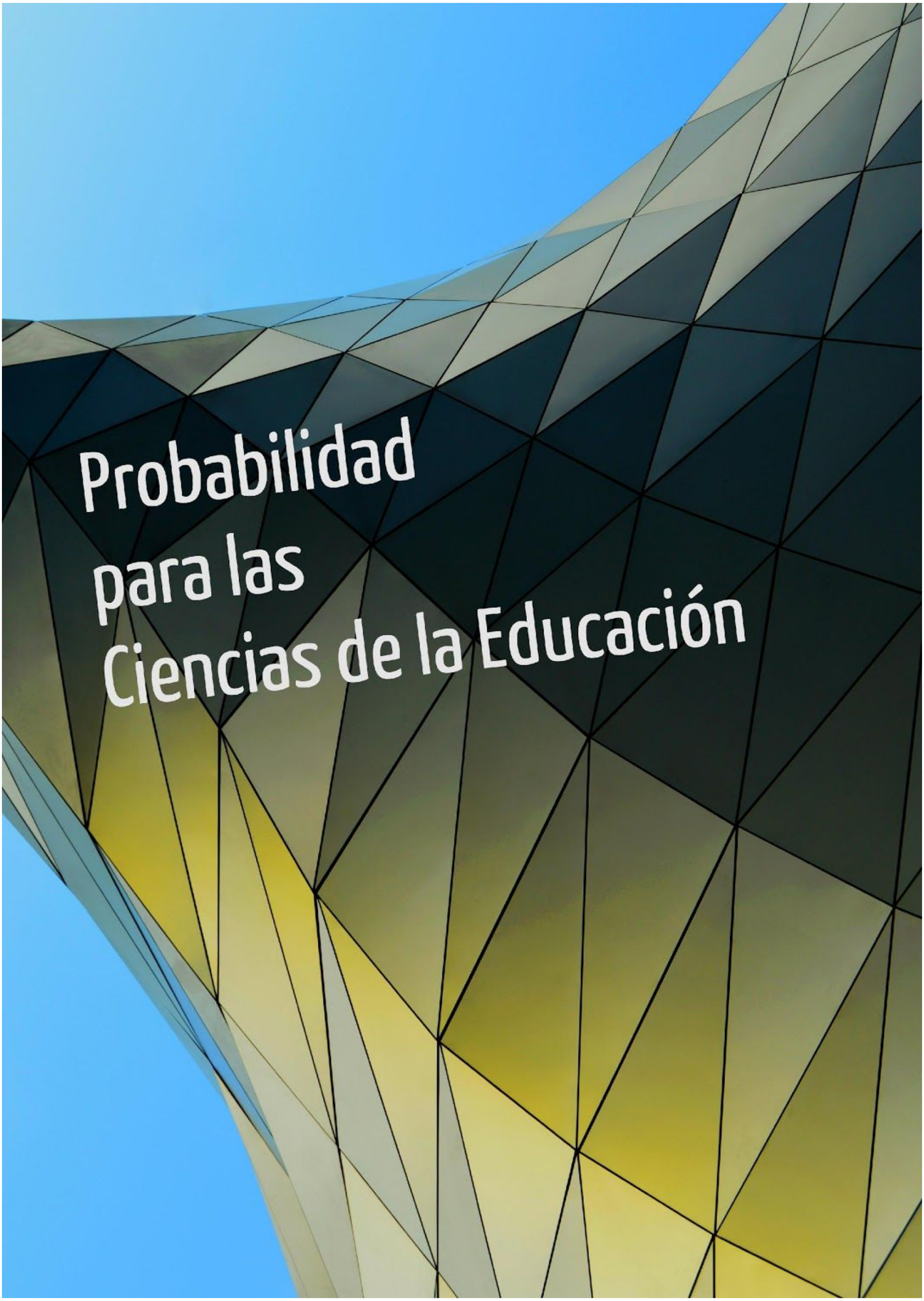
Probabilidad para las Ciencias de la Educación



Probabilidad para las Ciencias de la Educación

Material didáctico

Autores:
Jorge Lorenzo
Manuel Giovine

Probabilidad para las Ciencias de la Educación

Material didáctico

Autores:

Prof. Jorge Lorenzo

Prof. Manuel Giovine

Cátedra de Estadística y Sistemas de Información Educativa.

Escuela de Ciencias de la Educación

Facultad de Filosofía y Humanidades

Universidad Nacional de Córdoba.

Octubre 2018

Adaptación de portada: fotografía de Lucas Gallone en Unsplash (CC)

El material es de publicación independiente.

Disponible en repositorio ***Ansenuza***

Facultad de Filosofía y Humanidades

Universidad Nacional de Córdoba.

Lorenzo, Jorge

Giovine Manuel

Probabilidad para las Ciencias de la Educación. - 1a edición para el alumno - Córdoba : 2019.

Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-987-86-0325-4

1. Teoría de las Probabilidades.

CDD 519

ISBN 978-987-86-0325-4

9 789878 603254

Índice

El concepto de Probabilidad

Algunas definiciones básicas

Probabilidades

Operar con probabilidades

Ley de los grandes números

Probabilidad y Teoría de Conjuntos

El concepto de Probabilidad

Introducción

En la vida cotidiana muy raras veces consideramos conscientemente las probabilidades cuando debemos tomar una decisión, sin embargo, estas están presentes todo el tiempo. Nuestro lenguaje cotidiano contiene términos que se refieren a procesos probabilísticos, por ejemplo, si debemos salir a la calle un día nublado nos preguntamos cuán probable es que llueva; si nos parece bastante probable, entonces llevamos el paraguas. Salimos de casa y decidimos tomar un taxi para llegar a tiempo a un examen; ¿qué es mejor, esperar sobre esta calle o caminar hacia una avenida? Caminar hacia una avenida podría ser la opción más indicada, allí hay más tránsito y por tanto es más probable que pase un taxi.

Evaluar las probabilidades de un evento dado otro evento, ciertas veces aparece en la bibliografía asociado al concepto de "riesgo", por ejemplo, los fumadores tienen más probabilidades de contraer cáncer de pulmón y entonces fumar es un factor de riesgo de contraer cáncer de pulmón. En teoría de probabilidades esto se llama condicionalidad, y en la vida cotidiana nos permite actuar de una manera determinada sabiendo que probabilidades tiene un evento de ocurrir. Entonces, si se me informa que en el largo plazo los fumadores son quienes más probablemente desarrollen enfermedades respiratorias graves, en el momento actual debería dejar de fumar para disminuir las chances de pertenecer a ese grupo. Ahora considere la siguiente afirmación: *"uno de cada cien hombres mayores de sesenta años, ha sufrido un infarto*", luego, las probabilidades de sufrir un infarto se elevan considerablemente si la persona tiene sobrepeso, lleva una vida sedentaria, está estresado, fuma, etc.[1]. Esto significa que no solo las probabilidades de un evento se hallan condicionadas por otro, sino que, además, varios eventos pueden concurrir para aumentar las probabilidades de ocurrencia de otro. De esto se deduce que, al disminuir o eliminar factores de riesgo tales como el

[1] Para más información sobre factores de riesgo de infarto se puede consultar: Sáenz-Campos, D., Tinoco-Mora, Z., & Rojas-Mora, L. M. (2005). Factores de riesgo para infarto agudo de miocardio y prescripción de medicamentos para prevención secundaria. *Acta Médica Costarricense*, *47*(1), 31-35.

sobrepeso, el estrés, el consumo de tabaco y el sedentarismo, las probabilidades de sufrir un infarto se reducen considerablemente.

Existen investigaciones que aplican el concepto de riesgo en la educación. En el año 2007, y por citar un ejemplo entre muchos, UNICEF, la Fundación Noble y la asociación civil Educación para todos, publicaban una investigación titulada "Propuestas para superar el fracaso escolar"[2]. En esa colección se aborda la situación de alumnos y alumnas que tienen más probabilidades de estar en situación de "riesgo de fracaso escolar" debido a diversos factores.

El fracaso escolar y el abandono (que están muy relacionados) suelen tener como consecuencia la vulneración de otros derechos a posteriori además del de la educación. Pero, ¿qué queremos decir cuando utilizamos estas expresiones como factores de riesgo? ¿cómo debemos interpretarlas? ¿cuándo están bien formuladas?

La investigación propone que hay un conjunto de factores que pueden ser "personales" o "del entorno socioeconómico" que hacen más probable que los alumnos abandonen la escuela. Según esta investigación, una buena descripción de los factores que hacen más probable el abandono escolar, puede ser útil para diseñar estrategias de retención con modalidades diferentes. De allí surgen expresiones como "Las estadísticas muestran diferencias notables en la tasa de repitencia: mientras que, entre los niños y las niñas más pobres, 23 de cada 100 repiten; entre los más ricos, solo 4,5 de cada 100 lo hacen" (UNICEF, 2007: 15). Lo que está diciendo el enunciado es que los niños en situación de pobreza tienen una mayor probabilidad de repitencia.

Dejando de lado lo anecdótico de esta situación, la publicación y difusión de información de base cuantitativa, nos permite acomodar nuestro comportamiento racionalmente. Pareciera una obviedad, y se esperaría que la mayoría de las personas actuaran racionalmente, pero la realidad se muestra muy distinta. Por ejemplo: si consideramos que los accidentes fatales de tránsito en las rutas se producen por conducir a velocidades excesivas y por no usar el cinturón de seguridad, nuestras chances de sobrevivir en un accidente serán mayores si se lleva el cinturón de

---

[2] UNICEF (2007) Propuestas para superar el fracaso escolar. Buenos Aires: Fondo de las Naciones Unidas para la Infancia y Asociación civil Educación para todos.

seguridad, y se disminuye la velocidad, sin embargo, sabemos que no siempre se acatan estas regularidades.

La probabilidad está presente en mayor o menor medida en nuestras vidas, pero la mayoría de las veces no se tiene en cuenta que la base de las decisiones que tomamos puede fundamentarse en aspectos cuantitativos y probabilísticos. En general, las probabilidades se enseñan desde las mismas formalizaciones de la disciplina, lo cual introduce un lenguaje árido y poco accesible. Los estudiantes suelen atemorizarse ante el cálculo de probabilidades. Es por esto que en las páginas que siguen presentaremos algunos aspectos de la teoría de probabilidad, utilizando problemas sencillos, pero que bien pueden funcionar como analogías para problemas más complejos.

El propósito de este texto es familiarizar al lector con el lenguaje de las probabilidades mediante simples cálculos. Recomendamos entonces crear y recrear los ejemplos que se muestran, ya que la repetición ayuda a comprensión.

Algunas definiciones básicas

Eventos, Espacio Muestral y Probabilidad

Para lograr una adecuada comprensión de la teoría de probabilidad, es necesario comenzar con algunas definiciones fundamentales de conceptos centrales de la teoría de probabilidades. Es conveniente familiarizarse desde el comienzo con dichas definiciones dado que, junto a las fórmulas de cálculo, son los pilares para comprender las situaciones a las que nos enfrentaremos.

El cálculo de probabilidades requiere definir con precisión cuál es la probabilidad que se desea obtener. Para ello comenzaremos con la definición de un evento o suceso:

EVENTO O SUCESO ALEATORIO: ***Conjunto de posibles resultados que pueden obtenerse como consecuencia de un procedimiento aleatorio.***

Uno de los ejemplos más sencillos de un procedimiento que puede repetirse indefinidamente se refiere al lanzamiento de un dado. Cada vez que sea lanzado el dado, es posible registrar el número que queda en la cara superior. Luego, podemos definir un evento de interés entre los posible como, por ejemplo:

a) obtener un 4,

b) obtener un número par,

c) obtener un número menor o igual que 3,

d) obtener un número primo.

Los eventos que caen bajo la definición que realicemos suelen llamarse **eventos favorables**, y ocurren en un conjunto de **eventos posibles**. Estamos en condiciones de notar que el cálculo de probabilidades depende de cómo hayamos definido el evento favorable.

Si estudiamos la lista de alumnos de una institución educativa seleccionados al azar, podemos definir como evento favorable la selección de un alumno:

a) cuyo sexo sea varón,

b) que haya repetido el año,

c) que tenga un hermano dentro de la institución

d) que haya aprobado matemáticas.

Como se ve la lista de alumnos puede considerarse en sí como el resultado de un procedimiento.

EVENTO o SUCESO SIMPLE: ***Resultado de un procedimiento que no puede descomponerse***

Cuando se tiran dos dados simultáneamente, se tiene como resultado a todos los posibles pares que se pueden formar con las caras de los dados, por tanto, existen 36 sucesos simples posibles. Cada uno de estos sucesos se compone de un par ordenado, que resulta de registrar el número de la cara del primer dado y el número de la cara del segundo dado. Si definimos como suceso favorable el par ordenado [1-6], este se registra cuando la cara del primer dado es uno y la cara del segundo dado es seis. Solo existe una manera en que puede ocurrir este evento y no puede descomponerse, por lo tanto, decimos que se trata de un suceso o evento simple.

Si definimos al evento favorable como la suma de los dados igual a 7, se tiene que a ese resultado se llega por la suma de los siguientes pares ordenados: [1-6], [2-5], [3-4], [4-3], [5-2], [6-1]. Es decir, 7 como resultado se forma a partir de la suma de múltiples combinaciones de las caras de los dados. Nótese desde ya que el par ordenado [1-6] no es el mismo que el par ordenado [6-1], dado que el primer par implica uno en la cara del primer dado y seis en la cara del segundo dado; en cambio el segundo par implica seis en la cara del primer dado y uno en la cara del segundo dado. Es decir, son dos eventos diferentes pero que encuadran en la definición de evento favorable (sumar siete en la tirada de dos dados). Se desprende de lo dicho que, si definimos al evento favorable como la suma de los dados igual a 7, este no puede considerarse como un evento simple.

La definición de un evento favorable depende de la necesidad de considerar el orden. Por ejemplo, supongamos que una familia tiene 2 hijos y deseamos conocer la probabilidad de que ambos sean de distinto género. Todas las combinaciones de género en dos hijos sería la siguiente:

1) [niño – niño]

2) [niña – niña]

3) [niño – niña]

4) [niña – niño]

Para este caso, existen dos eventos favorables, es decir, puesto que no interesa el orden de nacimientos los eventos favorables pueden ser los pares [niño – niña], [niña – niño]. Si el evento favorable está condicionado por el orden de los nacimientos, es decir 1º niño y 2º niña, nos queda solo un par como evento favorable que es [niño – niña], y las probabilidades son diferentes a las del primer caso en que el orden de los nacimientos no tenía importancia. Por lo tanto, es importante determinar si se está trabajando sobre eventos simples o compuestos, dado que el cálculo de probabilidades resulta diferente.

ESPACIO MUESTRAL ***Procedimiento que consta en enumerar todos los sucesos o eventos posibles***

El espacio muestral es imprescindible para el cálculo de probabilidades. En los párrafos anteriores hemos dado algunos ejemplos de lo que es el espacio muestral. Si el procedimiento consiste en lanzar un dado, el espacio muestral se compone de todos los resultados de ese lanzamiento, esto es, 6 resultados posibles: {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Si el procedimiento consiste en lanzar dos dados, el espacio muestral se compone de todas las combinaciones de resultados del primer y segundo lanzamiento, esto es, 36 resultados posibles: {[1-1], [1-2], [1-3], [1-4], [1-5], [1-6], [2-1], [2-2], [2-3]… [6-6]}.

Para el ejemplo del género de dos niños, también se enumeró el espacio muestral con todos los eventos posibles: {[niño – niño]; [niña – niña]; [niño – niña]; [niña – niño]}.

PROBABILIDAD DE UN EVENTO: ***Número de veces que se registra dicho evento en un espacio muestral dado. O bien, cociente entre el número de veces que se registra el evento y la cantidad total de eventos posibles***

Para identificar el cálculo de probabilidades suele emplearse la siguiente notación $P\,(x)$, que se lee como la probabilidad del evento *x*, sea éste aquel evento que hemos definido como favorable. Consideremos ahora el procedimiento de lanzar un dado y el cálculo de las siguientes probabilidades según la definición dada:

a) obtener un 4

$P_{(4)} = \frac{1}{6} = 0.16$

b) obtener un número par

$P_{(par)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$

c) obtener un número menor o igual que 3

$P_{(\leq 3)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$

Nótese que el numerador de la fracción es igual a los casos favorables al evento definido, y el denominador es siempre el espacio muestral. Si retomamos el ejemplo del género de los bebés, la probabilidad se calcula de la siguiente manera:

$P_{(distinto\ género)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$

$P_{(niño-niña)} = \frac{1}{4} = 0.25$

Reglas de conteo

Ya hemos visto cómo se define un evento y un espacio muestral. Con ambas definiciones es posible calcular la probabilidad de ocurrencia del evento. Las probabilidades tales como las hemos definido se expresan de manera cuantitativa, es decir, hemos avanzado de la simple enunciación de que algo puede ocurrir, a la asignación de un valor probabilístico a esa ocurrencia.

Ahora vamos a ver las reglas de conteo. Quien quiera sacar dinero de un cajero automático, sabe que debe ingresar un número de identificación de cuatro dígitos, que es su clave personal. Este número es llamado PIN por su acrónimo en inglés *Personal Identification Number*. Supongamos que un ladrón logra sustraer una tarjeta bancaria, y quiere sacar dinero del cajero automático, éste le dará tres intentos para introducir la clave correcta antes de retener la tarjeta. Los cuatro dígitos pueden ser cualquier número del 0 al 9 (se supone que los dígitos no pueden ser consecutivos ni repetirse, pero por ahora no nos interesa ese hecho), ¿cuántos códigos de cuatro dígitos pueden obtenerse de esta manera? Por la regla del conteo, sabemos que la cantidad de códigos distintos estará dada por:

$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10,000$

Si el ladrón tiene tres oportunidades para dar con el código correcto, ¿cuáles son sus posibilidades de acertar por azar? La respuesta es 3/10,000=0,0003. Resultaría prácticamente imposible dar con la clave de identificación en tres intentos contando solo con la pura suerte.

Algunos bancos amplían la seguridad del código agregando además otro código de tres letras, que debe ser introducido luego del código numérico. Suponiendo que puedan utilizarse cualquiera de las 24 letras del alfabeto ¿cuántos códigos diferentes pueden generarse con tres letras? La respuesta es:

$24 \times 24 \times 24 = 13,824$

Suponiendo que el ladrón logró ingresar el código numérico correcto por pura suerte, ¿cuál es la posibilidad que acierte por azar el código de tres letras si tiene solo una oportunidad? La respuesta es 1/13,824=0.000072.

En estos ejemplos, hemos estado trabajando sobre la regla del conteo la cual especifica que:

Para una secuencia de dos eventos en la que el primero pueda ocurrir de m formas diferentes y el segundo en n formas diferentes, los eventos juntos pueden ocurrir en un total de m x n formas diferentes.

Como se aprecia, la regla del conteo se generaliza a más casos de los ***m*** y ***n*** mencionados. Por ejemplo, si jugamos a la quiniela a tres cifras, ¿cuántas cifras diferentes pueden ocurrir en un sorteo? Ya conocemos la respuesta:

$10 \times 10 \times 10 = 1,000$ combinaciones posibles.

Qué posibilidades tenemos de ganar si: a) jugamos solo un número de tres cifras, b) jugamos un número de tres cifras en distintas combinaciones, d) jugamos a que el número escogido sale entre los primeros diez números.

Las respuestas son las siguientes, digamos que en el primer caso apostamos al número 348, entonces, existe una posibilidad entre mil de que ese número sea premiado, y por tanto las chances son 1/1000= 0,0001. Si jugamos a tres números, cualquiera sea su combinación obtenemos las siguientes combinaciones posibles {[348, 384, 438, 483, 834, 843]}, por tanto, nuestras chances de acertar se calculan como 6/1000= 0.006. En el último caso lo que hacemos es reducir nuestro espacio muestral mediante un proceso que se llama iteración, entonces nuestras chances son ahora iguales a 1/990= 0,00101010… En cualquier caso, vemos que es necesario multiplicar las apuestas para poder obtener el premio, en cuyo caso el valor de la apuesta tiende a acercarse al valor del premio y entonces, ya no tiene sentido jugar.

Veamos ahora el siguiente ejemplo: un profesor de matemáticas realiza una prueba de dos diferentes métodos didácticos con alumnos del mismo año de un colegio donde dicta clases, reservando un porcentaje de los alumnos a los que les asigna el método tradicional; este último grupo funcionó como **grupo control**. Al final de la investigación encontró que la media en una evaluación realizada a todos por igual fue de:

Método didáctico	Puntuación media en el examen
Método tradicional	5
Método 1	7
Método 2	9

El profesor ordena los puntajes de menor a mayor según el tipo de método didáctico, y obtiene: Método tradicional – Método 1 – Método 2. Inmediatamente concluye: "para la enseñanza de matemáticas, cualquier tipo de método será mejor que el tradicional, pero se observa que el método 2 es mejor que el método 1 para este grupo de alumnos".

Sabemos que un estudio de esta naturaleza requiere de un contraste riguroso de los tres grupos de alumnos, dado que, si no se cuenta con tales comparaciones, la probabilidad de que los alumnos se hubieran ordenado por azar de la manera en que lo hicieron es alta. Para comprobar esto, reduzcamos la situación a un problema de conteo. Digamos que tenemos tres grupos GT, G1 y G2 ¿de cuántas maneras se pueden combinar estos tres grupos?; ¿cuál es la probabilidad de que se produzca por azar la combinación GT-G1-G2?

Las combinaciones resultantes de los tres grupos se obtienen mediante la siguiente multiplicación:

$3 \times 2 \times 1 = 6$

Es decir, existen 6 maneras diferentes de combinar los tres grupos de modo que el caso particular GT-G1-G2, puede obtenerse por azar 1/6 de las veces. Por esta razón deberíamos exigir al profesor un contraste más riguroso para poder confiar en las diferencias entre los tratamientos.

El que acabamos de ver es un caso típico de factorial 3. Para obtener el factorial de 3 se debe multiplicar $3 \times 2 \times 1 = 6$. El número factorial se representa de la siguiente manera: 3! Los números factoriales nos interesan particularmente, dado que una colección de n elementos distintos, ¡se puede acomodar de n! maneras distintas. En el ejemplo anterior, para conocer las distintas maneras en que se podían acomodar los tres grupos de alumnos, simplemente obtuvimos 3![3].

Regla de las permutaciones

Mencionamos anteriormente que una manera de saber cuántas combinaciones posibles de elementos podemos obtener es por ordenamiento, si es que los mismos no son numerosos, o por medio del cálculo del número factorial. Factorizar es expresar un número como el producto de otros números menores por los cuales este se puede dividir. Veamos ahora con un ejemplo, una posible manera de utilizar el número factorial en teoría de la probabilidad.

A un inspector de escuelas públicas le asignan visitar diez escuelas, para ello debe planear la manera en que visitará estas escuelas, de modo que pueda cubrir a todas, ¿cuántas rutas diferentes puede trazar el viajante para visitar a todas las escuelas? Para dar con la respuesta debe calcular el factorial de 10, esto es:

[3] Por convención 0!=1

10! =3.628.800.

El inspector ahora lleva esta situación ante su jefe, el inspector general, que al ver la cantidad exorbitante de rutas disponible le plantea recorrer cuatro escuelas por vez. Ahora el inspector debe seleccionar de a cuatro escuelas de las diez disponibles y verificar cuántas posibles rutas pueden trazarse entre ellas. Para dar con la respuesta el viajante hace el siguiente cálculo:

$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

Ciertamente, no deja de ser un número grande de rutas posibles, pero bastante menor que el anterior.

El problema del inspector ilustra la regla de las permutaciones, la cual estipula que: el número de permutaciones o secuencias de *r* elementos que se seleccionan entre *n* elementos disponibles sin reemplazo es igual a:

$$nPr = \frac{n!}{n - r!}$$

En el ejemplo dado, para trazar las rutas disponibles entre diez escuelas tomando de a cuatro por vez, tendría la siguiente solución:

$${}_{10}P_{4} = \frac{10!}{(10-4)!} = 5040$$

El cálculo de las permutaciones que se presentó se aplica cuando:

a) se tiene un total de *n* diferentes elementos y no hay elementos idénticos a otros,

b) la selección de los *r* elementos entre los *n* elementos se hace sin reemplazo, y

c) el reacomodamiento de los mismos elementos se cuenta como secuencias diferentes.

El número de permutaciones también puede calcularse cuando en una secuencia algunos elementos se repiten. En estadística hay un ejemplo clásico: ¿cuántas palabras diferentes se pueden formar con las letras de la palabra Mississippi? Primero debemos contar cuantas veces se repiten los elementos:

M=1

I=4

S=4

P=2

Esto significa que la palabra Mississippi se forma con el arreglo de cuatro letras repetidas. Para responder a la pregunta que hemos planteado debemos utilizar la siguiente fórmula:

$$\frac{n!}{n1!\ n2! \ldots nk!}$$

Para resolver esta fórmula hay que considerar *n* como la cantidad total de elementos, que para la palabra Mississippi corresponde a las 11 letras. Luego, n_1 n_2, n_k serán las diferentes secuencias de elementos que se repiten; M=1, I=4, S=4, P=2. De este modo, la cantidad de palabras que pueden formarse con las letras de la palabra Mississippi es igual a:

$$\frac{11!}{1!4!4!2!} = 34650$$

Veamos otro ejemplo, la serie de los últimos partidos jugados por el club deportivo de la escuela Domingo Moreno en las últimas siete fechas ha dado la siguiente secuencia de partidos ganados (G) y perdidos (P): GGGPGPG. Si nos interesa conocer cuántas secuencias diferentes se pueden obtener a partir de esta serie, tendríamos que considerar que la secuencia solo tiene dos categorías (Ganados – Perdidos). Luego, si consideramos que *x* elementos son iguales, nos queda que *n-x* elementos también son iguales. Entonces tendremos que:

x = G = 5

n-x = P = 7 - 5 = 2

Ahora podemos aplicar la siguiente fórmula para conocer cuántas secuencias diferentes se pueden obtener a partir de la serie GGGPGPG.

$$\frac{n!}{n - x!\,x!}$$

Por lo tanto

$$\frac{7!}{(2)!5!} = 21$$

Es decir, existen 21 formas diferentes en que podrían arreglarse la secuencia GGGPGPG.

Una cuestión que debe tenerse en cuenta es que las permutaciones nos informan de cuántas maneras posible es obtener un arreglo de n elementos.

Regla de las combinaciones

Al permutar tenemos en cuenta todas las secuencias posibles, pero no consideramos el orden en el que ocurren. Si el orden fuera importante, deberíamos considerar aquellas permutaciones que contienen los mismos elementos como resultados, aunque en diferente secuencia. Veamos un ejemplo donde el orden de los elementos es importante.

Un maestro saca a pasear a los niños de su división y los acomoda a todos en un colectivo que tiene tres filas de once asientos. Los niños prefieren viajar en los asientos delanteros y le exigen al profesor que vea la manera de que todos viajen por turnos en esos asientos, ¿de cuántas maneras se pueden acomodar los niños en el colectivo? Para ello el profesor calcula el número de permutaciones posibles:

$$ {}_{11}P_{3} = \frac{11!}{(11-3)!} = \frac{39916800}{40320} = 990 $$

El docente encuentra que existen 990 secuencias de 3 niños que a su turno viajarán en esos asientos. Pero repara en que, entre ellos, varias secuencias se repiten, aunque no en el mismo orden. Es decir, supongamos que entre los niños hay tres que se llaman María, José y Diego. El maestro se da cuenta que, al calcular el número de permutaciones, ha contado como secuencias diferentes las veces en que estos niños se ordenaron de la siguiente manera:

1. María, José y Diego
2. María, Diego y José
3. José, María y Diego
4. José, Diego y María
5. Diego, José y María
6. Diego, María y José

En el caso de las permutaciones, los diferentes ordenamientos de los mismos elementos cuentan por separado.

Pero el profesor quiere tener en cuenta la situación en que los diferentes ordenamientos de los mismos elementos no se cuentan por separado, para ello, deberá calcular la cantidad de secuencias posibles mediante un número combinatorio. El número de combinaciones de *r* elementos que se seleccionan de *n* elementos se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$nCr = \frac{n!}{n-r!\,r!}$$

Por lo tanto, el profesor decide calcular nuevamente el número de secuencias posibles, teniendo en cuenta que tres niños que ocuparon en asiento delantero, no podrán volver a ocuparlo, aunque aparezcan ordenados en una secuencia distinta.

$${}_{11}C_3 = \frac{11!}{(11-3)!3!} = 165$$

Permutar y combinar son dos operaciones básicas de conteo que permiten definir espacios muestrales. La diferencia entre ambas estriba en la posibilidad de tener en cuenta el orden en que aparecen representados los elementos.

Probabilidades

Probabilidad por frecuencia relativa

El espacio muestral que resulta del procedimiento de lanzar un dado es conocido, pero en ocasiones debemos trabajar sobre algún fenómeno en donde no es posible definir de antemano el espacio muestral. Supongamos que tomamos todos los alumnos de cuarto año de secundario de la provincia de Córdoba al 31 de diciembre y deseamos estimar la probabilidad de tomar un alumno promocionado.

Es decir, definimos como evento favorable que el alumno haya promocionado al 31 de diciembre de ese año. En principio podríamos asumir que el espacio muestral se compone de dos eventos igualmente probables: a) que el alumno seleccionado al azar haya promocionado o, b) que el alumno seleccionado al azar no haya promocionado. Si se asume que todo el espacio muestral es equiprobable, solo debemos asignar una probabilidad de ½ a cada evento. Tratándose de la condición de alumnos de secundaria, es fácil ver que no es razonable asumir una distribución probabilística como la supuesta. Es decir, solo será posible definir el espacio muestral el 31 de diciembre, que es cuándo podremos realizar el conteo de todos los alumnos en sus respectivas condiciones. Luego será posible registrar cuántas veces ocurre el resultado buscado, sobre el resultado total. Generalizando diremos que, si se busca la probabilidad de ocurrencia de un evento A, y se han realizado un número N de ensayos, la probabilidad de A será:

$$P_A = \frac{A}{N}$$

Donde:

P_A: probabilidad del evento A,

A: frecuencia observada del evento A

N: número total de eventos.

Supongamos entonces que se han seleccionado 400 alumnos (N), y se ha observado que 289 alumnos están promocionados (A), la aproximación a la probabilidad de A será el cociente: $P(A)$=289/400=0.7225.

Este enfoque se denomina **probabilidad por frecuencia relativa**, porque como toda frecuencia, surge de un conteo. La probabilidad buscada será entonces el cociente entre el número de veces que se observa el resultado favorable, sobre el número total de ensayos.

Veamos otro ejemplo. El Ministerio de Educación de la Provincia selecciona al azar una muestra de 780 docente que desempeñan sus tareas en el área tecnología. Sobre esta muestra se realiza una encuesta sobre su opinión del plan Conectar Igualdad. La pregunta que abre el cuestionario indaga sobre experiencia de trabajar en este programa nacional. El resultado de la encuesta se muestra en la siguiente tabla:

Respuesta	Frecuencia
Negativa	130
Positiva	561
Indiferente	89
Total	780

Nos interesa conocer qué probabilidad existe de seleccionar al azar un docente cuya experiencia en el plan haya sido negativa. Para ello, debemos considerar aquellos que dieron esa respuesta, sobre el total de docentes encuestados:

$$P\ (negativa) = \tfrac{130}{780} \approx 0,167$$

En este ejemplo cabe señalar dos cuestiones, la primera es que no podemos calcular la probabilidad buscada sin contar con todas las respuestas. Por lo tanto, las probabilidades por frecuencia relativa corresponden a una distribución empírica de eventos. La otra cuestión es que, al igual que con las frecuencias relativas, las probabilidades obtenidas pueden transformarse a porcentajes. Así, el cálculo que hemos realizado se puede traducir como: poco más del 16% de los docentes encuestados ha tenido una experiencia negativa con el plan Conectar Igualdad.

Las probabilidades pueden calcularse también cuando las frecuencias están arregladas en una tabla de contingencia o de doble entrada. En este tipo de tablas, las columnas y las filas representan categorías de una variable; las celdas representan las categorías cruzadas de los niveles de las variables. En las celdas se representan frecuencias, al igual que en los marginales de filas y columnas. Para comprender mejor esos conceptos, considérese la siguiente tabla; en ella se muestra un total de 121 estudiantes que dieron un examen (el total de fila y el total de columna siempre deben ser iguales). 85 de ellos rindieron en el primer turno de examen, mientras que los 36 alumnos restantes rindieron en el segundo turno. Estos valores aparecen como los marginales de las filas. Además, la tabla indica que hubo 95 estudiantes aplazados, mientras que los 26 restantes aprobaron el examen. Estos valores aparecen como los marginales de columna.

	Aplazados	**Aprobados**	**Total**
Primer turno de examen	80	5	85
Segundo turno de examen	15	21	36
Total	95	26	121

Dados los datos de los marginales y usando el cálculo de probabilidad visto más arriba, podemos preguntar: *¿cuál es la probabilidad de seleccionar al azar un estudiante, y que este haya rendido en el primer turno de examen?*

$$P_{(primer\ turno)} = \frac{85}{121} = 0,702$$

Para calcular esa probabilidad, usamos la frecuencia marginal de la fila correspondiente a la categoría primer turno de examen, la cual corresponde al numerador de la fracción. El total de casos es el numerador. Por lo tanto, la probabilidad buscada es de 0,702.

En el ejemplo dado, hemos usado una de las frecuencias marginales de las filas, pero podemos hacer lo mismo con las frecuencias marginales de las columnas: *¿cuál es la probabilidad de seleccionar al azar un estudiante, y que este haya aprobado el examen?*

$$P_{(aprobado)} = \frac{26}{121} = 0,215$$

Ahora, para calcular esa probabilidad usamos la frecuencia marginal de la columna correspondiente a la categoría aprobados, la cual corresponde al numerador de la fracción. Nuevamente, el total de casos es el numerador. Por lo tanto, la probabilidad buscada es de 0,215.

De los ejemplos que hemos visto hasta aquí, podemos decir que la probabilidad calculada a partir del conteo de la frecuencia observada de un resultado, constituye una aproximación de la probabilidad real del mismo. Nótese que no hemos trabajado sobre la probabilidad de las celdas, las cuales veremos más adelante.

Apuestas y Posibilidades

Las probabilidades a veces se expresan como posibilidades, por ejemplo 3 a 1 o bien 10 a 1 (esto se denota a veces como 3:1 o 10:1). La ventaja de estas expresiones radica en que permiten manejar más fácilmente fracciones de dinero y por ello se las utiliza comúnmente en juegos de azar y apuestas. Las posibilidades de pago describen la relación entre monto de la apuesta y pago, por lo demás las posibilidades a favor o en contra describen la probabilidad real de algún suceso. Esta relación casi siempre se expresa en la forma a:b, donde a y b son enteros que no tienen factor común, tal en caso de 3 a 1 o 10 a 1 descripto al comienzo (la posibilidad real a favor de un evento es el recíproco de la posibilidad real en contra, esto es b:a).

Supongamos que se enfrentan dos colegios A y B en un campeonato de fútbol. Por los antecedentes y las condiciones, el candidato para ganar el partido es el colegio A. Un grupo de profesores y preceptores que dan clases en ambos colegios se traban en una intensa discusión acerca de quién será el verdadero ganador, y las apuestas se definen de la siguiente manera: 5:1 a favor del colegio A y 10:1 a favor del colegio B. Supongamos también que Ud. decide apostar $10. Si apuesta por el colegio A, recibirá una ganancia de $50 (5x10), y si apuesta por el colegio B recibirá una ganancia de $100 (10x10). La lógica dicta que la mayoría de las personas buscarán una apuesta segura, por lo que las posibilidades del favorito serán más bajas que las del rival, y por tanto la apuesta dará un precio menor. Al contrario, una apuesta por el colegio no favorito pagará más en tanto se espera que pocas personas apuesten por él. Por lo tanto, Ud. podrá hacer una apuesta con altas chances de ganar, pero con poco monto de ganancia (apostar al colegio A); o bien, hacer una apuesta con bajas chances de ganar, pero con alto monto de ganancia (apostar por el colegio B).

Si se dan las posibilidades reales en contra, es fácil encontrar la probabilidad de ocurrencia del evento de interés; esto es, se puede trabajar con las posibilidades como si fueran probabilidades. Siguiendo con el ejemplo dado anteriormente, las posibilidades a favor de cada colegio son: colegio A=5:1, colegio B=10:1. Esto se simboliza como a:b, por tanto el recíproco de cada posibilidad nos informa de las posibilidades en contra de cada uno, esto es b:a. Así las posibilidades en contra del colegio A=1:5, Colegio B=1:10. El cálculo de probabilidades de éxito de cada colegio estará dado por:

$$P_{(\acute{e}xito)} = \frac{a}{(b+a)}$$

Colegio A: $P\,(\acute{e}xito) = \frac{1}{(1+5)} = 0,16$

Colegio B: $P\,(\acute{e}xito) = \frac{1}{(1+10)} = 0,09$

Vemos entonces que la probabilidad de de éxito para el colegio A es más alta, y por tanto su pago por apuesta es más bajo.

Resumiendo, en el procedimiento que hemos visto hasta aquí, tenemos que es posible obtener la probabilidad de éxito de un suceso que nos interesa, utilizando como información la relación de que éste ocurra en condiciones de que otro suceso resulte posible, pero ambos no pueden ocurrir a la vez. Dicho en otras palabras, si dos sucesos son probables pero la ocurrencia de uno impide la realización del otro, hablamos en términos de la relación de posibilidades. Así es como se calculan las apuestas, en el ejemplo que hemos dado; si gana el colegio A es porque el colegio B resulta perdedor y viceversa. Nótese que también este tipo de probabilidades se basan en frecuencias. ¿Cómo sabemos que el colegio A es el favorito? Pues deberíamos contar con una serie o racha de partidos que muestren que ese colegio ha ganado más veces que otros colegios que incluyen a B. Las estadísticas que existen nos permiten aproximarnos a esas posibilidades, por ejemplo, se puede contar con la posición de los colegios que han participado regularmente en las Olimpíadas Matemáticas Argentina. La posición relativa de unos colegios frente a otros, nos informará que tan dispersos están éstos y las veces que unos resultados mejor posicionados que otros en la final. De este modo, la estimación por frecuencia relativa nos permitirá calibrar las posibilidades de los colegios de ganar un evento en particular. Digamos que esta vez los colegios A y B que se enfrentaron en el torneo de fútbol, se encuentran ahora en las olimpíadas matemáticas. Nuevamente el favorito es el colegio A, con posibilidades a favor de 5:3 (nótese que la fracción no debe tener divisor común). Al invertir la relación tenemos que las posibilidades en contra de para el colegio A son 3:5, la probabilidad de ocurrencia de ese evento se calcula mediante la ecuación antes vista:

$$P\ (A) = \frac{a}{(b+a)}$$

Esto es: P(A)=3/(5+3)=3/8=0,375. Con este cálculo estamos en condiciones de afirmar que la probabilidad de que el colegio A resulte perdedor en la contienda contra B, es baja.

Probabilidad subjetiva

Otra manera de obtener probabilidades es mediante un procedimiento subjetivo, es decir teniendo en cuenta lo que se conoce acerca de un fenómeno y suponiendo o estimando el valor de probabilidad. Un ejemplo podría ser el siguiente, ¿qué probabilidad tengo de atropellar una jirafa con mi auto en el acceso norte a la Ciudad de Córdoba? Asumimos que, si hubiera una jirafa en ese lugar, podría atropellarla. Por lo que sabemos de las jirafas, estimamos que la probabilidad de que ocurra un evento de esa naturaleza es ínfima o casi nula.

No debe confundirse la idea de asignar una probabilidad subjetiva a un evento, con asignar a un evento la probabilidad que uno quiera. El enfoque de la probabilidad subjetiva se aplica a eventos o fenómenos cuya naturaleza es muy difícil de determinar con exactitud. Un ejemplo más realista que el anterior puede encontrarse en las predicciones meteorológicas. Las variables que influyen sobre el clima son por demás numerosas y generalmente es muy complejo determinar las características climáticas con precisión. Otro tanto ocurre con ciertos fenómenos sociales, de los cuales solo conocemos ciertas características fundamentales, pero ignoramos otras igualmente importantes. En tales casos, suele emplearse una estimación aproximada de la probabilidad del evento en base al conocimiento que se tiene del comportamiento de ciertas variables que están relacionadas con él. Por ejemplo, contar cuántas veces ocurren episodios de *bullying* en las aulas, nos daría la posibilidad de estimar un nuevo episodio utilizando el enfoque por frecuencia relativa, pero el acoso es un fenómeno social complejo y el mero conteo resultaría poco informativo. Los docentes pueden emplear no solo la cantidad de episodios registrados de acoso, sino también lo que saben acerca de la escuela y sus alumnos para asignar una probabilidad de ocurrencia a un episodio de violencia. El conocimiento de variable no cuantificables resulta un elemento esencial en este caso para estimar la probabilidad de que se produzcan este tipo de situaciones.

Ahora bien, supongamos que en una escuela no existen antecedentes de episodios de violencia y acoso, ¿indicaría esto que la probabilidad de un episodio de tal naturaleza es nula? La respuesta es no. Lo mejor que podrían hacer los docentes es suponer que tal episodio sucederá, asignándoles una probabilidad subjetiva basada en antecedentes registrados en otros colegios.

Probabilidad para eventos con espacio muestral conocido

En la sección anterior vimos que el espacio muestral se obtiene luego de que se ha podido cuantificar un fenómeno del cual, a priori, no teníamos ninguna información. En el ejemplo de la experiencia docente con el plan Conectar Igualdad, nos encontramos con la situación de tener que saber qué opinión tenían todos los docentes encuestados para definir el espacio muestral y así calcular la probabilidad de seleccionar un docente que hubiera tenido una experiencia negativa. Ahora bien, en ciertas situaciones, es posible saber cuál es el espacio muestral pues éste resulta de una distribución conocida de probabilidades. En un espacio muestral, cuyos eventos tienen probabilidad conocida, si queremos saber la probabilidad de ocurrencia de un evento, se debe contar todas las formas en que éste puede ocurrir, y se dividirlo sobre el número total de sucesos simples. A los fines prácticos, si se define a todas las formas en que puede ocurrir el evento de interés como *S*, y al número total de sucesos simples como N, la probabilidad del evento está dada por:

$$P_{(e)} = \frac{S}{N}$$

El ejemplo más conocido y práctico de un espacio muestral conocido resulta del resultado de un lanzamiento de dados. En este caso, todas las caras tienen la misma chance de salir en un lanzamiento. Si buscamos la probabilidad de obtener un 5 en un lanzamiento, tenemos que existe solo una forma de obtener ese resultado (S), mientras que la cantidad de sucesos simples diferentes es igual a seis (N), entonces la probabilidad buscada es igual a P(*5)*=S/N=1/6=0.1666…

Si en cambio buscamos la probabilidad de obtener un 5 en un lanzamiento de dos dados, tenemos que existen cuatro formas de obtener ese resultado (S), mientras que la cantidad de sucesos simples diferentes es igual a treinta y seis. Por lo tanto, P(*5*)=S/N=4/36= 0.111…

Supongamos que vamos al casino y queremos apostar al 13 como número de suerte, ¿qué probabilidad tenemos de perder en una apuesta? Sabemos que una ruleta es un juego donde los 38 números tienen la misma probabilidad de salir; dado que estamos decididos a apostar por un solo número, nos quedan 37 posibilidades de que el número escogido no sea favorecido. La probabilidad que buscamos sería la siguiente:

$$P\ (perder\ si\ apuesto\ al\ 13) = \tfrac{37}{38} = 0,9736$$

Supongamos que una pareja tiene tres hijos y queremos conocer la probabilidad de que el género de los hijos sean dos niños y una niña. Sabemos que el nacimiento de un hijo no influye en el del otro y que además las posibilidades de que el hijo haya nacido varón o mujer es la misma. Si se construye una tabla de todo el espacio muestral, se tiene que existen ocho combinaciones posibles de varón y mujer en tres hijos {varón – varón – varón; varón – varón – mujer; varón – mujer – varón; etc.}, de las cuales solo tres combinaciones resultan dos niños y una niña, dado que no estamos considerando el orden de los nacimientos: {varón – varón – mujer; varón – mujer – varón; mujer – varón – varón}. Por lo tanto, la probabilidad buscada es:

$$P\ (dos\ niños\ y\ una\ niña) = \tfrac{3}{8} = 0,375$$

Cuando se trata de eventos igualmente probables, es usual confundir cuántos eventos pueden ocurrir con la probabilidad de que un evento ocurra. Supongamos que dos hijos mellizos de una familia entran en una escuela secundaria que tiene sólo dos secciones para primer año y la distribución de los alumnos se hace por sorteo, ¿qué probabilidad hay de que ambos estén en la misma sección? Obsérvese la siguiente tabla:

Sección A	Sección B
Hijo 1 – Hijo 2	
	Hijo 1- Hijo 2
Hijo 1	Hijo 2
Hijo 2	Hijo 1

El evento que buscamos, esto es el evento favorable, es aquel en el que los dos hijos están en la misma sección. Denominamos a los hijos como Hijo 1 y 2. Ahora, no importa donde sean asignados los hijos por sorteo, siempre resultará cuatro posibilidades: a) que los hijos 1 y 2 estén en la sección A, b) que los hijos 1 y 2 estén en la sección B, c) que el hijo 1 este en la sección A y el 2 en la B, o bien, d) que el hijo 1 este en la sección B y el 2 en la A. Sólo en dos de cuatro casos, los hijos estarán en la misma sección, por ende, la probabilidad de que los dos hijos estén en la misma sección es de 2/4, es decir 1/2.

Certeza e imposibilidad

Por todo lo dicho hasta aquí, estamos en condiciones de definir dos términos propios de la teoría de probabilidades, que tienen una gran capacidad de generalización: la certeza y la imposibilidad. Existen ciertos eventos que sabemos que ocurrirán indefectiblemente, o que son imposibles puesto que no han ocurrido y no ocurrirán jamás. Digamos que la probabilidad de que una persona muera en algún momento es igual a 1. Esto es una certeza en tanto no se conoce el caso de ningún humano que haya alcanzado la inmortalidad. El valor 1 indica en este caso, la completa certeza de que la muerte es ineludible para cualquier persona. Por otro lado, la probabilidad de que en el actual sistema calendario se registre un mes de febrero con 31 días es un suceso imposible y su probabilidad es igual a 0. Aquí, el valor indica que, bajo ciertas condiciones, algo no sucederá. De ello se deduce que las probabilidades de un suceso siempre estarán comprendidas entre la certeza y la imposibilidad, esto es entre 0 y 1. Entonces, la probabilidad de cualquier suceso A será siempre $P(A) = 0 \leq P(A) \leq 1$.

Es importante comprender este concepto que a menudo se pasa por alto, si sabemos que algo va a ocurrir su probabilidad es 1, pero si sabemos que algo no ocurrirá su probabilidad es 0. Entonces, toda vez que calculemos la probabilidad de un evento dado, deberemos encontrar un número comprendido entre 0 y 1.

Estos números aparecen en notación decimal algunas veces y otras aparecen expresadas en forma de fracción. Por ejemplo, la probabilidad de obtener una cara en el lanzamiento de una moneda puede expresarse como 0,5 o 1/2; en ambos casos se expresa lo mismo. Ahora bien, si encontramos expresiones como 1,7 o 5/3, sabremos que no están expresando una probabilidad. Esta idea es importante para el cálculo, dado que si luego de haber obtenido un resultado al haber estimado una probabilidad, nos encontramos con un resultado menor que cero o mayor que la unidad, nos obligará a revisar las cuentas.

Operar con probabilidades

Hasta aquí hemos tratado con probabilidades de eventos simples, pero en ocasiones es necesario considerar la ocurrencia de un evento en condiciones en que otros eventos ya ocurrieron o son concurrentes con aquel que nos interesa. Para entender este tipo de probabilidades, utilizamos operaciones matemáticas. En este apartado veremos la manera en que se aplica la regla de la suma y la multiplicación.

Regla de la suma

La regla de la suma es un método para calcular la probabilidad de que ocurra el suceso A o el suceso B o ambos; esto se expresa de la siguiente manera P(A o B). Es importante recordar que la expresión "o" se la denomina "o inclusivo", para denotar que puede ocurrir el suceso A o el B o los dos. Se lo diferencia de la operación "o exclusivo", en cuyo caso se debe entender que se espera que, o bien ocurra A, o bien ocurra B, pero no ambos. En lo que sigue, introduciremos algunas definiciones:

Suceso compuesto: cualquier suceso que combina dos o más sucesos simples.

Regla formal de la suma: $P\ (A\ o\ B) = P\ (A) +\ P\ (B) -\ P(AyB)$

En la regla de la suma, P(A *y* B), es la probabilidad de que A y B ocurran al mismo tiempo. Para calcular la probabilidad de que un suceso A ocurra o un suceso B ocurra, se necesita calcular el número total de formas en que el suceso A puede ocurrir y el número total de formas en que B puede ocurrir, pero se debe tener especial cuidado en que cada resultado no se cuente más de una vez.

Veamos un ejemplo: Supongamos que un colegio, recibirá una contingente de alumnos de intercambio de dos países diferentes, Brasil (9) y Chile (5). Los alumnos son Varones (8) y Mujeres (6), los números entre paréntesis indican la cantidad de cada uno de ellos. Podemos preguntar ¿qué probabilidad existe de extraer un alumno al azar y que este sea Varón o de Brasil? En primer lugar, podemos arreglar una tabla para determinar qué proporción de alumnos de Brasil y de Chile son varones o mujeres.

	Brasil	Chile	
Varón	5	3	8
Mujer	4	2	6
	9	5	14

Definamos ahora la probabilidad buscada como:

$$P\ (varon\ o\ de\ Brasil) = P_{varon} + P_{de\ Brasil} - P_{varon\ y\ de\ Brasil}$$

Los datos necesarios para resolver esta ecuación están contenidos en la tabla, así 8/14 es la probabilidad de obtener un alumno varón; 9/14 es la probabilidad de obtener un alumno de Brasil. Nótese que en estas fracciones la celda que representa la intersección varones y de Brasil ha sido considerada dos veces, por lo tanto, la última expresión en la ecuación tiene en cuenta ese doble conteo. Resolviendo la ecuación se tiene:

$P(_{varón\ o\ de\ Brasil})=8/14 + 9/14 - 5/14= 6/7=0.86$

Hay que tener especial cuidado en el cálculo de este tipo de probabilidad en considerar eventos que son comunes. En este caso el conjunto formado por todos los alumnos de Brasil, contiene algunos varones y mujeres, el conjunto de todos los alumnos varones contiene algunos de Brasil. Por tanto, la intersección entre ambos conjuntos no es un conjunto vacío. Volveremos sobre este punto en el apartado teoría de conjuntos.

Esto nos lleva a considerar lo siguiente: si se está calculando la probabilidad P (A o B), debe preguntarse si existe solapamiento entre A y B, es decir, se debe evitar el doble conteo de la celda que corresponde a ambos eventos.

Veamos otro ejemplo: un profesor ha tomado el mismo examen en dos modalidades diferentes, una Oral la otra Escrita. El resultado del examen se muestra en la siguiente tabla ¿cuál es la probabilidad de seleccionar aleatoriamente un alumno que haya participado en la modalidad oral o que haya aprobado?

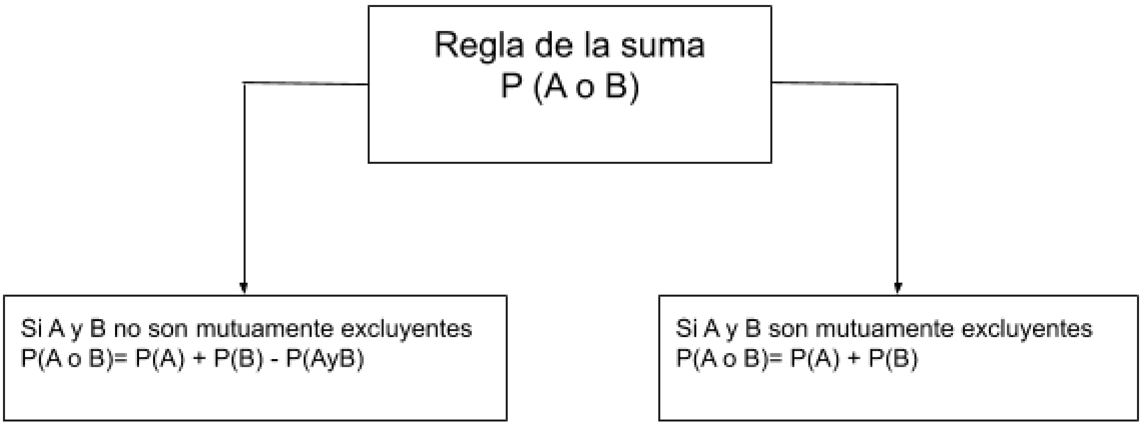
	Examen Oral	**Examen Escrito**	
El alumno aprobó	80	5	85
El alumno reprobó	3	11	14
	83	16	99

$$P\ (oral\ o\ aprobado) = P_{oral} + P_{aprobado} - P_{oral\ y\ aprobado}$$

P(oral o aprobado)= 83/99 + 85/99 – 80/99= 8/9

P(oral o aprobado)= 0,83 + 0,85 - 0,80= 0,88

A partir de los ejemplos que hemos dado podemos deducir la siguiente regla de la suma de probabilidades:



Regla de la suma cuando "o" es exclusivo

Según hemos visto hasta ahora, cuando aplicamos la regla de la suma consideramos P(*A*o*B*) como la probabilidad de que se registre el evento *A* o bien el evento *B* o ambos. Cuando el conector o se usa en sentido exclusivo, P(*A o B*) se refiere a la probabilidad de que se registre el evento A o el evento B, pero no ambos. Para calcular esa probabilidad se introduce una modificación en la regla de la suma:

$$P\ (A\ o\ B) = P\ (A) + P\ (B) - 2(P\,AyB)$$

Veamos un ejemplo: supongamos que se realiza un relevamiento de alumnos en dos colegios diferentes C1 y C2. Tal relevamiento se realiza mediante encuestas personales, y se registra un importante número de rechazos de las encuestas, concretamente, el 45,2% de los alumnos rechaza la encuesta. Consideramos por un lado que C1 es más importante que C2, y además consideramos que es importante saber si el alumno rechaza la encuesta; entonces podemos preguntarnos ¿qué probabilidad hay de seleccionar un alumno al azar del total y que este pertenezca a C1 o haya rechazado la encuesta? Nótese que aquí no nos interesan ambos casos, por lo tanto, la probabilidad buscada será:

$$P\ (C1\ o\ rechaza) = P\ (C1) + P\ (rechaza) - 2P(C1\ y\ rechaza)$$

El resultado del relevamiento se muestra en la siguiente tabla:

	Colegio	**Colegio**	
Acepta	75	89	164
Rechaza	114	21	135
	189	110	299

La probabilidad buscada se obtiene entonces como:

$$P\ (C1\ o\ rechaza) = \tfrac{189}{299} + \tfrac{135}{299} - 2\left(\tfrac{114}{299}\right) = 0.632 + 0.451 - 0.762 = 0.321$$

Veamos otro ejemplo, en una clase de música se solicita a los alumnos que identifiquen un tono en dos categorías diferentes según los perciban como: a) Fuerte – Débil, b) Agudo – Grave. En la siguiente tabla se muestra la cantidad de identificaciones realizadas por los alumnos en diferentes ejercicios.

	Fuerte	Débil	
Agudo	12	4	16
Grave	5	18	23
	17	22	39

De seleccionar aleatoriamente un alumno de los 39 participantes, ¿qué probabilidad existe de que ese alumno haya identificado el tono como grave o fuerte? Repitiendo el procedimiento anterior se tiene que:

$P\ (grave\ o\ fuerte) = \frac{23}{39} + \frac{17}{39} - 2\left(\frac{5}{39}\right) = 0.289 + 0.435 - 0.256 = 0.468$

Regla de la multiplicación de probabilidades

La regla de la multiplicación de probabilidades aplica cuando deseamos conocer las chances de que ocurran dos eventos simultáneamente. Para pensar en este tipo de sucesos basta con prestar atención al sistema de seguridad de las tarjetas de débito bancario. Si uno se dirige a un cajero automático e inserta su tarjeta personal, deberá ingresar un código de cuatro dígitos, luego para validar cualquier transacción deberá introducir otro código de tres letras. En el código de dígitos, la única condición que se debe satisfacer es que dos números consecutivos nos sean iguales. Podemos evaluar que tan seguro es este método imaginando la siguiente situación. Supongamos que una persona encuentra una tarjeta y desea probar suerte en el cajero automático. Tiene tres chances de acertar con la clave numérica y solo una con la clave alfabética. En lenguaje probabilístico traducimos esa situación como:

$$P_{alfanumérica} = P_{código\ numérico} * P_{código\ alfabético}$$

Es decir, la probabilidad de acertar con la clave numérica y la clave alfabética será igual al producto de ambas probabilidades.

Recordemos que con la clave numérica se tienen tres intentos, lo cual en términos probabilísticos es igual a:

$$P_{código\ numérico} = \left(\frac{1}{9970}\right) + \left(\frac{1}{9969}\right) + \left(\frac{1}{9968}\right) \approx 0,0001 + 0,0001 + 0,0001 = 0,0003$$

Lo primero es excluir del universo de posibilidades, aquellos números que invalidan la clave, por ejemplo, si comenzamos con la secuencia 00_ _ en una clave de cuatro dígitos, ésta se invalida al usar dos números consecutivos iguales, pero también se invalida si usando cualquier numero al inicio, que le siga una secuencia _00_, finalmente, cualesquiera que sean los dos números iniciales, la secuencia se anula si los dígitos finales se repiten; por ejemplo _ _ 00. Es decir, en ningún lugar de la clave puede haber dos dígitos consecutivos iguales. Eso excluye la posibilidad de usar treinta combinaciones de las diez mil posibles. Por tanto, en el primer intento con la clave numérica, las posibilidades son 1/9970. Si esa clave falla, intentaremos nuevamente, utilizando una secuencia distinta a la ya usada, por tanto, las chances de acertar en el segundo intento serán 1/9969. Si falla esa combinación, queda un último intento descartando las dos combinaciones usadas anteriormente, cuya probabilidad de acierto se reduce a 1/9968. Simplificando los decimales, tenemos que la chance de acertar en cualquiera de los tres intentos es igual a 0,0003.

Luego, la posibilidad de acertar con la clave alfabética es igual a la combinatoria de 24 letras tomadas de a tres, dado que en esta secuencia no pueden repetirse las letras.

$$_{24}C_3 = \frac{24!}{(24-3)!3!} = 2024$$

Por lo tanto, la posibilidad de acertar a la primera combinación de tres letras es igual a: 1/2024=0,000049≈0,00005.

Volviendo a nuestro problema, tenemos que la posibilidad de acertar por azar en la clave numérica es de 0,003 ***y*** de acertar en la clave alfabética es 0,0005. Entonces las posibilidades de conseguir entrar por puro azar en una cuenta bancaria con una tarjeta, es igual a:

$$P_{alfanumérica} = P_{código\ numérico} * P_{código\ alfabético}$$

$$P_{alfanumérica} = 0,0003 * 0,0005 = 0,0000000015$$

Esto equivale a una posibilidad en 1500.000.000. Para tener una idea más realista de lo que este número representa, podríamos decir que, si pudiéramos ingresar un código alfanumérico por minuto, durante diez horas todos los días del año, tardaríamos aproximadamente veintiocho años en dar con la clave correcta. Pero, como hemos dicho antes, al tercer intento fallido, el cajero retiene la tarjeta. Es decir, si el que encuentra una tarjeta logra ingresar ambos códigos correctamente ¡se merece el dinero!

La multiplicación de probabilidades es la manera de saber qué chances existen de que dos eventos se den conjuntamente. Si identificamos el primer evento como A, y el segundo evento como B, la probabilidad de encontrar A y B se obtiene de su producto:

$$P_{(AyB)} = P_A * P_B$$

Supongamos que apostamos al 11 en un juego de lanzamiento de dos dados, y además apostamos al 11 a dos cifras en la quiniela, ¿cuál es la probabilidad de ganar en ambos juegos? Para obtener la probabilidad buscada debemos multiplicar ambas probabilidades de ganar, pero nótese desde ya que apostar al 11 en los dados resulta independiente de apostar al 11 en la quiniela. Queremos decir con esto que una apuesta no afecta a la otra, por lo tanto, la probabilidad buscada es:

$$P\ (11\ dados\ y\ 11\ quiniela) = \tfrac{2}{12} \times \tfrac{1}{100} = 0.167 \times 0.01 = 0,00167$$

Veamos otro ejemplo, en cuarto año de un colegio técnico hay 90 estudiantes, de los cuales 20 son mujeres y 70 son varones, ¿cuál es la probabilidad de sacar de una muestra aleatoria una mujer y un varón? Supongamos ahora que una vez seleccionado el estudiante del colegio, éste no es devuelto al mismo, por lo que la ocurrencia del primer evento, afecta al segundo evento. Es decir, si extraigo un estudiante y no lo devuelvo al colegio, para la segunda extracción contaría con un estudiante menos. Entonces, la probabilidad buscada debería tener en cuenta esta particularidad, por tanto:

$$P\ (var\acute{o}n\ y\ mujer) = \tfrac{20}{90} \times \tfrac{70}{89} = 0.22 \times 0.78 = 0.172$$

Dados estos ejemplos podemos establecer la regla de la multiplicación de probabilidades como sigue:

Si los eventos son independientes, entonces: $P\,(A\ y\ B) = P\,(A) \times P(B)$

Si los eventos no son independientes, entonces: $P\,(A\ y\ B) = P\,(A) \times P\,(A)$

La expresión $P\,(A)$, se lee como la probabilidad de que ocurra el evento *B* dado que el evento *A* ya ocurrió; de modo más resumido se dice la probabilidad de *B* dado *A*. De esto se deduce que si *A* y *B* son independientes, la expresión $P\,(A)$ se reduce a $P(B)$.

Considere esta situación: un mago en un acto en colegio baraja un mazo de cartas, mientras predice que sacará cuatro ases consecutivamente, luego apoya el mazo sobre la mesa y extrae la primera carta que resulta ser un as. Toma la baraja y le pide a un alumno que señale un punto en el mazo de cartas, allí el mago hace un corte de la baraja, apoya nuevamente el mazo en la mesa y extrae un segundo as. Levanta el mazo de cartas y se lo entrega a otro alumno y le pide que mezcle las cartas a su gusto. Al final, el mago hace un corte de la baraja y extrae el tercer as. Nuevamente, un alumno de acto es invitado a participar y su tarea es cortar el resto de la baraja en tres partes, tras lo cual el mago junta los montones y finalmente extrae el cuarto as. Si nos preguntamos cuál es la probabilidad de extraer cuatro ases consecutivos de una baraja de cincuenta cartas, encontraremos la solución de la siguiente manera:

$$P\,(1°\ as\ y\ 2°\ as\ y\ 3°\ as\ y\ 4°\ as) = \tfrac{4}{50} \times \tfrac{3}{49} \times \tfrac{2}{48} \times \tfrac{1}{47} = 0.000043$$

Vemos que, por azar, sacar consecutivamente cuatro ases es prácticamente imposible, de modo que sin magia eso no se logra.

Pensemos en caso en que un grupo de alumnos tiene que rendir un examen de idioma muy importante en el que no pueden interactuar en absoluto con sus compañeros. Cada uno de los alumnos recibe con su examen una lapicera; pero además se suministra una lapicera extra, en caso de que la primera tuviera alguna falla. En el proceso de fabricación de las lapiceras se esperaba que al menos 1 en 1000 tuviera algún defecto de fabricación, por lo que en una partida de 20.000 lapiceras se esperaba que hubiera 20 defectuosas. Los fabricantes estimaban que esto era un riesgo elevado para los alumnos en la situación de examen, por ello se los proveía de dos lapiceras, debiendo devolver la segunda en caso que no la utilizaran. Así, la probabilidad de que un alumno recibiera dos lapiceras y que ambas fueran defectuosas se reducía a:

$$P\,(1°\ defectosa\ y\ 2°\ defectuosa) = \frac{20}{20000} \times \frac{20}{20000} = 0.001 \times 0.001 = 0,000001$$

Sin embargo, se detectó que, en una de las partidas de 20.000 lapiceras, 15.250 estaban defectuosas. Bajo estas circunstancias, la probabilidad de que un alumno recibiera ambas lapiceras con defectos se elevaba a:

$$P\,(1°\ defectuosa\ y\ 2°\ defectuosa) = \frac{15250}{20000} \times \frac{15250}{20000} = 0.7625 \times 0.7625 = 0,581$$

Es común que para ciertos dispositivos en los que se necesita mucha seguridad, se use un recurso que se llama duplicación. Por ejemplo, suponga que un jardín de infantes está frente a una avenida muy transitada, y tiene una puerta automática cuyo dispositivo de control ofrece una probabilidad de fallar de 0.05. Al sumar dos puertas más de las mismas características, una en la sala, una en la entrada al establecimiento y una antes de ingresar desde la calle, en la entrada ¿cuál es la probabilidad de que las puertas fallen y un niño salga a la calle sin control? En este caso tenemos que multiplicar esas probabilidades, por lo tanto, la probabilidad de que fallen las 3 puertas queda fijada en: 0.05 x 0.05 x 0.05= 0,000125. Es posible afirmar entonces que fallen las 3 puertas al mismo tiempo es casi imposible.

Adrián Paenza en su libro *"matemáticas ¿estás ahí?"*, nos ofrece un bello ejemplo donde se puede aplicar la regla de la multiplicación de probabilidades. Cierta vez, cuatro estudiantes que debían rendir un examen un día lunes, no se presentaron en la fecha prevista. El martes fueron a hablar con el docente explicando que mientras viajaban hacia la universidad tuvieron un percance con el auto, concretamente, dijeron que habían pinchado una goma y no tenían cómo cambiarla. Dado que estaban en medio del campo, la ayuda tardó en llegar y en consecuencia no pudieron llegar a tiempo al examen. Entendiendo la situación el docente decide darles una nueva oportunidad. Los alumnos aceptan. Entonces, encuentran que el examen tiene una sola pregunta: ¿cuál fue la rueda que se pinchó?[4]

El docente razonó que, si los estudiantes estaban diciendo la verdad, no tendrían problemas en responder correctamente. Sin embargo, si los alumnos estaban mintiendo, la probabilidad de que los cuatro acertaran en señalar el mismo neumático sería muy baja. Es decir, sería casi imposible que los alumnos por azar, dieran la misma respuesta. Una forma de resolver esta probabilidad es considerando la situación en que el primer y el segundo estudiante aciertan por azar, entonces ¿cuál será la probabilidad de que el tercer y el cuarto estudiante, acierten por azar la respuesta dada por los dos primeros? La probabilidad buscada será entonces:

$$P\,(1° - \,2° aciertan\ y\ 3°\ acierta\ y\ 4°\ acierta) = \tfrac{1}{4} \times \tfrac{1}{4} \times \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{64} = 0.015$$

Eventos o Suceso Complementario

Toda vez que estimamos la probabilidad de algún suceso dado, existe un conjunto de resultados para los cuales el suceso no ocurre. En el ejemplo anterior, preguntamos cuál es probabilidad de perder apostando al 13 en el juego de ruleta, esto define el suceso complementario ganar apostando al número 13, y esto es 1/38=0,0263. Si definimos como evento favorable obtener un 5 en una tirada de dado, esto define también su complemento, que es obtener otro número diferente de cinco en esa tirada, entonces $P_{(5)}$= 1/6, y $P_{(no\ 5)}$= 5/6. Generalizando, podemos decir que para todo suceso A existe su complemento no A, que se simboliza $\bar{A}$.

Es importante entender que para todo evento que podamos definir como favorable, existen otros que no lo son en el conjunto del espacio muestral. Poder definir tales eventos es tan importante como identificar los eventos favorables. Entonces, por

[4] Paenza, A. (2008) *Matemática... ¿estás ahí?* Buenos Aires: Siglo XXI y Universidad Nacional de Quilmes.

definición se dice que A y $\bar{A}$ son mutuamente excluyentes. De esto se deduce la regla de los complementos:

Regla de los complementos
$P\,(A) + P(\overline{A}) = 1$
$P\,(A) = 1 - P(\overline{A})$
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Veamos un ejemplo sencillo del uso de la regla de los complementos: en Córdoba Capital el 88,2% de los docentes de primaria son mujeres, ¿cuál es la probabilidad de encontrar a un hombre si seleccionamos un individuo al azar de esa población?

P(M)= 0.882

P($\overline{M}$)= 1-0.882= 0.118

Damos por sentado que en la población de docentes cada maestro o bien es varón o bien mujer, por ello en este caso decimos que el complemento de docente mujer es un docente varón.

Otro ejemplo: en una encuesta a docentes de 25 a 55 años de edad, el 42% dice haber tenido una experiencia de agresión por parte de un padre, ¿cuál es la probabilidad de seleccionar un individuo que no hubiera tenido ninguna experiencia de esa naturaleza?

$P\,(agresión) = 0.42$

$P\left(\overline{agresión}\right) = 1 - 0.42 = 0.58$

Si seleccionamos un alumno al azar de un colegio, ¿cuál es la probabilidad de que su cumpleaños no caiga en marzo?

$P\,(marzo) = \frac{31}{365} = 0.08$

$P\,(\overline{marzo}) = 1 - 0.08 = 0.92$

En la siguiente tabla donde se muestran alumnos de distintos años que han alcanzado dos niveles diferenciados en los exámenes de inglés. Con esta tabla usaremos las probabilidades complementarias junto con las reglas de la suma y la multiplicación.

Suficiencia Inglés	***Primer año***	***Segundo año***	
Nivel medio	35	32	67
Nivel superior	5	8	13
	40	40	80

Si es posible acceder a la información tabulada, no tendríamos problemas en calcular cualquier probabilidad, pero imaginemos que solo nos es dado conocer una parte de la información, tal como se expresa en la siguiente afirmación*: "67 alumnos de un total de 80 han alcanzado un nivel medio de idioma inglés. Del total de estudiantes evaluados la mitad cursa segundo año".* Supongamos que se nos pide conocer ¿cuál es la probabilidad de seleccionar un alumno que haya superado el nivel medio de inglés o que curse segundo año? Para resolver esta primera pregunta vamos a usar la regla de los complementos: la probabilidad de que los alumnos hayan superado algún nivel de idioma es igual a 1, por tanto, la probabilidad de encontrar un alumno que se encuentre en el nivel superior, conociendo la probabilidad de aquellos que están en el nivel medio es:

$$P_{nivel\ superior} = 1 - P_{nivel\ medio} = 1 - \left(\tfrac{67}{80}\right) = 1 - 0,8375 = 0,1625$$

Ahora debemos resolver la probabilidad de que el alumno esté cursando segundo año. Por lo que se deduce del enunciado, esa probabilidad es de ½= 0,5. Nos queda por resolver la probabilidad de que ocurran conjuntamente un alumno de nivel superior y que esté en segundo año. Basándonos en los marginales conocidos y el total, se deduce que 8 alumnos de segundo año han alcanzado el nivel superior. Esto es una probabilidad de 8/80= 0,1. Ahora estamos en condiciones de contestar la pregunta que no interesa.

$$P_{(niv\ medio\ o\ 2°\ año)} = 0,1625 + 0,5 - (0,1) = 0,5625$$

Habiendo resuelto la ecuación anterior, podríamos responder también la siguiente pregunta: ¿cuál es la probabilidad de seleccionar un alumno de primer año y que no haya alcanzado el nivel superior de idioma?

Sabemos que el complemento de los que no alcanzaron el nivel superior de idioma es aquella que corresponde a la probabilidad de que un escolar haya alcanzado el nivel medio, y esto es igual a $0,8375$. También sabemos que la probabilidad de que un alumno se encuentre cursando primer año es de ½. Entonces, la probabilidad buscada es igual a:

$$P_{(1°\ año\ y\ niv\ medio)} = 0,8375 * 0,5 = 0,41875$$

Complemento y probabilidad condicional: la probabilidad de "uno al menos"

En ciertas ocasiones es posible combinar el cálculo de probabilidades, tal el caso en que deseamos conocer la probabilidad de obtener al menos un evento favorable. Supongamos que lanzamos tres dados, ¿cuál es la probabilidad de obtener al menos un número par? Sabemos desde ya que la probabilidad de obtener un número par en la tirada de un dado es 3/6 o 1/2.

Para conocer la probabilidad de al menos un número par, debemos definir su complemento, esto es, la probabilidad de que ningún número salga par. Por la ley de los complementos, la probabilidad de uno al menos queda definida como sigue:

$P(_{uno\ al\ menos}) = 1 - P(_{ninguno})$

En el ejemplo esto se calcula de la siguiente manera:

$P(_{ningún\ dado\ par}) = ½ * ½ * ½ = 0.5 * 0.5 * 0.5 = 0.125$

$P(_{al\ menos\ uno\ par}) = 1 – 0.125 = 0.875$

Entonces, la probabilidad de que en el lanzamiento de tres dados uno al menos de cómo resultado un número par es de 0.875. Cabe destacar que: a) la probabilidad de uno al menos significa la probabilidad de uno o más y, b) su complemento es la probabilidad de ninguno.

Podemos ver también qué tan frecuente son las coincidencias, generalizando la regla de la probabilidad de uno al menos. Veamos el siguiente ejemplo: Cacho y Martita fueron invitados a una fiesta de fin de curso donde había en total 23 personas. En un balcón estaban charlando Cacho, Martita y otros dos invitados. En un momento dado de la conversación Cacho dijo que era del signo piscis, Martita sorprendida dijo que ella también era del signo piscis. Cacho le preguntó a Martita cuándo cumplía los años, y ella respondió que el 23 de marzo, Cacho sorprendido dijo que él también cumplía los años el 23 de marzo. Cacho y Martita no pudieron creer que aquel encuentro hubiera sido casual, pensaron en cambio que fue producto del destino y que estaban elegidos el uno para el otro. Martita y Cacho comenzaron a mirarse tiernamente y el amor estaba a punto de resplandecer entre esas dos almas. Sin embargo, uno de los compañeros presente en el balcón era un aficionado a las estadísticas e hizo el siguiente razonamiento: si cuatro personas acaban de conocerse, ¿qué probabilidad hay de que al menos dos de ellas sean del mismo signo zodiacal? Sabemos que existen 12 signos del zodíaco, por tanto, la probabilidad de que dos personas no coincidan en el mismo signo sería 11/12 o 0.916, dado que en solo un caso estas dos personas coincidirían en su signo. Si sumamos la tercera persona, tenemos que ésta puede coincidir con una u otra de las dos anteriores, de modo que existe una probabilidad de 10/12 o 0.833 de que las tres no coincidan en su signo. Cuando consideramos la cuarta persona, tenemos que ésta puede coincidir con al menos una de las tres anteriores en su signo del zodíaco, por lo cual la probabilidad de que no coincida con ninguna es de 9/12 o 0.75. Ahora bien, para conocer la probabilidad de que al menos dos de las cuatro personas coincidan en el signo del zodíaco, debemos multiplicar estas probabilidades y restarla de la unidad; esto es:

$$P\,(_{no\ coincidencias}) = 0.916 \times 0.833 \times 0.75 = 0{,}5722$$

Luego;

$P_{(coincidencias)}$=1 - 0,572271= 0,4277

Luego de los cálculos, el compañero, que no había sido flechado por el amor esa noche, prosiguió: vemos que esta probabilidad se acerca a 1/2 o 0.5, y por lo tanto que al menos dos de cuatro personas coincidan en el signo del zodíaco no es tan extraño.

Martita y Cacho comenzaron a mirar a su compañero con desconfianza y agregaron que puede que dos personas coincidan en el signo del zodiaco "¡pero en el mismo día del cumpleaños! ¡Vamos, eso no puede ser tan frecuente!". El aficionado a las estadísticas continuó su razonamiento: si tomamos 23 personas al azar que es la cantidad de gente que hay en esta fiesta; ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos de ellas coincidan en su cumpleaños? Bien, debemos seguir el mismo procedimiento de cálculo anterior, pero esta vez multiplicando las siguientes fracciones:

$$\frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \times \frac{361}{365} \cdots \frac{342}{365}$$

El resultado de esta multiplicación menos 1 nos da la probabilidad buscada, que es… hizo varias operaciones con su teléfono y ofreció el resultado: esa probabilidad es igual a 0,5073, ligeramente mayor que 1/2. Por lo tanto, tampoco es tan extraño que ustedes compartan el mismo día de cumpleaños, es más, me atrevería a decir que en realidad comparten el mismo signo zodiacal porque comparten el mismo día del cumpleaños. Se entiende ¿verdad?.

Al final de la fiesta Cacho y Martita habían sido flechados por el amor a primera vista y por la conjunción de los astros… Ah, y a su compañero lo echaron de la fiesta por amargo. FIN!

Principio de indeterminación

Existe una conocida regla en la asignación de probabilidades que se basa en el principio de indeterminación. En términos sencillos, este principio dicta que, si no conocemos absolutamente nada del fenómeno que estamos estudiando, y necesitamos asignarle un valor de probabilidad de ocurrencia, el valor más conservador que deberíamos utilizar es 1/2, o 0.5. Por ejemplo, supongamos que se nos informa que en una escuela hay 100 personas reunidas y no se nos permite mirar dentro de la escuela. Si debemos estimar la proporción de hombre y mujeres, nuestra mejor predicción ante la incertidumbre será dar un valor igual a hombres y mujeres; esto es, 50 hombres y 50 mujeres. Así la probabilidad de extraer aleatoriamente un individuo de la escuela y que éste sea hombre se ajusta a P=0,5.

Podemos extender este principio si contamos con información extra de la alguna variable que afecta a los individuos empleando siempre la repartición proporcional. Entonces, imaginemos ahora que se nos informa que de las 100 personas reunidas en la escuela algunas son niños, otras son jóvenes, otros tantos adultos y el resto ancianos. Nuestra mejor suposición será repartir proporcionalmente la cantidad de individuos entre esas cuatro categorías y entonces diremos que hay, 25 niños, 25 jóvenes, 25 adultos y 25 ancianos. La probabilidad de extraer un individuo de la escuela y que este sea un adulto es de ¼ (P=0,25).

El principio de indeterminación es una forma conservadora de asignar probabilidades que tiende a minimizar el error de estimación; pero esto no quiere decir que funciona cada vez que se la aplica. Por ejemplo, puede suceder que las 100 personas reunidas en una escuela sean los miembros de un colegio para mujeres, para lo cual nuestra estimación bajo incertidumbre de mitad varones mitad mujeres, sería completamente errónea.

Martin Gardner[5] ilustra sobre la paradoja del complemento, cuando se la usa bajo el principio de indeterminación. Digamos que estamos interesados en saber si hay vida en otro planeta dentro de nuestra galaxia. Puesto que ésta es tan vasta, no sabríamos con certeza cuál es la probabilidad real de que efectivamente exista vida más allá de la tierra. Podríamos entonces preguntarnos: ¿cuál es la probabilidad de que exista alguna forma de vida animal?, o bien ¿cuál es la probabilidad de que exista alguna forma de vida vegetal?, o bien ¿cuál es la probabilidad de que exista alguna forma de vida elemental como virus o bacterias? Puesto que no sabemos nada, procedemos a dar las siguientes probabilidades en cada caso, siguiendo el principio de indeterminación:

a) probabilidad de que no exista alguna forma de vida animal= ½=0.5.

[5] Gardner, M., & Bou, L. (1983). Aja! Paradojas: paradojas que hacen pensar.

b) probabilidad de que no exista alguna forma de vida vegetal= ½=0.5.

c) probabilidad de que no exista alguna forma de vida elemental como virus o bacterias= ½=0.5.

Nótese que en cada caso damos la misma probabilidad de que exista o no exista algún tipo de vida. Luego, si multiplicamos esas probabilidades tenemos que la probabilidad de que no haya ningún tipo de vida como la que se menciona es:

$$P_{(no\ vida)} = (0,5)^3 = 0,125$$

Entonces, la probabilidad de que si haya algún tipo de vida resulta ser:

$$P_{(vida)} = 1 - 0,125 = 0,875$$

Dada esta probabilidad costaría trabajo permanecer escéptico a la idea de que los extraterrestres no existen. Aquí el error no está en el cálculo de probabilidades sino en que se considera que las formas de vida tal como se mencionan son independientes unas de otras, cuando en realidad la pregunta que contiene a todas ellas sería ¿cuál es la probabilidad de que exista alguna forma de vida más allá de nuestro planeta? Entonces, por el principio de indeterminación, esa probabilidad queda fijada en ½, independientemente de cómo estemos preguntando.

Probabilidad condicional

Ya hemos mencionado algo de la probabilidad condicional en los ejemplos anteriores, ahora cabe definirla mejor. Diremos entonces que: la probabilidad condicional de un suceso es una probabilidad que se obtiene con la información adicional de otro suceso que ya ocurrió. La probabilidad condicional se simboliza de la siguiente manera: $P\ (A)$ que representa la probabilidad del suceso B dado que A ya ocurrió; en términos más sencillos se habla de la probabilidad de B dado A. La probabilidad condicional se obtiene resolviendo la siguiente fórmula:

$P\ (AyB) = P\ (A) \times P(B|A)$. Por lo tanto, $P\ (B|A) = \frac{P(AyB)}{P(A)}$

Veamos algunos ejemplos. Un profesor de un curso de fotografía par alumnos de secundario explica a sus alumnos que una cámara fotográfica saca fotos con dos matices diferentes, sea que use un filtro rojo o que no use ningún filtro. Al momento de la evaluación, la nitidez de la fotografía obtenida se clasifica como correcta si no tiene límites borrosos, o borrosa si carece de nitidez en alguno de los límites. Luego de recibir 190 fotos de sus alumnos, se desea conocer cuál es la probabilidad de obtener una fotografía borrosa, puesto que se usó el filtro rojo. Para resolver este problema construimos la siguiente tabla:

	Sin Filtro	**Filtro Rojo**	
Correcta	30	70	100
Borrosa	65	25	90
	95	95	190

La probabilidad buscada se calcula de la siguiente manera:

$$P_{(filtro\ rojo)} = \frac{P_{(filtro\ rojo\ y\ borroso)}}{P_{(filtro\ rojo)}} = \frac{\frac{25}{190}}{\frac{95}{190}} = \frac{0.13}{0.5} = 0,26$$

Nótese en este ejemplo que estamos buscando la probabilidad de obtener una fotografía borrosa dado que se sabe que se usó un filtro rojo. Si se invierten los términos de la condicionalidad, la probabilidad obtenida es diferente. Es decir, si preguntamos cuál es la probabilidad de que una fotografía haya sido tomada con filtro rojo, puesto que sabemos que es borrosa, debemos utilizar otro denominador en la ecuación:

$$P_{(borroso)} = \frac{P_{(filtro\ rojo\ y\ borroso)}}{P_{(borroso)}} = \frac{\frac{25}{190}}{\frac{90}{190}} = \frac{0.13}{0.47} = 0.27$$

Dada las frecuencias de la tabla, vemos que la diferencia en ambas probabilidades es pequeña, lo cual suele conducir a un error: pensar que es lo mismo la probabilidad de *A* dado *B*, que la probabilidad de *B* dado *A*.

Se puede ilustrar lo anterior con el siguiente ejemplo: La náusea y el dolor de cabeza son síntomas que están muy presentes antes de los exámenes, tanto en los enfermos como en los que buscan una excusa porque no estudiaron. Se envía a los alumnos al recientemente creado departamento médico y se construye una tabla con las frecuencias de aparición de los síntomas en las dos condiciones. Entonces, puesto que una paciente manifiesta una enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que tenga además náuseas? Es decir, queremos conocer la probabilidad de que la paciente tenga náuseas, puesto que tiene una enfermedad.

	Náusea	**Dolor de cabeza**	
Enfermedad	2	40	42
Excusa	3	85	88
	5	125	130

$$P_{(enfermedad)} = \frac{P_{(nausea\ y\ enfermedad)}}{P_{(enfermedad)}} = \frac{\frac{2}{130}}{\frac{42}{130}} = \frac{0.01}{0.32} \cong 0,03$$

En este caso, la probabilidad de que la paciente tenga náuseas puesto que tiene una enfermedad es baja. En cambio, si hubiéramos preguntado cuál es la probabilidad de que una paciente tenga una enfermedad puesto que tiene nauseas, la probabilidad buscada debería calcularse de la siguiente manera:

$$P_{(náusea)} = \frac{P_{(nausea\ y\ enfermedad)}}{P_{(náusea)}} = \frac{\frac{2}{130}}{\frac{5}{130}} = \frac{0.01}{0.03} \cong 0.33$$

En conclusión, la probabilidad de que alguien tenga náuseas puesto que tiene una enfermedad es mucho más baja que la probabilidad de que alguien tenga una enfermedad puesto que tiene nauseas, dado que en este último caso la probabilidad es de 1/3. Conociendo esta diferencia en el cálculo de probabilidades condicionales, es posible indagar sobre un mismo fenómeno desde dos perspectivas diferentes. Por ejemplo, podemos sospechar que las personas con estudios universitarios tienen más facilidad de conseguir empleo que aquellas que solo terminaron la secundaria. Podemos dilucidar esta sospecha trabajando desde el enfoque de las probabilidades condicionales. Supongamos entonces que tenemos la siguiente tabla, donde se ha cruzado información sobre la situación de empleo y el grado académico de los individuos:

	Empleado	**Desempleado**	
Universitario	130	24	154
Secundario	196	38	234
	326	62	388

Si seleccionamos al azar un individuo y este es empleado, ¿qué probabilidad hay de que tenga estudios universitarios? También podemos preguntar, ¿qué probabilidades hay de que el individuo seleccionado sea empleado, puesto que sabemos que tiene título universitario? El cálculo de ambas probabilidades es el siguiente:

$$P_{(\,empleado)} = \frac{P_{(\,universitario\ y\ empleado)}}{P_{(\,empleado)}} = \frac{\frac{130}{388}}{\frac{326}{388}} = \frac{0.335}{0.840} \cong 0.398$$

$$P_{(\,universitario)} = \frac{P_{(\,universitario\ y\ empleado)}}{P_{(\,universitario)}} = \frac{\frac{130}{388}}{\frac{154}{388}} = \frac{0.335}{0.396} \cong 0.845$$

Claramente, la probabilidad de que el individuo sea empleado puesto que ha obtenido un título universitario es más alta.

Teorema de Bayes

Cuando se cuenta con la información contenida en una tabla como la que hemos estado utilizando, es fácil calcular la probabilidad condicional de un evento, pero en el caso en que no podamos contar con una tabla de esa naturaleza, es posible recurrir al teorema de Bayes. La siguiente fórmula ilustra el procedimiento general para obtener una probabilidad condicional mediante la aplicación de este teorema:

$$P_{(A|B)} = \frac{P_{(A)} \times P_{(B|A)}}{P_{(A)} \times P_{(B|A)} + P_{(\bar{A})} \times P_{(B|\bar{A})}}$$

Veamos un ejemplo que ilustra la aplicación del teorema. Supongamos que en una escuela se les permite a los alumnos elegir la modalidad de examen en el final de la materia filosofía, siendo las modalidades Oral o Escrita. Por los datos recogidos, se sabe que el 60% de los alumnos eligen la forma oral, y el 40% restante elige la forma escrita. Se sabe además que el porcentaje de aprobados en la modalidad oral es de 35%, mientras que el porcentaje de aprobados en la modalidad escrita es de 25%. Podemos preguntarnos: si se selecciona al azar un alumno que ha reprobado, ¿cuál es la probabilidad de que éste haya rendido en la modalidad oral? Reemplazando los términos de la fórmula se tiene que:

$$P\ (reprobado) = \frac{0.6 \times 0.25}{0.6 \times 0.25 + 0.4 \times 0.15} = 0,71$$

El teorema de Bayes resulta contraintuitivo en la primera mirada, pero es sumamente útil en la teoría de probabilidades ya que nos permite comprender la relación que existe entre los eventos que sucedieron y los que pueden suceder. El enunciado del problema planteado está dado en porcentajes, de modo que como recurso didáctico vamos a construir una tabla de contingencia en la que podamos reducir el número de estudiantes a 100 y luego representarlos en un espacio condicional.

	Examen Oral	**Examen Escrito**	
Aprobados	35	25	60
Reprobados	25	15	40
	60	40	100

Habiendo reconstruido la tabla, vamos a desglosar los términos de la ecuación de Bayes. Considerando que deseamos encontrar un individuo que haya rendido el examen oral dado que sabemos que ha reprobado.

$$P\,(B) = \frac{P(A) \times P(B|A)}{P(A) \times P(A) + P(\bar{A}) \times P(B|\bar{A})}$$

$$P\,(reprobado) = \frac{P(oral) \times P(reprobado|oral)}{P(oral) \times P(oral) + P(escrito) \times P(reprobado|escrito)}$$

$$P_{(\,reprobado)} = \frac{\frac{60}{100} \times \frac{25}{100}}{\frac{60}{100} \times \frac{25}{100} + \frac{40}{100} \times \frac{15}{100}} = 0,71$$

Habíamos dicho antes que la aplicación de la fórmula de Bayes resulta útil en el caso en que no es posible contar con la información completa de la tabla de contingencia. De haber contado con tal información, solo hubiera bastado poner en relación la cantidad de aprobados y reprobados, sólo de aquellos que rindieron el examen oral. Esto es:

$$P\,(reprobado) = \tfrac{25}{35} = 0,71$$

Veamos otro ejemplo: para estudiar ingeniería un aspirante puede rendir el examen de ingreso en la Universidad Tecnológica o en la Universidad Nacional. Se sabe que el 30% de los aspirantes dan examen en la primera y el 70% restante en la segunda.

Además, se conoce que el porcentaje de aplazo en la Universidad Tecnológica es del 43%, mientras que en la Universidad Nacional es del 20%. Sabiendo que un alumno fue reprobado, ¿qué probabilidad existe de que ese mismo alumno haya rendido en la universidad nacional? Resolviendo por el teorema de Bayes, tenemos que:

$$P\ (aplazo) = \frac{0.7 \times 0.2}{0.7 \times 0.2 + 0.3 \times 0.43} = 0.52$$

El riesgo relativo y el cociente de probabilidades son de uso común en la prueba de medicamentos y tratamientos. Por ejemplo, en los prospectos aparece una advertencia sobre los efectos secundarios de un medicamento y suele indicarse en qué casos o con qué frecuencia pueden aparecer síntomas no deseados al tomarlos. Los medicamentos suelen probarse en ensayos clínicos, donde se administra el medicamento a un grupo de sujetos que se denomina experimental, mientras que otro grupo de sujetos recibe un tratamiento similar, pero el medicamento administrado no contiene el principio activo, este último grupo recibe el nombre de placebo.

Supongamos que se está estudiando el efecto secundario malestar estomacal en un antigripal. En el grupo experimental participaron 734 sujetos, de los cuales 117 reportaron malestar estomacal. En el grupo placebo participaron 725 sujetos, de los cuales 29 reportaron malestar estomacal. Con estos datos podemos contestar la siguiente pregunta: ¿cuál es el riesgo relativo de un síntoma no deseado como el malestar estomacal en personas tratadas con el medicamento antigripal? Si se denota como P(e), a la proporción de sujetos con malestar estomacal en el grupo experimental y como P(p) a la proporción de sujetos con malestar estomacal en el grupo placebo, la medida de riesgo relativo resulta del cociente:

$$Riesgo\ relativo = \frac{P(e)}{P(p)} = \frac{0{,}159}{0{,}04} = 3{,}975$$

Otra medida similar y más fácilmente interpretable es el cociente de probabilidades, que es el cociente de las posibilidades a favor de un malestar estomacal en el grupo experimental, entre las posibilidades a favor de un malestar estomacal en el grupo placebo, el cual se calcula de la siguiente manera:

$$Cociente\ de\ posibilidades = \frac{\dfrac{P_{(e)}}{\left(1 - P_{(e)}\right)}}{\dfrac{P_{(p)}}{\left(1 - P_{(p)}\right)}} = \frac{\dfrac{0.159}{(1 - 0.159)}}{\dfrac{0.04}{(1 - 0.04)}} = 4.543$$

Aunque ahora no abundaremos en la interpretación de estos resultados, diremos brevemente que la probabilidad de que una persona que toma el medicamento antigripal tiene mayores chances de tener malestar estomacal como síntoma secundario indeseado, o bien que las chances de padecer un malestar estomacal si se ha tomado un medicamento antigripal son cuatro y media veces mayores.

En educación, el cociente de posibilidades suele utilizarse para estimar las probabilidades de ciertos eventos sobre un mismo espacio muestral. La fórmula empleada es la que hemos mostrado, con la variante de que se trata de dos muestras independientes, pero de la misma población. Veamos un ejemplo simplificado de un posible estudio de cohorte: en una carrera universitaria, ingresan a primer año un total de 1500 estudiantes, de los cuales finalizan 720. Esto representa un desgranamiento del 52% de la población ingresante en el período estimado de finalización. De la población egresante se desea conocer el cociente de posibilidades entre aquellos estudiantes cuyos padres han obtenido títulos superiores y en los que solo uno o ninguno ha obtenido ese grado académico. Debe notarse que aquí no estamos trabajando con dos poblaciones diferentes como en el ejemplo del grupo experimental y placebo, por tanto, el cociente de posibilidades se calcula sobre las proporciones resultantes de dividir en dos la población original. Para continuar con este ejemplo, diremos que, de los 720 egresados, 550 tienen ambos padres con títulos en educación superior. Entonces, las probabilidades buscadas serán:

$P(_{ambos\ padres\ con\ educ\ sup})=550/720=0{,}763$

$P(_{uno\ o\ ningún\ padre\ con\ educ\ sup})=170/720=0{,}236$

Nótese que, por tratarse de la misma población, éstas son probabilidades complementarias. Por tanto, el cociente resultante es el siguiente:

$$Cociente\ de\ posibilidades = \frac{\dfrac{0.764}{(1-0.764)}}{\dfrac{0.236}{(1-0.236)}} = 10,45$$

Considerando que este ejemplo es una simplificación de la realidad, si se diera un caso como el que hemos planteado en el ejemplo, diríamos que por cada diez estudiantes que finalizan una carrera universitaria, solo uno de ellos proviene de una familia donde uno (o ninguno) de los padres obtuvo un título en estudios superiores.

Ley de los grandes números

Teorema de la probabilidad

En la vida cotidiana existe una idea común que dice que un suceso ocurrirá, aun cuando sus chances sean bajas, si se intenta muchas veces. Esto es lo que da sentido a los juegos de azar. Los apostadores esperan contar con la suerte suficiente para acertar al número en la ruleta, pero otras veces insisten en seguir apostando al mismo número con la esperanza que a la larga el número finalmente salga.

Estas intuiciones, erróneas en algunos casos, tiene su origen la teoría de la probabilidad, especialmente en un conjunto de teoremas que se conocen por su denominación de Teoría de los Grandes Números. Enunciaremos uno de estos teoremas en forma general para ver de qué se trata:

LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS: ***Conforme un procedimiento se repite una y otra vez, la probabilidad de frecuencias relativas de un suceso, tiende a aproximarse a la probabilidad real.***

En este caso se entiende que, en un espacio de probabilidades, se espera que todos los eventos ocurran en la medida que aumente el número de ensayos en la serie. Imaginemos que una persona compra un billete de lotería, su probabilidad de acertar es muy baja, pero si al mismo tiempo muchas personas compran billetes de loterías, las chances de que al menos una acierte es alta. Nótese que la cantidad de ensayos para la ocurrencia de un evento, puede aumentar sea que la persona acumula números de lotería o que muchas personas compran solo uno. Quizás esto último contribuya a la falsa ilusión de que en los juegos de azar es relativamente fácil obtener un premio. Volveremos sobre esto cuando analicemos la falacia del jugador.

La ley de los grandes números también aplica los promedios. Se sabe que la distribución de promedios de sucesivas muestras aleatorias de igual tamaño extraídas de una población, convergen en el promedio de dicha población cuando la varianza es finita. De esto se desprende el teorema del límite central cuyo corolario puede expresarse de la siguiente manera: el promedio de una muestra al azar de una población tenderá a estar cerca de la media de la población completa. En los estudios con variables reales, la condición de varianza finita es importante porque la distribución de las diferencias estandarizadas de los promedios muestrales convergen en una variable aleatoria normal estándar.

La falacia del jugador o falacia de Montecarlo, es un error de atribución o uso de la ley de los grandes números, especialmente cuando se considera el fenómeno de convergencia en variables aleatorias. Proponemos un sencillo juego que consiste en lanzar una moneda al aire y adivinar si está saldrá cara o cruz. Las probabilidades para ambos resultados es la misma, es decir ½. Al hacer la primera apuesta se sabe que las chances de perder o ganar son iguales, por lo tanto, el jugador no arriesgará mucho. Si el juego continúa, las caras y cruces se acumularán en rachas. Supongamos que se suma un nuevo jugador y se encuentra con la siguiente racha que es el resultado de la serie caras y cruces:

CCXCXXCCXCXCXXXXXX_?

Este nuevo jugador, se pregunta ¿cuál es la chance de que en la siguiente tirada salga una cara?, y razona de la siguiente manera: puesto que los resultados de un lanzamiento de moneda tienen la misma probabilidad para ambos resultados, y dado que en las últimas seis tiradas se obtuvieron solo cruces, lo más probable es que se compensen los resultados y el siguiente evento sea una cara. Aunque la idea suena plausible en realidad es una falacia lógica, pues implica dejar de considerar que los eventos son independientes y por tanto ahora se afectan entre sí. En otras palabras, es una mala interpretación de la idea de que, en un espacio finito de resultados, a largo plazo los eventos alcanzarán las probabilidades asignadas. La falacia lógica reside en considerar cuántos eventos representan el largo plazo, y en teoría de probabilidad eso ¡puede ser infinito!

Se ha reconocido que la falacia del jugador reside en el siguiente sesgo cognitivos: un evento en una sucesión aleatoria, tiene más probabilidad de ocurrir porque no ha ocurrido durante cierto período. Cuando se trata de eventos independiente, como es el caso del lanzamiento de una moneda, el resultado siguiente no depende del resultado anterior, por lo tanto, conocer cuál es la probabilidad de ocurrencia de los eventos, no nos permite saber el resultado de un evento particular.

Probabilidad y Teoría de Conjuntos

La teoría de conjuntos es un medio útil para representar probabilidades. Hasta ahora sólo hemos mencionado de manera esporádica algunas propiedades de la misma. En este apartado describiremos las utilidades de los conjuntos para representar la teoría de la probabilidad. Comenzaremos con algunas definiciones básicas.

CONJUNTO: ***colección de objetos bien definida.***

Lo importante en este caso es que la colección de objetos que forman el conjunto no tenga ambigüedades. Por ejemplo, si decimos "los universitarios", estamos definiendo un conjunto de manera ambigua, pues no sabemos si se trata de estudiantes o de libros. En cambio, si decimos "estudiantes universitarios", hemos avanzado un gran paso dado que ahora nuestro conjunto resulta definible. Aún más, si decimos "Estudiantes universitarios inscriptos en la carrera de Ciencias de la Educación de la FFyH en el año 2018", podemos hacer ese conjunto numerable. Es decir, mientras más específica sea la definición del conjunto, más fácil será ordenar sus elementos.

La definición de un conjunto no debe ser ambigua, porque una propiedad de un elemento del conjunto puede ser inclusivo para ciertos conjuntos y exclusivos para otros. Debe entenderse inclusivo como "estar incluido en" y exclusivo como "estar excluido de". Si defino un conjunto como "Estudiantes universitarios inscritos en la carrera de Ciencias de la Educación", toda persona que se haya inscripto en esa carrera quedará contenida en el conjunto, y todos aquellos que no lo hayan hecho quedarán excluidos. Esto nos lleva a otra definición:

ELEMENTOS DEL CONJUNTO: ***son elementos de un conjunto todos objetos que pertenecen a ese conjunto.***

De esta manera, todo conjunto queda especificado por su definición y por los elementos numerables que lo componen. Veremos que, cuando la última condición no se satisface, estamos frente a un conjunto vacío. Por lo que hemos dicho hasta aquí, deducimos que la pertenencia a un conjunto puede definirse por dos métodos: a) enumeración, o b) propiedad descriptiva.

Como su nombre lo indica, el método de enumeración enumera todos los elementos que se encuentran en el conjunto. A continuación, definiremos el conjunto N y V por enumeración.

N= {1, 3, 5, 7, 9}   V= {a, e, i, o, u}

Cuando se procede por enumeración para definir un conjunto, los elementos del mismo quedan encerrados entre llaves o corchetes. El método de enumeración es apto para los casos en que los elementos del conjunto no son cuantiosos, o cuando no es posible formular sin ambigüedad las propiedades de los elementos.

El método de propiedad descriptiva se utiliza cuando los elementos del conjunto tienen una propiedad que les da pertenencia. En tal caso los conjuntos N y V quedarían definidos de la siguiente manera:

N= {*x* | *x* es un número entero positivo impar menor que 10}

V= {*x* | *x* es una vocal del alfabeto latino}

Las expresiones iniciales de *x* seguida de barra y seguida de *x*, indica para todo elemento del conjunto, sea *x* miembro de ese conjunto. Esta expresión se resume diciendo *x* tales que; entonces para el conjunto N su lectura es: "N es el conjunto que se compone de todos los elementos *x* tales que *x* es un número entero positivo impar menor que 10". De la misma manera decimos que "V es el conjunto que se compone de todos los elementos *x* tales que *x* es una vocal del alfabeto latino".

Toda vez que hayamos definido un conjunto, podremos denotar si un elemento pertenece a ese conjunto. La expresión que se usa para ello es $\in$, que se lee como "pertenece". Entonces la expresión $3 \in N$, indica que 3 es un número que pertenece al conjunto N. En el caso en que un elemento no pertenezca al conjunto, la expresión que se usa es $\notin$ "no pertenece", por ejemplo, $e \notin N$ indica que la vocal e no es parte de este conjunto.

Existe una notación para indicar la cantidad de elementos que tiene un conjunto. En general, la expresión es n(B). Entonces, si consideramos los conjuntos N y V, esta expresión toma la siguiente forma:

n(N)= 5

n(V)= 5

Aunque no son los mismos, ambos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos.

El conjunto universal: o simplemente universo, que se denota con U, es el conjunto que contiene todos los elementos. Así, cuando definimos el conjunto de “todos los estudiantes inscriptos en la carrera de Ciencias de la Educación”, estamos frente a un conjunto universal en el que se hallan las clases particulares. Entonces, en la expresión todos los estudiantes se incluyen los varones y mujeres, judíos y católicos, etc. y además todas las combinaciones entre ellos.

Complemento de un conjunto: sea S un conjunto dado, existe el conjunto constituido por todos los elementos del conjunto universo U que no pertenecen a S, es decir, son su complemento. A ese conjunto se lo denota con S´, que se lee como “S prima”. Entonces, si el conjunto universal U son “todos los estudiantes inscriptos en la carrera de Ciencias de la Educación”, y S es un conjunto compuesto por “todos los varones estudiantes de la carrera de Ciencias de la Educación”, contenido en U. Su complemento natural es: “todas las mujeres estudiantes de la carrera de Ciencias de la Educación”.

Aunque estamos intentando ser precisos con las definiciones, debe subrayarse desde ya que las expresiones usadas contienen cierta ambigüedad. Esto pasa toda vez que se emplea el lenguaje coloquial. El lenguaje matemático tiene la ventaja de evitar esas ambigüedades. Véase el siguiente ejemplo con conjuntos definidos por enumeración:

U= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

N= {1, 3, 5, 7, 9}

N´= {2, 4, 6, 8, 10}

Existen caso de conjuntos que no contienen ningún elemento. Se denomina conjunto vacío o nulo. Simbólicamente se representa de la siguiente manera:

$s = \varnothing$

Un conjunto vacío resulta de su propia definición, por ejemplo, si defino el siguiente conjunto: "todos los dólares que tengo en mi caja de ahorro" es sin lugar a dudas un conjunto vacío. También pueden resultar de la representación de operaciones de conjuntos, las cuales veremos más adelante.

Hicimos notar que el conjunto Universal contiene a todos los elementos y que estos elementos pueden dividirse en clases particulares. Estas clases son conjuntos dentro del conjunto Universal. Siguiendo este razonamiento tenemos que un conjunto puede contener a otros conjuntos, con lo que llegamos a la definición de subconjunto.

SUBCONJUNTO: ***si todos los elementos de un conjunto, son también elementos de otro conjunto mayor, entonces el primero es un subconjunto del segundo.***

Por ejemplo, el conjunto A es subconjunto de B, si y sólo si, todos los elementos del conjunto A lo son también de B. En notación simbólica esto se representa de la siguiente manera:

$A \subset B$

Tomemos el conjunto N con el que hemos estado trabajando.

N= {1, 3, 5, 7, 9}

Definimos un nuevo conjunto.

M= {5, 7, 9}

Entonces

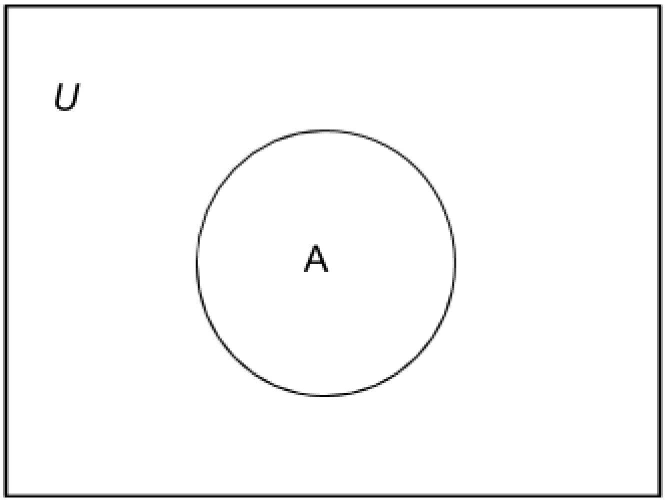
$M \subset N$

Podríamos definir la relación de subconjunto diciendo que M es subconjunto de N en tanto está compuesto por números enteros impares iguales y mayores que cinco y menores que diez.

En teoría de conjunto y por definición, el conjunto vacío es un subconjunto de todo conjunto.

Diagramas de Venn

John Venn fue un matemático británico especializado en lógica. Ideó un método para representar proposiciones y silogismos y comprobar su validez. Conocido en su momento como método de diagramas, se popularizó a otros campos de las matemáticas, especialmente a la teoría de conjuntos donde se lo conoce como diagramas de Venn. Estos permiten representar visualmente las operaciones realizadas con conjuntos. Los diagramas son simples y representan conjuntos mediante rectángulos, círculos y ocasionalmente elipses.



En esta figura se representa con un rectángulo al conjunto universal. En el centro un conjunto que es A, representado con un círculo. Si volvemos al conjunto universal que hemos usado como ejemplo: U= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, tenemos que cualquier combinación de números de U puede ser un conjunto. Si definimos un conjunto A={1, 2, 3}, se cumple que $A \subset U$, tal como lo describe el diagrama.

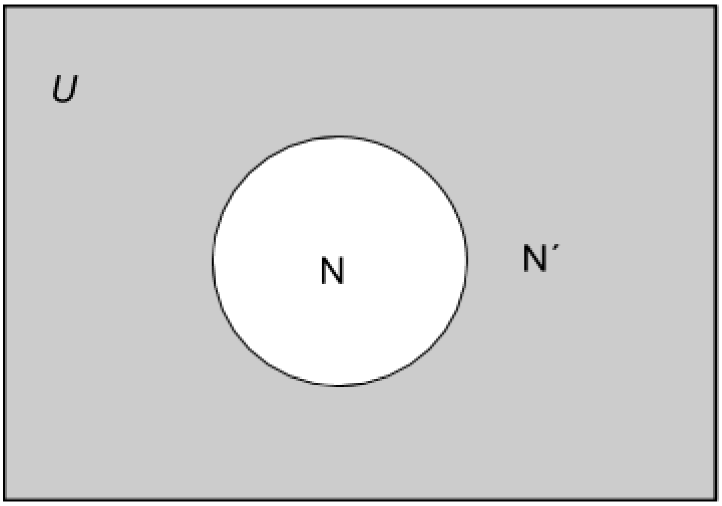
Mediante un diagrama de Venn podemos definir la relación de complemento. Recordemos que hemos ejemplificado anteriormente esta situación mediante los siguientes conjuntos

U= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

N= {1, 3, 5, 7, 9}

N´= {2, 4, 6, 8, 10}

En un diagrama de ven la relación de complemento se grafica de la siguiente manera:



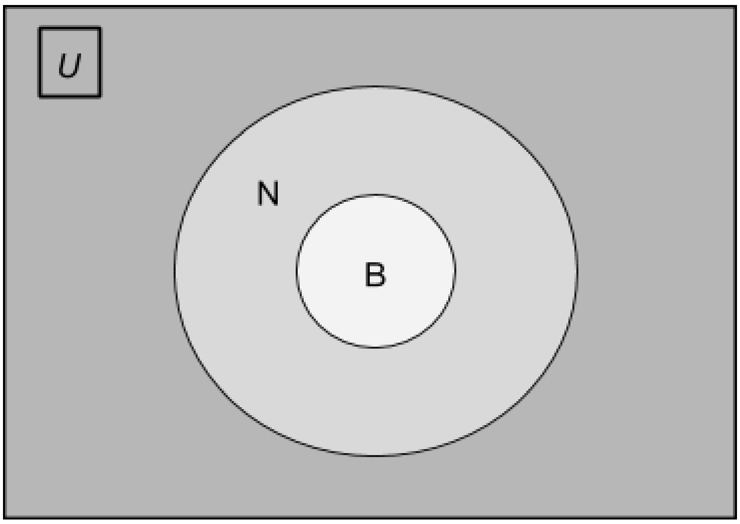
Mediante los diagramas de Venn podemos representar las relaciones de subconjunto. Tomemos los siguientes conjuntos:

U= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

N= {1, 3, 5, 7, 9}

B= {1, 5, 9}

Expresado de manera simbólica tenemos que: $N \subset U$; $B \subset U$; $B \subset N$. El diagrama de Venn correspondiente sería el siguiente:



Operaciones con conjuntos

De la misma manera en que se puede operar matemáticamente con números, se puede operar con conjuntos. Existe una aritmética de la teoría de conjuntos, que ha dado lugar al álgebra de conjuntos. No es intención de profundizar en esta rama de las matemáticas, aquí solo nos explayaremos sobre tres operaciones con conjuntos que, por otro lado, son las más comunes. La primera operación a la que haremos referencia es la igualdad.

IGUALDAD DE CONJUNTOS: ***dos conjuntos A y B son iguales, si y solo si, todos los elementos de A son elemento de B y, todos los elementos de B son también elementos de A.***

En los siguientes renglones propondremos dos definiciones de conjuntos por el método de propiedad descriptiva y luego veremos cuáles son sus soluciones. Luego estableceremos la igualdad entre conjuntos.

$A=\{x \mid (x-1)(x-2)(x-3)=0\}$

$B=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$

$C=\{1, 2, 3\}$

$D=\{1, 2\}$

Como puede deducirse, los elementos del conjunto C satisface las condiciones del conjunto A, a su vez los elementos del conjunto D satisfacen las condiciones del conjunto B. De esto se deduce que A=C y B=D.

Otra manera de determinar la igualdad entre dos conjuntos es que estos compartan una característica en común que puede admitir dos definiciones equivalentes. Por el método de propiedad descriptiva podremos definir los siguientes conjuntos:

E={x | x es un alumno de quinto grado de la escuela Z}

F={x | x es un alumno que rindió el examen de geografía en la escuela Z}

Si asumimos que ese examen se ha tomado en la escuela Z solo para los alumnos de quinto grado, entonces, E=F.

Es importante comprender en la igualdad de conjuntos que por distintas definiciones podemos llegar a los mismos elementos, y por tanto los conjuntos así definidos son idénticos.

La siguiente operación a la que haremos referencia es la unión de conjuntos.

UNIÓN DE CONJUNTOS: ***la unión de dos conjuntos A y B, es el conjunto formado por todos los elementos de A y de B, o bien en los dos conjuntos.***

La notación para la unión de conjuntos es la siguiente A ∪ B.

Veamos los siguientes conjuntos:

A= {1, 3, 5, 7, 9}

B= {2, 4, 6, 8, 10}

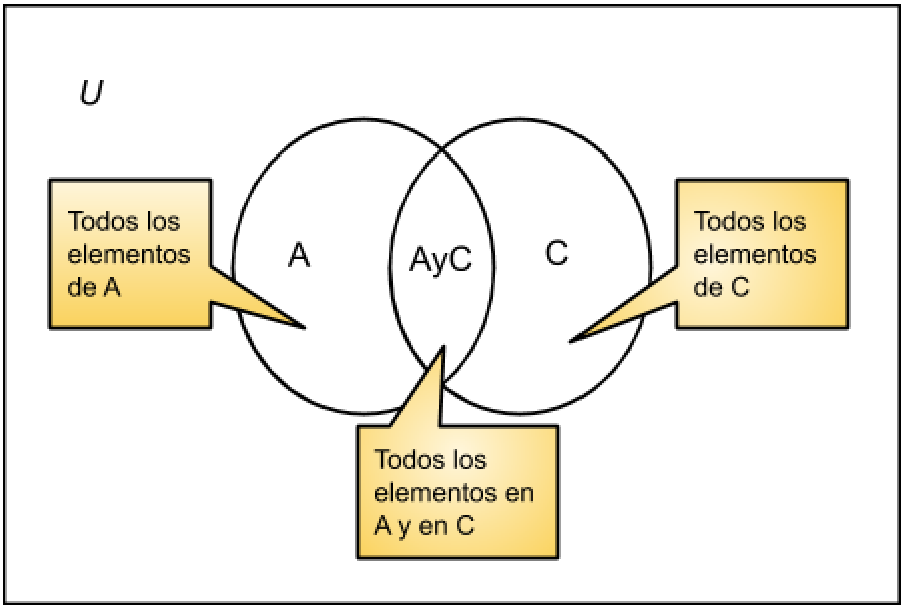
C= {1, 2, 9, 10}

a) A ∪ B= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, en este caso no hay elementos comunes entre los conjuntos A y B, por tanto, la unión de ambos da como resultado un conjunto con todos los elementos. Entonces n(A ∪ B)= 10.

b) A ∪ C= {1, 2, 3, 5, 7, 9, 10} los elementos 1 y 9 son comunes en los conjuntos A y C, por lo tanto, se listan una sola vez. Entonces n(A ∪ C)= 7.

c) B ∪ C= {1, 2, 4, 6, 8, 9, 10} en este caso también listamos los elementos 2 y 10 una sola vez. Entonces n(B ∪ C)= 7.

La unión de conjuntos representada en un diagrama de Venn es la siguiente:



Nota: La unión de cualquier conjunto con su complemento da como resultado el conjunto Universal, esto es A ∪ A'= U. A su vez, la unión de un conjunto con un conjunto vacío, da como resultado el mismo conjunto, esto es A ∪ Ø=A

La siguiente operación de conjuntos se denomina intersección y se define de la siguiente manera.

INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS*: **la intersección de los conjuntos A y B, es un conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y B, o bien a ambos.***

Intersección de conjuntos se denota con la siguiente simbología A ∩ B. Retomando los conjuntos del ejemplo anterior tenemos que:

A= {1, 3, 5, 7, 9}

B= {2, 4, 6, 8, 10}

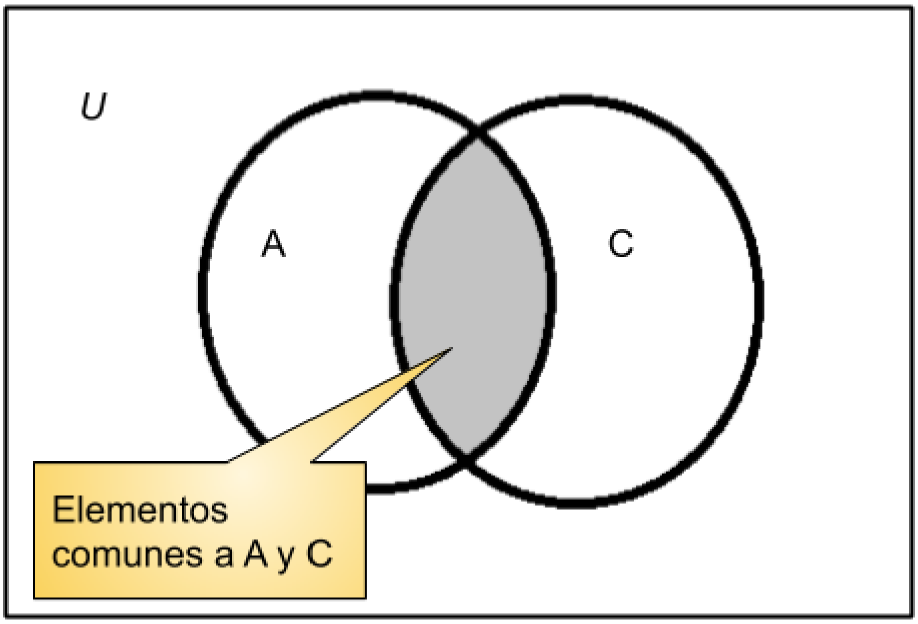
C= {1, 2, 9, 10}

a) A ∩ B= Ø, en la intersección de los conjuntos A y B no hay elementos comunes a ambos, por lo tanto, nos da un conjunto vacío.

b) A ∩ C= {1, 9} los únicos elementos comunes entre ambos conjuntos son los elementos consignados. Por lo tanto n(A ∩ C)= 2.

c) B ∩ C= {2, 10} los únicos elementos comunes entre ambos conjuntos son los elementos consignados. Por lo tanto n(B ∩ C)= 2.

La intersección de conjuntos representada en un diagrama de Venn es la siguiente:



Nota: la intersección de un conjunto con su complemento da como resultado un conjunto vacío. De este modo A ∩ A'= ∅. La intersección de un conjunto con sí mismo da como resultado el mismo conjunto (principio de igualdad), así A ∩ A= A. La intersección de un conjunto con el conjunto universal, da como resultado el mismo conjunto, entonces A ∩ U= A.

Las tablas de contingencia también representan conjuntos y, por tanto, se puede operar con ellas de la misma manera en que hemos definido la suma y la multiplicación. Retomando el ejemplo de los alumnos de intercambio que visitan una escuela y considerando la siguiente tabla, es posible definir el complemento, la igualdad, la unión y la intersección.

	Brasil	**Chile**	
Varón	5	3	8
Mujer	4	2	6
	9	5	14

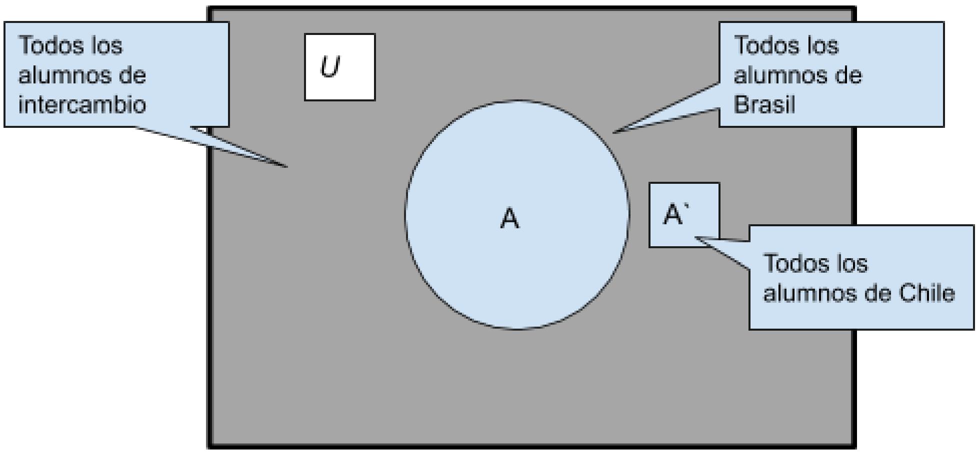
Definimos un conjunto A, sea este:

A={*x* | *x* es un alumno de intercambio oriundo de Brasil}

Su complemento en este caso, será A’ que quedará definido de la siguiente manera

A’={*x* | *x* es un alumno de intercambio oriundo de Chile}

El diagrama que representa esta condición es:

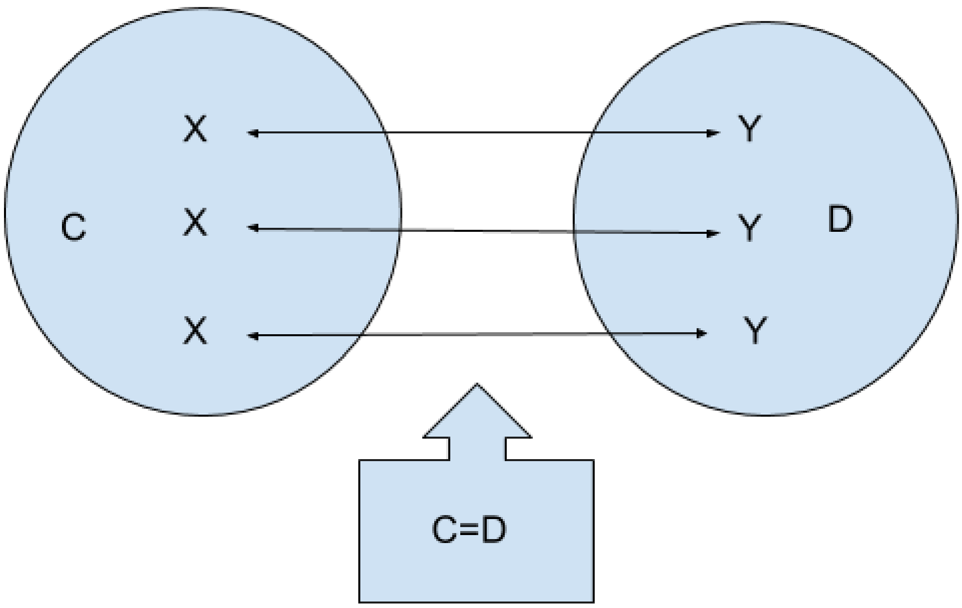


En una tabla de contingencia, sabemos que la partición en celdas resulta del cruce de las categorías de las variables, por lo tanto, la sumatoria de los marginales de fila será igual a la sumatoria de los marginales de columnas. Si Definimos los conjuntos C y D, sean estos:

C={*x* | *x* es un alumno de intercambio}

D={*y* | *y* es un varón o una mujer}

Encontramos que todos los elementos de C pertenecen a D y viceversa, con lo cual existe una relación biunívoca entre ambos. Entonces C=D.

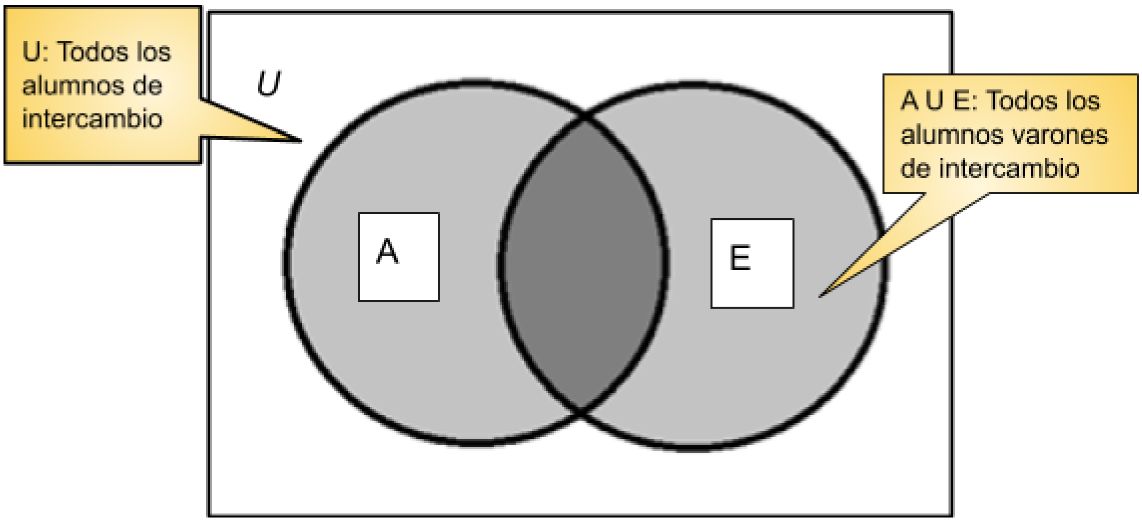


En una tabla de contingencia las categorías de filas y columnas son subconjuntos. Por lo tanto, si definimos los siguientes conjuntos:

A={x | x es un alumno varón oriundo de Brasil}

B={x | x es un alumno varón oriundo de Chile}

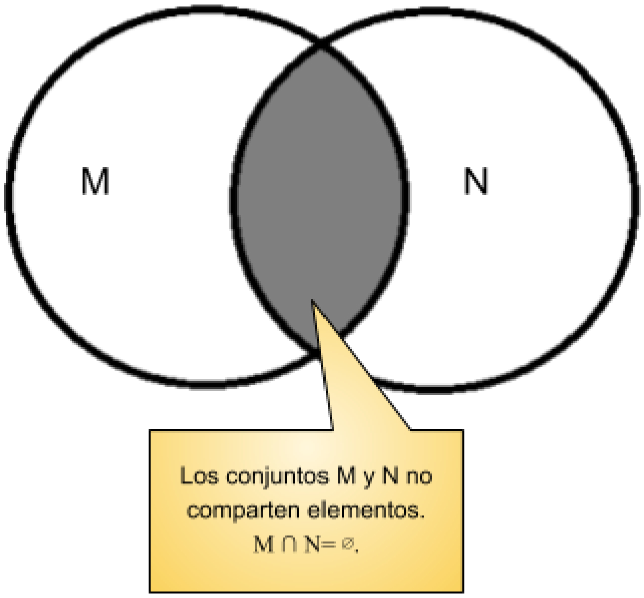
La unión de ambos resulta en el conjunto de todos los varones.



En una tabla de contingencia, las filas y las columnas se leen como eventos independientes. De este modo, la intersección de cualquier subconjunto resultante de ellas dará como resultado un conjunto vacío. Por ejemplo:

M={x | x es un alumno oriundo de Brasil}

N={x | x es un alumno oriundo de Chile}



Lo anterior es una condición que debe cumplir una tabla de contingencia al definir las categorías que ocupan filas y columnas, de allí que las celdas de las columnas representan condiciones únicas para todos sus miembros.