_D = \{b^{**} \in \ell_\infty(T)^{**} \mid (b^{**}, \langle \hat{\mu}, b^{**} \rangle) \in \text{cl}^* C_D(0)\}$ entonces según la definición de $C_D(0)$, existen redes $\{\lambda^\nu\}_{\nu \in \mathcal{N}} \subset \mathbb{R}_+^{(\tilde{Q})}$, $\{\gamma^\nu\}_{\nu \in \mathcal{N}} \subset \mathbb{R}_+^{(\ell_\infty(T)_+)}$ tales que

$$\sum_{q \in \tilde{Q}} \lambda_q^\nu + \sum_{p \geq 0} \gamma_p^\nu = 1, \text{ para todo } \nu \in \mathcal{N}, \quad \text{y} \quad (4.12)$$

Capítulo 4. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema dual

$$(b^{**}, \langle \hat{\mu}, b^{**} \rangle) = w^* \text{-} \lim_{\nu \in \mathcal{N}} \left[\sum_{q \in \tilde{Q}} \lambda_q^\nu (Aq, \langle \bar{c}^*, q \rangle) + \sum_{p \in \ell_\infty(T)_+} \gamma_p^\nu (p, -1) \right].$$

De forma similar a (3.9) en la demostración del Teorema 14, tenemos que

$$0 = \lim_{\nu \in \mathcal{N}} \sum_{p \in \ell_\infty(T)_+} \gamma_p^\nu. \quad (4.13)$$

Ahora, sea $q_0 \in \tilde{Q}$ fijo y para cada $\nu \in \mathcal{N}$ definamos $\alpha_\nu := \sum_{q \in \tilde{Q}} \lambda_q^\nu$, y

$$z_\nu := \sum_{q \in \tilde{Q}} \lambda_q^\nu q + (1 - \alpha_\nu) q_0 \in \text{conv } \tilde{Q}, \quad (4.14)$$

si llamamos $R := \sup_{q \in \tilde{Q}} \|q\|$, entonces

$$\|z_\nu\| \leq \sum_{q \in \tilde{Q}} \lambda_q^\nu \|q\| + (1 - \alpha_\nu) \|q_0\| \leq \alpha_\nu R + (1 - \alpha_\nu) R = R,$$

por el teorema de Alaoglu, la red $\{z_\nu\}_{\nu \in \mathcal{N}}$ está contenida en una bola w^* -compacta, luego, existe una subred (supongamos que es la misma) que w^* -converge a algún $z^{**} \in X^{**}$ y por la w^* -semicontinuidad inferior de la norma en X^{**}

$$\|z^{**}\| \leq \liminf_{\nu \in \mathcal{N}} \|z_\nu\| \leq R. \quad (4.15)$$

Ahora, en vista de (4.12) y (4.13) $\alpha_\nu \rightarrow 1$, por lo tanto $z^{**} = w^* \text{-} \lim_{\nu \in \mathcal{N}} \sum_{q \in \tilde{Q}} \lambda_q^\nu q$ y así tenemos que

$$(z^{**}, b^{**}, \langle \hat{\mu}, b^{**} \rangle) = w^* \text{-} \lim_{\nu \in \mathcal{N}} \left[\sum_{q \in \tilde{Q}} \lambda_q^\nu (q, Aq, \langle \bar{c}^*, q \rangle) + \sum_{p \in \ell_\infty(T)_+} \gamma_p^\nu (0, p, -1) \right],$$

luego

$$(z^{**}, b^{**}, \langle \hat{\mu}, b^{**} \rangle) \in \text{cl}^* (\{(q, Aq, \langle \bar{c}^*, q \rangle), q \in Q\} + \{0\} \times \ell_\infty(T)_+ \times \{0\})$$

y, aplicando el Teorema 38, obtenemos que $z^{**} \in D^* \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})(b^{**})$.

Además, si $0 \notin \text{cl conv } \tilde{Q}$, por la Proposición 34, existe un número real $r > 0$ y $\bar{x}^* \in X^*$, con $\|\bar{x}^*\| = 1$ tal que $r \leq \langle \bar{x}^*, q \rangle$ para todo $q \in \tilde{Q}$. De (4.14) se cumple que

$$\langle \bar{x}^*, z_\nu \rangle = \sum_{q \in \tilde{Q}} \lambda_q^\nu \langle \bar{x}^*, q \rangle + (1 - \alpha_\nu) \langle \bar{x}^*, q_0 \rangle \geq \alpha_\nu r + (1 - \alpha_\nu) r = r.$$

Capítulo 4. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema dual

Ya que $z^{**} = w^*$ - $\lim_{\nu \in \mathcal{N}} z_\nu$ y por la w^* -continuidad de $\langle \bar{x}^*, \cdot \rangle$ en X^{**} tenemos que $\langle \bar{x}^*, z^{**} \rangle \geq r$. Así

$$\|z^{**}\| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \langle x^*, z^{**} \rangle \geq \langle \bar{x}^*, z^{**} \rangle \geq r,$$

de esta desigualdad y de (4.15) se deduce que $r \leq \|z^{**}\| \leq R$. ■

El siguiente teorema nos provee una estimación de la norma de la coderivada en un punto $(0, \hat{\mu}) \in \text{gph } \mathcal{F}_D$ que nos servirá, al igual que en el caso del primal, para una estimación para la cota lipschitziana en dicho punto.

Teorema 42 *Sea $\hat{\mu} \in \mathcal{F}_D(0)$ para la aplicación conjunto factible $\mathcal{F}_D : X^* \rightrightarrows \ell_\infty(T)^*$.*

Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

- (i) *Si $\hat{\mu}$ es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_D en 0, entonces $\|D^* \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})\| = 0$.*
- (ii) *Si \mathcal{F}_D satisface la condición fuerte de Slater en 0 y $\hat{\mu}$ no es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_D en 0, entonces $\|D^* \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})\| > 0$ y existen dos constantes positivas r y R , que dependen de $\text{cl conv } \tilde{Q}$, tal que*

$$r\Delta \leq \|D^* \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})\| \leq R\Delta$$

donde $\Delta = \max \{ \|b^{**}\|^{-1} \mid (b^{**}, \langle \hat{\mu}, b^{**} \rangle) \in \text{cl}^* C_D(0) \}$.

- (iii) *Si \mathcal{F}_D no satisface la condición fuerte de Slater en 0, entonces*

$$\|D^* \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})\| = \infty = \sup \{ \|b^{**}\|^{-1} \mid (b^{**}, \langle \hat{\mu}, b^{**} \rangle) \in \text{cl}^* C_D(0) \}.$$

Demostración. La demostración de (i) y (iii) se obtiene siguiendo los mismos pasos que en el Teorema 18.

- (ii) Si $\hat{\mu}$ no es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_D en 0, por (i) del Lema 40, el conjunto $S_D = \{b^{**} \in \ell_\infty(T)^{**} \mid (b^{**}, \langle \hat{\mu}, b^{**} \rangle) \in \text{cl}^* C_D(0)\}$ es no vacío y por Lema 41, para cada $b^{**} \in S_D$ existe $z^{**} \in X^{**}$ tal que $z^{**} \in D^* \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})(b^{**})$. Además como \mathcal{F}_D satisface la condición fuerte de Slater en 0, de la equivalencia (i) \Leftrightarrow (iii)

Capítulo 4. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema dual

de la Proposición 30, tenemos que $0 \notin \text{cl conv } \tilde{Q}$, luego por la equivalencia de la Proposición 34 y por Lema 41 existen dos constantes positivas r y R que dependen sólo del conjunto \tilde{Q} tal que $r \leq \|z^{**}\| \leq R$. Así $z^{**} \neq 0$ y de (ii) del Lema 40

$$\|b^{**}\|^{-1} z^{**} \in D^* \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})(\|b^{**}\|^{-1} b^{**}),$$

entonces

$$\begin{aligned} \|D^* \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})\| &= \sup \{ \|x^{**}\| \mid x^{**} \in D^* \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})(b^{**}), \|b^{**}\| \leq 1 \} \\ &\geq \| \|b^{**}\|^{-1} z^{**} \| \\ &\geq r \|b^{**}\|^{-1}. \end{aligned}$$

Tomando máximo sobre S_D (éste se alcanza por (ii) del Lema 40), obtenemos que

$$\|D^* \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})\| \geq r \max \{ \|b^{**}\|^{-1} \mid (b^{**}, \langle \hat{\mu}, b^{**} \rangle) \in \text{cl}^* C_D(0) \}. \quad (4.16)$$

Para obtener la otra estimación, con los mismos argumentos que en la demostración de (ii) del Teorema 18, utilizando en este caso (i) \Rightarrow (iii) de la Proposición 30, podemos expresar $\|D^* \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})\|$ como

$$\sup \{ 0, \sup \{ \|x^{**}\| \mid x^{**} \neq 0, x^{**} \in D^* \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})(b^{**}), 0 < \|b^{**}\| \leq 1 \} \}. \quad (4.17)$$

Para cada $x^{**} \in D^* \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})(b^{**})$, $x^{**} \neq 0$, con $0 < \|b^{**}\| \leq 1$, aplicando el Corolario 39, existe una red $\{(\tilde{q}_\nu, p_\nu, \lambda_\nu)\}_{\nu \in \mathcal{N}} \subset \tilde{Q} \times \ell_\infty(T)_+ \times \mathbb{R}_+$ tal que

$$\begin{aligned} x^{**} &= w^* - \lim_{\nu \in \mathcal{N}} \lambda_\nu \tilde{q}_\nu, \\ b^{**} &= w^* - \lim_{\nu \in \mathcal{N}} (\lambda_\nu A \tilde{q}_\nu + p_\nu), \quad y \\ \langle \hat{\mu}, b^{**} \rangle &= \lim_{\nu \in \mathcal{N}} \langle \bar{c}^*, \lambda_\nu \tilde{q}_\nu \rangle. \end{aligned}$$

Si llamamos $\eta := \liminf_{\nu \in \mathcal{N}} \lambda_\nu$, entonces $\eta < \infty$ pues $0 \notin \text{cl conv } \tilde{Q}$ y $\eta > 0$ pues

$$0 < \|x^{**}\| \leq \liminf_{\nu \in \mathcal{N}} \|\lambda_\nu \tilde{q}_\nu\| = \liminf_{\nu \in \mathcal{N}} \lambda_\nu \|\tilde{q}_\nu\| \leq R\eta.$$

Supongamos que la propia red $\{\lambda_\nu\}_{\nu \in \mathcal{N}}$ converge a η , con los mismos argumentos que en la demostración de (ii) del Teorema 18 para obtener (3.20), tomando en este caso $\eta_\nu := \lambda_\nu + \varepsilon_\nu$ tal que $\varepsilon_\nu > 0$ y $\varepsilon_\nu \rightarrow 0$, se tiene que

$$(\eta^{-1}b^{**}, \langle \hat{\mu}, \eta^{-1}b^{**} \rangle) \in \text{cl}^* C_D(0),$$

y que

$$\|x^{**}\| \leq R \|\eta^{-1}b^{**}\|^{-1} \leq R \max \{ \|b^{**}\|^{-1} \mid (b^{**}, \langle \hat{\mu}, b^{**} \rangle) \in \text{cl}^* C_D(0) \}.$$

Finalmente de (4.17), concluimos que

$$\|D^* \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})\| \leq R \max \{ \|b^{**}\|^{-1} \mid (b^{**}, \langle \hat{\mu}, b^{**} \rangle) \in \text{cl}^* C_D(0) \}.$$

Con esta desigualdad y la dada en (4.16), se completa la demostración. ■

4.3. Estabilidad de tipo Lipschitz y estimación de su cota.

Teorema 43 *Sea $\hat{\mu} \in \mathcal{F}_D(0)$ para la aplicación conjunto factible $\mathcal{F}_D : X^* \rightrightarrows \ell_\infty(T)^*$ y supongamos que $0 \notin \text{cl conv } \tilde{Q}$. Entonces \mathcal{F}_D es de tipo Lipschitz alrededor de $(0, \hat{\mu})$ si y sólo si*

$$D^* \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})(0) = \{0\}.$$

Demostración. Idem a la demostración del Teorema 19. En este caso, en (\Leftarrow) utilizamos la equivalencia en la Proposición 32, luego, junto con la hipótesis $0 \notin \text{cl conv } \tilde{Q}$ aplicamos las equivalencias en la Proposición 30 y el Lema 41. ■

Observar que de acuerdo a la Nota 35, si X es un espacio de dimensión finita, la condición $0 \notin \text{cl conv } \tilde{Q}$ es equivalente a que Q tiene vértice. Si no se cumple la condición $0 \notin \text{cl conv } \tilde{Q}$, se puede tener $D^* \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})(0) = \{0\}$ aún cuando \mathcal{F}_D no sea de tipo Lipschitz alrededor de $(0, \hat{\mu})$, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 44 Retomando el Ejemplo 36, recordemos que $T = \{t_0\}$, $X = c_0$, $X^* = \ell_1$, $X^{**} = \ell_\infty$, $a_{t_0}^* = \bar{c}^* = \left(\frac{1}{n!}\right)_{n=1}^\infty \in \ell_1$, $Q = \{q \in c_0 \mid q_n \geq 0, n \in \mathbb{N}\}$, $\tilde{Q} = \{q \in Q \mid \|q\| = 1\}$, $0 \in \text{cl conv } \tilde{Q}$ y \mathcal{F}_D no es de tipo Lipschitz alrededor de $(0, \hat{\mu})$. Sin embargo, $D^* \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})(0) = \{0\}$. En efecto, si $x^{**} \in D^* \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})(0)$, entonces por el Corolario 39, existe una red $\{(\tilde{q}_\nu, p_\nu, \lambda_\nu)\}_{\nu \in \mathcal{N}} \subset \tilde{Q} \times \ell_\infty(T)_+ \times \mathbb{R}_+$ tal que

$$\begin{aligned} x^{**} &= w^* - \lim_{\nu \in \mathcal{N}} \lambda_\nu \tilde{q}_\nu, \\ 0 &= w^* - \lim_{\nu \in \mathcal{N}} (\lambda_\nu A \tilde{q}_\nu + p_\nu), \quad y \\ 0 &= \lim_{\nu \in \mathcal{N}} \langle \bar{c}^*, \lambda_\nu \tilde{q}_\nu \rangle. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Luego $0 = \lim_{\nu \in \mathcal{N}} \langle \bar{c}^*, \lambda_\nu \tilde{q}_\nu \rangle = \lim_{\nu \in \mathcal{N}} \sum_{m=1}^\infty \frac{\lambda_\nu \tilde{q}_{\nu,m}}{m!} \geq \liminf_{\nu \in \mathcal{N}} \frac{\lambda_\nu \tilde{q}_{\nu,k}}{k!} \geq 0$ para cualquier entero positivo k y así $\lim_{\nu \in \mathcal{N}} \lambda_\nu \tilde{q}_{\nu,k} = 0$. Ahora, sea $e^k \in X^* = \ell_1$ tal que $e_k^k = 1$ y $e_j^k = 0$ si $j \neq k$ para cada $k \in \mathbb{N}$, de (4.18) se tiene que $x_k^{**} = \langle e^k, x^{**} \rangle = \lim_{\nu \in \mathcal{N}} \langle e^k, \lambda_\nu \tilde{q}_\nu \rangle = \lim_{\nu \in \mathcal{N}} \lambda_\nu \tilde{q}_{\nu,k} = 0$. Por lo tanto $x^{**} = 0$, y así $D^* \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})(0) = \{0\}$.

A fin de obtener una estimación para la cota exacta lipschitziana para \mathcal{F}_D alrededor de $(0, \hat{\mu})$, utilizaremos, como en el caso del primal, la fórmula de la distancia de Ascoli

$$\text{dist}(\mu, \mathcal{F}_D(c^*)) = \max_{(b^{**}, \alpha) \in \text{cl}^* C_D(c^*)} \frac{[\alpha - \langle \mu, b^{**} \rangle]_+}{\|b^{**}\|}, \tag{4.19}$$

la cual es válida cuando \mathcal{F}_D satisface la condición fuerte de Slater en c^* y se obtiene por una aplicación directa de [4, Lema 4.3]. También utilizaremos la siguiente cota inferior para $\text{dist}(c^*, \mathcal{F}_D^{-1}(\mu))$.

Lema 45 Sea $c^* \in X^*$ y $\mu \in \ell_\infty(T)^*$ tal que $(c^*, \mu) \notin \text{gph } \mathcal{F}_D$ y $\mathcal{F}_D^{-1}(\mu) \neq \emptyset$. Si $R > 0$ es tal que $\|q\| \leq R$, para todo $q \in \tilde{Q}$, entonces

$$\text{dist}(c^*, \mathcal{F}_D^{-1}(\mu)) \geq R^{-1} \sup_{q \in \tilde{Q}} [-\langle \mu, Aq \rangle + \langle \bar{c}^* + c^*, q \rangle]_+ > 0. \tag{4.20}$$

Demostración. Como $\mathcal{F}_D^{-1}(\mu) \neq \emptyset$, se cumple que $\langle \mu, p \rangle \geq -1$, para todo $p \in \ell_\infty(T)_+$ y

$$\mathcal{F}_D^{-1}(\mu) = \left\{ d^* \in X^* \mid \langle \mu, Aq \rangle - \langle \bar{c}^*, q \rangle - \langle d^*, q \rangle \geq 0, \quad \text{para todo } q \in \tilde{Q} \right\}.$$

Si $d^* \in \mathcal{F}_D^{-1}(\mu)$, entonces (recordemos que $\|R^{-1}q\| \leq 1$ para todo $q \in \tilde{Q} \subset X$)

$$\begin{aligned} \|c^* - d^*\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle c^*, x \rangle - \langle d^*, x \rangle| \\ &\geq \sup_{q \in \tilde{Q}} |\langle c^*, R^{-1}q \rangle - \langle d^*, R^{-1}q \rangle| \\ &\geq R^{-1} \sup_{q \in \tilde{Q}} (\langle c^*, q \rangle - \langle \mu, Aq \rangle + \langle \bar{c}^*, q \rangle). \end{aligned}$$

Además, como $c^* \notin \mathcal{F}_D(\mu)$, existe $q_0 \in \tilde{Q}$ tal que

$$-\langle \mu, Aq_0 \rangle + \langle \bar{c}^* + c^*, q_0 \rangle > 0,$$

por lo tanto

$$\text{dist}(c^*, \mathcal{F}_D^{-1}(\mu)) = \inf_{d^* \in \mathcal{F}_D^{-1}(\mu)} \|c^* - d^*\| \geq R^{-1} \sup_{q \in \tilde{Q}} (\langle c^*, q \rangle - \langle \mu, Aq \rangle + \langle \bar{c}^*, q \rangle) > 0,$$

teniendo en cuenta que $[\gamma]_+ = \max\{0, \gamma\}$ para $\gamma \in \mathbb{R}$, obtenemos (4.20). ■

Lema 46 *El gráfico de la aplicación multivaluada que asigna a cada $c^* \in X^*$ el conjunto $\text{cl}^* C_D(c^*) \subset \ell_\infty(T)^{**} \times \mathbb{R}$ es cerrado en la topología (norma) \times (débil estrella) \times (euclídea) de $X^* \times \ell_\infty(T)^{**} \times \mathbb{R}$.*

Demostración. La demostración es similar a la dada en [4, Lema 4.5]. ■

Teorema 47 *Sea $\hat{\mu} \in \mathcal{F}_D(0)$ para la aplicación conjunto factible $\mathcal{F}_D : X^* \rightrightarrows \ell_\infty(T)^*$ con un espacio X de Banach. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(i) *Si $\hat{\mu}$ es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_D en 0, entonces $\text{lip } \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu}) = 0$.*

(ii) Si \mathcal{F}_D satisface la condición fuerte de Slater en 0 y $\hat{\mu}$ no es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_D en 0, entonces $\text{lip } \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu}) > 0$ y existen dos constantes positivas r y R , que dependen de $\text{cl conv } \tilde{Q}$, tal que

$$r\Delta \leq \text{lip } \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu}) \leq R\Delta,$$

donde $\Delta = \text{máx} \{ \|b^{**}\|^{-1} \mid (b^{**}, \langle \hat{\mu}, b^{**} \rangle) \in \text{cl}^* C_D(0) \}$.

(iii) Si \mathcal{F}_D no satisface la condición fuerte de Slater en 0, entonces

$$\text{lip } \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu}) = \infty = \text{sup} \{ \|b^{**}\|^{-1} \mid (b^{**}, \langle \hat{\mu}, b^{**} \rangle) \in \text{cl}^* C_D(0) \}.$$

Demostración. La demostración de (i) y (iii) es similar a la realizada en el Teorema 23.

(ii) Supongamos que \mathcal{F}_D satisface la condición fuerte de Slater en 0 y que $\hat{\mu} \in \mathcal{F}_D(0)$ no es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_D en 0, aplicando las Proposiciones 30 (i) \Leftrightarrow (iii) y 32 (i) \Leftrightarrow (ii), tenemos que $0 \in \text{int}(\text{dom } \mathcal{F}_D)$ y \mathcal{F}_D es de tipo Lipschitz alrededor de $(0, \hat{\mu})$, por [18, Teorema 1.44] y en vista de (2.14), se cumple que

$$0 < \|D^* \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})\| \leq \text{lip } \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu}) < \infty. \quad (4.21)$$

Así, por la representación dada en (ii) del Teorema 42, se obtiene la desigualdad

$$0 < r \text{ máx} \{ \|b^{**}\|^{-1} \mid (b^{**}, \langle \hat{\mu}, b^{**} \rangle) \in \text{cl}^* C_D(0) \} \leq \text{lip } \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu}), \quad (4.22)$$

donde r es la constante obtenida en la Proposición 34.

Por otro lado, ya que $0 \in \text{int}(\text{dom } \mathcal{F}_D)$ y $0 < \text{lip } \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu}) < \infty$, podemos elegir, sin pérdida de generalidad, una sucesión (c_j^*, μ_j) suficientemente cerca de $(0, \hat{\mu})$, de manera que $c_j^* \in \text{int}(\text{dom } \mathcal{F}_D)$ para todo j , (así \mathcal{F}_D satisface la condición fuerte de Slater en c_j^*), $(c_j^*, \mu_j) \notin \text{gph } \mathcal{F}_D$, $\mathcal{F}_D^{-1}(\mu_j) \neq \emptyset$ (luego $\mu_j \geq 0$) y

$$\text{lip } \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\text{dist}(\mu_j, \mathcal{F}_D(c_j^*))}{\text{dist}(c_j^*, \mathcal{F}_D^{-1}(\mu_j))}.$$

Capítulo 4. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema dual

Para cualquier $(b^{**}, \alpha) \in \text{cl}^* C_D(c_j^*)$ podemos conseguir redes $\{\lambda^\nu\}_{\nu \in \mathcal{N}} \subset \mathbb{R}_+^{(\tilde{Q})}$ y $\{\gamma^\nu\}_{\nu \in \mathcal{N}} \subset \mathbb{R}_+^{(\ell_\infty(T)_+)}$ tales que

$$\sum_{q \in \tilde{Q}} \lambda_q^\nu + \sum_{p \in \ell_\infty(T)_+} \gamma_p^\nu = 1, \text{ para todo } \nu \in \mathcal{N},$$

y

$$(b^{**}, \alpha) = w^* \text{-} \lim_{\nu} \left(\sum_{q \in \tilde{Q}} \lambda_q^\nu (Aq, \langle \bar{c}^* + c_j^*, q \rangle) + \sum_{p \in \ell_\infty(T)_+} \gamma_p^\nu (p, -1) \right),$$

entonces

$$\begin{aligned} \alpha - \langle \mu_j, b^{**} \rangle &= \lim_{\nu} \left(\sum_{q \in \tilde{Q}} \lambda_q^\nu (-\langle \mu_j, Aq \rangle + \langle \bar{c}^* + c_j^*, q \rangle) - \sum_{p \in \ell_\infty(T)_+} \gamma_p^\nu (\langle \mu_j, p \rangle + 1) \right) \\ &\leq \limsup_{\nu} \sum_{q \in \tilde{Q}} \lambda_q^\nu (-\langle \mu_j, Aq \rangle + \langle \bar{c}^* + c_j^*, q \rangle) \\ &\leq \limsup_{\nu} \sum_{q \in \tilde{Q}} \lambda_q^\nu [-\langle \mu_j, Aq \rangle + \langle \bar{c}^* + c_j^*, q \rangle]_+, \end{aligned}$$

lo cual, junto con (4.20) del Lema 45, implica que

$$\begin{aligned} \frac{\alpha - \langle \mu_j, b^{**} \rangle}{\text{dist}(c_j^*, \mathcal{F}_D^{-1}(\mu_j))} &\leq \frac{\limsup_{\nu} \sum_{q \in \tilde{Q}} \lambda_q^\nu [-\langle \mu_j, Aq \rangle + \langle \bar{c}^* + c_j^*, q \rangle]_+}{R^{-1} \sup_{q \in \tilde{Q}} [-\langle \mu_j, Aq \rangle + \langle \bar{c}^* + c_j^*, q \rangle]_+} \\ &\leq R \limsup_{\nu} \sum_{q \in \tilde{Q}} \lambda_q^\nu \\ &\leq R. \end{aligned}$$

Capítulo 4. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema dual

De estas desigualdades y de la fórmula de la distancia de Ascoli (4.19), obtenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{\text{dist}(\mu_j, \mathcal{F}_D(c_j^*))}{\text{dist}(c_j^*, \mathcal{F}_D^{-1}(\mu_j))} &= \frac{\sup_{(b^{**}, \alpha) \in \text{cl}^* C_D(c_j^*)} \frac{[\alpha - \langle \mu_j, b^{**} \rangle]_+}{\|b^{**}\|}}{\text{dist}(c_j^*, \mathcal{F}_D^{-1}(\mu_j))} \\
 &= \sup_{(b^{**}, \alpha) \in \text{cl}^* C_D(c_j^*)} \frac{[\alpha - \langle \mu_j, b^{**} \rangle]_+}{\|b^{**}\| \text{dist}(c_j^*, \mathcal{F}_D^{-1}(\mu_j))} \\
 &\leq R \sup_{(b^{**}, \alpha) \in \text{cl}^* C_D^+(c_j^*, \mu_j)} \|b^{**}\|^{-1} \\
 &= RM_j,
 \end{aligned}$$

donde

$$M_j := \sup_{(b^{**}, \alpha) \in \text{cl}^* C_D^+(c_j^*, \mu_j)} \|b^{**}\|^{-1}$$

y

$$C_D^+(c_j^*, \mu_j) := \{(b^{**}, \alpha) \in \text{cl}^* C_D(c_j^*) \mid \alpha - \langle \mu_j, b^{**} \rangle > 0\}.$$

El hecho de que $\mu_j \notin \mathcal{F}_D(c_j^*)$, implica la existencia de algún $\bar{q} \in \tilde{Q}$ tal que

$$\langle \mu_j, A\bar{q} \rangle - \langle \bar{c}^* + c_j^*, \bar{q} \rangle < 0,$$

así, para $b^{**} := A\bar{q}$ y $\alpha := \langle \bar{c}^* + c_j^*, \bar{q} \rangle$, se tiene que $(b^{**}, \alpha) \in C_D(c_j^*)$ y $\alpha - \langle \mu_j, b^{**} \rangle > 0$, por lo tanto $C_D^+(c_j^*, \mu_j) \neq \emptyset$.

Haciendo $j \rightarrow \infty$, obtenemos

$$0 < \text{lip } \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu}) \leq R \limsup_{j \rightarrow \infty} M_j =: R K.$$

Aquí observamos una expresión similar a (3.29) dada en la demostración del Teorema 23. Ahora, siguiendo los mismos pasos de dicho teorema, obtenemos la estimación deseada

$$\text{lip } \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu}) \leq R K \leq R \max \{ \|b^{**}\|^{-1} \mid (b^{**}, \langle \hat{\mu}, b^{**} \rangle) \in \text{cl}^* C_D(0) \}. \quad (4.23)$$

Capítulo 4. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema dual

En vista de (4.22) y (4.23) se completa la demostración. ■

Si bien el siguiente teorema nos proporciona una estimación para la diferencia entre $\text{lip } \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})$ y $\|D^* \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})\|$, no se logra la igualdad entre estas dos constantes como en el caso del primal (Teorema 24). Sin embargo, en vista de la Proposición 5 del Capítulo 2, la igualdad se obtiene cuando \mathcal{F}_D^{-1} es perfectamente regular.

Teorema 48 *Sea $\hat{\mu} \in \mathcal{F}_D(0)$ para la aplicación conjunto factible $\mathcal{F}_D : X^* \rightrightarrows \ell_\infty(T)^*$ con un espacio X de Banach. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(i) *Si \mathcal{F}_D satisface la condición fuerte de Slater en $c^* = 0$, entonces existen dos constantes positivas r y R , que dependen de $\text{cl conv } \tilde{Q}$, tal que*

$$0 \leq \text{lip } \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu}) - \|D^* \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})\| \leq (R - r) \max \{ \|b^{**}\|^{-1} \mid (b^{**}, \langle \hat{\mu}, b^{**} \rangle) \in \text{cl}^* C_D(0) \}$$

(ii) *Si $\mathcal{F}_D^{-1}(\ell_\infty(T)^*)$ tiene interior no vacío para la topología de la norma en X^* y $\{q \in Q \mid \|q\| = 1\}$ es w^* -cerrado en X^{**} , entonces*

$$\text{lip } \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu}) = \|D^* \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})\|.$$

Demostración. (i) Como consecuencia directa de los Teoremas 42 y 47 ó, tanto $\|D^* \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})\|$ como $\text{lip } \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})$ son nulas, o satisfacen la desigualdad

$$r\Delta \leq \|D^* \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})\| \leq \text{lip } \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu}) \leq R\Delta$$

donde $\Delta = \max \{ \|b^{**}\|^{-1} \mid (b^{**}, \langle \hat{\mu}, b^{**} \rangle) \in \text{cl}^* C_D(0) \}$ y la segunda desigualdad se cumple en vista de (4.21) del Teorema 47.

(ii) La demostración está dada en [16, Theorem 19 ii)]. ■

Aplicando la Proposición 6 obtenemos que \mathcal{F}_D^{-1} es perfectamente regular en $(\hat{\mu}, 0)$ y en vista de la Proposición 5 del Capítulo 2, se obtiene la igualdad deseada.

Nota 49 *La condición de que $\{q \in Q \mid \|q\| = 1\}$ sea w^* -cerrado en X^{**} se cumple automáticamente si X es el espacio Euclideo. En el contexto de dimensión infinita*

también se cumple cuando, por ejemplo, X es reflexivo y Q está finitamente generado. También en este caso, cuando $\text{int } Q^0$ es no vacío, $\mathcal{F}_D^{-1}(\ell_\infty(T)^*)$ tiene interior no vacío para la topología de la norma en X^* .

4.4. Ejemplos: Cotas lipschitzianas para el dual

Ejemplo 50 (A) Retomando el problema primal dado en el ejemplo 26, analizaremos ahora el problema dual asociado:

$$(D)(b, c^*) : \quad \text{Inf} \quad \langle \mu, \bar{b} + b \rangle$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{aligned} \langle \mu, Aq \rangle &\geq \langle \bar{c}^* + c^*, q \rangle, \quad q \in \tilde{Q} \\ \langle \mu, p \rangle &\geq -1 \quad p \in \ell_\infty(T)_+. \end{aligned}$$

En este ejemplo $X = \mathbb{R}^2$ con la norma euclídea, $\bar{c}^* = (1, 1)$, $\bar{b} = (1, 2, 3)$, $\ell_\infty(T) = (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$, $\ell_\infty(T)^* = (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1)$ y

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Consideremos el conjunto generador $\tilde{Q} = \{q \in \mathbb{R}_+^2 : \|q\| = 1\}$, los mejores valores que podemos obtener para r y R son $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $R = 1$.

Observemos que $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathcal{F}_D(0)$ si $\mu \in \mathbb{R}_+^3$ y

$$\mu_1(q_1 + 2q_2) + \mu_2(-q_1 + q_2) + \mu_3q_2 \geq q_1 + q_2, \quad \text{para todo } q \in \tilde{Q}.$$

En particular $\hat{\mu} = (1, 0, 0) \in \mathcal{F}_D(0)$ pero no es un punto fuerte de Slater para \mathcal{F}_D en $c^* = 0$. Sin embargo \mathcal{F}_D satisface la condición fuerte de Slater en $c^* = 0$ (por ejemplo con $\mu = (2, 0, 0)$), así podemos aplicar la fórmula para estimar la cota lipschitziana de $\mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})$ dada en (ii) del Teorema 47.

$$r\Delta \leq \text{lip } \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu}) \leq R\Delta,$$

Capítulo 4. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema dual

donde $\Delta = \text{máx} \{ \|b^{**}\|^{-1} \mid (b^{**}, \langle \hat{\mu}, b^{**} \rangle) \in \text{cl}^* C_D(0) \}$, y

$$C_D(0) = \text{conv} \left[\left\{ (q_1 + 2q_2, -q_1 + q_2, q_2, q_1 + q_2), \quad q \in \tilde{Q} \right\} \cup (\mathbb{R}_+^3 \times \{-1\}) \right],$$

como $\mathbb{R}_+^3 \times \{-1\}$ es un conjunto convexo, podemos decir que

$$(b, \langle \hat{\mu}, b \rangle) = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \text{cl} C_D(0)$$

si y sólo si, existen $\lambda^n \in \mathbb{R}_+^{(0,1)}$ y $\beta^n \geq 0$ tal que

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{0 \leq q_1 \leq 1} \lambda_{q_1}^n \begin{pmatrix} q_1 + 2q_2 \\ -q_1 + q_2 \\ q_2 \\ q_1 + q_2 \end{pmatrix} + \beta^n \begin{pmatrix} p_1^n \\ p_2^n \\ p_3^n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad (4.24)$$

con $q_2 = \sqrt{1 - q_1^2}$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, y

$$\sum_{0 \leq q_1 \leq 1} \lambda_{q_1}^n + \beta^n = 1. \quad (4.25)$$

Restando la cuarta fila a la primera obtenemos

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{0 \leq q_1 \leq 1} \lambda_{q_1}^n q_2 + \beta^n (p_1^n + 1) \right]$$

como $(p_1^n + 1) > 1$ y $\sum_{0 \leq q_1 \leq 1} \lambda_{q_1}^n q_2 \geq 0$ para cada n , tenemos que

$$\beta^n \rightarrow 0, \quad \beta^n p_1^n \rightarrow 0, \quad y \quad \sum_{0 \leq q_1 \leq 1} \lambda_{q_1}^n q_2 \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad (4.26)$$

Luego, de (4.24), (4.25), (4.26) y en vista de que $q_1 + 2q_2 = q_1 + 2\sqrt{1 - q_1^2} \geq 1$ para cada $0 \leq q_1 \leq 1$, podemos deducir las siguientes acotaciones

$$b_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq q_1 \leq 1} \lambda_{q_1}^n (q_1 + 2q_2) \geq 1 \quad (4.27)$$

$$b_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(- \sum_{0 \leq q_1 \leq 1} \lambda_{q_1}^n q_1 + \beta^n p_2^n \right) \geq -1 \quad (4.28)$$

$$b_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta^n p_3^n \geq 0. \quad (4.29)$$

Capítulo 4. Estabilidad de la aplicación conjunto factible del problema dual

Al igual que en el caso del primal, deseamos obtener un vector b de menor norma que satisface (4.27), (4.28) y (4.29). Este vector es $b = (1, 0, 0)$, el cual se obtiene cuando, por ejemplo $\lambda_1^n = \frac{n-1}{n}$, $\beta^n = \frac{1}{n}$, $p_2^n = n$, y $p_3^n = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego

$$\Delta = \text{máx} \{ \|b^{**}\|^{-1} \mid (b^{**}, \langle \hat{\mu}, b^{**} \rangle) \in \text{cl}^* C_D(0) \} = \|(1, 0, 0)\|_\infty^{-1} = 1 \quad (4.30)$$

$$\text{y} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = r\Delta \leq \text{lip } \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu}) \leq R\Delta = 1.$$

El siguiente ejemplo nos muestra que dado un mismo problema se puede obtener mejores resultados si elegimos \tilde{Q} adecuado, dependiendo de la norma en X .

Ejemplo 51 (B) Retomamos el ejemplo anterior, pero ahora consideramos el espacio $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ como lo hicimos en el Ejemplo 27 del problema primal. Su espacio dual es $X^* = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

Consideremos el conjunto generador $\tilde{Q} = \{q \in \mathbb{R}_+^2 : \|q\|_1 = q_1 + q_2 = 1\}$. En este caso podemos obtener $r = R = 1$.

Observemos que se conserva el mismo conjunto característico $C_D(0)$ que en el ejemplo anterior, por lo tanto se deben satisfacer las condiciones dadas en (4.24) y se pueden realizar los mismos pasos hasta llegar a (4.30). En este caso por ser $r = R = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} \text{lip } \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu}) &= \|D^* \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})\| \\ &= \text{máx} \{ \|b\|^{-1} \mid (b, \langle \hat{\mu}, b \rangle) \in \text{cl } C_D(0) \} \\ &= \|(1, 0, 0)\|_\infty^{-1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

lo que mejora los resultados obtenidos en el ejemplo anterior.

Igual que en los ejemplos (A) y (B) del problema primal (Capítulo 3, Sección 3.3), las constantes de Lipschitz obtenidas en los ejemplos de esta sección coinciden, esto es sólo casualidad ya que ésta depende de la norma elegida en X .

Capítulo 5

Derivada gráfica

5.1. Cono tangente y derivada gráfica

Presentaremos a continuación el concepto de cono tangente generalizado para conjuntos no convexos que nos permitirá definir la derivada tangencial como herramienta alternativa a la coderivada.

Dado un conjunto Ω no vacío en un espacio de Banach Z y cualquier punto $\hat{x} \in \Omega$, el cono tangente $T(\hat{x}; \Omega)$ a Ω en \hat{x} , es el conjunto de los límites

$$v = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k - \hat{x}}{\tau_k}$$

para todas las sucesiones $x_k \rightarrow \hat{x}$ en Ω y $\tau_k \searrow 0$ en \mathbb{R} ($\{\tau_k\}$ sucesión decreciente de términos positivos), cuando $k \rightarrow \infty$. En particular, cuando Ω es convexo,

$$T(\hat{x}; \Omega) = \text{cl cone}(\Omega - \hat{x}),$$

en este caso, el cono normal $N(\hat{x}; \Omega)$ definido en (2.4) es el polar $T(\hat{x}; \Omega)^0$ del cono tangente $T(\hat{x}; \Omega)$ y, a su vez, $T(\hat{x}; \Omega)$ es el cono polar de $N(\hat{x}; \Omega)$ (ver [18, Pág.159]).

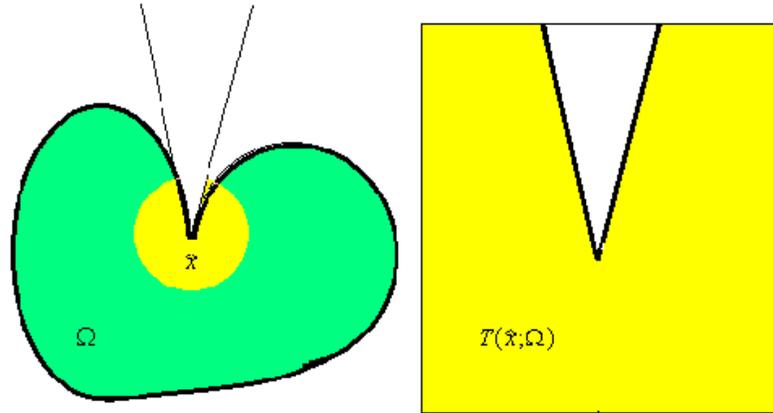


Figura 5.1: Cono tangente para Ω no convexo.

Siguiendo la idea del cálculo elemental donde la derivada se puede visualizar en términos de tangentes al gráfico de una función, se adopta el concepto de derivada para multifunciones en espacios de dimensión finita (ver [7, Chapter 4]) y se extiende a espacios de Banach en general.

Definición 52 Sean X e Y espacios de Banach, $F : X \rightrightarrows Y$ una multifunción, y $(\hat{x}, \hat{y}) \in \text{gph } F$, la derivada gráfica de F en (\hat{x}, \hat{y}) es la multifunción homogénea positiva $DF(\hat{x}, \hat{y}) : X \rightrightarrows Y$ cuyo gráfico es $T((\hat{x}, \hat{y}); \text{gph } F)$, es decir,

$$v \in DF(\hat{x}, \hat{y})(u) \Leftrightarrow (u, v) \in T((\hat{x}, \hat{y}); \text{gph } F).$$

Al igual que con la coderivada, estamos interesados en la relación entre la norma de la derivada gráfica de una multifunción y la cota Lipschitz de ésta. A continuación se presenta un concepto de norma y cierta propiedad que determina esta relación.

Definición 53 Para una multifunción homogénea positiva $H : X \rightrightarrows Y$, con X e Y espacios de Banach, la norma exterior y la norma interior están definidas respecti-

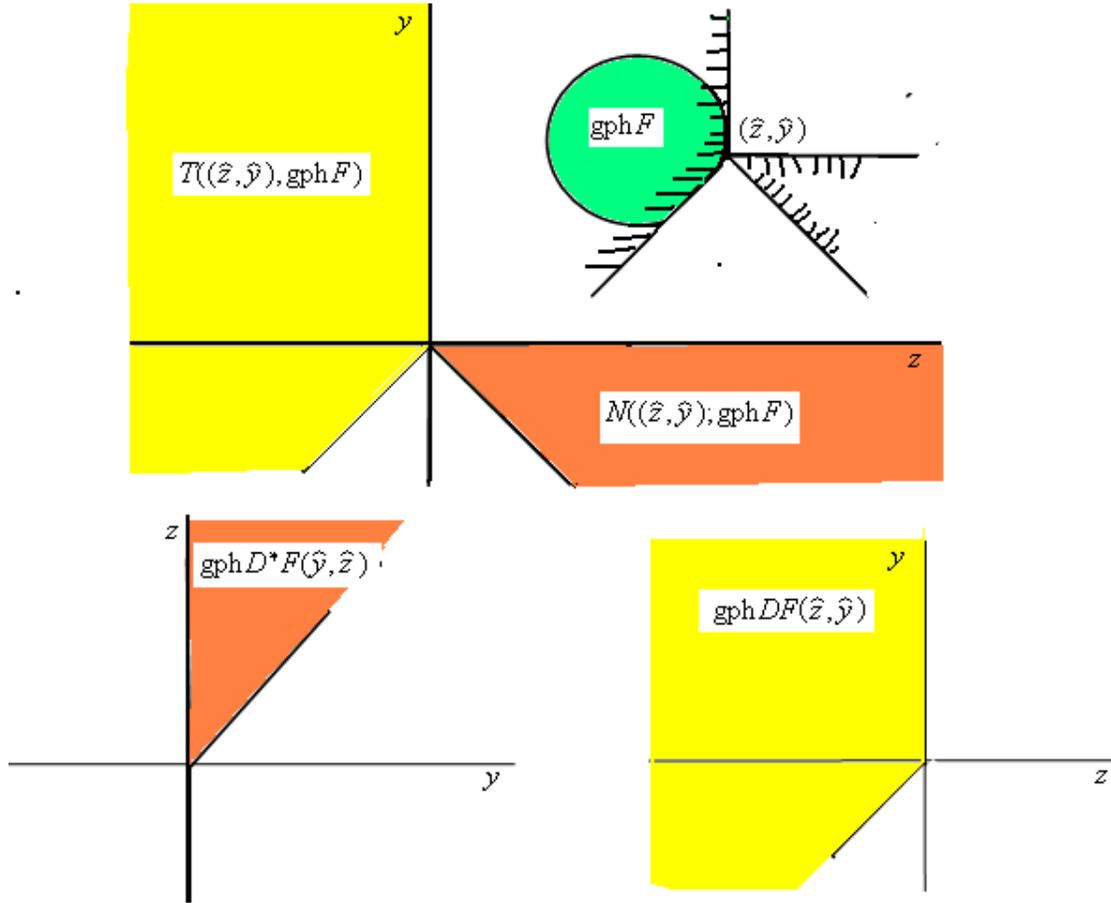


Figura 5.2: Coderivada y derivada gráfica en espacios reflexivos

vamente por

$$\|H\|^+ := \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{y \in H(x)} \|y\| \quad y \quad \|H\|^- := \sup_{\|x\| \leq 1} \inf_{y \in H(x)} \|y\|$$

con la convención: $\inf \emptyset = \infty$ y $\sup \emptyset = 0$ (considerando $\emptyset \subset \mathbb{R}_+$).

Cuando H es un operador lineal en dimensión finita, ambas $\|H\|^+$ y $\|H\|^-$ se reducen a la norma usual $\|H\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Hx\|$. Sin embargo se debe notar que ni $\|H\|^+$, ni $\|H\|^-$ satisfacen la definición de una verdadera norma, especialmente si se observa que el conjunto de todas las multifunciones no forman un espacio vectorial.

Capítulo 5. Derivada gráfica

Sin embargo estas definiciones resultan adecuadas ya que la norma exterior coincide con la norma definida para la coderivada en (2.13) y, en dimensión finita, la norma interior nos permite calcular la cota lipschitziana a través de la derivada gráfica, como lo muestra el siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en [7, Theorem 4B.2]. La extensión de este teorema a espacios de Banach en general es, hasta ahora, un problema abierto.

Recordemos que se dice que un conjunto C es localmente cerrado en $x \in C$ si existe un entorno U de x tal que $C \cap U$ es cerrado.

Teorema 54 ([7], **Theorem 4B.2**) *Sea $S : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ una multifunción tal que $\text{gph } S$ es localmente cerrado en $(\hat{x}, \hat{y}) \in \text{gph } S$. Entonces*

$$\text{lip } S(\hat{x}, \hat{y}) = \limsup_{\substack{(x,y) \rightarrow (\hat{x}, \hat{y}) \\ (x,y) \in \text{gph } S}} \|DS(x, y)\|^-.$$

5.2. Estimación de la norma interior de la derivada gráfica

La siguiente proposición, que se inspira en [7, Example 4A. 3] y se extiende al caso de dimensión infinita, nos ayudará a estimar la norma interior de la coderivada para la aplicación factible del problema dual, como mostraremos en el ejemplo de la Sección 5.3.

Proposición 55 *Sea $\mathcal{F}_D : X^* \rightrightarrows \ell_\infty(T)^*$ la aplicación factible del problema dual y sea $\mathcal{F}_D^{-1} : \ell_\infty(T)^* \rightrightarrows X^*$ definida por*

$$\mathcal{F}_D^{-1}(\mu) := \begin{cases} A^* \mu - \bar{c}^* + Q^0, & \text{si } \mu \geq 0, \\ \emptyset, & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

Capítulo 5. Derivada gráfica

su aplicación inversa. Si $(\bar{\mu}, \bar{c}^*) \in \text{gph } \mathcal{F}_D^{-1}$, entonces para cada $\mu \in \ell_\infty(T)^*$ se cumple que

$$D\mathcal{F}_D^{-1}(\bar{\mu}, \bar{c}^*)(\mu) \subset A^*\mu + T(\bar{c}^* + \bar{c}^* - A^*\bar{\mu}; Q^0). \quad (5.1)$$

En particular, si $\mu \geq 0$ se satisface la igualdad.

Demostración. Sea $(\bar{\mu}, \bar{c}^*) \in \text{gph } \mathcal{F}_D^{-1}$ y $\mu \in \ell_\infty(T)^*$, luego $c^* \in D\mathcal{F}_D^{-1}(\bar{\mu}, \bar{c}^*)(\mu)$ si, y sólo si, $(\mu, c^*) \in T((\bar{\mu}, \bar{c}^*); \text{gph } \mathcal{F}_D^{-1})$ si, y sólo si, existen sucesiones $\{(\mu_j, c_j^*)\} \subset \text{gph } \mathcal{F}_D^{-1}$ y $\{\tau_j\} \subset \mathbb{R}_+$, con $(\mu_j, c_j^*) \rightarrow (\bar{\mu}, \bar{c}^*)$ y $\tau_j \searrow 0$ tales que

$$(\mu, c^*) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{(\mu_j, c_j^*) - (\bar{\mu}, \bar{c}^*)}{\tau_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{(\mu_j, A^*\mu_j - \bar{c}^* + q_j^*) - (\bar{\mu}, \bar{c}^*)}{\tau_j}$$

para alguna sucesión $\{q_j^*\} \subset Q^0$ tal que

$$c_j^* = A^*\mu_j - \bar{c}^* + q_j^* \quad (5.2)$$

(pues $c_j^* \in \mathcal{F}_D^{-1}(\mu_j)$ para cada j). Luego

$$\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\mu_j - \bar{\mu}}{\tau_j}$$

y

$$\begin{aligned} c^* &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{(A^*\mu_j - \bar{c}^* + q_j^*) - \bar{c}^*}{\tau_j} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{A^*\mu_j - A^*\bar{\mu} + [q_j^* - (\bar{c}^* + \bar{c}^* - A^*\bar{\mu})]}{\tau_j} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left[A^* \left(\frac{\mu_j - \bar{\mu}}{\tau_j} \right) + \frac{q_j^* - (\bar{c}^* + \bar{c}^* - A^*\bar{\mu})}{\tau_j} \right] \\ &= A^*\mu + \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{q_j^* - (\bar{c}^* + \bar{c}^* - A^*\bar{\mu})}{\tau_j}. \end{aligned}$$

Como $(\mu_j, c_j^*) \rightarrow (\bar{\mu}, \bar{c}^*)$, de (5.2) se tiene que $q_j^* \rightarrow \bar{c}^* + \bar{c}^* - A^*\bar{\mu}$, así

$$w := \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{q_j^* - (\bar{c}^* + \bar{c}^* - A^*\bar{\mu})}{\tau_j} \in T(\bar{c}^* + \bar{c}^* - A^*\bar{\mu}; Q^0)$$

Capítulo 5. Derivada gráfica

con lo cual queda probada la inclusión (5.1).

Ahora sea $\mu \geq 0$, si $c^* \in A^*\mu + T(\bar{c}^* + \bar{c}^* - A^*\bar{\mu}; Q^0)$, entonces existen sucesiones $\{q_j^*\} \subset Q^0$, y $\{\tau_j\} \subset \mathbb{R}_+$, con $q_j^* \rightarrow \bar{c}^* + \bar{c}^* - A^*\bar{\mu}$ y $\tau_j \searrow 0$ tales que

$$\begin{aligned} c^* &= A^*\mu + \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{q_j^* - (\bar{c}^* + \bar{c}^* - A^*\bar{\mu})}{\tau_j} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{A^*(\tau_j\mu + \bar{\mu}) - \bar{c}^* + q_j^* - \bar{c}^*}{\tau_j}, \end{aligned}$$

si llamamos

$$\begin{aligned} \mu_j &: = \tau_j\mu + \bar{\mu} \geq 0, \quad y \\ c_j^* &: = A^*(\mu_j) - \bar{c}^* + q_j^*, \end{aligned}$$

tenemos que

$$\{(\mu_j, c_j^*)\} \subset \text{gph } \mathcal{F}_D^{-1}; \quad \mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\mu_j - \bar{\mu}}{\tau_j}, \quad y \quad c^* = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{c_j^* - \bar{c}^*}{\tau_j},$$

así $c^* \in D\mathcal{F}_D^{-1}(\bar{\mu}, \bar{c}^*)(\mu)$ con lo cual queda probada la igualdad. ■

Nota 56 *En el caso que consideremos el cono tangente con la topología débil esta proposición sigue siendo válida.*

Ya que el gráfico de una aplicación F puede ser convertido al gráfico de su inversa F^{-1} por un cambio de orden de sus variables, tenemos que

$$D(F^{-1})(\hat{y}, \hat{x}) = [DF(\hat{x}, \hat{y})]^{-1}. \quad (5.3)$$

Esta propiedad junto con la proposición anterior nos permite obtener una fórmula para estimar la norma interior de la derivada gráfica de la aplicación factible del dual.

Proposición 57 Sea $\mathcal{F}_D : X^* \rightrightarrows \ell_\infty(T)^*$ la aplicación factible del problema dual y sea $(\bar{c}^*, \bar{\mu}) \in \text{gph } \mathcal{F}_D$, entonces

$$\sup_{\|c^*\| \leq 1} \left(\inf_{A^*\mu \in c^* - T(\bar{c}^*, \bar{\mu})} \|\mu\| \right) \leq \|D\mathcal{F}_D(\bar{c}^*, \bar{\mu})\|^- \leq \sup_{\|c^*\| \leq 1} \left(\inf_{\substack{A^*\mu \in c^* - T(\bar{c}^*, \bar{\mu}) \\ \mu \geq 0}} \|\mu\| \right),$$

donde $T(\bar{c}^*, \bar{\mu}) := T(\bar{c}^* + \bar{c} - A^*\bar{\mu}; Q^0)$.

Demostración. Sea $(\bar{c}^*, \bar{\mu}) \in \text{gph } \mathcal{F}_D$, de (5.3)

$$\mu \in D\mathcal{F}_D(\bar{c}^*, \bar{\mu})(c^*) \Leftrightarrow c^* \in D\mathcal{F}_D^{-1}(\bar{\mu}, \bar{c}^*)(\mu),$$

y en vista de la Proposición 55

$$c^* \in D\mathcal{F}_D^{-1}(\bar{\mu}, \bar{c}^*)(\mu) \Rightarrow c^* \in A^*\mu + T(\bar{c}^*, \bar{\mu}),$$

en particular, si $\mu \geq 0$

$$c^* \in D\mathcal{F}_D^{-1}(\bar{\mu}, \bar{c}^*)(\mu) \Leftrightarrow c^* \in A^*\mu + T(\bar{c}^*, \bar{\mu}).$$

Ahora considerando que

$$c^* \in A^*\mu + T(\bar{c}^*, \bar{\mu}) \Leftrightarrow A^*\mu \in c^* - T(\bar{c}^*, \bar{\mu}),$$

para c^* fijo, se obtienen las siguientes inclusiones

$$\begin{aligned} \{\mu \geq 0 \mid A^*\mu \in c^* - T(\bar{c}^*, \bar{\mu})\} &\subset \{\mu \mid \mu \in D\mathcal{F}_D(\bar{c}^*, \bar{\mu})(c^*)\} \\ &\subset \{\mu \mid A^*\mu \in c^* - T(\bar{c}^*, \bar{\mu})\}, \end{aligned}$$

si calculamos el ínfimo de $\|\mu\|$ sobre cada uno de estos conjuntos obtenemos las siguientes desigualdades

$$\inf_{A^*\mu \in c^* - T(\bar{c}^*, \bar{\mu})} \|\mu\| \leq \inf_{\mu \in D\mathcal{F}_D(\bar{c}^*, \bar{\mu})(c^*)} \|\mu\| \leq \inf_{\substack{A^*\mu \in c^* - T(\bar{c}^*, \bar{\mu}) \\ \mu \geq 0}} \|\mu\|,$$

Capítulo 5. Derivada gráfica

para cada c^* fijo. Luego, en vista de la definición de norma interior, obtenemos las siguientes acotaciones

$$\sup_{\|c^*\| \leq 1} \left(\inf_{A^* \mu \in c^* - T(\bar{c}^*, \bar{\mu})} \|\mu\| \right) \leq \|D\mathcal{F}_D(\bar{c}^*, \bar{\mu})\|^- \leq \sup_{\|c^*\| \leq 1} \left(\inf_{\substack{A^* \mu \in c^* - T(\bar{c}^*, \bar{\mu}) \\ \mu \geq 0}} \|\mu\| \right).$$

■

La siguiente proposición nos proporciona una condición suficiente para obtener la igualdad en el lado derecho de las desigualdades dadas en la Proposición 57.

Proposición 58 *Sea $\mathcal{F}_D : X^* \rightrightarrows \ell_\infty(T)^*$ la aplicación factible del problema dual, sea $(\bar{c}^*, \bar{\mu}) \in \text{gph } \mathcal{F}_D$ y supongamos que $Aq \geq 0$ para cada $q \in Q$, entonces*

$$\|D\mathcal{F}_D(\bar{c}^*, \bar{\mu})\|^- = \sup_{\|c^*\| \leq 1} \left(\inf_{\substack{A^* \mu \in c^* - T(\bar{c}^*, \bar{\mu}) \\ \mu \geq 0}} \|\mu\| \right), \quad (5.4)$$

donde $T(\bar{c}^*, \bar{\mu}) = T(\bar{c}^* + \bar{c}^* - A^* \bar{\mu}; Q^0)$.

Demostración. Sea $(\bar{c}^*, \bar{\mu}) \in \text{gph } \mathcal{F}_D$, en vista de la Proposición 57 se tiene la siguiente acotación

$$\|D\mathcal{F}_D(\bar{c}^*, \bar{\mu})\|^- \leq \sup_{\|c^*\| \leq 1} \left(\inf_{\substack{A^* \mu \in c^* - T(\bar{c}^*, \bar{\mu}) \\ \mu \geq 0}} \|\mu\| \right). \quad (5.5)$$

Para probar la desigualdad opuesta, llamemos

$$\alpha := \|D\mathcal{F}_D(\bar{c}^*, \bar{\mu})\|^- = \sup_{\|c^*\| \leq 1} \left(\inf_{\mu \in D\mathcal{F}_D(\bar{c}^*, \bar{\mu})(c^*)} \|\mu\| \right) \quad (5.6)$$

y

$$\beta := \sup_{\|c^*\| \leq 1} \left(\inf_{\substack{A^* \mu \in c^* - T(\bar{c}^*, \bar{\mu}) \\ \mu \geq 0}} \|\mu\| \right), \quad (5.7)$$

Capítulo 5. Derivada gráfica

por (5.5) tenemos que $0 \leq \alpha \leq \beta$.

Si $\alpha = \infty$ se obtiene la igualdad en (5.4).

Si $\alpha < \infty$, supongamos que $\alpha < \beta$, luego por definición de β , existen $\eta > 0$ y $c_1^* \in X^*$, con $\|c_1^*\| \leq 1$, tal que

$$\alpha < \eta < \inf_{\substack{A^*\mu \in c_1^* - T(\bar{c}^*, \bar{\mu}) \\ \mu \geq 0}} \|\mu\|, \quad (5.8)$$

además, de (5.6), se tiene que

$$\inf_{\mu \in D\mathcal{F}_D(\bar{c}^*, \bar{\mu})(c_1^*)} \|\mu\| \leq \alpha < \eta.$$

Sea $\mu_1 \in \ell_\infty(T)^*$ tal que $\mu_1 \in D\mathcal{F}_D(\bar{c}^*, \bar{\mu})(c_1^*)$ y

$$\|\mu_1\| < \eta \quad (5.9)$$

(tal μ_1 existe porque de lo contrario $\inf \emptyset = \infty$, lo que contradice que $\alpha < \infty$), luego $c_1^* \in D\mathcal{F}_D^{-1}(\bar{\mu}, \bar{c}^*)(\mu_1)$ y en vista de (5.1) en la Proposición 55,

$$A^*\mu_1 \in c_1^* - T(\bar{c}^*, \bar{\mu}). \quad (5.10)$$

Considerando que $\mu_1 \in ba(T)$, por la descomposición de Jordan, de medidas signadas, existen $\mu_1^+, \mu_1^- \in ba(T)$ tal que

$$\mu_1 := \mu_1^+ - \mu_1^-,$$

donde $\mu_1^+ \geq 0$, $\mu_1^- \geq 0$ y $\|\mu_1\| = \mu_1^+(T) + \mu_1^-(T)$, además, de (5.9),

$$\|\mu_1^+\| \leq \|\mu_1\| < \eta, \quad (5.11)$$

y de (5.10),

$$A^*(\mu_1^+ - \mu_1^-) \in c_1^* - T(\bar{c}^*, \bar{\mu}),$$

así

$$A^*\mu_1^+ \in c_1^* + A^*\mu_1^- - T(\bar{c}^*, \bar{\mu}).$$

Capítulo 5. Derivada gráfica

Luego por definición de $T(\bar{c}^*, \bar{\mu}) = T(\bar{c}^* + \bar{c}^* - A^*\bar{\mu}; Q^0)$, existen $\{q_j^*\} \subset Q^0$, y $\{\tau_j\} \subset \mathbb{R}_+$, con $q_j^* \rightarrow \bar{c}^* + \bar{c}^* - A^*\bar{\mu}$ y $\tau_j \searrow 0$, tales que

$$\begin{aligned} A^*\mu_1^+ &= c_1^* + A^*\mu_1^- - \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{q_j^* - (\bar{c}^* + \bar{c}^* - A^*\bar{\mu})}{\tau_j} \\ &= c_1^* - \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{(q_j^* - \tau_j A^*\mu_1^-) - (\bar{c}^* + \bar{c}^* - A^*\bar{\mu})}{\tau_j}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Observemos que $\{q_j^* - \tau_j A^*\mu_1^-\} \subset Q^0$, ya que para cada $q \in Q$, y para cada j , se tiene que

$$\begin{aligned} \langle q_j^* - \tau_j A^*\mu_1^-, q \rangle &= \langle q_j^*, q \rangle + \tau_j \langle A^*\mu_1^-, q \rangle \\ &= \langle q_j^*, q \rangle - \tau_j \langle \mu_1^-, Aq \rangle \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

pues $q_j^* \in Q^0$, $\tau_j > 0$, para cada j , $\mu_1^- \geq 0$ y por hipótesis $Aq \geq 0$. Luego, en vista de (5.12) y por definición de cono tangente, se cumple que

$$A^*\mu_1^+ \in c_1^* - T(\bar{c}^*, \bar{\mu}). \quad (5.13)$$

y como $\mu_1^+ \geq 0$, por (5.8)

$$\eta < \inf_{\substack{A^*\mu \in c_1^* - T(\bar{c}^*, \bar{\mu}) \\ \mu \geq 0}} \|\mu\| \leq \|\mu_1^+\|,$$

lo que contradice (5.11), por lo tanto $\alpha = \beta$, y se completa la demostración. ■

Nota 59 Observemos que, para $\mu < 0$, al ser $\mathcal{F}_D^{-1}(\mu) = \emptyset$, puede suceder que $D\mathcal{F}_D^{-1}(\bar{\mu}, \bar{c}^*)(\mu) = \emptyset$ mientras que $A^*\mu + T(\bar{c}^* + \bar{c}^* - A^*\bar{\mu}; Q^0)$ es siempre un cono no vacío, por lo tanto no se cumple la igualdad en (5.1) de la Proposición 55. Por ejemplo, para $\mathcal{F}_D^{-1} : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ definida por $\mathcal{F}_D^{-1}(\mu) = A^*\mu - \bar{c}^* + Q^0$ con $A^* = [1]$;

Capítulo 5. Derivada gráfica

$\bar{c}^* = -1$ y $Q = (-\infty, 0]$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_D^{-1}(\mu) & : = \begin{cases} \mu + [1, \infty) & \text{si } \mu \geq 0, \\ \emptyset, & \text{de otro modo.} \end{cases} & y \\ \text{gph } \mathcal{F}_D^{-1} & = \{(\mu, c^*) \in \mathbb{R}^2 \mid c^* \geq \mu + 1, \mu \geq 0\}. \end{aligned}$$

Para $(\bar{\mu}, \bar{c}^*) = (0, 2) \in \text{gph } \mathcal{F}_D^{-1}$, se cumple que

$$T((\bar{\mu}, \bar{c}^*); \text{gph } \mathcal{F}_D^{-1}) = \{(\mu, c^*) \in \mathbb{R}^2 \mid \mu \geq 0\}$$

con lo cual para $\mu < 0$, obtenemos que $D\mathcal{F}_D^{-1}(\bar{\mu}, \bar{c}^*)(\mu) = \emptyset$, mientras que $A^*\mu + T(\bar{c}^* + \bar{c}^* - A^*\bar{\mu}; Q^0) \neq \emptyset$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} T(\bar{c}^*, \bar{\mu}) & = T(\bar{c}^* + \bar{c}^* - A^*\bar{\mu}; Q^0) = T(1; [0, \infty)) = \mathbb{R} & y \\ A^*\mu + T(\bar{c}^*, \bar{\mu}) & = A^*\mu + T(1; [0, \infty)) = \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mu \in D\mathcal{F}_D(\bar{c}^*, \bar{\mu})(c^*) & \Leftrightarrow c^* \in D\mathcal{F}_D^{-1}(\bar{\mu}, \bar{c}^*)(\mu) \\ & \Leftrightarrow (\mu, c^*) \in T((\bar{\mu}, \bar{c}^*); \text{gph } \mathcal{F}_D^{-1}) \\ & \Leftrightarrow \mu \geq 0, \end{aligned}$$

luego, por la definición de norma interior,

$$\|D\mathcal{F}_D(\bar{c}^*, \bar{\mu})\|^- = \sup_{\|c^*\| \leq 1} \left(\inf_{\mu \in D\mathcal{F}_D(\bar{c}^*, \bar{\mu})(c^*)} \|\mu\| \right) = 0.$$

por otro lado, de (5.14) se obtiene

$$\sup_{\|c^*\| \leq 1} \left(\inf_{\substack{A^*\mu \in c^* - T(\bar{c}^*, \bar{\mu}) \\ \mu \geq 0}} \|\mu\| \right) = \sup_{\|c^*\| \leq 1} \left(\inf_{\substack{\mu \in \mathbb{R} \\ \mu \geq 0}} \|\mu\| \right) = 0,$$

con lo cual se verifica la igualdad de la Proposición 58 a pesar de que no se cumple la condición $Aq \geq 0$.

Capítulo 5. Derivada gráfica

A continuación se muestra una condición suficiente para que la norma de derivada gráfica sea cero.

Proposición 60 Sea $\mathcal{F}_D : X^* \rightrightarrows \ell_\infty(T)^*$ la aplicación factible del problema dual, con un espacio X de Banach reflexivo. Sea $(\bar{c}^*, \bar{\mu}) \in \text{gph } \mathcal{F}_D$ y supongamos que $\bar{c}^* + \bar{c}^* - A^*\bar{\mu} \in \text{int } Q^0$, entonces

$$\|D\mathcal{F}_D(\bar{c}^*, \bar{\mu})\|^- = 0. \quad (5.15)$$

Demostración. Sea $(\bar{c}^*, \bar{\mu}) \in \text{gph } \mathcal{F}_D$ tal que

$$\bar{c}^* + \bar{c}^* - A^*\bar{\mu} \in \text{int } Q^0. \quad (5.16)$$

Para c^* fijo, con $\|c^*\| \leq 1$, consideremos las sucesiones $\{\tau_j\} \subset \mathbb{R}_+$, $\{z_j^*\} \subset X^*$ y $\{\mu_j\} \subset \ell_\infty(T)^*$ donde, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\mu_j = \bar{\mu}, \quad z_j^* = \bar{c}^* + \tau_j c^* \quad \text{y} \quad \tau_j = \frac{1}{j}, \quad (5.17)$$

luego, $\mu_j \rightarrow \bar{\mu}$, $z_j^* \rightarrow \bar{c}^*$ y $\tau_j \searrow 0$, además, por (5.16), para j suficientemente grande se cumple que $\bar{c}^* + z_j^* - A^*\mu_j = \bar{c}^* + \bar{c}^* - A^*\bar{\mu} + \tau_j c^* \in Q^0$, es decir

$$(z_j^*, \mu_j) \in \text{gph } \mathcal{F}_D.$$

Por otro lado, de (5.17), para cada $j \in \mathbb{N}$

$$\frac{\mu_j - \bar{\mu}}{\tau_j} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{z_j^* - \bar{c}^*}{\tau_j} = c^*.$$

Así, por la definición de cono tangente,

$$(c^*, 0) \in T((\bar{c}^*, \bar{\mu}); \text{gph } \mathcal{F}_D),$$

o, lo que es equivalente, $0 \in D\mathcal{F}_D(\bar{c}^*, \bar{\mu})(c^*)$. Como esto vale para cada \bar{c}^* , con $\|c^*\| \leq 1$, en vista de la definición de norma interior, obtenemos (5.15). ■

En el caso de dimensión finita, podemos aplicar el Teorema 54 dado en la sección 5.1 y obtener estimaciones de la cota lipschitziana para la aplicación factible del dual, la cual resumimos en la siguiente proposición.

Proposición 61 Sea $\widehat{\mu} \in \mathcal{F}_D(0)$ para la aplicación conjunto factible $\mathcal{F}_D : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$, entonces

$$\limsup_{\substack{(\bar{c}^*, \bar{\mu}) \rightarrow (0, \widehat{\mu}) \\ (\bar{c}^*, \bar{\mu}) \in \text{gph } \mathcal{F}_D}} \left(\sup_{\|c^*\| \leq 1} \left(\inf_{A^T \mu \in c^* - T(\bar{c}^*, \bar{\mu})} \|\mu\| \right) \right) \leq \text{lip } \mathcal{F}_D(0, \widehat{\mu}) \quad (5.18)$$

y

$$\text{lip } \mathcal{F}_D(0, \widehat{\mu}) \leq \limsup_{\substack{(\bar{c}^*, \bar{\mu}) \rightarrow (0, \widehat{\mu}) \\ (\bar{c}^*, \bar{\mu}) \in \text{gph } \mathcal{F}_D}} \left(\sup_{\|c^*\| \leq 1} \left(\inf_{\substack{A^* \mu \in c^* - T(\bar{c}^*, \bar{\mu}) \\ \mu \geq 0}} \|\mu\| \right) \right), \quad (5.19)$$

donde $T(\bar{c}^*, \bar{\mu}) = T(\bar{c}^* + \bar{c}^* - A^* \bar{\mu}; Q^0)$.

Además, se satisface la igualdad en (5.19) si $Aq \geq 0$ para cada $q \in Q$.

Demostración. Es consecuencia directa del Teorema 54 y la Proposición 57. Por otro lado, si $Aq \geq 0$ para cada $q \in Q$, por Proposición 58 se satisface la igualdad en (5.19). ■

5.3. Ejemplos: Cotas lipschitzianas con derivada gráfica para el dual

El siguiente ejemplo mejora el resultado obtenido en la estimación de la cota lipschitziana en el Ejemplo 50 de la Sección 4.4 y muestra que la condición $Aq \geq 0$ para cada $q \in Q$ de la Proposición 58 es suficiente, pero no necesaria para obtener la fórmula dada en (5.4).

Ejemplo 62 (A) Vamos a analizar el Ejemplo 50 de la Sección 4.4 a través de la derivada gráfica.

Capítulo 5. Derivada gráfica

Recordemos que $X = X^* = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ $\ell_\infty(T)^* = (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1)$; $\bar{c}^* = (1, 1)$; $\bar{b} = (1, 2, 3)$; $Q = \mathbb{R}_+^2$ y

$$A^* = A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Queremos estimar $\text{lip } \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})$, donde $\hat{\mu} = (1, 0, 0)$, utilizando las fórmulas (5.18) y (5.19) dada en la Proposición 61, es decir, vamos a estimar $\|D\mathcal{F}_D(\bar{c}^*, \bar{\mu})\|^-$ para $(\bar{c}^*, \bar{\mu}) \in \text{gph } \mathcal{F}_D$ con $(\bar{c}^*, \bar{\mu})$ lo suficientemente cerca de $(0, \hat{\mu})$.

Como $\bar{c}^* + \bar{c}^* - A^*\bar{\mu} = (1 + \bar{c}_1^* - \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2, 1 + \bar{c}_2^* - 2\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2 - \bar{\mu}_3)$ y $Q^0 = \mathbb{R}_-^2$ entonces

$$\begin{aligned} T(\bar{c}^*, \bar{\mu}) &= T(\bar{c}^* + \bar{c}^* - A^*\bar{\mu}; Q^0) \\ &= T((1 + \bar{c}_1^* - \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2, 1 + \bar{c}_2^* - 2\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2 - \bar{\mu}_3); \mathbb{R}_-^2). \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \text{gph } \mathcal{F}_D &= \{(c^*, \mu) \mid A^*\mu \in \bar{c}^* + c^* - Q^0, \mu \in \mathbb{R}_+^3\} \\ &= \{(c^*, \mu) \mid \bar{c}^* + c^* - A^*\mu \in \mathbb{R}_-^2, \mu \in \mathbb{R}_+^3\} \\ &= \{(c^*, \mu) \mid 1 + c_1 - \mu_1 + \mu_2 \leq 0, 1 + c_2 - 2\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 \leq 0, \mu \in \mathbb{R}_+^3\}, \end{aligned} \tag{5.20}$$

donde $(c^*, \mu) = (c_1, c_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$. Por lo tanto, podemos considerar $(\bar{c}^*, \bar{\mu}) \in \text{gph } \mathcal{F}_D$ con $\bar{c}^* = (\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*)$ lo suficientemente cerca de $(0, 0)$ y $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3)$ lo suficientemente cerca de $\hat{\mu} = (1, 0, 0)$, de manera que $1 + \bar{c}_2^* - 2\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2 - \bar{\mu}_3 < 0$ y así analizar los dos siguientes casos:

CASO 1: Si $1 + \bar{c}_1^* - \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 < 0$, entonces $\bar{c}^* + \bar{c}^* - A^*\bar{\mu} \in \text{int}(\mathbb{R}_-^2) = \text{int } Q^0$, luego por Proposición 60

$$\|D\mathcal{F}_D(\bar{c}^*, \bar{\mu})\|^- = 0.$$

Capítulo 5. Derivada gráfica

CASO 2: Si $1 + \bar{c}_1^* - \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 = 0$, entonces $T(\bar{c}^*, \bar{\mu}) = T(0, \hat{\mu})$ (ver Fig. 5.3), donde

$$\begin{aligned} T(0, \hat{\mu}) &= T(\bar{c}^* + 0 - A^* \hat{\mu}; Q^0) \\ &= T((0, -1); \mathbb{R}_-^2) \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq 0\} = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}, \end{aligned}$$

luego para $c^* = (c_1, c_2)$ y $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}_+^3$, se cumple que $A^* \mu \in c^* - T(0, \hat{\mu})$ si, y sólo si, $\mu_1 - \mu_2 \geq c_1$, y así

$$\begin{aligned} \inf \{\|\mu\|_1 \mid A^* \mu \in c^* - T(\bar{c}^*, \bar{\mu})\} &= \inf \{\|\mu\|_1 \mid A^* \mu \in c^* - T(0, \hat{\mu})\} \\ &= \inf \{\|\mu\|_1 \mid \mu_2 \leq \mu_1 - c_1\}. \end{aligned}$$

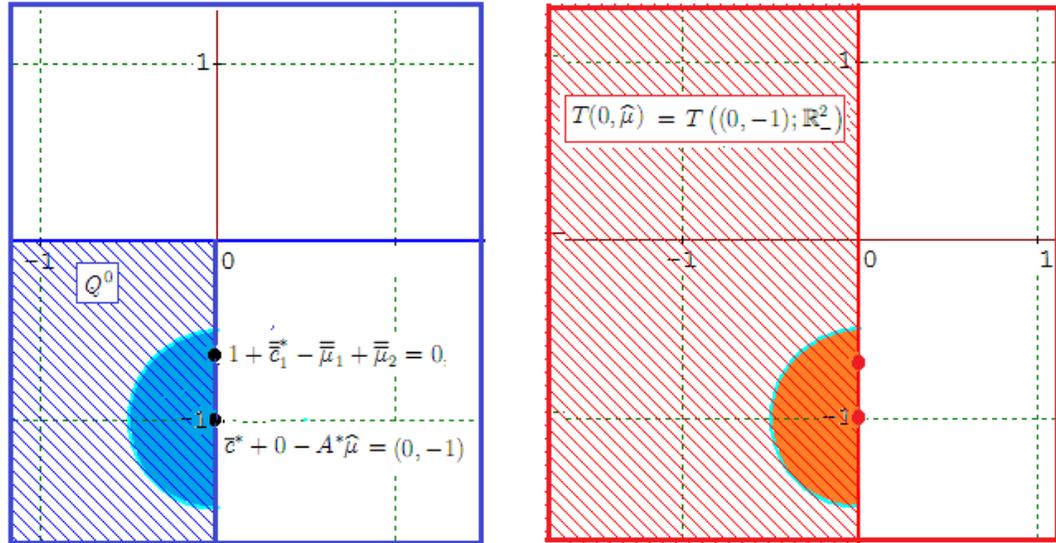


Figura 5.3: Si $1 + \bar{c}_1^* - \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 = 0$, entonces $T(\bar{c}^*, \bar{\mu}) = T(0, \hat{\mu})$

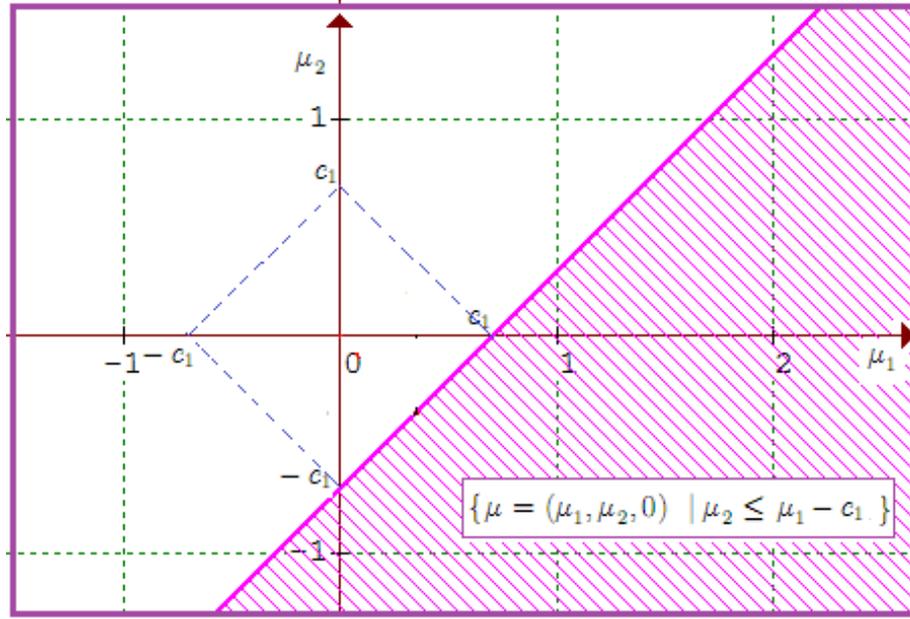


Figura 5.4: Caso 2.2: $\inf \{ \|\mu\|_1 \mid \mu_2 \leq \mu_1 - c_1 \} = c_1$

CASO 2.1: Si $c_1 \leq 0$, entonces $\mu = 0$ satisface que $A^*\mu \in c^* - T(0, \hat{\mu})$, luego

$$\inf \{ \|\mu\|_1 \mid A^*\mu \in c^* - T(\bar{c}^*, \bar{\mu}) \} = 0 \quad y \quad (5.21)$$

$$\inf \{ \|\mu\|_1 \mid A^*\mu \in c^* - T(\bar{c}^*, \bar{\mu}), \quad \mu \geq 0 \} = 0 \quad (5.22)$$

CASO 2.2: Si $c_1 > 0$, entonces

$$\inf \{ \|\mu\|_1 \mid \mu_2 \leq \mu_1 - c_1, \quad \mu \in \mathbb{R}^3 \} = c_1, \quad (5.23)$$

el cual se obtiene cuando $\mu = (c_1, 0, 0)$ (ver Fig. 5.4). Así, de (5.21) y (5.23)

$$\sup_{\|c^*\| \leq 1} \left(\inf_{A^T \mu \in c^* - T(\bar{c}^*, \bar{\mu})} \|\mu\|_1 \right) = \max \left\{ 0, \sup_{0 < c_1 \leq 1} c_1 \right\} = 1.$$

Por otro lado

$$\inf \{ \|\mu\|_1 \mid \mu_2 \leq \mu_1 - c_1, \quad \mu \in \mathbb{R}_+^3 \} = c_1 \quad (5.24)$$

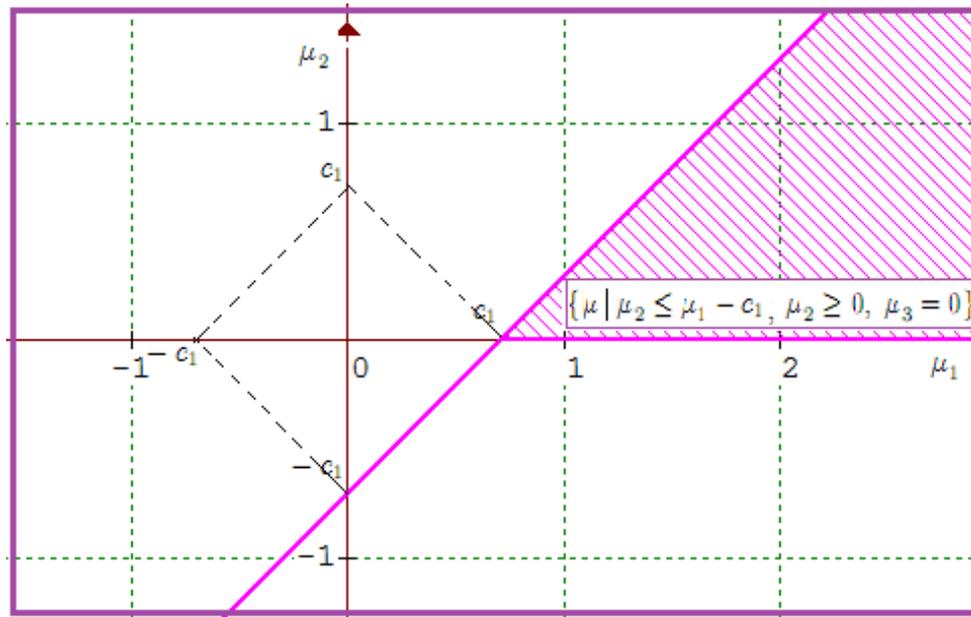


Figura 5.5: Caso 2.2: $\inf \{ \|\mu\|_1 \mid \mu_2 \leq \mu_1 - c_1, \mu \in \mathbb{R}_+^3 \} = c_1$

el cual se obtiene cuando $\mu = (c_1, 0, 0)$. (ver Fig. 5.5). De (5.22) y (5.24),

$$\sup_{\|c^*\| \leq 1} \left(\inf_{\substack{A^* \mu \in c^* - T(\bar{c}^*, \bar{\mu}) \\ \mu \geq 0}} \|\mu\|_1 \right) = \max \left\{ 0, \sup_{0 < c_1 \leq 1} c_1 \right\} = 1.$$

Luego en vista de la Proposición 57

$$1 \leq \|D\mathcal{F}_D(\bar{c}^*, \bar{\mu})\|^- \leq 1,$$

así

$$\|D\mathcal{F}_D(\bar{c}^*, \bar{\mu})\|^- = 1,$$

para cada $(\bar{c}^*, \bar{\mu}) \in \text{gph } \mathcal{F}_D$ lo suficientemente cerca de $(0, \hat{\mu})$ y en vista de (5.18) y (5.19) de la Proposición 61 concluimos que

$$\text{lip } \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu}) = 1,$$

Capítulo 5. Derivada gráfica

lo cual mejora el resultado obtenido para $\text{lip } \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})$ en el Ejemplo 50.

Observamos que se cumple la fórmula

$$\|D\mathcal{F}_D(\bar{c}^*, \bar{\mu})\|^- = \sup_{\|c^*\| \leq 1} \left(\inf_{\substack{A^* \mu \in c^* - T(\bar{c}^*, \bar{\mu}) \\ \mu \geq 0}} \|\mu\|_1 \right)$$

dada en (5.4) de la Proposición 58, aunque no se verifique la condición $Aq \geq 0$ para cada $q \in Q$.

Ejemplo 63 (B) Retomamos el ejemplo anterior, pero ahora consideramos el espacio $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ como lo hicimos en el Ejemplo 51 del problema dual. Su espacio dual es $X^* = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. Como se sigue considerando el espacio $\ell_\infty(T)^* = (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1)$, se realizan exactamente los mismos pasos que en el ejemplo anterior y ya que

$$\max \left\{ 0, \sup_{0 < c_1 \leq 1} c_1 \right\} = 1$$

tanto si consideramos $c^* = (c_1, c_2)$ con $\|c^*\|_2 \leq 1$ ó con $\|c^*\|_\infty \leq 1$, se obtiene el mismo resultado. Es decir

$$\text{lip } \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu}) = 1$$

lo que verifica el valor obtenido para $\text{lip } \mathcal{F}_D(0, \hat{\mu})$ en el Ejemplo 51.

Nota 64 Aquí sucede lo mismo que en los ejemplos (A) y (B), ambos realizados para el problema primal y dual (Capítulo 3, Sección 3.3 y Capítulo 4, Sección 4.4), es sólo casualidad que las constantes de Lipschitz de los ejemplos (A) y (B) de esta sección coincidan, ya que éstas dependen de la norma elegida en el espacio X .

5.4. Comentarios

Si bien vemos que la cota lipschitziana se puede calcular tanto a través de la coderivada como a través de la derivada gráfica, los resultados obtenidos son más amplios utilizando la coderivada como herramienta, ya que en el caso del problema primal, la cota lipschitziana en cierto punto coincide con el valor de la norma de la coderivada en ese punto (Corolario 24) y estas constantes se pueden obtener a través del conjunto característico construido en función de los datos del problema (Teorema 23). En cambio, no se ha obtenido hasta el momento una fórmula para el cálculo de la norma interior de la derivada gráfica para la aplicación conjunto factible del problema primal. En el problema dual, la cota lipschitziana en cierto punto coincide con el valor de la norma de la coderivada en ese punto cuando X es reflexivo, Q está finitamente generado e $\text{int } Q^0$ es no vacío (Teorema 48 y Nota 49). Aún sin la hipótesis de reflexividad, se obtienen estimaciones para la cota lipschitziana de la aplicación conjunto factible del problema dual, en función de los datos del problema (Teorema 47). Mientras que los resultados a través de la derivada gráfica sólo se obtienen cuando X es un espacio de dimensión finita y T es finito (Teorema 54). En este caso, bajo ciertas condiciones, se logra una fórmula para la norma interior de la derivada gráfica, y, sin condiciones extras, estimaciones de ésta (queda pendiente obtener una igualdad en (5.4) de la Sección 5.2 sin la hipótesis $Aq \geq 0$ para todo $q \in Q$). Además, con respecto a la estimación de la cota lipschitziana, no se obtienen con la norma interior de la derivada gráfica en el punto, sino que se debe evaluar la norma de la derivada en un entorno del punto y luego evaluar el límite superior, lo que dificulta notablemente los cálculos.

Por otro lado, si bien se puede extender la definición de derivada gráfica y obtener una expresión como la de (5.5) de la Sección 5.2 para el caso de dimensión infinita, no hay hasta ahora una extensión del Teorema 54 para un espacio X de dimensión infinita y T infinito. Queda como problema abierto obtener una extensión de este

Capítulo 5. Derivada gráfica

teorema.

Otras de las ventajas de la fórmula de la cota obtenida en el Teorema 47 a través de la coderivada es que, trabajando con ciertas normas, se puede manipular el conjunto característico $C_D(c^*)$ eligiendo un conjunto generador \tilde{Q} adecuado, de manera que se faciliten o los cálculos o se mejore su resultado. En el mejor de los casos, si se encuentra un conjunto \tilde{Q} , donde las constantes r y R del Teorema 47 coincidan, se obtiene una fórmula exacta para el cálculo de la cota (Ejemplo 51).

Agradecimientos 65 *Agradezco a Luis Ridolfi por su colaboración con los gráficos.*

Apéndice A

Apéndice

Recordemos que si X espacio de Banach, entonces X^* es un espacio de Banach con la norma operador y podemos considerar X como un subespacio de X^{**} , siendo este último el espacio dual de X^* . Además, la topología débil estrella en X^{**} , relativa a X , coincide con la topología débil en X . También recordemos que para conjuntos convexos, su clausura fuerte y débil coinciden.

Proposición 66 *Sea X un espacio de Banach, $A \subset X$ un conjunto convexo y $z \in X$, entonces $z \in \text{cl}^* A \subset X^{**}$ si, y sólo si $z \in \text{cl} A \subset X$.*

Demostración. $z \in \text{cl}^* A$, si y sólo si existe una red $\{z_\nu\}_{\nu \in \mathcal{N}} \subset A$ tal que

$$z = w^* \text{-} \lim_{\nu} z_\nu,$$

si, y sólo si (por definición de convergencia débil estrella), $\langle x^*, z_\nu \rangle \rightarrow \langle x^*, z \rangle$ para cada $x^* \in X^*$, si, y sólo si (por definición de convergencia débil y por ser z_ν, z elementos de X), existe una red $\{z_\nu\} \subset A$ tal que

$$z = w \text{-} \lim_{\nu} z_\nu,$$

Apéndice A. Apéndice

si, y sólo si, $z \in \text{cl}^w A$ si, y sólo si (por ser A convexo), $z \in \text{cl} A$. ■

Recordemos que una función $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en un espacio topológico X es

- *semicontinua inferior* si para cada $c \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in X : f(x) \leq c\}$ es cerrado o equivalentemente si $\liminf_{\nu \in \mathcal{N}} f(x_\nu) \geq f(x_0)$ siempre que $\{x_\nu\}_{\nu \in \mathcal{N}}$ sea una red con $x_\nu \rightarrow x_0$.
- *semicontinua superior* si para cada $c \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in X : f(x) \geq c\}$ es cerrado o equivalentemente si $\limsup_{\nu \in \mathcal{N}} f(x_\nu) \leq f(x_0)$ siempre que $\{x_\nu\}_{\nu \in \mathcal{N}}$ sea una red con $x_\nu \rightarrow x_0$.

La siguiente propiedad generaliza el Teorema de Weierstrass sobre valores extremos de funciones continuas (ver [5, Theorem 2.43]).

Proposición 67 *Una función a valores reales semicontinua inferior en un conjunto compacto alcanza un valor mínimo. Similarmente una función semicontinua superior en un conjunto compacto alcanza un valor máximo.*

Proposición 68 *Sea X un espacio de Banach y $B \subset X^*$ un conjunto no vacío, w^* -cerrado, tal que $0 \notin B$. Entonces la función $x^* \mapsto \|x^*\|^{-1}$ alcanza un máximo en B .*

Demostración. Observemos primero que la función $x^* \mapsto \|x^*\|^{-1}$ está bien definida y es w^* -semicontinua superior en B . Esto se debe a que $0 \notin B$, y que el conjunto $\{x^* \in B : \|x^*\|^{-1} \geq c\}$ es w^* -cerrado para cada $c \in \mathbb{R}$ (ya que para $c > 0$, $\{x^* \in B : \|x^*\|^{-1} \geq c\} = \{x^* \in B : \|x^*\| \leq c^{-1}\}$ y es w^* -cerrado por ser la función $x^* \mapsto \|x^*\|$ w^* -semicontinua inferior y, para $c \leq 0$, $\{x^* \in B : \|x^*\|^{-1} \geq c\} = B$).

Fijemos ahora $z^* \in B$, sea $r := \|z^*\|$ y $B_1 := B \cap r\bar{\mathbf{B}}$, donde $\bar{\mathbf{B}}$ es la bola unitaria

Apéndice A. Apéndice

cerrada en X^* . Luego B_1 es un conjunto no vacío w^* -compacto (por ser w^* -cerrado dentro de una bola w^* -compacta). Por la proposición 67, la función $x^* \mapsto \|x^*\|^{-1}$ alcanza un máximo en B_1 , pero para cada $x^* \in B$, con $\|x^*\| > r$ se cumple que $\|x^*\|^{-1} \leq r^{-1} \leq \|z^*\|^{-1}$, y así

$$\sup \{ \|x^*\|^{-1} \mid x^* \in B \} \leq \max \{ \|x^*\|^{-1} \mid x^* \in B_1 \},$$

como $B_1 \subset B$, la función $x^* \mapsto \|x^*\|^{-1}$ alcanza un máximo en B . ■

Bibliografía

- [1] Aragón Artacho, F. J.; Dontchev, A. L.; Gaydu, M.; Geoffroy, M. H.; Veliov, V. M. Metric regularity of Newton's iteration. *SIAM J. Control Optim.* **49** (2011), no. 2, 339–362.
- [2] Aubin, J.-P. Contingent derivatives of set-valued maps and existence of solutions to nonlinear inclusions and differential inclusions. *Mathematical Analysis and Applications*, pp. 159–229, Adv. in Math. Suppl. Stud., 7a, Academic Press, New York, 1981
- [3] Aubin, J.-P. Lipschitz behavior of solutions to convex minimization problems. *Math. Oper. Res.* **9** (1984), no. 1, 87–111.
- [4] Cánovas, M. J.; López, M. A.; Mordukhovich, B. S.; Parra, J. Variational analysis in semi-infinite and infinite programming. I. Stability of linear inequality systems of feasible solutions. *SIAM J. Optim.* **20** (2009), no. 3, 1504–1526.
- [5] Charmbols D. A., Kim C. Border. *Infinite Dimensional Analysis. A Hitchhikers's Guide*. Sringer 1999.
- [6] Conway, J. B. *A Course in Functional Analysis*. Graduate Texts in Mathematics, 96. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [7] Dontchev, A. L.; Rockafellar, R. T. *Implicit Functions and Solution Mappings. A View From Variational Analysis*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Dordrecht, 2009
- [8] Dunford, N.; Schwartz, J. T. *Linear Operators Part I: General Theory*, Wiley, New York, 1988.
- [9] Dinh, N.; Goberna, M. A.; López, M. A. From linear to convex systems: consistency, Farkas' lemma and applications. *J. Convex Anal.* **13** (2006), no. 1, 113–133.

Bibliografía

- [10] Gaitsgory V., Rossomakhine S. Linear programming approach to deterministic long run average problems of optimal control. *SIAM J. Control Optim.* **44** (2006), no. 6, 2006–2037.
- [11] Goberna M. A. *Linear Semi-infinite Optimization: Recent Advances* In: Rubinov, A., Jeyakumar, V. (eds.) *Continuous Optimization: Current Trends and Modern Applications*, pp 3-22. Springer, Berlin (2005).
- [12] Goberna M. A.; López, M. A., *Linear Semi-infinite Optimization*. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1998.
- [13] Goberna M. A.; López, M. A., *Post-Optimal Analysis in Linear Semi-Infinite Optimization*, Springer, New York, 2014.
- [14] Ioffe, A. D. On stability of solutions to systems of convex inequalities, CRM Preprints, 2010, p.984.
- [15] Ioffe, A. D.; Sekiguchi, Y. Regularity estimates for convex multifunctions. *Math. Program.* **117** (2009), no. 1-2, Ser. B, 255–270.
- [16] López, M. A.; Ridolfi, A. B.; Vera de Serio, V. N., On coderivatives and Lipschitzian properties of the dual pair in optimization. *Nonlinear Anal.* **75** (2012), no. 3, 1461–1482.
- [17] Mordukhovich B.S. Metric approximations and necessary optimality conditions for general classes of extremal problems, *Soviet Math. Dokl.* **22** (1980), 526–530.
- [18] Mordukhovich, B. S. *Variational Analysis and Generalized Differentiation I: Basic Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [19] Pshenichnyi, B.N. *Convex Analysis and Extremal Problems*, Nauka, Moscow, 1980.
- [20] Pshenichnyi, B. N, Necessary conditions for an extremum for differential inclusions, *Kibernetika* **12** (1976), 60–73.
- [21] Rockafellar, R. T. *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, 1997.
- [22] Rockafellar, R. T; Wets, R J.-B. *Variational Analysis*. Springer-Verlag, 1998.
- [23] Shapiro, A. On duality theory of conic linear problems. *Semi-infinite programming* (Alicante, 1999), 135–165, *Nonconvex Optim. Appl.*, **57**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001.
- [24] Zălinescu, C. *Convex Analysis in General Vector Spaces*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2002.