

TESIS CARRERA DE DOCTORADO EN CIENCIAS:
ÁREA FÍSICA

**TRANSICIONES DE FASE COSMOLÓGICAS Y
ONDAS GRAVITATORIAS**

Lic. Leonardo Leitao
Doctorando

Dr. Ariel Hugo Mégevand
Director

Marzo 2017

Grupo de Física teórica

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Nacional de Mar del Plata
Argentina

Índice de contenidos

Índice de contenidos	iii
Acerca de esta tesis	vii
1. Termodinámica, Campos, Cosmología y Ondas Gravitatorias	1
1.1. Contenido del capítulo	1
1.2. Termodinámica	1
1.2.1. Principio de mínima energía	1
1.2.2. Energía libre de Landau	3
1.2.3. Transiciones de fase	4
1.2.4. La mecánica estadística	9
1.3. Teoría de campos y potencial efectivo	11
1.3.1. Potencial efectivo a temperatura finita	11
1.3.2. Cálculo del potencial efectivo	14
1.4. Nucleación, expansión y percolación	20
1.4.1. Cosmología y espacio-tiempo	20
1.4.2. Ordenes de magnitud en la transición de fase	22
1.4.3. Encuentro de burbujas y percolación	22
1.4.4. Ritmo de nucleación	23
1.4.5. Aproximación de pared delgada	24
1.4.6. “Primeras” burbujas	25
1.4.7. Fracción de volumen ocupada por burbujas	25
1.4.8. Duración de la transición	26
1.5. Ondas Gravitatorias	27
1.5.1. ¿Qué es una Onda Gravitatoria?	28
1.5.2. Detección de Ondas Gravitatorias	36
1.5.3. Mecanismos de generación	40
2. Hidrodinámica en transiciones de fase: Definiciones y discusiones generales	45
2.1. Contenido del capítulo	45
2.2. Sistema Fluido-Campo	46
2.3. Ecuación de movimiento para la pared	48
2.3.1. Fuerza impulsora y obstrucción hidrodinámica	52
2.3.2. Fuerza de fricción	53
2.3.3. Velocidad de pared estacionaria	57
2.4. Ecuaciones para régimen estacionario	58
2.4.1. Ecuaciones de Euler relativistas	58

2.4.2.	Condiciones de contorno y de régimen estacionario	61
2.4.3.	Discontinuidades	62
2.5.	Soluciones estacionarias	66
2.5.1.	Algunos argumentos heurísticos adicionales	66
2.5.2.	Clasificación de soluciones	69
2.5.3.	Soluciones excluidas	71
2.5.4.	Perfiles asociados a las soluciones permitidas	71
2.6.	Solución no estacionaria <i>runaway</i>	77
2.6.1.	Perfiles del régimen <i>runaway</i>	77
2.6.2.	Condición de empalme en detonación ultra relativista	78
2.6.3.	Condición de empalme en pared <i>runaway</i>	80
2.7.	El <i>Bag</i> y los factores de eficiencia	80
2.7.1.	Ecuación de estado del <i>Bag</i>	81
2.7.2.	Uso del <i>Bag</i>	82
2.7.3.	Factores de eficiencia	85
3.	Hidrodinámica en transiciones de fase: Cálculos numéricos y analíticos	93
3.1.	Contenido del capítulo	93
3.2.	Modelando la ecuación de estado	93
3.2.1.	Limitaciones del <i>Bag</i>	94
3.2.2.	Una generalización del <i>Bag</i> : <i>Modelo c_{\pm}</i>	99
3.3.	Cálculo de perfiles estacionarios	105
3.3.1.	Discontinuidades	105
3.3.2.	Perfiles en distintas geometrías de burbuja	114
3.3.3.	Perfiles de burbujas planas (resolución analítica)	118
3.4.	Cálculos para perfiles ultra relativistas	127
3.4.1.	Frente de transición y perfiles ultra relativistas	127
3.5.	Cálculo de fuerzas y velocidad de la pared	129
3.5.1.	Detonaciones y <i>runaway</i>	131
3.5.2.	Deflagraciones	133
3.5.3.	Selección de soluciones	134
3.6.	Factor de eficiencia	135
3.6.1.	Dispersión de energía cinética en distintas geometrías	136
3.6.2.	Factor de eficiencia en distintas geometrías	137
3.6.3.	Factor de eficiencia de burbujas planas	138
3.6.4.	Factor de eficiencia y velocidad del sonido	141
3.6.5.	Factor de eficiencia en régimen ultra relativista	144
4.	Ondas gravitatorias de la transición de fase electrodébil	151
4.1.	Contenido del capítulo	151
4.2.	Dependencia paramétrica de las OG	151
4.3.	Determinación de parámetros de generación	155
4.3.1.	Seguimiento numérico de la transición de fase	156
4.3.2.	Revisión de escalas características de tamaño y tiempo	158
4.3.3.	Colisiones: elección de β	160
4.3.4.	Turbulencia: elección de L_S	161
4.3.5.	Valuación de g_* y e_{tot} para la generación de OG	163

4.4.	OG de transiciones de fase fuertes	164
4.4.1.	Modelos que favorecen transiciones fuertes	164
4.4.2.	Predicción de OG vs. detectores	173
4.5.	OG de transiciones de fase MUY fuertes	175
4.5.1.	Modelos que favorecen transiciones muy fuertes	175
4.5.2.	Comparación de la señal de OG entre distintos modelos	183
5.	Conclusiones	185
	Agradecimientos	187
	Bibliografía	189

Acerca de esta tesis

Publicaciones asociadas

Las publicaciones asociadas a esta *Tesis Doctoral* son:

- [1] “*Spherical and non-spherical bubbles in cosmological phase transitions*”
- [2] “*Gravitational waves from the electroweak phase transition*”
- [3] “*Hydrodynamics of phase transition fronts and the speed of sound in the plasma*”
- [4] “*Hydrodynamics of ultra-relativistic bubble walls*”
- [5] “*Gravitational waves from a very strong electroweak phase transition*”

(Para la referencia completa ver la sección *Bibliografía*)

Objetivos y antecedentes

La cosmología estándar junto con los modelos de la Física de Partículas predicen varias transiciones de fase en la historia del universo. Una transición de fase cosmológica de primer orden ocurre mediante la nucleación y expansión de burbujas de la fase estable, en el plasma primordial que poblaba el universo temprano. En esta tesis se estudia la generación de ondas gravitatorias durante una transición de fase cosmológica.

Las ondas gravitatorias se producen principalmente por colisiones de las paredes de burbujas o por la turbulencia que el movimiento de las paredes causa en el plasma, ver por ejemplo [6–13]. Este tema fue ganando interés desde la década del 2000, ya que se vio que las ondas gravitatorias que podrían generarse en la transición electrodébil tendrían frecuencias en el rango de sensibilidad del entonces planeado interferómetro espacial LISA [14]. Se han propuesto varios interferómetros para ondas gravitatorias, actualmente funcionando, en construcción, o planeados. Estos experimentos se creen que pueden detectar fuentes de origen cosmológico, abriendo una nueva ventana de exploración para el universo temprano [15].

Un problema importante es saber cuál es realmente el modo de propagación de la pared de la burbuja. Antes de esta tesis, ya se entendía que la hidrodinámica permite dos tipos de soluciones para el movimiento de las paredes de burbujas: *detonaciones*, que son supersónicas, y *deflagraciones*, generalmente subsónicas. No obstante, en esta tesis se muestran posibles otros casos. Cabe destacar que, mientras en los cálculos de ondas gravitatorias se solía suponer la propagación como una detonación, para los cálculos de bariogénesis electrodébil siempre se venía suponiendo propagación como deflagración [16, 17]. El cálculo de la velocidad, teniendo en cuenta la fricción y la

hidrodinámica, no es simple pero previo a esta tesis ya se han obtenido resultados [18, 19] aplicables a la generación de ondas gravitatorias.

La radiación gravitatoria había sido estudiada principalmente en el caso de las detonaciones [6–11, 13]. Este caso resultaba relativamente simple, principalmente porque se suponía que la velocidad de la pared dependía sólo del calor latente de transición. Ésta es la llamada *detonación de Jouguet*. El caso de las deflagraciones es más complicado y había sido poco estudiado (ver por ejemplo [11, 20]) debido a que la velocidad de la pared depende del sobreenfriamiento y de la fricción de la pared con el plasma. Además, se creía que las ondas producidas por detonaciones tenían que tener mayor amplitud, debido a la mayor velocidad de las paredes (en esta tesis se ve que no necesariamente es así).

Sin embargo, la utilización de la detonación de Jouguet ha sido cuestionada por no ser realista [18, 21, 22]. En particular, resulta evidente que la velocidad debería depender de la fricción. Esto fue estudiado por el director de este trabajo [18], mostrando numérica y analíticamente que las detonaciones no son en general de Jouguet y que ésta es una mala aproximación. La generación de ondas gravitatorias mediante deflagraciones fue también investigada por el director de esta tesis [20], quien obtuvo una aproximación analítica para la amplitud de las ondas en función de la velocidad de la pared y otros parámetros de la dinámica de la transición. Estimaciones simples mostraron que una transición electrodébil que proceda mediante deflagraciones puede producir ondas gravitatorias detectables por LISA.

Entonces, en líneas generales, la tarea realizada en esta esta tesis ha sido la de estudiar la hidrodinámica involucrada en transiciones de fase cosmológicas, para aplicar luego esos resultados a la generación de ondas gravitatorias y evaluar la posibilidad que tienen de ser observadas.

Durante la realización de esta tesis el acelerador LHC encontró el bosón de Higgs (protagonista de la transición electrodébil), el detector LIGO registró la primer señal de radiación gravitacional debida a una colisión de agujeros negros y la agencia espacial europea (ESA) comenzó las primeras etapas para la construcción del detector espacial de ondas gravitatorias LISA (lanzamiento del *LISA pathfinder* [14] en diciembre de 2015), con el que se podrían registrar señales de origen cosmológico. Probablemente el desarrollo de esta tesis no hubiese variado demasiado si estos descubrimientos y avances se hubiesen demorado, pero legitiman y refuerzan el interés en los temas que se discuten aquí.

Constitución de esta tesis

En el capítulo 1 se conectan los conceptos de la termodinámica de transiciones de fase con los resultados de *teoría de campos a temperatura finita* y del cálculo de ondas gravitatorias. Me ha parecido conveniente hacer un rápida mención al principio de mínima energía, indicar cómo se derivan distintas magnitudes termodinámicas a partir de la energía libre (ecuación de estado), pero principalmente se repasan los conceptos que permiten entender qué es una transición de fase y por qué sucede. Luego de eso, se da una prescripción de cálculo derivada en la teoría de campos a temperatura finita para obtener la ecuación de estado del plasma primordial en las diferentes fases involucradas durante la transición. También se expone de qué modo se puede calcular a qué tiempo

(o temperatura) comienza la transición, cuánto dura y otras estimaciones. El capítulo se completa con una enumeración de los principales conceptos y resultados de qué son y cómo se calculan las ondas gravitatorias de origen cosmológico. Al capítulo 1 se lo titula *Termodinámica, Campos, Cosmología y Ondas Gravitatorias*.

Nuestras publicaciones [1, 3, 4] abarcan aspectos de la hidrodinámica presente durante la transición de fase. En cada una se podría decir que se realizan dos tipos de trabajos. Por un lado se discuten conceptos y conveniencias de ciertas definiciones, incluso proponiéndose alternativas inéditas, por otro lado se realizan cálculos semi-analíticos con el fin de establecer los perfiles de fluido posibles y encontrar para estos una dependencia simple respecto a unos pocos parámetros. Esto último resulta útil para calcular de qué forma se distribuye la energía liberada durante la transición de fase, que a su vez es relevante para el cálculo de señales de ondas gravitatorias. En lugar de una exposición, tal vez más estándar, en la que se confecciona un capítulo por cada publicación asociada, me ha parecido más conveniente separar estos dos aspectos en dos capítulos, integrando el contenido de las publicaciones para una lectura que, espero, resulte más fluida y didáctica.

De ese modo, en el capítulo 2 se plantean las ecuaciones de movimiento para el frente de transición y para el perfil de fluido arrastrado por ese movimiento. Se analiza cualitativamente la forma de las distintas soluciones, se las clasifica, se expone el modelo del *Bag* para las ecuaciones de estado que simplifica el tratamiento de la hidrodinámica, y se define el factor de eficiencia (una fracción de energía útil para generación de ondas gravitatorias). A este capítulo se lo titula *Hidrodinámica en transiciones de fase: Definiciones y discusiones generales*.

A su vez, en el capítulo 3 se discuten las limitaciones del *Bag*, se propone una generalización de éste, a la que aquí se llama *Modelo c_{\pm}* , se estudia en qué rangos de los parámetros de esos modelos se tiene cada tipo de solución, se encuentran las soluciones de los perfiles de fluido para distintas geometrías de burbuja (en particular soluciones analíticas para frentes de transición planos), y se calcula el factor de eficiencia. A este capítulo se lo titula *Hidrodinámica en transiciones de fase: Cálculos numéricos y analíticos*.

En las publicaciones [2] y [5] se abarcaron aspectos relacionados con la detección de ondas gravitatorias que pueden haberse generado durante la transición de fase electrodébil. Aquí también me ha parecido conveniente integrar estos contenidos juntos en el capítulo 4. En este se estudia cómo los espectros de ondas gravitatorias dependen de la hidrodinámica, se discute cómo evaluar los parámetros requeridos para computar esos espectros (recurriendo a los cálculos hidrodinámicos de los capítulos previos), se calculan las posibles señales para distintas extensiones del *Modelo Estándar de la Física de Partículas* y se las contrasta con las curvas de sensibilidad de distintos detectores proyectados o en construcción. A este capítulo se lo titula *Ondas gravitatorias de la transición de fase electrodébil*.

En el capítulo 5, se enumeran los principales resultados de esta tesis y se discuten posibles líneas de investigación que pueden continuar este trabajo.

Esta tesis adopta el sistema de unidades naturales, en el que se toma la velocidad de la luz y las constantes de Planck y Boltzmann iguales a la unidad: $c, \hbar, k_B = 1$.

Capítulo 1

Termodinámica, Campos, Cosmología y Ondas Gravitatorias

1.1. Contenido del capítulo

El principal propósito de este capítulo es conectar conceptos de la termodinámica (y/o mecánica estadística) de transiciones de fase, resultados de teoría de campos a temperatura finita, formas de estimar comienzo y finalización de la transición, generación de ondas gravitatorias.

En la sección 1.2 se repasan las ideas principales del principio de mínima energía, definición de energía libre de Landau, transición de fase, concepto de parámetros de orden, clasificación de transiciones, magnitudes y parámetros relevantes para el estudio de la hidrodinámica, herramientas principales del formalismo de mecánica estadística. En la sección 1.3 se explica como se integra la mecánica estadística con la teoría de campos para el calcular la energía libre. En la sección 1.4 se enumeran las expresiones que se suelen utilizar para estimar el ritmo de nucleación, la temperatura a la cual sucede una transición de primer orden y cuanto dura esta última. Finalmente en la sección 1.5 se explica qué son las ondas gravitatorias, cómo se calcula su espectro, y con qué se podrían medir la señales que se generan durante una transición de fase cosmológica.

1.2. Termodinámica

El seguimiento histórico sobre el desarrollo de la termodinámica conduce a un conjunto de conceptos como los de energía y entropía, también a principios que establecen su conservación e incremento respectivamente. La exposición más frecuente es introduciendo progresivamente con ejemplos la primera y la segunda ley de la termodinámica. Del análisis de esos principios surge otra formulación más axiomática, como la que se puede encontrar en el libro de Callen [23]. Esa formulación resulta conveniente para la comprensión de las transiciones de fase.

1.2.1. Principio de mínima energía

En termodinámica, las transiciones de fase suceden como consecuencia directa del *principio de mínima energía* [23]. La idea básica es la siguiente. La relación entre energía

interna y entropía se postula de tal forma que siempre es posible invertirla, poniendo cualquiera en función de la otra. Cuando se considera a la entropía en función de la energía y demás variables naturales extensivas, se postula que aquellas sin ligaduras toman la configuración tal que maximizan la entropía¹. Equivalentemente este principio se puede enunciar considerando a la energía interna en función de la entropía y demás variables naturales. En tal caso la configuración de los parámetros sin ligaduras a entropía constante es la que minimiza la energía.

Las variables naturales más elementales y comunes de la energía E son magnitudes extensivas como el volumen V , la entropía S , las cargas² Q_i (i enumera cada especie). Es bien conocido que sus variables conjugadas son, respectivamente, la presión $P = -\partial E/\partial V$, la temperatura $T = \partial E/\partial S$ y los potenciales químicos $\mu_i = \partial E/\partial Q_i$. También es sabido que cuando la magnetización \vec{M} es una variable, su conjugada es el campo magnético \vec{B} . Más en general [23], se puede tener una “fuerza” o densidad de “corriente” externa³ \mathcal{J} afectando el valor de una propiedad representada por un campo ϕ , que se interpreta como un campo promedio a escala termodinámica de otro que actúa a un nivel más elemental como parte constituyente del sistema. La interacción entre \mathcal{J} y ϕ es en un sentido análogo a una densidad de flujo magnético \vec{B} que atraviesa a un sistema y altera su densidad de magnetización natural \vec{m} , que es efecto promedio de una fluctuante densidad de dipolos presentes a nivel microscópico. Por lo tanto, al igual que con $\vec{M} = V\vec{m}$, la magnitud $\Phi = V\phi$ es una variable natural extensiva de la energía interna.

Idealmente en un laboratorio, con los mecanismos de control adecuados (ligaduras) que permitiesen ajustar cada variable natural independientemente, se podría ubicar al sistema en diferentes estados de equilibrio termodinámico que no necesariamente serían los mínimos de energía. Todos los puntos del espacio de configuraciones representan estados del sistema donde tiene sentido y es posible determinar los valores de las diferentes magnitudes termodinámicas, cada uno corresponde a un estado de equilibrio termodinámico diferente. Pero en general el sistema no permanece en cualquiera de esos estados cuando se apaga, desactiva o relaja alguna de esas ligaduras. El principio de mínima energía establece que el sistema solo es estable en aquel estado que minimice la energía interna a entropía constante. Es en ese sentido de estabilidad que se habla también de un *estado de equilibrio* en ausencia de alguna ligadura.

Además el principio de mínima energía debe entenderse no en un sentido estricto sino como una tendencia natural del sistema, algo que *posiblemente* ocurre cuando se deja pasar suficiente tiempo. A nivel microscópico se entiende que esta configuración se alcanza como consecuencia de distintas fluctuaciones estadísticas sobre el estado de los constituyentes del sistema. Se sabe que en ciertas condiciones algunos sistemas pueden quedar “estancados” en mínimos locales de energía, que sin ser mínimos absolutos se

¹En el formalismo expuesto por Callen [23] este postulado reemplazaría al segundo principio de la termodinámica.

²En cursos y textos introductorios de termodinámica o mecánica estadística puede que solo se hable de número de partículas de distintas especies, como podrían ser átomos de distintos elementos. Lo importante es que sean magnitudes *conservadas* en la teoría o modelo considerado. Esa conservación se refiere al cumplimiento de una ecuación de continuidad, o a una conmutación del operador correspondiente con el Hamiltoniano en el caso cuántico. En las teorías de campos la cantidad de partículas no es una magnitud conservada pero sí la cantidad de carga asociada a corrientes de Noether. Por ejemplo, el número neto de partículas menos antipartículas de una dada especie.

³Pero aún en ausencia de influencias externas debería poder definirse un \mathcal{J} en el sistema, al igual que en una distribución de dipolos magnéticos que es fuente de campo magnético en el sistema.

encuentran contenidos entre barreras energéticas cuya altura supera las fluctuaciones energéticas características.

Frecuentemente lo conocido o controlado de un sistema es la presión, la temperatura, los potenciales químicos, etc. Entonces para cálculos y consideraciones teóricas resulta más práctico trabajar con una *transformada de Legendre*. A la energía interna de un sistema se le pueden realizar distintas transformadas de Legendre dependiendo de la variable natural que se cambie por su respectiva conjugada. Las distintas funciones que se obtienen en cada caso se denominan “potenciales termodinámicos” o “energías libres”. Más aún, el principio de máxima entropía o de mínima energía tiene uno equivalente para estas energías libres, donde se postula que las variables extensivas no ligadas alcanzan la configuración de mínimo potencial termodinámico en contacto con un reservorio que mantiene constantes las variables conjugadas (aquellas que correspondan al potencial considerado).

1.2.2. Energía libre de Landau

Las energías libres que más comúnmente se definen son las siguiente:

$$\begin{aligned}
 \text{Entalpía: } W &\equiv E + PV \\
 \text{Energía libre de Helmholtz: } A &\equiv E - TS \\
 \text{Energía libre de Gibbs: } G &\equiv E - TS + PV = H - TS = A + PV \\
 \text{Energía libre de Landau: } F &\equiv E - TS - \sum \mu_i Q_i = A - \sum \mu_i Q_i
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

En particular F es de interés, ya que es la energía libre que naturalmente se obtiene por consideraciones estadísticas (como se ve en la sección 1.2.4). También suele aparecer bajo el nombre de *potencial de Landau*, o *gran potencial*, o *potencial gran canónico*, o *potencial macro canónico*. Las definiciones (1.1) no presentan ambigüedad, pero si el sistema depende de alguna variable adicional Φ o $\mathcal{J} = \partial E / \partial \Phi$ se tienen variantes de cada uno de estos potenciales. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}(\mathcal{J}) &\equiv A(\Phi) - \mathcal{J} \Phi \\
 \tilde{F}(\mathcal{J}) &\equiv F(\Phi) - \mathcal{J} \Phi
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Dependiendo el contexto puede denominarse de la misma manera a los potenciales aquí tildados que a los de (1.1). Es decir, A y \tilde{A} son ambas “energías de Helmholtz”, o F y \tilde{F} son ambas “energías de Landau”. No obstante, el principio de mínima energía del caso tildado se postula bajo la ligadura $\mathcal{J} = cte$, a diferencia del caso sin tilde donde Φ puede quedar libre para adoptar la configuración que minimiza.

También existen situaciones en las que puede resultar necesario tratar a las variables y potenciales termodinámicos como no homogéneos. En tal caso, por ejemplo, tomando $E = \int dV e$ y $F = \int dV \mathcal{F}$, se definen e y \mathcal{F} como densidades de energía interna y energía libre de Landau respectivamente. Estas se relacionan mediante una transformada de Legendre de la forma:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} &\equiv e - Ts - \sum \mu_i q_i \\
 \tilde{\mathcal{F}} &\equiv \mathcal{F} - \mathcal{J} \phi,
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde s y q_i son densidades de entropía y carga.

Suponiendo un sistema homogéneo y extensividad de las variables naturales de E se llega a la *ecuación de Euler* para la energía interna:

$$\begin{aligned} E &= -PV + TS + \sum \mu_i Q_i + \mathcal{J} \Phi \\ e &= -P + Ts + \sum \mu_i q_i + \mathcal{J} \phi \end{aligned} \quad (1.4)$$

A partir de esta expresión y las definiciones (1.1) se pueden escribir las energías libres también en una *forma de Euler*, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= -P + \mathcal{J} \phi \\ \tilde{\mathcal{F}} &= -P \end{aligned} \quad (1.5)$$

Puesto que $\mathcal{J} = \partial\mathcal{F}/\partial\phi$, si ϕ se encuentra *libre* adopta la configuración de mínima energía libre donde $\mathcal{J} = 0$ y entonces también coincide con la presión: $\mathcal{F}|_{\phi_{min}} = -P$.

Notar que, como en cada pequeño entorno localmente homogéneo las densidades deben cumplir una relación de la forma $\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}} - \frac{\partial\tilde{\mathcal{F}}}{\partial\mathcal{J}}\mathcal{J}$, la generalización de la transformada de Legendre al caso de campo ϕ y corriente \mathcal{J} no homogéneos resulta de la forma funcional

$$F[\phi] = \tilde{F}[\mathcal{J}] - \int \frac{\delta\tilde{F}}{\delta\mathcal{J}}\mathcal{J}, \quad (1.6)$$

donde $\phi = -\delta\tilde{F}/\delta\mathcal{J}$ y la integración se hace sobre toda la extensión del sistema.

1.2.3. Transiciones de fase

Si bien las transiciones de fase son explicadas en un gran número de textos usando variados enfoques, el principal objetivo de esta sección es remarcar aquellas ideas y denominaciones que sirven como base conceptual en las posteriores secciones.

En general cuando a partir de ciertos valores de variables termodinámicas el sistema experimenta un cambio cualitativo de manera más o menos abrupta, involucrando algún cambio de ordenamiento a nivel microscópico, se refiere a ese proceso como una *transición de fase*. En un dado sistema más de un potencial termodinámico, estudiando su forma funcional, puede servir para identificar la *misma* transición de fase. No obstante, uno puede aportar una interpretación más clara del proceso que el otro. En general, para el estudio de transiciones de fase se supone que es posible identificar un potencial termodinámico adecuado que sea univaluado, posea varios mínimos los cuales a diferentes temperaturas (o presiones, potenciales químicos, etc. . .) experimenten variación de sus alturas relativas. Las distintas fases están asociadas a los entornos de esos mínimos. Esto es consecuencia directa del principio de mínima energía, hay una tendencia natural a que el sistema escoja la configuración que lo minimiza.

Se esperaría que en todo sistema donde compiten la disipación térmica con la inyección de energía debida a fluctuaciones aleatorias del entorno, en un tiempo lo suficientemente grande el sistema gane brevemente la suficiente energía para superar una barrera del potencial y pasar al mínimo más bajo. Luego de sucedido eso, el exceso de energía se disiparía, siendo mucho menos probable obtener energía para superar un salto aún mayor en el sentido contrario. El cumplimiento de esto sería el cumplimiento del principio de mínima energía. No obstante, en la realidad, cuando la barrera es lo

suficientemente alta el sistema puede quedar *estancado* en la vecindad de un mínimo local metaestable. En consecuencia se observan estados *sobreenfriados* (o *sobrecalentados* según sea el caso). Cuando la temperatura (o presión, potencial químico, etc) es tal que los mínimos de ese potencial se encuentran a la misma altura, al sistema le resulta energéticamente indistinto encontrarse en una fase u otra, se dice que toma un valor *crítico*⁴.

En muchos casos hay una fase más simétrica (y en algún sentido más *desordenada*) y otra menos simétrica (más ordenada). Junto con la identificación del potencial que resulta más adecuado para estudiar la transición se obtiene también aquella variable respecto de la cual este se minimiza si se la deja evolucionar libremente en contacto con un reservorio. Si esta variable crece al aumentar el ordenamiento (y disminuir la simetría) del sistema se la denomina *parámetro de orden*⁵. En general el parámetro de orden es un campo, definido en cada punto de la extensión del sistema, y puede constar de cualquier cantidad de componentes.

En otros contextos, diferentes al de esta tesis, pueden llegar a discutirse transiciones de fase donde el parámetro de orden se encuentra ligado. Por ejemplo, cuando el parámetro de orden es la densidad de un gas y con un pistón se lo comprime a temperatura constante. O cuando el parámetro de orden es la magnetización y se varía un campo magnético externo a temperatura constante. Entonces, si externamente se varía el parámetro de orden, incluso pasando el sistema de la fase que sin esa fuente externa sería más estable (menor energía libre) a otra menos estable (mayor energía libre), se puede tener una transición de fase en sentido contrario al que sucedería en forma “espontánea”⁶. No obstante, las transiciones de fase consideradas en esta tesis solo son las que suceden en forma espontánea dejando libre el parámetro de orden.

1.2.3.1. Transiciones de primer orden

Las transiciones de fase se clasifican según qué tan violentamente suceden. Cuando para un potencial termodinámico las diferentes fases están claramente identificadas con mínimos respecto a una de sus variables naturales extensivas, para otro que reemplaza esa variable por su conjugada existe un punto donde sus derivadas son discontinuas. Ese punto justamente representa el pasaje de una fase a otra. Cuando pega un salto la derivada primera, es debido a que en el otro potencial el sistema cambia entre mínimos separados por una barrera. En tal caso se habla de una transición de *primer orden* o *discontinua*. Cuando el salto es en derivadas de segundo orden o superior, debido a un cambio suave entre mínimos donde la barrera no está presente, la transición es de *segundo orden* o de *orden superior* o *continua*. Las de primer orden son aquellas que suceden mediante la nucleación y crecimiento de inhomogeneidades, mientras que las

⁴Es la acepción de ese término que en este trabajo se considera. No obstante, en otros contextos se llama temperatura crítica a aquella en la cual justo desaparece la región no estable en el potencial termodinámico, y entonces no hay separación de fases.

⁵En caso de no cumplir eso último, sin pérdida de generalidad siempre se puede definir, a partir de esa variable, otra que sí lo cumpla. También en diferentes bibliografías se ve que a este parámetro se lo adimensionaliza y reescala (a temperatura crítica) para que tome el valor cero (0) en el mínimo asociado a la fase más desordenada, y el valor uno (1) en el mínimo asociado a la fase más ordenada.

⁶Más aún, al forzar externamente valores del parámetro de orden, el sistema no necesariamente pasa de un mínimo a otro, también a partir de un mínimo puede “trepar” un poco la barrera antes de perder homogeneidad y nuclear dominios de la fase asociada al otro mínimo. En tal caso también se dicen metaestables a esos estados apartados del mínimo.

de orden superior corresponden a cambios globales simultáneos en todo el sistema. Por lo general, teniendo en cuenta un proceso espontáneo en el que las variables naturales no están ligadas, las de primer orden suceden luego que el sistema se ha *sobreenfriado/sobrecalentado* por debajo/arriba de la temperatura crítica, cuando se encuentra en estados metaestables asociados a un mínimo local no absoluto. Esa diferencia de energía entre mínimos es liberada durante la transición, en forma térmica recalentando el sistema y en forma cinética macroscópica generando movimientos masivos del medio.

Con el fin de ilustrar el comportamiento de una transición de primer orden, similar a las que interesan en esta tesis, en la figura 1.1 se considera una densidad de energía libre de la forma (versión simplificada de un modelo realista)

$$\mathcal{F} = -C_0 T^4 + C_2 (T^2 - T_0^2) \phi^2 - C_3 T \phi^3 + C_4 \phi^4, \quad (1.7)$$

donde T_0 y $C_i > 0$ estarían dados por la teoría. Un potencial de esta forma tiene dos mínimos correspondientes a valores finitos de ϕ , uno ubicado en $\phi = 0$. Si, como en el caso de aplicación de esta tesis, solo tienen sentido físico valores $\phi > 0$ entonces el tramo de curva representado a trazos en la figura no está presente. A la curva $\mathcal{F}(\phi)$ del panel izquierdo le corresponde su transformada de Legendre $\tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{J})$ en el panel central, que es multivaluada⁷. En particular, el valor $\mathcal{J} = \partial\mathcal{F}/\partial\phi = 0$ (ubicación del eje vertical) corresponde a los mínimos y la cima de la barrera. La curva que resulta de considerar solo su valuación de menor valor experimenta un salto en la derivada para algún valor de \mathcal{J} . El entorno a dicha posición corresponde a un estado mixto con más de una fase asociada a los mínimos de $\mathcal{F}(\phi)$, uno estable y el otro metaestable. La transición de fase al variar la temperatura se entiende como resultado de lo ilustrado esquemáticamente en el panel derecho. En este, para facilitar la visualización, se normalizan las curvas correspondientes con la temperatura y se considera

$$\Delta\mathcal{F}(T, \phi) \equiv \mathcal{F}(T, \phi) - \mathcal{F}(T, 0), \quad (1.8)$$

para mantener la misma altura del mínimo $\phi = 0$ (en general a mayor temperatura más negativo se vuelve $\mathcal{F}(T, 0) = -P$). A temperaturas por arriba de la crítica (T_c) hay un único mínimo, pero al acercarse a esta aparece una barrera que lo separa de un mínimo local. Si continúa disminuyendo la temperatura por debajo de la crítica, la barrera se reduce y el mínimo absoluto cambia⁸. Cuando la diferencia de alturas es lo suficientemente grande y la barrera lo suficientemente chica, el sistema *cae* entorno a ese otro mínimo y el parámetro de orden *pega un salto*. Ese salto es el que está emparentado con la discontinuidad en la derivada de la menor valuación de $\tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{J})$.

1.2.3.2. Magnitudes termodinámicas en la transición de fase

De la discusión previa, se concluye que si se tiene una densidad de energía libre $\mathcal{F}(T, \mu_i, \phi)$, donde ϕ cumple el rol de un parámetro de orden, y respecto a este \mathcal{F} tiene mínimos separados por una barrera, puede suceder una transición de fase de

⁷Pero, suponiendo que el principio de mínima energía se cumple estrictamente, si externamente se fuera variando \mathcal{J} en todo punto debería observarse solo la mínima valuación de $\tilde{\mathcal{F}}$. Como resultado $\tilde{\mathcal{F}}$ tendría una curva quebrada, con un salto en la derivada.

⁸Si en la expresión (1.7) es $T_0 > 0$, para un valor $T = T_0$ la barrera desaparece completamente.

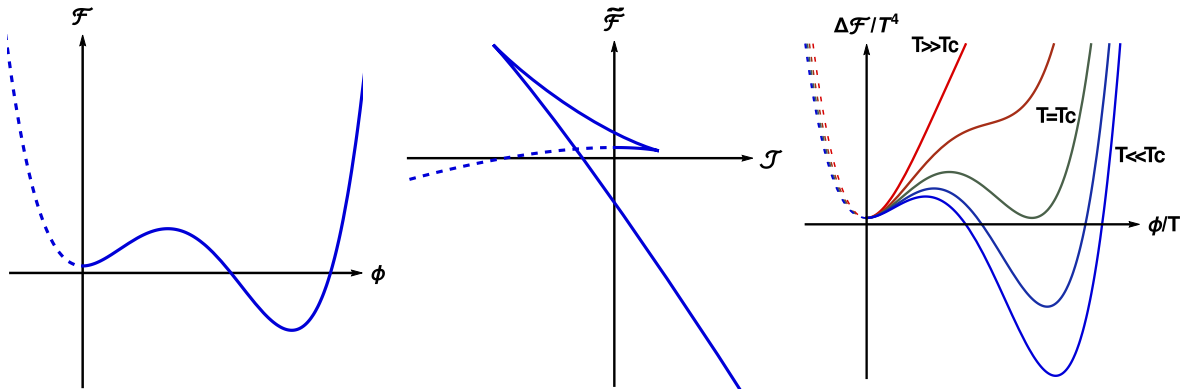


Figura 1.1: Comportamiento cualitativo típico de la energía libre en transiciones de primer orden. En este ejemplo se toma uno de los mínimos en un valor de ϕ fijo ($\phi = 0$). Cuando solo tienen sentido físico valores de ϕ a la derecha de ese mínimo ($\phi \geq 0$), el tramo de curva a trazos no está presente. Izquierda: Potencial $\mathcal{F}(\phi)$ con dos mínimos y una barrera. Centro: La transformada de Legendre $\tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{J})$ resulta ser multivaluada. Luego, su menor valuación presenta derivada discontinua. Derecha: Bajando temperatura hacia el valor crítico, aparece una barrera y un nuevo mínimo local. Bajando aún más desde el valor crítico, la barrera se reduce y se invierte relación de altura entre mínimos. Como resultado el parámetro de orden ϕ experimenta un salto al pasar de una fase a otra.

primer orden. Aquí esos mínimos se denotan $\phi_+(T, \mu_i)$ y $\phi_-(T, \mu_i)$ respectivamente⁹ (en general en este trabajo se usa un índice “+” para la fase dominante a alta temperatura y un índice “-” para la dominante a baja temperatura). La temperatura crítica T_c se define como aquella en la que los dos mínimos tienen exactamente la misma densidad de energía libre. Por lo tanto, para $T > T_c$ el sistema está en la fase estable dada por el mínimo ϕ_+ , mientras para $T < T_c$ esa fase se vuelve metaestable. La transición de fase de primer orden típicamente se desarrolla vía nucleación y expansión de dominios, usualmente llamados *burbujas*, a cierta temperatura T más baja que T_c . Es decir, suele suceder un cierto sobreenfriamiento antes que se de la transición de fase (mirar, por ejemplo, para transiciones de fase cosmológicas [24–26]). A su vez, también sucede un recalentamiento no homogéneo, en el interior de la burbuja y en sus inmediaciones por afuera, debido al calor latente liberado.

En el contexto de las transiciones de fase cosmológicas, macroscópicamente se modela al sistema de estudio como el conjunto constituido por un campo ϕ *acoplado* a un fluido relativista en estado plasma. Las ecuaciones de fluido (ver más adelante la sección 2.4) que describen la dinámica de ese plasma involucran magnitudes termodinámicas como e , P , T , etc. . . que deben ser calculadas a partir de la energía libre. Se supone que cualquiera de esas cantidades está bien definida en el sistema propio de cada *pequeño* elemento de fluido con volumen estadísticamente macroscópico¹⁰. La burbuja nucleada es una configuración $\phi = \phi(r, t)$ con simetría esférica, tal que en su centro el sistema está en la fase dominante a baja temperatura y lejos de ésta el sistema

⁹Si bien el campo ϕ es una variable independiente de μ_i y T , los mínimos que se están considerando varían con estas variables así como la forma de la curva \mathcal{F} en general.

¹⁰Cuando tiene sentido la denominación, a un *elemento de fluido* aquí se lo entiende como aquella región móvil sobre una línea de flujo que contiene ciertas cantidades de cargas fijas y que se mantiene lo suficientemente pequeña durante un trayecto de estudio.

está en la fase dominante alta temperatura. Entonces se tiene $\phi(r=0) = \phi_-(T, \mu_i)$ y $\phi(r=\infty) = \phi_+(T, \mu_i)$. Hay una región, la “pared de la burbuja”, en la cual ϕ varía en forma continua de ϕ_- a ϕ_+ . Más adelante, en la sección 1.4.5, se ve que dicha pared puede considerarse de espesor despreciable para la mayoría de los cálculos. Por lo cual, esencialmente se tienen dos regiones del espacio donde el parámetro de orden toma solo los valores ϕ_+ y ϕ_- . Para cada fase, todas las cantidades termodinámicas pueden ser derivadas a partir de las densidades de energía libre $\mathcal{F}_+(T, \mu_i) \equiv \mathcal{F}(T, \mu_i, \phi_+(T, \mu_i))$ y $\mathcal{F}_-(T, \mu_i) \equiv \mathcal{F}(T, \mu_i, \phi_-(T, \mu_i))$. Por ejemplo, reiterando la expresión (1.5), la presión está dada por (considerando $\mathcal{J}(\phi_{\pm}) = 0$)

$$P = -\mathcal{F}(T, \mu_i, \phi) + \mathcal{J}\phi \implies P_{\pm} = -\mathcal{F}_{\pm}(T, \mu_i) \quad (1.9)$$

Puesto que $d\mathcal{F} = -s dT - \sum Q_i d\mu_i + \mathcal{J}d\phi$ la densidad de entropía es

$$\begin{aligned} s_{\pm} &= -\left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \right|_{\mu_i, \phi = \phi_{\pm}(T)} \\ &= \left(-\left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \right|_{\mu_i, \phi} - \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} \right|_{T, \mu_i} \frac{d\phi_{\pm}}{dT} \right) \Big|_{\phi = \phi_{\pm}(T)} \\ &= -\left. \frac{\partial \mathcal{F}_{\pm}}{\partial T} \right|_{\mu_i} = \left. \frac{\partial P_{\pm}}{\partial T} \right|_{\mu_i} \end{aligned} \quad (1.10)$$

donde es tenido en cuenta que $\partial \mathcal{F} / \partial \phi$ se anula evaluado en los mínimos ϕ_{\pm} . Usando la presión (1.9) y la densidad de entropía (1.10), la densidad de energía interna se obtiene usando la fórmula de Euler (1.4)¹¹

$$e_{\pm} = -P_{\pm} + T s_{\pm} + \sum \mu_i q_{i\pm}, \quad (1.11)$$

donde si fuese necesario se podría invertir las dependencias para obtener $T = T(s, q_i)$ y $\mu_i = \mu_i(s, q_i)$ dejándola en sus variables naturales como $e(s, q_i)$. Con otra transformada de Legendre se tiene la densidad de entalpía

$$w = e + P = T s + \sum \mu_i q_i \quad (1.12)$$

que también si fuera necesario podría dejarse expresada como una función $w(P, s, q_i)$, aunque en este trabajo no llega a ser requerido.

A temperatura crítica, la presión en las dos fases es la misma, porque las energías libres de los mínimos son las mismas. Entonces esa temperatura puede determinarse a partir de la ecuación

$$P_+(T_c) = P_-(T_c) \quad (1.13)$$

Sin embargo, las otras cantidades como la energía, entropía, y entalpía son diferentes en cada fase incluso a $T = T_c$. Una magnitud útil para representar la energía liberada durante una transición es el calor latente, que se define como la diferencia entre

¹¹También se necesitaría una expresión para las densidades de cargas que se derivaría similarmente a (1.10). De todos modos, más adelante en la sección 1.2.4.2 se explica que el término asociado a los potenciales químicos $\mu_i q_i$ puede despreciarse en los casos de interés de esta tesis.

densidades de energía a temperatura crítica

$$L = \Delta e(T_c) = \Delta w(T_c) = T_c \Delta s(T_c) , \quad (1.14)$$

Si la transición sucediera justo a $T = T_c$ toda esa diferencia de energía se liberaría en forma térmica, ya que la pared tendría un avance cuasi estático sin perturbar el plasma. En la transición de primer orden típica, a $T < T_c$, la nucleación es un proceso violento debido al salto de \mathcal{F} (salto de presión entre fases), se entiende entonces que parte de la energía liberada contribuye a la aceleración del plasma. Aunque también en ese caso L puede no resultar un buen indicador de la energía liberada por que la transición sucede a una temperatura distinta de T_c .

1.2.4. La mecánica estadística

La exposición de las secciones anteriores marca los límites que abarca la teoría termodinámica. Gracias al principio de mínima energía la termodinámica permite establecer propiedades de las magnitudes intensivas y extensivas, relaciones entre ellas, requisitos de estabilidad, propiedades de las fases de una transición en función de los mínimos de energía libre, etc. Pero para obtener formas funcionales y curvas explícitas se requiere disponer de *ecuaciones de estado*. Una ecuación de estado es una relación entre las diferentes magnitudes termodinámicas. La ecuación de estado que resulta de remplazar explícitamente la forma funcional de un potencial termodinámico en su respectiva *forma de Euler* contiene toda la información macroscópica accesible del sistema. Sin embargo la teoría termodinámica no provee una prescripción para obtener tal ecuación explícita. Para obtenerla hay dos caminos, por ajuste empírico o modelando teóricamente y recurriendo a la teoría de mecánica estadística.

1.2.4.1. Ensamble gran canónico

Si se considera un sistema que está en contacto con un reservorio, donde es posible el flujo de energía y de cargas, la teoría termodinámica establece el estado de equilibrio como aquel en que la temperatura y los potenciales químicos conciden con los del reservorio. El conjunto estadístico en ese caso constituye el llamado *ensamble gran canónico* o *ensamble macro canónico*. El operador densidad correspondiente al ensamble gran canónico es

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta \hat{H}'}}{Z} = \frac{e^{-\beta(\hat{H} - \sum_i \mu_i \hat{Q}_i)}}{Z} \quad (1.15)$$

$$Z = Tr \left(e^{-\beta \hat{H}'} \right)$$

Donde $\beta = 1/T$, los operadores Hamiltoniano y de cargas son \hat{H} y \hat{Q}_i . Además se puede argumentar que en un sistema homogéneo la función de partición es de la forma $Z(V) = \mathcal{Z}^{V/V_0}$, donde V_0 es el volumen de una celda elemental o de referencia, y entonces $\ln(Z)$ es lineal en el volumen. El valor de expectación estadístico de cualquier operador \hat{O} es

$$\langle \hat{O} \rangle = Tr(\hat{\rho} \hat{O}) \quad (1.16)$$

En general se puede ver que el concepto de entropía termodinámico es compatible con la de definición $S = -Tr(\hat{\rho} \ln(\hat{\rho})) = -\langle \ln(\hat{\rho}) \rangle$. Utilizando el operador densidad

(1.15) y calculando la entropía y los valores de expectación dados por (1.16) para las cargas y la energía se tiene:

$$\begin{aligned} S &\equiv -\langle \ln(\hat{\rho}) \rangle = \frac{\partial[T \ln(Z)]}{\partial T}, \\ Q_i &\equiv \langle \hat{Q}_i \rangle = \frac{\partial[T \ln(Z)]}{\partial \mu_i}, \\ \langle \hat{H} \rangle &= -T \ln(Z) + TS + \sum_i \mu_i Q_i. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Hasta este punto nada se debió decir sobre ninguna otra dependencia adicional de Z . Estos resultados son en general válidos para cualquier sistema homogéneo donde $\ln(Z)$ depende de un conjunto de variables de la forma (V, T, μ_i, \dots) . En caso que en el Hamiltoniano también hubiese dependencia explícita respecto a una corriente \mathcal{J} , según la discusión de la sección 1.2.2, se debería identificar $\tilde{E}(\mathcal{J}) = \langle \hat{H} \rangle$. Si se compara \tilde{E} con la forma de Euler dada en la expresión (1.4) pero sin el término “ $\mathcal{J} \Phi$ ”, y además se tiene en cuenta (1.5), también se identifica

$$\tilde{F} = -T \ln(Z[\mathcal{J}]) \longrightarrow Z[\mathcal{J}] = e^{-\beta \tilde{F}}. \quad (1.18)$$

Más aún, en general, si \hat{H}' depende de una variable cualquiera ϑ , independiente de β , se corrobora que:

$$\left\langle \frac{\partial \hat{H}'}{\partial \vartheta} \right\rangle = \frac{\partial[-T \ln(Z)]}{\partial \vartheta}. \quad (1.19)$$

En particular si $\vartheta = \mathcal{J}$ se verifica

$$-\Phi = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \mathcal{J}} = \frac{\partial[-T \ln(Z)]}{\partial \mathcal{J}} = \left\langle \frac{\partial \hat{H}'}{\partial \mathcal{J}} \right\rangle. \quad (1.20)$$

Más adelante, en la sección 1.3.1, se realizan las identificaciones (1.18) y (1.20) en el contexto de la teoría de campos a temperatura finita.

1.2.4.2. Los potenciales químicos en la transición electrodébil

Si la cantidad neta de carga (cantidad de partículas menos antipartículas) es cero, el potencial químico se anula. Se puede ver que si la cantidad de carga neta es chica, el potencial químico será chico. Concretamente, la cantidad de partículas (N_{i+}) o antipartículas (N_{i-}) por separado va como $\sim T^3$ mientras que la cantidad de carga neta ($Q_i \propto \Delta N_i = N_{i+} - N_{i-}$) va como $\sim T^2 \mu_i$ [27]. Por conservación de carga ΔN_i tiene que haber sido el mismo en el universo temprano que en la actualidad, pero se entiende que, al menos en la escala electrodébil, $N_{i\pm}$ era mucho mayor. Y que para dar la cantidad de materia que hay en la actualidad, se necesitaría que en el momento de la transición electrodébil haya habido una asimetría $\Delta N_i / N_{i+} \sim 10^{-8}$. Esa pequeña diferencia es aún importante para el estudio de la bariogénesis, donde se quiere entender cómo se forma una densidad neta (bariones menos antibariones) no nula. Pero esta tesis no se ocupa de esa cuestión. A todos fines prácticos aquí se puede considerar que en la escala electrodébil $\Delta N_i \ll N_{i+}$ y entonces $\mu_i \ll T \Rightarrow \beta \mu_i \ll 1$, que vuelve muy pequeño el aporte a la exponente del factor de Boltzmann en el ensamble macro canónico, y

en consecuencia la dependencia respecto de μ_i en la energía libre de Landau es completamente despreciable para, por ejemplo, evaluar la “fuerza” de la transición de fase electrodébil o consideraciones de la hidrodinámica. De aquí en adelante se desprecia la dependencia con el potencial químico μ_i . Esto no implica que se esté considerando el ensamble canónico¹², sino simplemente evaluar $\mu_i \approx 0$ en el gran canónico.

1.3. Teoría de campos y potencial efectivo

En esta sección se enumeran conceptos y resultados cuyo detalle y cálculo puede encontrarse más profundamente tratado en el apunte [28–30]. Aquí no se ahonda en cuestiones muy técnicas de la teoría de campos, aunque en la subsección 1.3.2 se indican algunas de las aproximaciones consideradas para llegar a una expresión útil de la energía libre. En líneas generales, se sobreentiende que la cuenta completa se realiza en el contexto de la teoría perturbativa recurriendo a todo el andamiaje matemático relacionado con diagramas de Feynman a distintos órdenes en número de lazos.

1.3.1. Potencial efectivo a temperatura finita

El potencial efectivo para la teoría cuántica de campos fue originalmente introducido por Euler, Heisenberg y Schwinger [31, 32], y aplicado a estudios de ruptura espontánea de simetría por Goldstone, Salam, Weinberg y Jona-Lasinio [33, 34]. Cálculos del potencial efectivo a 1-lazo fueron inicialmente hechos por Coleman y E. Weinberg [35], y a mayor orden por Jackiw [36] y Iliopoulos, Itzykson y Martin [37]. El formalismo usado en teoría de campos es adecuado para describir observables (como secciones eficaces) medidos en un espacio-tiempo aproximadamente vacío. Es el caso de interacción de partículas en un acelerador, que interactúan “solas” sin chocar con nada más. Pero en el universo temprano, a alta temperatura, el entorno tiene una densidad de materia y radiación no despreciable. En ese contexto, los métodos de la teoría de campos convencional deben ser reemplazados por otros más cercanos a los de la teoría termodinámica o estadística, donde el estado de fondo es un baño térmico. Esa es la teoría de campos a temperatura finita. Sobre este tema pueden consultarse distintos artículos [38, 39], revisiones [28–30, 40, 41] y libros de texto [42, 43].

Considerando el valor de expectación de mecánica estadística (1.16) se puede definir las llamadas *funciones de Green térmicas* tomando una prolongación analítica sobre el plano complejo de la dependencia temporal del campo $\hat{\phi}$. Para una curva \mathcal{C} en el plano complejo serían de la forma $G^{(\mathcal{C})}(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle T_{\mathcal{C}} \hat{\phi}(x_1), \dots, \hat{\phi}(x_n) \rangle$, donde el ordenamiento $T_{\mathcal{C}}$ significa que los campos deben ordenarse a lo largo de ese camino. De este modo los valores de expectación termodinámicos podrían expandirse en funciones de Green térmicas usando el formalismo de tiempo imaginario. En un sistema a temperatura $T = \beta^{-1}$, se pueden reciclar resultados de la teoría de campos (que en este contexto se la llama *teoría de campos a temperatura finita*) reemplazando las dependencias temporales por un “tiempo” $t = i\tau$. En particular puede verse que la

¹²El ensamble canónico, a diferencia del gran canónico, corresponde a un conjunto estadístico donde la cantidad de cada carga está fija. La función de partición gran canónica Z_{GC} se relaciona con la del ensamble canónico Z_C para cada conjunto de valores de cargas posibles $\{Q_i\}$ mediante $Z_{GC} = \sum_{\{Q_i\}} e^{\beta \sum_i \mu_i Q_i} Z_C(\{Q_i\})$. Esto último evidencia la diferencia entre el ensamble canónico y tener potenciales químicos nulos en el ensamble gran canónico, donde aún se suma sobre diferentes configuraciones de carga.

función de partición Z en la representación de integral de camino, para una teoría en la que solo hay un campo escalar¹³, es de la forma (teniendo en cuenta $\mu \approx 0$ por la discusión dada en la sección 1.2.4.2):

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi e^{-\mathcal{S}_E[\varphi]} \quad (1.21)$$

donde la llamada acción euclídea es $\mathcal{S}_E[\varphi] = \int d^4x \mathcal{L}_E(\varphi)$, con $\int d^4x = \int_0^\beta d\tau \int d^3r$ y denotando \mathcal{L}_E a la llamada densidad Lagrangeana euclídea. Estas expresiones aparecen aquí siguiendo el formalismo de mecánica estadística, pero son las mismas que salen en teoría de campos a temperatura cero reemplazando dentro del exponente $iS[\varphi]$, de la traza del operador de evolución temporal, toda aparición del tiempo real por $t = i\tau$. En ese caso la métrica queda $ds^2 = -dt^2 + dr^2 = d\tau^2 + dr^2$ con una forma “euclídea” y, en consecuencia, también las expresiones de la acción y la densidad Lagrangeana. A τ se lo suele llamar *tiempo imaginario* o *tiempo euclídeo*.

A su vez, el funcional generatriz de las funciones de Green térmicas se define como la función de partición de una teoría con corriente \mathcal{J} acoplada¹⁴:

$$Z[\mathcal{J}] \equiv \int \mathcal{D}\varphi e^{-\mathcal{S}_E[\varphi] + \int d^4x \mathcal{J}\varphi} \quad (1.22)$$

Estas expresiones son similares a las que se utilizan en modelo de campo medio (ver por ejemplo [44, 45]) pero en lugar de tener en el exponente un factor β , este constituye la duración de un intervalo de integración temporal para la densidad Lagrangiana euclídea con término $\mathcal{J}\phi$ (y hay dependencia “temporal” del campo en el cuadro de Heisenberg), que coincide con una densidad (cuadridimensional) de energía.

A partir de aquí se procede calcando los pasos de la teoría a temperatura cero, definiendo el funcional generatriz de las funciones de Green conectadas mediante $W[\mathcal{J}] \equiv \ln(Z[\mathcal{J}])$, y el funcional generatriz para las funciones de Green 1PI como la transformada de Legendre

$$\Gamma[\phi] = W[\mathcal{J}] - \int d^4x \frac{\delta W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}} \mathcal{J} \quad (1.23)$$

donde se hace el cambio de variable $\mathcal{J} \rightarrow \phi$, siendo $\phi \equiv \delta W[\mathcal{J}]/\delta \mathcal{J}$ y valiendo $\delta \Gamma[\phi]/\delta \phi = -\mathcal{J}$. Estos funcionales generatrices están emparentados con las energías de Landau definidas en la sección 1.2.2. En particular cuando se considera una corriente *independiente del tiempo* $\mathcal{J}(\vec{r}, \tau) = \mathcal{J}(\vec{r})$ para temperatura homogénea¹⁵ se puede

¹³Para más campos presentes es lo mismo pero integrando funcionalmente sobre cada uno. Además la integración funcional se hace con condiciones de contorno en los límites $\tau = 0$ y $\tau = \beta$, periódicas para bosones y antiperiódicas para fermiones (en los últimos son integrales de Berezin-Grassman).

¹⁴Notar que $\mathcal{P}[\varphi] = e^{-\mathcal{S}_E[\varphi] + \int d^4x \mathcal{J}\varphi} / Z[\mathcal{J}]$ es una densidad funcional de probabilidad para la configuración de campo φ , cuando el sistema se encuentra sujeto a una corriente \mathcal{J} . Con esta se puede, por ejemplo, calcular el valor de expectación $\langle \hat{\varphi} \rangle = \int \mathcal{D}\varphi \varphi \mathcal{P}[\varphi]$.

¹⁵En general hay una diferencia con la transformada de Legendre definida en la sección 1.2.2, en particular la relación entre F y \tilde{F} dada por (1.6). Aquí la integración se hace también sobre la variable temporal de la que pueden depender ϕ y \mathcal{J} . Este formalismo que reutiliza resultados de teoría de campos a temperatura cero requiere considerar derivación funcional para una corriente genérica $\delta/\delta \mathcal{J}(\vec{r}, \tau)$ [que no es igual a $\delta/\delta \mathcal{J}(\vec{r})$] pero si luego de derivar se impone la evaluación $\mathcal{J}(\vec{r})$ todas las expresiones coinciden con las introducidas para la teoría termodinámica. Se ve que $\phi(\vec{r}) = \langle \hat{\varphi} \rangle_{\mathcal{J}(\vec{r}, \tau)}$, es el valor de expectación del campo “ajustado” por la corriente \mathcal{J} . A su vez si

hacer la identificación:

$$\begin{aligned} W[\mathcal{J}] &= -\beta\tilde{F}[\mathcal{J}], \\ \Gamma[\phi] &= -\beta F[\phi]. \end{aligned} \quad (1.24)$$

También se puede demostrar que $\phi = \langle \hat{\varphi} \rangle$, donde ese valor de expectación estadístico es calculado en presencia de una corriente externa. Cuando esa corriente se anula se tiene el $\phi_0 \equiv \langle \hat{\varphi} \rangle|_{\mathcal{J}=0}$. Esa condición, cuando $\phi_0 \neq 0$, para los casos de interés representa al sistema ubicándose en una fase dominante a baja temperatura, asociada con la ruptura de simetría en el mecanismo de Higgs.

El $\Gamma[\phi]$ es una *acción efectiva* a temperatura finita. En efecto, de modo similar a como puede verse en teoría de campos, la teoría sin corriente acoplada es la que corresponde a aquel ϕ_0 que extrema $\Gamma[\phi]$ (pues $\delta\Gamma[\phi]/\delta\phi = -\mathcal{J} = 0$). Es decir, el que satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange para esa “acción”. Es posible expandir la acción efectiva como suma de términos con derivadas de distintos órdenes:

$$\Gamma[\phi] = \int d^4x \left[-\mathcal{V}_{\text{ef}}^\beta(\phi) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi(x))^2 z(\phi) + \dots \right], \quad (1.25)$$

donde se identifica el potencial efectivo a temperatura finita $\mathcal{V}_{\text{ef}}^\beta$ como el único término que no depende de derivadas. O también, mediante una configuración de campo constante ϕ_{cte} se define el potencial efectivo:

$$\Gamma[\phi_{cte}] = - \int d^4x \mathcal{V}_{\text{ef}}^\beta(\phi_{cte}) = -\beta V \mathcal{V}_{\text{ef}}^\beta(\phi_{cte}). \quad (1.26)$$

En el caso homogéneo $\Gamma = -\beta F = -\beta V \mathcal{F}$, de donde se tiene que $\mathcal{F}(\phi_{cte}) = \mathcal{V}_{\text{ef}}^\beta(\phi_{cte})$, el potencial efectivo es la energía libre de Landau evaluada en un campo constante. En general este potencial puede descomponerse en un aporte de temperatura cero \mathcal{V}_{ef} (que es el mismo que se obtiene en teoría cuántica de campos) y una corrección térmica, $\mathcal{V}_{\text{ef}}^\beta = \mathcal{V}_{\text{ef}} + \Delta\mathcal{V}_{\text{ef}}^\beta$. Si ϕ es el valor de expectación del campo de Higgs, la ruptura de simetría electrodébil sucede para un $\phi_{cte} \neq 0$ tal que

$$\frac{\partial\mathcal{F}(\phi_{cte})}{\partial\phi_{cte}} = \frac{\partial\mathcal{V}_{\text{ef}}^\beta(\phi_{cte})}{\partial\phi_{cte}} = 0. \quad (1.27)$$

El cálculo de \mathcal{F} se realiza mediante un desarrollo perturbativo, que truncado al orden más bajo suele aparecer denominado como método (o aproximación) de “de onda estacionaria” (en el contexto de temperatura cero) o “*steepest descent*” (en el contexto de temperatura finita), o la llamada “*saddlepoint approximation*” de las teorías de Guinzburg-Landau. Alternativamente se puede llegar al mismo resultado teniendo en cuenta que a temperatura finita vale la expresión, útil para cálculos del potencial efectivo,

$$\mathcal{F}(\phi_{cte}) = \mathcal{V}_{\text{ef}}^\beta(\phi_{cte}) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi_{cte}^n \Gamma^{(n)}(p_i = 0) \quad (1.28)$$

$\mathcal{J}(\vec{r}, \tau) = \mathcal{J}(\vec{r})$ es posible reescribir $\int d^4x \varphi(\vec{r}, \tau) \mathcal{J}(\vec{r}, \tau) = \int d^3x \beta \bar{\varphi}(\vec{r}) \mathcal{J}(\vec{r})$ [con el *promedio temporal* $\bar{\varphi}(\vec{r}) = \int_0^\beta d\tau \varphi(\vec{r}, \tau)/\beta$] y, definiendo \tilde{F} a partir de (1.24), se tiene que $-\delta\tilde{F}/\delta\mathcal{J}(\vec{r}) = \langle \hat{\varphi} \rangle_{\mathcal{J}(\vec{r})}$. Es fácil ver que $\int d^4x \langle \hat{\varphi} \rangle_{\mathcal{J}(\vec{r})} \mathcal{J}(\vec{r}) = \int d^3x \beta \langle \hat{\varphi} \rangle_{\mathcal{J}(\vec{r})} \mathcal{J}(\vec{r})$. A temperatura homogénea ($\beta = cte$), introduciendo en (1.23) esas igualdades junto con (1.24) y cancelando los β se reobtiene (1.6).

donde a su vez cada función 1PI, $\Gamma^{(n)}$, se calcula perturbativamente sumando diagramas de Feynman hasta un cierto orden en lazos.

De aquí en adelante solo se escribe ϕ sin explicitar con la etiqueta “cte”. En caso de tenerse dependencia con la posición, si es necesario remarcarlo, se escribe explícitamente $\phi(\vec{r})$. En general para estudiar la ecuación de estado en una fase concreta se entiende que ϕ es una constante que se encuentra en un mínimo del potencial efectivo.

1.3.2. Cálculo del potencial efectivo

La densidad Lagrangeana \mathcal{L} que resulta de interés en esta tesis es la de las interacciones electrodébiles para alguna extensión del *Modelo Estándar* (o SM, por sus siglas en inglés¹⁶). Esquemáticamente, la densidad lagrangiana electrodébil del SM es de la forma

$$\hat{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu} + i\hat{\psi}_j\gamma^\mu D_\mu\hat{\psi}_j + h.c. + y_{ij}\hat{\psi}_i\hat{\psi}_j\hat{H} + h.c. + \left|D_\mu\hat{H}\right|^2 - \mathcal{V}_0(\hat{H}), \quad (1.29)$$

donde el tensor de campo $\hat{F}_{\mu\nu}$ engloba todos los campos de gauge de $SU(2) \times U(1)$, que luego de la ruptura se descomponen en los campos \hat{A}_μ (electromagnético), \hat{W}_μ^\pm , y \hat{Z}_μ . El segundo término en (1.29) engloba todos los términos cinéticos de los fermiones, donde γ^μ son las matrices de Dirac y D_μ la derivada covariante. El siguiente término con fermiones es la interacción de Yukawa, que da masa a los fermiones, y en general mezcla distintas especies i, j . Luego sigue el término cinético del campo de Higgs, y finalmente el potencial responsable de la ruptura espontánea de simetría,

$$\mathcal{V}_0(\hat{H}) = -m^2\hat{H}^\dagger\hat{H} + \lambda(\hat{H}^\dagger\hat{H})^2, \quad (1.30)$$

El campo de Higgs es un doblete de $SU(2)$, $\hat{H} = \begin{pmatrix} \hat{H}^+ \\ \hat{H}^0 \end{pmatrix}$. La componente \hat{H}^0 es la que desarrolla un valor de expectación en el vacío, y es usual definir el *campo de Higgs* $\hat{\phi} \equiv \sqrt{2}\hat{H}^0$ (los demás grados de libertad son bosones de Goldstone). El valor de expectación de vacío (vev) de $\hat{\phi}$ se denota $\langle\hat{\phi}\rangle \equiv v$.

Los fermiones sin masa tienen quiralidad definida. Los izquierdos son dobletes de $SU(2)$ y los derechos son singletes. Por ejemplo, (lo que luego será) la componente izquierda del electrón forma un doblete junto con su neutrino, $\hat{l}_L = \begin{pmatrix} \hat{\nu}_L \\ \hat{e}_L \end{pmatrix}$, mientras que la componente derecha del electrón es un singlete, \hat{e}_R (en el SM no hay neutrino derecho). Similarmente para los quarks u y d , se tiene $\hat{q}_L = \begin{pmatrix} \hat{u}_L \\ \hat{d}_L \end{pmatrix}$, \hat{u}_R y \hat{d}_R . Por tanto, en (1.29) se tiene por ejemplo los términos cinéticos $i\hat{l}_L\gamma^\mu D_\mu\hat{l}_L$ y $i\hat{e}_R\gamma^\mu D_\mu\hat{e}_R$, pero los términos de Yukawa necesariamente involucran un fermión izquierdo y uno derecho, ya que el doblete está “contraído” con el doblete de Higgs. Se tiene entonces, por ejemplo, un término de la forma $y\hat{l}_L\hat{H}\hat{e}_R = y\hat{\nu}_L\hat{e}_R\hat{H}^+ + y\hat{e}_L\hat{e}_R\hat{H}^0$, que en particular tiene un término $(y/\sqrt{2})\hat{\phi}\hat{e}_L\hat{e}_R + h.c.$ Similarmente aparecen para todos los fermiones (salvo los neutrinos) términos de la forma¹⁷ $h_i\hat{\phi}\hat{\psi}_{iL}\hat{\psi}_{iR} + h.c.$, que cuando $\hat{\phi}$ toma el vev v ,

¹⁶Standard Model (SM).

¹⁷En realidad, como se expresa en la forma esquemática (1.29), las interacciones de Yukawa mezclan distintos campos (y en lugar de una constante h_i para cada especie se tienen constantes h_{ij} que mezclan distintas especies), lo que da matrices de masa. Esto se resuelve redefiniendo los campos de modo de diagonalizar esas matrices, lo cual cambia la parte cinética del lagrangiano.

dan los términos de masa $m_i \hat{\psi}_{iL} \hat{\psi}_{iR} + h.c.$, con $m_i = h_i v$. Por otro lado, los bosones de gauge (salvo el electromagnético) adquieren masa debido a su interacción con $\hat{\varphi}$ (a través de la derivada covariante). Las masas de nuevo son de la forma $m_i = h_i v$, donde h_i depende de los acoplamientos de gauge¹⁸. Por tanto, esta h_i de gauge se conoce. Las masas también se miden, de donde sale el valor $v = 246 GeV$. Los acoplamientos de Yukawa de los fermiones pueden entonces ponerse en función de la masa de la partícula y del parámetro v : $h_i = m_i/v$.

Si se agregara una nueva especie al SM, por ejemplo un escalar $\hat{\chi}$ que tenga una interacción con el Higgs $h_\chi^2 \hat{\varphi}^2 \hat{\chi}^2$, este campo adquirirá una masa $m_\chi = hv$. Por otro lado, si ese campo ya tiene un término de masa $\mu_\chi^2 \hat{\chi}^2$, la masa será $m_\chi = \sqrt{\mu_\chi^2 + h_\chi^2 v^2}$. También se puede agregar fermiones al modelo, los cuales tendrán masas como ésta o más complejas. En esta tesis sólo se considerarán especies extra con masas de la forma

$$m_i(v) = \sqrt{\mu_i^2 + h_i^2 v^2}, \quad (1.31)$$

donde las μ_i suelen denominarse *masas invariantes* respecto a la simetría del sistema y en el SM (mínimo) son nulas.

Interesa tomar el valor de expectación estadístico (1.16) del campo $\phi \equiv \langle \hat{\varphi} \rangle$ como parámetro de orden. La energía libre (potencial efectivo a temperatura finita) $\mathcal{F}(\phi)$ se calcula perturbativamente con la fórmula (1.28). A orden cero en lazos (nivel árbol), está dado por el potencial (1.30)¹⁹,

$$\mathcal{V}_0(\phi) = -\frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4, \quad (1.32)$$

Las correcciones térmicas aparecen recién a un lazo, así que éste es también el potencial efectivo nivel árbol de temperatura cero. Tiene un máximo en $\phi = 0$ y un mínimo en $\phi = v$, que a este orden está dado por $v = m^2/\lambda$. La masa del Higgs H^0 a temperatura cero estaría dada, a este orden, por $m_H^2 = 2m^2 = 2\lambda v^2$. En realidad, lo que tiene sentido es expresar los parámetros del potencial m, λ en función de los parámetros físicos medibles $v \approx 246 GeV$, $m_H \approx 125 GeV$ [46]. También se puede elegir sumar un término constante tal que el mínimo de energía (el llamado *vacío verdadero*) sea igual a cero, que es el valor observado (o, mejor dicho, es un valor despreciable frente a la escala $e \sim v^4$). Se tiene entonces

$$\mathcal{V}_0(\phi) = -\frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 + \frac{\lambda}{4} v^4 = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2. \quad (1.33)$$

Las contribuciones de orden superior a (1.28) se separan en dos términos. Uno de ellos es la contribución de temperatura cero y el otro tiene la parte que depende de la temperatura. Así, el potencial efectivo de temperatura finita es de la forma

$$\mathcal{V}_{\text{ef}}^\beta(\phi) = \mathcal{V}_{\text{ef}}(\phi) + \Delta \mathcal{V}_{\text{ef}}^\beta(\phi), \quad (1.34)$$

donde \mathcal{V}_{ef} es la contribución a temperatura cero y $\Delta \mathcal{V}_{\text{ef}}^\beta$ es la corrección térmica.

¹⁸Por ejemplo, para el W se tiene un término $(g/2)^2 \Phi^2 W_\mu W^\mu$, que da $m_W = gv/2$, donde g es la constante de acoplamiento de $SU(2)$.

¹⁹Aquí ya se lo expresa reemplazando el valor de expectación termodinámico del campo, ϕ , en la misma forma funcional, con un leve abuso de notación, $\mathcal{V}_0(\phi) \equiv \mathcal{V}_0(\phi/\sqrt{2})$.

1.3.2.1. El potencial efectivo a temperatura cero

A orden 1 lazo, el término de temperatura cero es divergente y hay que regularizarlo. Para regularizar la teoría con un *cutoff*²⁰, se descomponen los parámetros del potencial (1.33) en una parte física (el valor que se mide) y otra que cancela las divergencias provenientes del cálculo a 1 lazo. Por tanto, el potencial efectivo a orden 1-lazo está dado por

$$\mathcal{V}_{\text{ef}}(\phi) = \mathcal{V}_0(\phi) + \mathcal{V}_1(\phi), \quad (1.35)$$

donde \mathcal{V}_0 y \mathcal{V}_1 ya están renormalizados²¹. La corrección a 1 lazo depende de ϕ sólo a través de $m_i(\phi)$, donde m_i son las funciones definidas en (1.31). Se imponen condiciones de renormalización tales que el mínimo del potencial, la masa del Higgs, y la densidad de energía del vacío, no cambien respecto a su valor a nivel árbol (ver [25]):

$$\mathcal{V}_1(v) = 0, \quad \frac{d\mathcal{V}_1}{d\phi}(v) = 0, \quad \frac{d^2\mathcal{V}_1}{d\phi^2}(v) = 0. \quad (1.36)$$

La contribución resultante a 1-lazo está dada por [28–30]

$$\mathcal{V}_1(\phi) = \sum_i \frac{\pm g_i}{64\pi^2} \left[m_i^4(\phi) \left(\log \left(\frac{m_i^2(\phi)}{m_i^2(v)} \right) - \frac{3}{2} \right) + 2m_i^2(\phi)m_i^2(v) - \frac{m_i^4(v)}{2} \right], \quad (1.37)$$

donde g_i es el número de grados de libertad de cada especie de partícula, $m_i(\phi)$ es la masa dependiente de ϕ ,

$$m_i^2(\phi) = h_i^2\phi^2 + \mu_i^2, \quad (1.38)$$

donde los signos + y – corresponden a bosones y fermiones respectivamente, y las μ_i son masas independientes de ϕ que están presentes incluso a altas temperaturas cuando la simetría no está rota (en el SM son cero).

Para los cálculos, finalmente las especies relevantes son aquellas con mayor acoplamiento al Higgs. En el SM, son los bosones Z ($g_Z = 3$, $h_Z \approx 0,37$) y W ($g_W = 6$, $h_W \approx 0,33$), el quark *top* ($g_t = 12$, $h_t \approx 0,7$), y los bosones de Higgs y Goldstone. Por simplicidad, es usual ignorar el sector de Higgs en estas correcciones²².

1.3.2.2. El potencial efectivo a temperatura finita

La densidad de energía libre de Landau resulta de agregar la contribución a temperatura finita al potencial efectivo,

$$\mathcal{F}(\phi, T) = \mathcal{V}_{\text{ef}}^\beta(\phi) = \mathcal{V}_{\text{ef}}(\phi) + \Delta\mathcal{V}_{\text{ef}}^\beta(\phi, T), \quad (1.39)$$

²⁰Término técnico en inglés, comúnmente utilizado en el formalismo de teoría de campos. Implica imponer algún *corte* o saturación en la teoría. En este caso se tienen integrales (respecto a módulos de momentos) que se extienden hasta infinito pero se cortan a una cierta escala lo suficientemente “alta”. Como resultado la integración depende de esa escala y puede separarse en una parte divergente (con la escala) y en una parte finita independiente de la escala. Tal separación es arbitraria y requiere condiciones de renormalización como, por ejemplo, las que se imponen en la expresión (1.36)].

²¹ \mathcal{V}_0 es la misma función que en (1.32), pero aquí ya depende de los parámetros físicos m, λ que dan los valores medidos de v, m_H . El abuso de notación es haber expresado antes como m^2 y λ a las magnitudes $m^2 + \delta(m^2)$ y $\lambda + \delta\lambda$ donde los términos con $\delta(m^2)$ y $\delta\lambda$ cancelan los infinitos de los órdenes superiores.

²²Los escalares, salvo que tengan acoplamientos muy fuertes con ϕ , no contribuyen significativamente a la “fuerza” de la transición, como se ve más adelante

donde la corrección térmica $\Delta\mathcal{V}_{\text{ef}}^\beta = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \dots$ se expande como una suma de términos a distinto orden en lazos. La contribución a 1-lazo es²³

$$\mathcal{F}_1(\phi, T) = \sum_i \frac{g_i T^4}{2\pi^2} I_{\mp} \left[\frac{m_i(\phi)}{T} \right], \quad (1.40)$$

y las integrales térmicas I_- , I_+ corresponden para las contribuciones de bosones y fermiones respectivamente

$$I_{\mp}(x) = \pm \int_0^\infty dy y^2 \log \left(1 \mp e^{-\sqrt{y^2+x^2}} \right). \quad (1.41)$$

Las integrales $I_{\pm}(x)$ tienen expansiones en potencias de x . Para bosones se tiene

$$\begin{aligned} I_-(x) = & -\frac{\pi^4}{45} + \frac{\pi^2}{12}x^2 - \frac{\pi}{6}x^3 - \frac{x^4}{32} \log \frac{x^2}{a_b} \\ & - 2\pi^{7/2} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{\zeta(2l+1)}{(l+2)!} \Gamma\left(l + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2l+4}, \end{aligned} \quad (1.42)$$

donde a_b está dada por $\log a_b = 3/2 - 2\gamma + 2 \log(4\pi)$, γ es la constante de Euler; ζ es la función zeta de Riemann, y Γ es la función Gamma. La expansión para fermiones es

$$\begin{aligned} I_+(x) = & -\frac{7\pi^4}{360} + \frac{\pi^2}{24}x^2 + \frac{x^4}{32} \log \frac{x^2}{a_f} \\ & + \frac{\pi^{7/2}}{4} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{\zeta(2l+1)}{(l+2)!} \left(1 - \frac{1}{2^{2l+1}}\right) \Gamma\left(l + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{x}{\pi}\right)^{2l+4}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

donde a_f está dado por $\log a_f = 3/2 - 2\gamma + 2 \log \pi$. También existen expansiones para grandes valores de x (ver [25]), que son útiles para evitar el cálculo numérico de las integrales.

1.3.2.3. Energía libre a alta temperatura

Aunque no es el caso más general que se considera en esta Tesis, vale la pena discutir la aproximación de alta temperatura, $m_i(\phi) \lesssim T$, que da una forma simple para la energía libre y ayuda a entender la restauración de la simetría. Para $\phi \sim T$, esto es válido para todas las partículas del SM. Más aun, la mayoría de ellas cumplen $m_i(\phi) \ll T$. Teniendo en cuenta las aproximaciones anteriores, para esas partículas muy livianas se pueden aproximar las integrales térmicas por el primer término en (1.42) y (1.43), que da la energía libre de radiación, $\mathcal{F} \propto T^4$. Para las más pesadas, como el top y los bosones de gauge, se puede truncar la expansión de las integrales térmicas a orden cuártico en m_i/T . Para masas dependientes de ϕ con la forma $m^2(\phi) = h^2\phi^2$ se obtiene

$$\mathcal{F} = -\frac{\pi^2}{90} g_* T^4 + \bar{\mathcal{V}}(\phi, T) + \rho_{fv}, \quad (1.44)$$

²³Esta expresión ya trabajada, sale de una previa, que puede verse en [28–30], de la forma $\mathcal{F}_1(\phi, T) = \sum_i (\pm g_i) T \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \log(1 \mp e^{-\mathcal{E}_i/T})$, con $\mathcal{E}_i = \sqrt{p^2 + m_i^2(\phi)}$. En un sentido histórico, para la estadística de muchos cuerpos cuánticos, cada sumando separadamente corresponde a la energía libre de un gas de bosones o fermiones multiplicado por la cantidad de partículas de la misma especie g_i .

con

$$\bar{\mathcal{V}}(\phi, T) = D (T^2 - T_0^2) \phi^2 - ET\phi^3 + \frac{\lambda(T)}{4} \phi^4. \quad (1.45)$$

En la ecuación (1.44), $\rho_{fv} = \lambda v^4/4$ es una constante (cuyo significado se ve a continuación) y el parámetro g_* es el número efectivo de grados de libertad “livianos”,

$$g_* = \sum_{\text{bosones}} g_i + \frac{7}{8} \sum_{\text{fermiones}} g_i, \quad (1.46)$$

donde las sumas son solo sobre partículas con masa $m_i \ll T$. Los parámetros en $\bar{\mathcal{V}}(\phi, T)$ están dados por [47]

$$D = \sum_{\text{bosones}} \frac{g_i h_i^2}{24} + \sum_{\text{fermiones}} \frac{g_i h_i^2}{48} \quad (1.47)$$

$$T_0^2 = \frac{1}{D} \left(\frac{m_H^2}{4} - \sum \frac{\pm g_i h_i^4}{32\pi^2} v^2 \right) \quad (1.48)$$

$$E = \sum_{\text{bosones}} \frac{g_i h_i^3}{12\pi} \quad (1.49)$$

$$\lambda(T) = \frac{m_H^2}{2v^2} - \sum \frac{\pm g_i h_i^4}{16\pi^2} \log \left(\frac{h_i^2 v^2}{T^2 a_i} \right) \quad (1.50)$$

(para el SM los bosones son el W y el Z , y el fermión es el top).

En esta aproximación se ve fácilmente que, a alta temperatura, $\phi = 0$ es el mínimo absoluto de la energía libre $\mathcal{F}(\phi, T)$, correspondiente a la llamada *fase simétrica*, mientras que a bajas temperaturas hay un mínimo absoluto $\phi_m(T) \neq 0$, asociado a la *fase de simetría rota*. Por tanto, la constante ρ_{fv} da la densidad de energía del falso vacío, y $\bar{\mathcal{V}}(\phi, T)$ da la diferencia de densidad de energía libre entre un valor ϕ y la fase simétrica. En el caso $E = 0$, al variar la temperatura se pasa con continuidad de una fase a la otra (a la temperatura T_0). Se tiene en este caso una transición de fase de segundo orden. En cambio, si $E \neq 0$, hay un rango de temperaturas (entre T_0 y otra temperatura T_1) en las que estos dos mínimos coexisten, separados por una barrera. En este caso la transición es de primer orden (ver la figura 1.1²⁴).

Los dos mínimos son degenerados a la temperatura crítica T_c , es decir, $\mathcal{F}(0, T_c) = \mathcal{F}(\phi_m, T_c)$. A las fases de simetría no rota y rota les corresponden las densidades de energía libre²⁵ $\mathcal{F}_u(T) = \mathcal{F}(0, T)$ y $\mathcal{F}_b(T) = \mathcal{F}(\phi_m(T), T)$. Aquí, si se reemplaza u por $+$ y b por $-$ vale todo lo que se expone en la sección 1.2.3.2.

Se dice que la transición de fase es más fuertemente de primer orden cuanto mayor sea el “salto” $\phi_c \equiv \phi_m(T_c)$. Se puede tomar el valor de ϕ_c/T_c como parámetro de orden adimensional. En la aproximación (1.45), es fácil ver que dicho salto (y en consecuencia el tamaño de la barrera) es proporcional al coeficiente E . Es importante notar que un tal término cúbico en el potencial efectivo es producido solo por bosones con masas de la forma $m(\phi) = h\phi$. En efecto, notar que sólo la integral térmica bosónica tiene un término cúbico en el desarrollo (1.42), y que este término es $m(\phi)^3$. Para $m(\phi) = \sqrt{\mu^2 + h^2\phi^2}$, esa contribución no se comporta como ϕ^3 salvo que $\mu \ll h\phi$. En tal caso

²⁴Notar que en la ecuación (1.7) es esencialmente la misma \mathcal{F} que en (1.44-1.45), con la simplificación de $\lambda(T) \approx cte$

²⁵La “ u ” y la “ b ” por *unbroken* y *broken*, *no roto* y *roto* en inglés.

se tiene $E \sim h^3$. En el modelo estándar, esto lo cumplen los bosones de gauge Z y W , pero el coeficiente E resulta demasiado pequeño, es decir, la transición es débilmente de primer orden ($\phi_c/T_c \ll 1$)²⁶. Por ese motivo, es usual considerar extensiones del SM con bosones extra, para tratar de lograr una transición fuertemente de primer orden. No obstante, conseguir un coeficiente cúbico grande no es fácil, dado que aparece una masa “térmica” $\sim T$, como se ve a continuación.

1.3.2.4. Mejora al potencial efectivo

Debido a un problema infrarrojo, para los bosones hay ciertas correcciones de orden superior en lazos que deben ser tenidas en cuenta: para ciertos diagramas, llamados margaritas, cada lazo agrega una potencia de $T^2/m(\phi)^2$. Es necesario “resumar” este tipo de diagramas a todo orden. Para esto se usa la aproximación de alta temperatura, y el resultado es que en el término cúbico $[m^2(\phi)]^{3/2}$ se debe hacer el reemplazo

$$m^2(\phi) \rightarrow \mathcal{M}^2(\phi) = m^2(\phi) + \Pi(T), \quad (1.51)$$

donde $\Pi(T)$ es la autoenergía. Esta Π es genéricamente $\sim h^2 T^2$, y se interpreta como una masa efectiva debida al apantallamiento del plasma. Como consecuencia, se pierde el importante término de la forma $-ET\phi^3$.

Solamente los 2 grados de libertad de la polarización transversal de los bosones de *gauge* tienen $\Pi = 0$ (de los 3 grados de libertad físicos que tiene el vector masivo). Por tanto, en la aproximación (1.49), es usual simplemente descartar las demás contribuciones, es decir, sumar solo sobre campos de gauge y corregir con un factor $2/3$,

$$E = \frac{2}{3} \sum_{\substack{\text{bosones} \\ \text{de gauge}}} \frac{g_i h_i^3}{12\pi}. \quad (1.52)$$

Más en general, se debe reemplazar m por \mathcal{M} (sólo en el término cúbico), lo que se hace substrayendo el término m^3 y agregando el correspondiente con \mathcal{M}^3 a la integral térmica:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(\phi, T) &= \sum_i \pm \frac{g_i T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dy y^2 \log \left[1 \mp \exp \left(-\sqrt{y^2 + m_i^2(\phi)/T^2} \right) \right] \\ &+ \sum_{\text{bosones } i} \frac{g_i T}{12\pi} [m_i^3(\phi) - \mathcal{M}_i^3(\phi)]. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Para bosones de gauge transversales, la segunda suma en (1.53) no tiene efecto, ya que $\mathcal{M} = m$. Notar que el primer término en (1.53) (el resultado a un lazo) es exacto, mientras que el segundo (la mejora del resultado a un lazo) tiene la aproximación $m/T \lesssim 1$. De todos modos, cuando esa aproximación deja de valer (i.e., para $T \ll m$), el término térmico Tm^3 deja de tener importancia. Por ejemplo, para un bosón escalar extra con $m = h\phi$ y h suficientemente grande, la expansión en potencias de m deja de valer, pero la transición de fase puede ser fuertemente de primer orden gracias a los términos de temperatura cero (1.37), como se ve más adelante en un caso específico en el capítulo 4.

²⁶Como consecuencia del pequeño valor de ϕ_m , el cálculo perturbativo en realidad no es válido, y se demuestra con cálculos *lattice* que la transición no es ni siquiera de segundo orden, sino superior.

1.4. Nucleación, expansión y percolación

En esta sección se introducen las técnicas de cálculo para el desarrollo de la transición de fases. Es decir, el seguimiento de como evoluciona la nucleación de dominios en la fase nueva. Para completar la implementación de los cálculos es, por supuesto, necesario recurrir al tratamiento hidrodinámico que se detalla en los siguientes capítulos, especialmente en lo que se refiere a conocer la velocidad a la se expanden las burbujas.

1.4.1. Cosmología y espacio-tiempo

La cosmología estándar modela la evolución del espacio-tiempo mediante la *Ecuación de Campo de Einstein* (ECE). Hay numerosos libros del tema, por ejemplo [48–51]. La ECE en componentes se escribe

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (1.54)$$

donde se tienen en cuenta las relaciones y/o definiciones:

$$\begin{aligned} \text{(Símbolos de Christoffel)} \quad \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} &= \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}\{\partial_{\nu}g_{\rho\mu} + \partial_{\mu}g_{\rho\nu} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}\} \\ \text{(Tensor de Curvatura de Ricci)} \quad R_{\mu\nu} &= \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} - \partial_{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\kappa}\Gamma_{\nu\kappa}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\kappa}\Gamma_{\sigma\kappa}^{\sigma} \\ \text{(Escalar de Curvatura de Ricci)} \quad R &= g^{\sigma\kappa}R_{\sigma\kappa} \\ \text{(Tensor de Einstein)} \quad G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \end{aligned} \quad (1.55)$$

siendo G la constante gravitación universal, \mathbf{g} y \mathbf{T} son los tensores métrico y de energía-momento respectivamente. Alternativamente, considerando la definición de un tensor \mathbf{S} cuyas componentes son $S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\sigma\kappa}T_{\sigma\kappa}$, la ecuación (1.54) puede reescribirse

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G S_{\mu\nu}. \quad (1.56)$$

La ecuación (1.54) establece la relación entre $g_{\mu\nu}$ y $T_{\mu\nu}$. En particular, como primera aproximación, el modelo de *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker* (FLRW) supone un universo cuya distribución de materia y energía (o mejor dicho su tensor de energía-momento) es homogénea e isótropa, lo que conduce a la solución para la métrica [51]

$$\begin{aligned} g_{ij} &= a^2(t) \left(\delta_{ij} + K \frac{x^i x^j}{1 - K \vec{x}^2} \right) \\ g_{i0} &= 0 \\ g_{00} &= -1 \end{aligned}, \quad (1.57)$$

Conocida como métrica de FLRW, que aquí se expresa en coordenadas espaciales cuasi-cartesianas (con índices latinos y “0” para la componente temporal), donde $a(t)$ es un factor de escala dependiente del tiempo, el parámetro $K = 1, 0, -1$ corresponde a universos cuya curvatura espacial es positiva, nula, o negativa respectivamente. En esta tesis se considera únicamente la hipótesis de universo espacialmente plano $K = 0$. La evolución del factor de escala la da la ecuación de Friedmann [51]

$$H = \sqrt{8\pi G\rho/3}, \quad (1.58)$$

que relaciona el ritmo de expansión ($H = \dot{a}/a$), también llamado ritmo de Hubble,

$$\frac{da}{a} = H dt, \quad (1.59)$$

con $\rho \equiv e$, la densidad de energía (homogénea) en el universo. Además, de la conservación del tensor de energía-momento, también se obtiene, en un universo de LFRW plano, la ecuación (expansión adiabática) [51]

$$de = -3w \frac{da}{a}. \quad (1.60)$$

Igualando da/a entre (1.59) y (1.60) se tiene $H dt = -de/(3w)$. Teniendo en cuenta un fluido ultra relativista (radiación), con ecuación de estado $P \approx e/3$ y $e \sim T^4$, se tiene una ecuación aproximada para estimar la evolución de la temperatura $T(t)$,

$$\frac{dT}{dt} \approx -HT = -\sqrt{\frac{8\pi G e(T)}{3}} T. \quad (1.61)$$

A los fines prácticos de esta tesis, conviene mejorar este resultado. En una etapa inicial de la transición, cuando domina la fase “+”, la variación de la temperatura la determina la ecuación (1.60) tomando la densidad de energía $e = e_+$. Entonces, usando $w = sT$, $e = Tds$ y $s = -d\mathcal{F}/dT$, se tiene

$$dT = -3 \frac{d\mathcal{F}_+/dT}{d^2\mathcal{F}_+/dT^2} \frac{da}{a}. \quad (1.62)$$

La evolución del factor de escala a da (1.59) evaluada con el ritmo de expansión de la ecuación de Friedmann (1.58) evaluando $e = e_+$. Si la fase dominante a alta temperatura se constituye solo de radiación y energía de vacío, $\mathcal{F}_+ \sim T^4$, entonces la ecuación (1.62) se vuelve $dT = -T da/a$, la cual da el bien conocido resultado (1.61). No obstante, algunos de los modelos que se consideran en el capítulo 4 tienen partículas con masas $\sim T$ en la fase “+”. En general la expresión (1.62) da una más correcta dependencia de la temperatura con el tiempo y es la que optamos utilizar en nuestros cálculos numéricos en vez de (1.61).

En general se entiende que la homogeneidad solo se cumple para escalas lo suficientemente grandes pero existen inhomogeneidades de diferentes fuentes. Las únicas que interesan en este trabajo son las que pueden asociarse a las transiciones de fases. Por ejemplo, los dominios se nuclean de forma aleatoria rompiendo cualquier homogeneidad previa si la hubiese (por simplicidad se desprecia cualquier otra fuente), lo que resulta en flujos hidrodinámicos en diferentes direcciones y regiones del espacio. El efecto que esas perturbaciones tienen en la métrica se manifiesta como ondas gravitatorias, cuya posibilidad de detección se discute en el capítulo 4.

Si el universo fuera completamente homogéneo habría un sistema de referencia comóvil con todo el fluido, pero en general no es posible definir tal sistema salvo que se consideren promedios de velocidades en regiones lo suficientemente grandes. La longitud de escala de esas regiones tiene que ser mucho menor que la escala de Hubble $\sim H^{-1}$ para que el modelo de FLRW resulte válido, cosa que al menos en la actualidad se verifica observacionalmente. Aquí, las burbujas se supone que nuclean y expanden con centros fijos respecto al marco de referencia comóvil (promedio).

1.4.2. Ordenes de magnitud en la transición de fase

La escala de la transición la da $v = \langle \hat{\varphi} \rangle_{T=0}$, el valor de expectación del vacío. Desde un punto de vista dimensional

$$T \sim v \quad (1.63)$$

$$e \sim v^4 \quad (1.64)$$

A su vez T fija la escala de los procesos microfísicos, como la fricción experimentada por el frente de transición al colisionar con las partículas del plasma.

En el sistema de unidades con $c, \hbar = 1$ la masa de Planck es $M_P = 1/\sqrt{G} \sim 10^{19}$ GeV. Entonces, por la ecuación (1.58), $H \propto \sqrt{G}e$, se tiene

$$H \sim \frac{v^2}{M_P} \quad (1.65)$$

A su vez H^{-1} fija la escala de tiempo característico a la cual sucede la transición y tamaños o distancias relevantes en ese proceso.

Con estas expresiones, para la escala electrodébil ($v \sim 100$ GeV) se puede estimar la magnitud adimensional

$$\frac{H}{T} \sim \frac{v}{M_P} \sim 10^{-17}, \quad (1.66)$$

que aparece en distintas estimaciones de órdenes de magnitud más adelante.

1.4.3. Encuentro de burbujas y percolación

En principio, inmediatamente que la temperatura desciende por debajo de T_c existe probabilidad no nula que las burbujas comiencen a nuclear y expandirse. No obstante, al inicio hay muy pocas burbujas. Hay cierta ambigüedad en determinar cuál es el momento en que comienza la transición, pero como referencia ese “comienzo” es usualmente tomado en el momento en que el sistema alcanza a tener una burbuja por volumen de Hubble $V_H = H^{-3}$. En lo que sigue se toma este como el tiempo de nucleación de las “primeras” burbujas. Estas resultan ser luego las burbujas que alcanzan el mayor tamaño y, en consecuencia, las que más perturben el plasma.

Por otro lado, el encuentro entre paredes de distintas burbujas pueden comenzar tan pronto como hay probabilidad no nula de tener un par de burbujas en un volumen causal (que aquí es del orden de un volumen de Hubble). No obstante, al comienzo las burbujas son muy pocas y muy pequeñas, por lo que esos encuentros son muy improbables. El sistema comienza a ser afectado apreciablemente por el encuentro de burbujas una vez que la densidad y tamaño de estas llegan a ser suficientemente grandes. Primero, se forman *clusters* (*racimos* en inglés) de unas pocas burbujas, luego *clusters* más y más grandes. La *percolación*²⁷ sucede cuando un cluster de tamaño

²⁷La palabra *percolación*, originalmente asociada al fenómeno de filtración de un fluido en un material poroso, desde un punto de vista estadístico, también se utiliza para indicar que se tiene una cantidad suficiente de poros distribuidos aleatoriamente tal que existe un camino de flujo en el medio. En fenómenos de conducción puede verse usada indistintamente para referirse a la cantidad de resistencias presentes a partir de la cual la conducción no es posible, como a la cantidad por debajo de la cual la conducción es posible. En un sentido puramente matemático la percolación implica que se alcanza a constituir una línea de dominios que atraviesa cierto volumen.

infinito se extiende a través del medio o, equivalentemente, cuando hay un cluster extendiéndose de lado a lado en una caja del tamaño de Hubble. La percolación ha sido estudiada numéricamente para esferas (de igual tamaño) en una gran caja. Con esferas distribuidas al azar y permitiendo superposición, una cadena infinita se establece cuando la fracción del espacio cubierta por las esferas es 0,29 [52, 53]. En lo que sigue se supone que ese es el momento de mayor “colisión de burbujas”, que es lo que interesa para la generación de ondas gravitatorias.

1.4.4. Ritmo de nucleación

La nucleación de burbujas [54–58] está gobernada por la acción del “instantón” tridimensional²⁸

$$S_3 = 4\pi \int_0^\infty r^2 dr \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + \Delta\mathcal{F}(\phi(r)) \right], \quad (1.67)$$

donde $\Delta\mathcal{F}$ es el dado por (1.8). La solución *con rebote*²⁹ de esta acción, la cual se obtiene extremando S_3 , da la configuración radial de la burbuja nucleada, suponiendo que esta tiene simetría esférica. El integrando de la acción (1.67) es esencialmente la densidad de energía libre teniendo en cuenta gradientes de energía debido a variaciones del campo. En este caso que se extrema, la acción del rebote coincide con la energía libre necesaria para crear una burbuja crítica en equilibrio inestable entre expansión y contracción. La solución obedece la ecuación

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} = \frac{d\Delta\mathcal{F}}{d\phi}, \quad (1.68)$$

con condiciones de borde

$$\frac{d\phi}{dr}(0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = 0. \quad (1.69)$$

La probabilidad de “efecto túnel térmico” (o “activación térmica”)³⁰ para la nucleación de burbuja por unidad de volumen y unidad de tiempo es [56–58]

$$\Gamma(T) \simeq A(T) e^{-S_3(T)/T}, \quad (1.70)$$

con $A(T) = [S_3(T)/(2\pi T)]^{3/2} T^4$. A la temperatura crítica, $T = T_c$, S_3 diverge y el ritmo de nucleación se anula. A medida que T decrece por debajo de T_c , S_3 decrece y Γ crece. En la temperatura a la cual la barrera entre los mínimos de \mathcal{F} desaparece, S_3 se anula, por lo que, cerca de ese punto, la nucleación se vuelve $\Gamma \sim T^4$, que es extremadamente alta comparada con H^4 [ver (1.66)].

²⁸Esta denominación de “instantón”, heredada de la teoría de campo a temperatura cero, se debe a que, si bien el cálculo se realiza en el formalismo de tiempo imaginario, todo “sucede” en un instante sin variar el tiempo real.

²⁹Es *bounce solution* en inglés, terminología que proviene de interpretar, en el formalismo de tiempo complejo, que se tiene una acción euclídea donde el potencial queda dado vuelta y la región de barrera de potencial se convierte en un pozo donde hay una solución *con rebote* (como en el caso de una partícula rebotando en un pozo). A partir de esa solución clásica se suelen realizar cálculos perturbativos, tipo WKB o *steepest descent*, para calcular amplitudes de probabilidad de transición por “efecto túnel” a través de la barrera.

³⁰A diferencia de la teoría de campos a temperatura cero, aquí son importantes las fluctuaciones térmicas que hacen al sistema “trepár” la barrera de energía libre. El “efecto túnel” (de mecánica cuántica) domina más bien a bajas temperaturas cuando dichas fluctuaciones son más pequeñas.

1.4.5. Aproximación de pared delgada

Desde un punto de vista dimensional, para la microfísica los tiempos y longitudes características vienen dados por la temperatura. Si la configuración del campo en torno al frente de transición depende de la microfísica, el espesor de la “pared” de burbuja típicamente sería $\delta r \sim T^{-1}$. A su vez, el tiempo de duración de acontecimientos cosmológicos viene dado por la escala de Hubble H^{-1} al momento en que estos suceden. En particular, la duración de la transición de fase cosmológica es el tiempo que tarda un volumen de Hubble en llenarse con burbujas hasta la percolación. Entonces, la escala característica de las burbujas se espera que sea desde $R_b \sim H^{-1}$ a unos pocos órdenes de magnitud menor, por ejemplo $R_b \sim 10^{-4} H^{-1}$. Como aquí interesa principalmente la aplicación a la escala electrodébil, teniendo en cuenta (1.66) se estima la relación de escalas como $\delta r/R_b \sim 10^{-17}-10^{-13}$, la pared es muy delgada frente al radio de la burbuja.

Para interpretar (1.67), a continuación se supone que vale la aproximación de pared delgada en la configuración inicial con la que se nuclea una burbuja. En esta aproximación se cumple que $\Delta\mathcal{F} \approx 0$ fuera de la burbuja y $\Delta\mathcal{F} \approx -(P_- - P_+) = -\Delta P$ dentro de la misma. Entonces, la (1.67) puede reescribirse como

$$S_3 \approx 4\pi R_b^2 \sigma - \frac{4\pi}{3} R_b^3 \Delta P, \quad (1.71)$$

donde la magnitud $\sigma \equiv \int dr (d\phi/dr)^2$ se interpreta como una densidad de energía superficial (se ve más en detalle en la sección 2.3). En la (1.71) se ve la competencia de dos términos, uno es la energía que se acumula en la pared al expandirse (asociado a tensión superficial) y el otro es el trabajo que le hace la presión al expandirla. La burbuja solo puede expandirse cuando la presión realiza suficiente trabajo para “crear” más superficie. La ecuación equivalente a (1.68) sale de extremar (1.71) haciendo $dS_3/dR_b = 0$, que representa el caso límite en que las fuerzas de tensión y presión se igualan³¹. En tal caso se despeja el radio inicial de la burbuja

$$R_b^{\text{inicial}} \sim \frac{\sigma}{\Delta P}. \quad (1.72)$$

Notar que previamente se justifica la aproximación de pared delgada considerando radio de burbuja característico, bastante desarrollado, luego de cierto tiempo en expansión. Aquí en cambio, en (1.71) y (1.72), se hace referencia al radio inicial con el que se nuclea la burbuja, que según (1.72) va como $\sim 1/\Delta P$. Cerca de la temperatura crítica, donde vale $\Delta P \propto (T_c - T)$, ese radio es muy grande, lo que es compatible y respalda considerar la aproximación de pared delgada³². En ese caso, al reemplazar (1.72) en (1.71) se tiene

$$S_3|_{T \sim T_c} \sim \frac{\sigma^3}{\Delta P^2}. \quad (1.73)$$

³¹Es fácil ver que las fuerzas netas de presión y tensión superficial sobre media burbuja (una semiesfera) son $\pi R_b^2 \Delta P$ y $2\pi R_b \sigma$. Igualándolas se tiene la misma condición que haciendo $dS_3/dR_b = 0$.

³²En general, como la configuración inicial la dicta (1.67), que depende de la energía libre, donde el valor de expectación v fija la escala de la barrera, se espera que $R_b^{\text{inicial}} \sim v^{-1}$ (al igual que $\delta r \sim T^{-1} \sim v^{-1}$). Entonces, a temperaturas alejadas de T_c , en las que $R_b^{\text{inicial}} \sim \delta r$, la expresión (1.72) ya no es una buena estimación, tampoco la (1.71) pero sirve para una interpretación cualitativa.

1.4.6. “Primeras” burbujas

Se define el tiempo de nucleación de las primeras burbujas, t_i , por la condición

$$n(t_i) V_H = 1, \quad (1.74)$$

donde la densidad de número de burbujas nucleadas es

$$n(t) = \int_{t_c}^t dt' \Gamma(T') \left(\frac{a'}{a}\right)^3 f_+(t'), \quad (1.75)$$

donde t_c es el tiempo en el cual el Universo alcanza la temperatura crítica T_c . Aquí todas las magnitudes primadas representan el valor que toman a tiempo t' . Los factores de escala se colocan al tener en cuenta que las burbujas nucleadas a tiempo t' con una densidad de número $dt' \Gamma(T')$, se diluyen hasta el tiempo t debido a la expansión del universo. En esta etapa inicial de nucleación, la variación de temperatura se determina por la ecuación (1.62). Además el factor de f_+ , la fracción de volumen correspondiente a la fase “+”, se coloca para tener en cuenta que las burbujas solo nuclean en esa fase. No obstante, en el cálculo del tiempo de nucleación para la primer burbuja se puede tomar $f_+ \approx 1$. Más aún, en la literatura a veces se establece la condición (1.74) de forma más rudimentaria aún, directamente

$$\Gamma(t_i) H^{-4} \sim 1. \quad (1.76)$$

A partir de esta expresión se puede tener una buena idea del valor de S_3/T al momento de nucleación de la “primeras” burbujas. Haciendo $\Gamma \sim T^4 e^{-S_3/T}$ y considerando (1.63) y (1.65), se tiene $S_3/T \simeq 4 \log(M_P/v)$. Evaluando con (1.66) se tiene que para la transición electrodébil $S_3(T)/T \simeq 150$. Si se usa en cambio la ecuación (1.74), da un poco menor [59], $S_3(T)/T \simeq 140$. En general resulta una buena estimación considerar que

$$\left. \frac{S_3}{T} \right|_{t \sim t_i} \sim 140-150. \quad (1.77)$$

1.4.7. Fracción de volumen ocupada por burbujas

Suponiendo una nucleación homogénea a lo largo de la región de fase “+”, la fracción de volumen ocupada por las burbujas es $f_- = 1 - f_+$, donde f_+ es [60]

$$f_+(t) = \exp \left[-\frac{4\pi}{3} \int_{t_c}^t dt' \Gamma(T') \left(\frac{a'}{a}\right)^3 R_b(t', t)^3 \right]. \quad (1.78)$$

El radio de una burbuja que se nuclea en el tiempo t' y se expande hasta el tiempo t es

$$R_b(t', t) = R_i(T') \frac{a}{a'} + \int_{t'}^t v_w(T'') \frac{a}{a''} dt'', \quad (1.79)$$

donde R_i es el radio inicial de la burbuja, que inmediatamente se vuelve despreciable en comparación al segundo término en (1.79). La velocidad es función de la temperatura y

por tanto, en un dado tiempo t , todas las paredes de burbuja avanzan con velocidad³³ $v_w(T)$, donde T evoluciona de acuerdo a la ecuación (1.62). Los factores que involucran a 's en las ecuaciones (1.78) y (1.79) tienen en cuenta el hecho que la densidad de número de burbujas nucleadas se diluye y el radio se estira por la expansión del Universo a partir de t' hasta t . El exponente en la ecuación (1.78) daría un resultado *ingenuo* para f_- suponiendo un ritmo de nucleación homogéneo a lo largo del espacio (incluyendo las regiones de fase “-”). Así, la ecuación (1.78) evita recontar el volumen superpuesto entre burbujas que colisionan y permite descartar la nucleación en la región dentro de una burbuja ya existente³⁴. Este resultado se puede obtener, por ejemplo, considerando la probabilidad que un dado punto del espacio caiga fuera de cualquier burbuja. Notar que la ecuación (1.78) supone que la nucleación es homogénea en la fase “+”, no obstante pueden haber perfiles de temperatura que se extiendan fuera de las burbujas. Más adelante, en el capítulo 4, se explica como se tienen en cuenta esos casos.

1.4.8. Duración de la transición

Como se explica en la subsecciones 1.4.3 y 1.4.6, el tiempo de percolación t_p se estima como aquel tal que $f_-(t_p) \approx 0,3$ y el de nucleación de las primeras burbujas t_i como aquel que cumple la condición (1.74). La duración del intervalo de tiempo entre ambos eventos, $t_p - t_i$, debería ser una buena estimación de la duración de la transición, aunque su cálculo requiere una evaluación explícita de la energía libre y un seguimiento de la hidrodinámica de la transición. Ese cálculo recién se realiza en el capítulo 4.

Respecto a una estimación simple, a orden de magnitud, del tiempo que dura la transición, se encuentra ampliamente extendido considerar la que se obtiene en la referencia [61, 62], cuya idea se expone a continuación. Suponiendo que en el ritmo de nucleación (1.70) la variación de la exponencial es mucho mayor que la del prefactor $A(T)$ y que el exponente $S_3(T)/T$ tiene que ser de orden mayor que la unidad [ver la expresión (1.77)], a partir de algún tiempo de referencia t_* se puede aproximar $A(T) \approx cte$ y $S_3(T)/T \approx S_3(T_*)/T_* - \beta(t - t_*)$, lo que conduce a

$$\Gamma(t) \approx \Gamma_* e^{\beta(t-t_*)}, \quad (1.80)$$

donde³⁵ $\beta/H_* = [T d(S_3/T)/dT]_{T=T_*}$ y en general cualquier magnitud con índice “*” significa que se evalúa a $t = t_*$. El valor de β conviene estimarlo numéricamente, para evitar propagación de errores en la exponencial (1.80). Sin embargo, para tener una idea de su valor, se puede usar una aproximación analítica que vale cerca de T_c . Considerando que ya hay burbuja nucleada, la estimación (1.73) de $S_3|_{T \sim T_c}$ y que cerca de T_c la diferencia de presión entre fases es $\Delta P \propto T_c - T$, se tiene $S_3/T \propto (T_c - T)^{-2}$ (donde se ve la divergencia a $T = T_c$). De ahí sale que $d(S_3/T)/dT \approx 2(S_3/T)/(T_c - T)$ y, entonces, $\beta/H_* \approx 2(S_{3*}/T_*) T_*/(T_c - T_*)$. Teniendo en cuenta la estimación (1.77), válida para $t_* \sim t_i$, y considerando T_* entre $0,99 T_c$ y $\frac{1}{3} T_c$ [es decir, $(T_c - T_*)$ entre

³³Subíndice “w” por *wall* (pared, en inglés). En general esta velocidad, como se ve en los siguientes capítulos, depende de la temperatura porque, por ejemplo, la diferencia de presión entre fases (que impulsa a la pared) depende de a qué temperatura ocurre la transición.

³⁴Además, aquí se considera que cada parte de la pared aún no colisionada continúa moviéndose del mismo modo independientemente a si tal colisión ya se encuentra sucediendo en algún punto.

³⁵Sale de considerar (1.61) y hacer $d(-S_3/T)/dt = dT/dt d(-S_3/T)/dT = HT d(S_3/T)/dT$.

$\sim 10^{-2} T_c$ y $\sim T_c$], se estima que el rango de posibles valores es³⁶

$$\frac{\beta}{H_*} \simeq 10^4-10^2. \quad (1.81)$$

No obstante, más adelante en el capítulo 4 se señala que el parámetro β también puede hacerse cero y volverse negativo.

Utilizando la expresión (1.80) en la integral que aparece en (1.78), despreciando la expansión del universo (luego la variación del factor de escala), tomando velocidad de pared de burbuja v_w constante y reemplazando $t_c \rightarrow -\infty$ (afecta poco el resultado por la supresión exponencial) se obtiene

$$f_+(t) \approx \exp[-8\pi v_w^3 \Gamma(t)/\beta^4] \quad (1.82)$$

A pesar de toda la ambigüedad que existe para definir los momento en que comienza y termina la transición, a groso modo se puede tomar como inicio algún tiempo mínimo t_m en el que $f_+(t_m) = e^{-m} \approx 1$ (luego $m \ll 1$) y un tiempo máximo t_M para el cual $f_+(t_M) = e^{-M} \approx 0$ (luego $M \gg 1$). Entonces, la duración de la transición debe ser

$$\delta t \equiv t_M - t_m = \ln \left(\frac{M}{m} \right) \beta^{-1}, \quad (1.83)$$

que depende solo logarítmicamente respecto a esas definiciones imprecisas de comienzo y finalización de la transición de fase³⁷. Es por este resultado de [61, 62] que en la literatura se estima la escala temporal para la duración de la transición como $\delta t \sim \beta^{-1}$. Por consistencia con las aproximaciones que llevan a su derivación (despreciable expansión del universo) se requiere que al menos respecto al tiempo de Hubble se cumpla: $\beta^{-1} \ll H^{-1}$ [compatible con la estimación (1.81)].

Más adelante (sección 4.3.2) se discute que la aproximación $\delta t \sim \beta^{-1}$ puede afectar apreciablemente la estimación del tamaño de burbuja, relevante en la generación de ondas gravitatorias, por lo que se propone una corrección.

1.5. Ondas Gravitatorias

Como se ve en la sección 1.4.8, en general la transición sucede en una escala de tiempo $\delta t \sim \beta^{-1}$ mucho más chica que la edad del universo al momento que esta sucede, $t \sim H^{-1}$. Esto justifica, en el tratamiento de los próximos capítulos 2 y 3, considerar un espacio tiempo como el de relatividad especial para el estudio de la hidrodinámica involucrada en la transición. No obstante, para describir la historia del universo resulta más adecuado, en vez de una métrica de Minkowski, considerar la FLRW (ver sección 1.4.1). En la idealización de FLRW se supone un universo homogéneo e isótropo. Sin embargo, durante una transición de fase fuertemente de primer orden, el tensor de energía momento del plasma y las paredes de burbuja pueden presentar inhomogeneidades lo suficientemente fuertes como para ser fuentes de Ondas Gravitatorias (OG o

³⁶Aquí se barre un rango muy amplio. Si ya hay nucleación a $T_* = 0,99 T_c$ implica una transición muy débilmente de primer orden (tal vez demasiado para ser de interés en esta tesis). Mientras que una transición que aún sucede a $T_* = \frac{1}{3} T_c$ implica que comenzó con bastante sobreenfriamiento.

³⁷Como ejemplo, tomando $m = 0,01$ y $M = 4$ se tiene $f_+(t_m) \approx 0,99$ y $f_+(t_M) \approx 0,02$, lo que implica $\ln(M/m) = \ln(400) \approx 6$, que no afecta al orden de magnitud de β^{-1} .

GW por sus sigla en inglés³⁸) que perturban el espacio tiempo de FLRW. Es decir, el estudio de OG de origen cosmológico (y específicamente un fondo estocástico) requiere perturbar la métrica de FLRW³⁹, en contraste con las fuentes astrofísicas que corresponden a perturbaciones en la métrica de Minkowski.

Si bien en esta sección se exponen varias nociones sobre el tema, en general el estudio de perturbaciones de la ecuaciones de campo de Einstein tiene un conjunto de dificultades y sutilezas que no se tratan a fondo en esta tesis. Aquí también se toman resultados de cálculos para distintas fuentes de OG que pueden estar presentes durante la transición. A su vez, estas fuentes se identifican de descomponer el tensor de energía-momento total en distintos aportes. El estudio de las mismas está plagado de aproximaciones en general bastante groseras y que tampoco se discuten extensamente en esta tesis. Es de esperarse que, con el futuro refinamiento de estos cálculos y la construcción de detectores cada vez más sensibles, eventualmente sea posible censar e incluso medir parámetros de modelos de Física de partículas mediante el espectro de OG primordiales, o también podrían identificarse propiedades de las transiciones de fase para, por ejemplo, poder respaldar algún modelo de bariogénesis. En las publicaciones de actualidad, incluso aquellos cálculos que dan como resultado un espectro completo de OG deben ser aún tomados únicamente como bocetos, todavía muy mejorables. De todos modos es importante comenzar a realizar ese estudio y el capítulo 4 apunta en esa dirección aplicando los resultados de espectros de OG que se compilan a continuación.

1.5.1. ¿Qué es una Onda Gravitatoria?

1.5.1.1. La aproximación de *onda corta*

Como primera hipótesis se supone que el tensor métrico puede separarse en frecuencias, es decir sus componentes son la suma de dos aportes que varían a diferentes escalas espaciales:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{\text{low}} + g_{\mu\nu}^{\text{high}} \quad (1.84)$$

El aporte $g_{\mu\nu}^{\text{low}}$ es el que varía en las escalas más grandes (bajas frecuencias) y $g_{\mu\nu}^{\text{high}}$ es el que lo hace a escalas pequeñas (altas frecuencias)⁴⁰. En la llamada aproximación de *onda corta* se supone que se tiene un espacio-tiempo con una métrica de fondo cuyas componentes son⁴¹ $g_{\mu\nu}^{(B)} \equiv g_{\mu\nu}^{\text{low}}$ y que en este existe y se propaga la onda (con longitud de onda relativamente corta) de un campo tensorial cuyas componentes son $h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}^{\text{high}}$.

Definiendo adecuadamente una variedad de cinco dimensiones, foliaciones de cuatro dimensiones (que se interpretan como distintos espacio-tiempo 3+1) y ciertos difeomorfismos (*pullback* y/o *pushforward*), es posible establecer formalmente la relación entre el tensor métrico \mathbf{g} del espacio tiempo “perturbado” y los tensores $\mathbf{g}^{(B)}$ (métrico) y \mathbf{h} (campo propagándose) del espacio-tiempo “sin perturbar” de fondo (ver, por ejemplo [63]). Si bien poder hacer eso no es algo que se suela tener en cuenta para el tipo de cálculos que aquí interesan, es lo que le da sentido a interpretar una contribución de

³⁸ *Gravitational Waves* (GW).

³⁹ Si bien $\beta^{-1} \ll H^{-1}$, la agitación turbulenta del plasma, fuente de OG, podría continuar mucho después de la transición, lo que hace necesario considerar la expansión del universo no solo para tener en cuenta el corrimiento al rojo.

⁴⁰ Son *low* y *high*, por *alta* y *baja* en inglés.

⁴¹ La etiqueta (B) es por *background*, *fondo* en inglés.

la métrica como si fuera la onda de un campo de *gauge* que existe en un universo con otra métrica distinta. No obstante, como se ve a continuación, $g_{\mu\nu}^{\text{low}}$ y $g_{\mu\nu}^{\text{high}}$ en general no son independientes ni ninguno de los dos es conocido *a priori*.

Esta separación en frecuencia se supone que también está presente en las componentes de los distintos tensores involucrados en la ECE,

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu}^{\text{low}} + R_{\mu\nu}^{\text{high}} \\ S_{\mu\nu} &= S_{\mu\nu}^{\text{low}} + S_{\mu\nu}^{\text{high}}, \end{aligned} \quad (1.85)$$

lo que permite separar la ecuación (1.56)

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{\text{low}} &\approx -8\pi G S_{\mu\nu}^{\text{low}} \\ R_{\mu\nu}^{\text{high}} &\approx -8\pi G S_{\mu\nu}^{\text{high}}. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Notar que en general $R_{\mu\nu}^{\text{low/high}}$ no se expresa en función de $g_{\mu\nu}^{\text{low/high}}$ del mismo modo que $R_{\mu\nu}$ se expresa en función de $g_{\mu\nu}$ en la expresión (1.55). Esta última involucra producto de términos cruzados con distintas frecuencias. Puede suceder, por ejemplo, que el producto de dos términos que varían en una escala pequeña tenga un aporte que varía en una escala grande⁴². En general, la separación (1.86) no representa un sistema de ecuaciones desacopladas para $g_{\mu\nu}^{\text{low}}$ y $g_{\mu\nu}^{\text{high}}$. Es decir, en general las dos ecuaciones de la expresión (1.86) dependen de $h_{\mu\nu}$.

Si se trabaja perturbativamente, considerando $h_{\mu\nu} \propto \mathfrak{h}$, donde $\mathfrak{h} \ll 1$ se interpreta como la amplitud típica de la onda, tiene sentido la expansión en potencias de $h_{\mu\nu}$. Por ejemplo, para el tensor de Ricci es

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^{(0)} + R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)} + R_{\mu\nu}^{(3)} + R_{\mu\nu}^{(4)} + \dots, \quad (1.87)$$

donde $R_{\mu\nu}^{(j)}$ contiene solo términos con las potencias j -ésimas de $h_{\mu\nu}$. A partir de $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(B)} + h_{\mu\nu}$ se pueden expresar los términos de la expansión $g^{\mu\nu} = g^{(0)\mu\nu} + g^{(1)\mu\nu} + g^{(2)\mu\nu} + \dots$ en función de contracciones entre los $g^{(B)\mu\nu} \equiv g^{(0)\mu\nu}$ (las componentes de la versión contravariante de la métrica $\mathbf{g}^{(B)}$) y los $h_{\mu\nu}$. Con estos se pueden calcular los distintos términos en potencias de $h_{\mu\nu}$ para los $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ y los $R_{\mu\nu}$. El cálculo es simple aunque algo tedioso.

Por otro lado, la aproximación de onda corta implica que si la longitud de onda típica (determinada por la fuente) es λ y la escala de variación típica de la métrica de fondo es L_B , entonces $\lambda/L_B \ll 1$. En general \mathfrak{h} y λ/L_B podrían ser independientes, lo cual en general implica que el orden de magnitud de los distintos términos en (1.87) no es completamente evidente salvo que se tengan en cuenta ambas magnitudes. Por ejemplo, si se cumple $\lambda/L_B \sim \mathfrak{h}$ se tiene que $R_{\mu\nu}^{(0)} \sim R_{\mu\nu}^{(2)}$. Para ver esto, se debe tener en cuenta que las derivadas de la métrica de *background* van como $|\partial g^{(B)}| \sim 1/L_B$ y las de la perturbación como $|\partial h| \sim \mathfrak{h}/\lambda$. Además, $R_{\mu\nu}^{(2)}$ se constituye con términos de la forma $(\partial h)^2$ y $h\partial^2 h$, ambos de orden $\sim (\mathfrak{h}/\lambda)^2$; mientras que $R_{\mu\nu}^{(0)}$ se constituye con términos de la forma $(\partial g^{(B)})^2$, $g^{(B)}\partial^2 g^{(B)}$ y $(g^{(B)}\partial g^{(B)})^2$, todos de orden $\sim 1/L_B^2$. Es decir, si $\lambda/L_B \sim \mathfrak{h}$, tanto $R_{\mu\nu}^{(0)}$ como $R_{\mu\nu}^{(2)}$ son de orden $1/L_B^2$. A continuación se discute

⁴²Una analogía simple: si se tuviese el producto de dos funciones, como senos, con escalas de variación $\lambda_1 \gtrsim \lambda_2$ muy parecidas, sería algo como $\text{Sen}(2\pi x/\lambda_1)\text{Sen}(2\pi x/\lambda_2) \propto \text{Cos}(2\pi x/\lambda^*) - \text{Cos}(2\pi x/\lambda')$, donde $\lambda^* \approx (\lambda_1)^2/|\lambda_2 - \lambda_1|$ y $\lambda' \approx \lambda_1/2$. En tal caso λ^* puede llegar a ser muy grande cuando $\lambda_1 \sim \lambda_2$.

la validez e interpretación de tal situación.

En general para cada $j \geq 2$ vale la separación $R_{\mu\nu}^{(j)} = R_{\mu\nu}^{(j)\text{low}} + R_{\mu\nu}^{(j)\text{high}}$, donde ambos términos dependen de $h_{\mu\nu}$ y se estima que tienen una “amplitud” del mismo orden de magnitud, pero con frecuencias de oscilación bien diferenciadas. Por otro lado, es claro que $R_{\mu\nu}^{(0)} \equiv R_{\mu\nu}^{(0)\text{low}}$ y $R_{\mu\nu}^{(1)} \equiv R_{\mu\nu}^{(1)\text{high}}$, porque en ausencia de términos $h_{\mu\nu}$ y solo con $g_{\mu\nu}^{(B)}$ se tiene únicamente variación en grandes escalas, mientras que teniendo solo productos entre un $h_{\mu\nu}$ y un $g_{\mu\nu}^{(B)}$ solo hay altas frecuencias. Entonces, la expresión (1.86) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(0)\text{low}} &= -R_{\mu\nu}^{(2)\text{low}} - R_{\mu\nu}^{(3)\text{low}} - R_{\mu\nu}^{(4)\text{low}} + \dots - 8\pi G S_{\mu\nu}^{(\text{low})}, \\ R_{\mu\nu}^{(1)\text{high}} &= -R_{\mu\nu}^{(2)\text{high}} - R_{\mu\nu}^{(3)\text{high}} - R_{\mu\nu}^{(4)\text{high}} + \dots - 8\pi G S_{\mu\nu}^{(\text{high})}. \end{aligned} \quad (1.88)$$

A la fuente $S_{\mu\nu}$ también le correspondería una expansión pero aquí no se la escribe explícitamente. Notar que, en virtud de la estimación anterior para los ordenes de magnitud, si se cumple $\lambda/L_B \sim \mathfrak{h}$ es consistente con el caso en que es posible tomar la primera expresión de (1.88) hasta potencias cuadráticas de $h_{\mu\nu}$ para una región sin fuentes $S_{\mu\nu}$. Como caso límite opuesto, si el tensor de energía-momento está presente y domina respecto $R_{\mu\nu}^{(2)\text{low}}$ en lo que se refiere a “curvar” el *background* (donde esa curvatura se manifiesta en $R_{\mu\nu}^{(0)\text{low}}$), debería ser $\lambda/L_B \gg \mathfrak{h}$. En casos intermedios, en los cuales la onda contribuye a esa curvatura aún en presencia de materia, se tendría $\lambda/L_B \gtrsim \mathfrak{h}$. Teniendo en mente esos casos moderados y con el fin de reducir a un solo parámetros relevante (ver por ejemplo [64–66]), se suele considerar el reemplazo $1/\lambda \sim 1/(\mathfrak{h}L_B)$ al estimarse los órdenes de magnitud de las derivadas $|\partial g^{(B)}| \sim 1/L_B \sim \mathcal{O}(1)$, $|\partial h| \sim 1/L_B \sim \mathcal{O}(1)$ y $|\partial^2 h| \sim \mathfrak{h}^{-1}/L_B^2 \sim \mathcal{O}(\mathfrak{h}^{-1})$.

Teniendo en cuenta las derivadas de la métrica de fondo y la perturbación, y los órdenes de magnitud que estas implican (para la suposición $\mathfrak{h} \sim \lambda/L_B$), se tiene $R_{\mu\nu}^{(0)} \sim \mathcal{O}(1)$, $R_{\mu\nu}^{(1)} \sim \mathcal{O}(\mathfrak{h}^{-1})$ y $R_{\mu\nu}^{(2)} \sim \mathcal{O}(1)$. Entonces puede truncarse la expansión en cada ecuación de la expresión (1.88) al orden de magnitud dominante,

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(0)\text{low}} &\approx -R_{\mu\nu}^{(2)\text{low}} - 8\pi G S_{\mu\nu}^{(\text{low})} \\ R_{\mu\nu}^{(1)\text{high}} &\approx -8\pi G S_{\mu\nu}^{(\text{high})} \end{aligned} \quad (1.89)$$

Aquí los $S_{\mu\nu}$ también se suponen implícitamente expresados al orden dominante. Es interesante notar que la primera de las ecuaciones en (1.89), donde $R_{\mu\nu}^{(0)\text{low}} = R_{\mu\nu}^{(0)} \equiv R_{\mu\nu}^{(B)}$ se construye con $g_{\mu\nu}^{(B)}$ y $g^{(B)\mu\nu}$ de la misma forma que en la definición de (1.55), es en definitiva la ECE (1.56) para el *background* $g_{\mu\nu}^{(B)}$ interpretando que todo lo que se encuentra del lado derecho es la fuente total que genera esa métrica. En las aplicaciones que aquí interesan, se supone que cuando $h_{\mu\nu} = 0$ la solución $g_{\mu\nu}^{(B)}$ corresponde a las componentes de una métrica de FLRW (suponiendo $S_{\mu\nu}^{(\text{low})}$ homogéneo e isótropo)⁴³. Pero en general, cuando la fuente tiene un aporte de alta frecuencia, $g_{\mu\nu}^{(B)}$ no es conocida *a priori*. No obstante, lo usual es aproximar $g_{\mu\nu}^{(B)}$ con la solución de FLRW en la segunda de las expresiones (1.89) para así poder tener una ecuación únicamente con

⁴³Podría parecer que, dada la suposición $\mathfrak{h} \sim \lambda/L_B$, la condición $\mathfrak{h} \rightarrow 0$ requiere $\lambda \rightarrow 0$, es decir frecuencia infinita, que sería poco realista. Lo que realmente sucede es que en ese límite se modifica $L_B \rightarrow \infty$ (el FLRW tiene una curvatura homogénea). Esto sucede porque en general $g_{\mu\nu}^{(B)}$ (y entonces L_B) no es independiente de la amplitud de la onda, debido a la primera (1.89). Fuera de ese límite probablemente es una buena estimación considerar $L_B \gtrsim H^{-1}$.

$h_{\mu\nu}$ (la ecuación de onda). La “utilidad” aquí de la primer ecuación es la de servir para identificar $R_{\mu\nu}^{(2)\text{low}}$ como una fuente de curvatura del *background* debido al paso de la onda. Es decir, **gracias a la primer ecuación de (1.89) se puede interpretar e identificar el tensor de energía-momento de la onda gravitatoria, que se define en función de $R_{\mu\nu}^{(2)\text{low}}$** (como se ve en la siguiente subsección). Una vez hecha esa identificación se aproxima el *background* con el FLRW (1.57) para hacer todas las cuentas.

Antes de continuar, corresponde hacer una observación sobre el alcance de las suposiciones anteriores en el caso de transiciones de fase cosmológicas. Las componentes del tensor de energía momento (versión covariante) pueden separarse como $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(B)} + \Delta T_{\mu\nu}$, donde $T_{\mu\nu}^{(B)} \equiv T_{\mu\nu}^{\text{low}}$ y $\Delta T_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu}^{\text{high}}$ son respectivamente las componentes el tensor de fondo, que de estar solas generarían un universo de FLRW, y las del tensor que, a nivel perturbativo, se interpreta como fuente de $h_{\mu\nu}$. Es decir, en ausencia de $\Delta T_{\mu\nu}$ no se generan ondas. Notar que esta separación no necesariamente implica diferentes escalas de energías involucradas, solo diferentes escalas de variación espacial. De hecho, en una transición de fase cosmológica, se esperaría que tanto $T_{\mu\nu}^{(B)}$ como $\Delta T_{\mu\nu}$ tengan mayor amplitud a más alta temperatura (que a su vez va como la escala de la transición $\sim v$). En cuanto a la aproximación de onda corta, la escala de tiempos y longitud del plasma perturbado se espera que vaya como $\sim \beta^{-1}$, luego es razonable que estas escalas sean las heredadas por las ondas teniéndose $\lambda \sim \beta^{-1}$. La escala de variación del *background* debería ser al menos $\sim H^{-1}$. Entonces, por (1.81), el cociente es $\lambda/L_B \sim \beta^{-1}/H^{-1} \sim 10^{-4}$ - 10^{-2} compatible con la aproximación de onda corta. Otro punto a remarcar es que, si bien en la discusión que conduce a la expresión (1.89) se supone $\mathfrak{h} \sim \lambda/L_B$, en realidad una estimación rápida para transiciones de fase cosmológicas indicaría que $\mathfrak{h} \sim (\lambda/L_B)^2$ durante la generación de la onda⁴⁴. Esto implica que no necesariamente son iguales los órdenes magnitud de todos los términos en la primera expresión en (1.89). No obstante, no afecta la forma de la segunda ecuación en (1.89) para obtener los $h_{\mu\nu}$. En cualquier caso, la energía de la onda gravitatoria al orden más bajo se puede calcular a partir de $R_{\mu\nu}^{(2)\text{low}}$, si tiene o no alguna intensidad apreciable se evalúa de lo que resulta esa cuenta.

1.5.1.2. Tensor de energía-momento de OG

Convenientemente se define

$$\tau_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{8\pi G} \left\{ R_{\mu\nu}^{(2)\text{low}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^{(B)} g^{(B)\sigma\kappa} R_{\sigma\kappa}^{(2)\text{low}} \right\} \quad (1.90)$$

con simples manipulaciones algebraicas se obtiene

$$R_{\mu\nu}^{(2)\text{low}} = 8\pi G \left(\tau_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^{(B)} g^{(B)\sigma\kappa} \tau_{\sigma\kappa} \right) \quad (1.91)$$

⁴⁴Teniendo en cuenta la ecuación de onda dada por la segunda expresión de (1.89), se tiene que $\partial^2 h \sim GS$. A su vez $G \sim 1/M_P^2$, $\partial^2 h \sim \mathfrak{h}/\lambda^2$ y, como la fuente de perturbaciones debería ir como la densidad de energía liberada en la transición, $S \sim v^4$. Con esto y teniendo en cuenta que $L_B \sim H^{-1} \sim M_P/v^2$ (ver sección 1.4.2) se tiene $\mathfrak{h} \sim (\lambda/L_B)^2$.

Respecto a $\tau_{\mu\nu}$, lo que se encuentra entre paréntesis tiene la misma forma que tiene $S_{\mu\nu}$ respecto a $T_{\mu\nu}$ al orden más bajo⁴⁵. Entonces la ECE para el *background* dada por la primera (1.89) se puede escribir como

$$R_{\mu\nu}^{(B)} \approx 8\pi G \left[(\tau_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(B)}) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^{(B)} g^{(B)\sigma\kappa} (\tau_{\sigma\kappa} + T_{\sigma\kappa}^{(B)}) \right]. \quad (1.92)$$

Es decir, se interpreta que el tensor de energía-momento que genera la métrica de *background* es la suma $\tau_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(B)}$, donde $T_{\mu\nu}^{(B)}$ es el tensor de energía-momento que generaría el *background* en el límite $\mathfrak{h} \rightarrow 0$ (ausencia de onda gravitatoria), pero para $\mathfrak{h} \neq 0$ hay un aporte adicional $\tau_{\mu\nu}$ debido a la onda gravitatoria. Luego se interpreta a $\tau_{\mu\nu}$ de (1.90) como las componentes del tensor de energía-momento de la onda gravitatoria.

Obtener una expresión para el tensor con componentes $\tau_{\mu\nu}$ requiere entonces calcular $R_{\mu\nu}^{(2)\text{low}}$. Dicho cálculo consiste esencialmente en dos partes. El primer paso es expandir $R_{\mu\nu}$ en potencias de $h_{\mu\nu}$ y quedarse con los términos cuadráticos (cuya suma constituye a $R_{\mu\nu}^{(2)}$). Luego de eso se debe “promediar” ese resultado en un volumen lo suficientemente grande como para eliminar las variaciones de alta frecuencia. Una forma rigurosa de definir ese promedio puede encontrarse en [48, 64, 65]. En líneas generales consiste de una integración usando una función de ponderación, que toma valores $\neq 0$ en un entorno el cual contiene varias veces la escala de longitud de variación característica de la perturbación (o muchos períodos de oscilación) y que se anula fuera de este. A modo esquemático puede entenderse ese promedio como $\langle \dots \rangle_{\text{low}} \propto \int (\dots f)$, donde f sería la función de ponderación, la cual se anularía para un radio R tal que $\lambda \ll R \lesssim L_B$. En el cálculo de ese promedio se pueden promediar/integrar términos que contienen derivadas ∂h o $\partial^2 h$. Haciendo integración por partes se tiran los integrandos que son derivadas totales y, por ejemplo, de tener un integrando $\partial h f$ se pasa a otro $h \partial f$. Como resultado algunos términos bajan su orden de magnitud y se vuelven despreciables ante otros que lo preservan. Esto simplifica considerablemente la forma original de $R_{\mu\nu}^{(2)}$ al pasar a $R_{\mu\nu}^{(2)\text{low}}$. El cálculo es algo largo y requiere fijar el *gauge* de Lorentz, dado por las condiciones $D_\mu h^\mu{}_\nu = 0$ y $h^\mu{}_\mu = 0$ (donde D_μ es derivada covariante)⁴⁶, para llegar a expresar [48, 64, 65]

$$\tau_{\mu\nu} \approx \frac{1}{32\pi G} \langle D_\mu h_{\alpha\beta} D_\nu h^{\alpha\beta} \rangle_{\text{low}} \quad (1.93)$$

Aquí debe entenderse que los índices suben y bajan con $g^{(B)\mu\nu}$ y $g_{\mu\nu}^{(B)}$ (y no con $g^{\mu\nu}$ y $g_{\mu\nu}$), es decir, se interpreta al campo (onda) y el tensor de energía-momento como si “vivieran” en el espacio tiempo con métrica $\mathbf{g}^{(B)}$.

1.5.1.3. OG de origen cosmológico

Para el estudio de ondas gravitatorias de origen cosmológico (transiciones de fase), el orden más bajo de $g_{\mu\nu}^{(B)}$ se aproxima por las componentes de la métrica de FLRW plano. Las componentes de la perturbación $h_{\mu\nu}$ (cuadridimensional) se pueden poner en función de cuatro 3-escalares, las componentes de dos 3-vectores y las componentes

⁴⁵Teniendo cuenta que en la expansión de la métrica (versión contravariante), como no aparecen derivadas, los órdenes de magnitud son los que usualmente se esperarían $g^{(B)\sigma\kappa} \equiv g^{(0)\sigma\kappa} \sim \mathcal{O}(1)$, $g^{(1)\sigma\kappa} \sim \mathcal{O}(\mathfrak{h})$ y $g^{(2)\sigma\kappa} \sim \mathcal{O}(\mathfrak{h}^2)$.

⁴⁶En general este *gauge* todavía puede dejar alguna libertad residual.

de un 3-tensor, como se ve, por ejemplo, en [51]. Se obtienen así ecuaciones para modos escalares, vectoriales y tensorial. El modo tensorial es la parte transversa y sin traza (TT por las siglas en inglés, *Transverse-Traceless*) de las componentes espaciales de $h_{\mu\nu}$, más concretamente es un aporte aditivo al sector espacial de la perturbación, h_{ij} , de la forma $a^2 h_{ij}^{TT}$ que obedece la ecuación (en el sistema comóvil del plasma sin perturbar⁴⁷)

$$\begin{aligned} \nabla^2 h_{ij}^{TT} - a^2 \ddot{h}_{ij}^{TT} - 3a\dot{a}\dot{h}_{ij}^{TT} &= -16\pi G a^2 \Delta T_{ij}^{TT} \\ \text{transverso y sin traza: } h^{TT i}{}_{i} &= 0 \text{ y } \partial^j h_{ij}^{TT} = 0, \end{aligned} \quad (1.94)$$

donde ΔT_{ij}^{TT} es el aporte al sector espacial de la fuente, ΔT_{ij} , que cumple $\partial_i \Delta T_{ij}^{TT} = 0$ y $\Delta T_{ii}^{TT} = 0$. Esta ecuación es equivalente a la segunda de (1.89) pero solo considerando el aporte del modo tensorial. La ecuación a derivadas parciales (1.94) puede llevarse a una ecuación diferencial ordinaria mediante transformadas de Fourier de la forma $f(\vec{r}, t) = \int d^3k / (2\pi)^3 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})} \tilde{f}(\vec{k}, t)$. Inmediatamente se ve que resulta correcto interpretar a $k = |\vec{k}|$ como el número de onda *comóvil* y a $k_{\text{fis}} \equiv k/a$ como el número de onda *físico* [67]. En tal caso la ecuación (1.94) quedaría como

$$k_{\text{fis}}^2 \tilde{h}_{ij}^{TT} + \ddot{\tilde{h}}_{ij}^{TT} + 3H\dot{\tilde{h}}_{ij}^{TT} = 16\pi G \Delta \tilde{T}_{ij}^{TT}, \quad (1.95)$$

y se verifica que, cuando la expansión del universo es despreciable ($k_{\text{fis}} \gg H$) y se puede ignorar el término con $\dot{\tilde{h}}_{ij}^{TT}$, queda con la misma forma que la transformada de Fourier de una clásica y usual *ecuación de onda de d'Alembert* que se propaga a la velocidad de la luz: $k_{\text{fis}}^2 \tilde{h}_{ij}^{TT} + \ddot{\tilde{h}}_{ij}^{TT} \approx 16\pi G \Delta \tilde{T}_{ij}^{TT}$.

Puede verse también en [51] que la ecuación (1.94) es invariante de *gauge*, a diferencia de las ecuaciones para modos escalares y vectoriales. Con la adecuada elección de *gauge* (por ejemplo, *gauge síncrono*) se puede eliminar las partes $h_{0\nu}$ de la perturbación. En el caso que fuera $h_{ij} = a^2 h_{ij}^{TT}$ y además

$$h^{0\mu} = 0, \quad h^{TT i}{}_{i} = 0, \quad \partial^j h_{ij}^{TT} = 0, \quad (1.96)$$

se cumple la condición del *gauge* de Lorentz para $h_{\mu\nu}$, necesario para expresar $\tau_{\mu\nu}$ en la forma (1.93). Cuando se estudian ondas gravitatorias con un Minkowski de *background*, en una región donde $\Delta T_{ij} = 0$, las condiciones (1.96) fijan el llamado *gauge transverso y sin traza*, ver por ejemplo [66], pero para el *background* de FLRW esas condiciones son más restrictivas que una fijación de *gauge*, implicarían que se están despreciando los modos distintos al tensorial. En particular, como puede verse en [51], los modos vectoriales no se suelen tener en cuenta en cosmología porque las combinaciones físicas relevantes de estos decaen con $1/a^2$, y a su vez hay fijaciones de *gauge* que permiten eliminar dos modos escalares no físicos. Comúnmente se refiere al modo tensorial como el *modo de radiación*, ver por ejemplo [51], y la señal de ondas gravitatorias se calcula con (1.93) considerando solo el h_{ij}^{TT} dado por (1.94), ver por ejemplo [11, 67, 68].

⁴⁷Es decir, el sistema en que la velocidades de fluido se harían cero si no hubiese perturbaciones del tensor de energía-momento.

1.5.1.4. OG en función del *correlador* de la fuente

En virtud de la subsección previa, para el FLRW plano, evaluando la versión contravariante de (1.93) se tiene la densidad de energía⁴⁸

$$\tau^{00} \approx \frac{1}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle \quad (1.97)$$

Este resultado en principio corresponde a una onda cualquiera generada en algún momento por una dada fuente ΔT_{ij} . En lo que sigue se ve que es posible poner h_{ij}^{TT} en forma lineal (en un funcional) respecto a esa fuente. Dada la naturaleza de la transición de fase, la fuente resulta estocástica. Un instrumento de medición, a lo largo del tiempo, va recibiendo señales generadas en distintas regiones del universo donde, ante condiciones similares, hay distintas realizaciones de la fuente. Resulta entonces razonable definir la densidad de energía de la onda gravitatoria con un promedio estadístico $\rho_{OG} \equiv \langle \tau^{00} \rangle_{\text{est}}$. O también, directamente la expresión (1.97) se puede re-interpretar, considerando que el promedio que aparece en la misma corresponde tanto a un promedio de baja frecuencia como a un promedio estadístico, que además se supone que pueden conmutar, $\langle \dots \rangle \equiv \langle \langle \dots \rangle_{\text{low}} \rangle_{\text{est}} = \langle \langle \dots \rangle_{\text{est}} \rangle_{\text{low}}$. La primera igualdad corresponde a promediar lo que censaría un detector, mientras que la segunda corresponde a promediar *algo* que representa la fuente.

La ecuación a derivadas parciales (1.94) se lleva a la ecuación diferencial ordinaria (1.95) mediante transformadas de Fourier. Por comodidad en el cálculo, también se puede hacer un cambio de variable $dt = a d\bar{t}$ donde \bar{t} es un tiempo conforme. El ritmo de Hubble conforme se define como $\bar{H} = (da/d\bar{t})/a = aH$. En era de radiación y depreciando cambios en el número de grados de libertad relativistas se ve que $\bar{H} \approx 1/\bar{t}$. De la ecuación (1.58) se tiene que $8\pi G = 3\bar{H}^2/(\rho a^2) \approx 3/(\rho a^2 \bar{t}^2)$, que puede reemplazarse en el lado derecho de (1.94) y usar el factor $1/\rho$ para adimensionalizar la fuente⁴⁹. Si además se hace otro cambio de variable $x = k\bar{t}$, la ecuación a resolver se simplifica aún más

$$\tilde{h}_{ij} + \tilde{h}_{ij}'' + \frac{2}{x} \tilde{h}_{ij}' = \frac{6}{x^2} \Delta \tilde{T}_{ij}, \quad (1.98)$$

donde, como se explica arriba, $\tilde{h}_{ij}(\vec{k}, x)$ y $\Delta \tilde{T}_{ij}$ resultan de transformar por Fourier, y hacer los reemplazos $t \rightarrow t(\bar{t})$ y $\vec{t} \rightarrow x/k$, a $h_{ij}^{TT}(\vec{r}, t)$ y $\Delta T_{ij}^{TT}(\vec{r}, t)/\rho(t)$. Además, la prima indica derivación respecto de x .

La (1.98) se resuelve en, por ejemplo, [11, 68]. En esa resolución se supone que existe un intervalo $(x_{\text{ini}}, x_{\text{fin}})$ en el cual la fuente $\Delta \tilde{T}_{ij}$ está activa (y antes de x_{ini} no hay

⁴⁸La derivada covariante Dh es suma de una derivada ordinaria $\partial h \sim \mathcal{O}(1)$ y de contracciones con los símbolos de Christoffel, que van como $g^{(B)} \partial g^{(B)} h \sim \mathcal{O}(h)$. A su vez se tiene $h_{ij} = a^2 h_{ij}^{TT}$ y $h^{ij} = a^{-2} h_{ij}^{TT}$. Siguiendo mismo análisis que conduce a (1.93), se tiran términos no dominantes y queda solo el promedio de $\partial h^{TT} \partial h^{TT}$ (los factores con a se cancelan). En [66] sin separar en modos le da directamente esto porque supone que la señal llega a un detector operando en una región del espacio-tiempo aproximadamente *minkowskiana* (donde $D_\mu = \partial_\mu$ y $a = 1$). En realidad, primero se debería calcular la señal $h_{\mu\nu}$, evolucionando en un FLRW, y luego computar (1.93) haciendo esas aproximaciones durante la detección (donde $a \approx \text{cte}$). En la práctica suele resultar más cómodo calcular (1.97) en un momento inmediato al cese de la generación y luego correr al rojo la señal hasta el presente (ver [11, 68]).

⁴⁹En [68] adimensionalizan la fuente con la entalpía en el supuesto de radiación, cuando $w \approx 4/3\rho$. Esto tiene algún sentido cuando la fuente es la parte del tensor de energía-momento de un fluido donde aparece un factor $w = \rho + P$.

ondas)⁵⁰. Para la etapa de generación, en la que $x_{\text{ini}} < x < x_{\text{fin}}$, la solución se obtiene encontrando la función de Green. Para $x > x_{\text{fin}}$ se tiene una ecuación homogénea y los coeficientes de su solución se fijan pegándola con la anterior a “tiempo” $x = x_{\text{fin}}$. Esa última solución, de la señal que queda propagándose luego de la generación, resulta de la forma

$$\begin{aligned}\tilde{h}_{ij}(\vec{k}, x > x_{\text{fin}}) &= A_{ij} \frac{\sin(x - x_{\text{fin}})}{x} + B_{ij} \frac{\cos(x - x_{\text{fin}})}{x} \\ A_{ij}(\vec{k}) &= \int_{x_{\text{ini}}}^{x_{\text{fin}}} dz \frac{\cos(x_{\text{fin}} - z)}{z} 6\Delta\tilde{T}_{ij}(\vec{k}, z) \\ B_{ij}(\vec{k}) &= \int_{x_{\text{ini}}}^{x_{\text{fin}}} dz \frac{\sin(x_{\text{fin}} - z)}{z} 6\Delta\tilde{T}_{ij}(\vec{k}, z)\end{aligned}\quad (1.99)$$

Como \dot{h}_{ij}^{TT} es real, se puede re-escribir $\langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle = \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT*} \rangle$ y, en la expresión de la derecha de esa igualdad, se reemplazan los \dot{h}_{ij}^{TT} por las transformadas de Fourier de los \tilde{h}_{ij} . Esto conduce a

$$\langle \dot{h}_{ij}^{TT}(\vec{r}, t) \dot{h}_{ij}^{TT}(\vec{r}, t) \rangle = \left\langle \int \int \frac{d^3k d^3q}{(2\pi)^6} e^{i(\vec{k}-\vec{q})\cdot\vec{r}} \frac{kq}{a^2} \langle \tilde{h}'_{ij}(\vec{k}, x) \tilde{h}'_{ij*}(\vec{q}, y) \rangle_{\text{est}} \right\rangle_{\text{low}} \quad (1.100)$$

(donde las primas en cada caso representan derivaciones $\frac{d}{dx} = \frac{a}{k} \frac{d}{dt}$ y $\frac{d}{dy} = \frac{a}{q} \frac{d}{dt}$). Reemplazando la solución (1.99) en (1.100), se distribuye el promedio $\langle \dots \rangle_{\text{est}}$ entre términos con los productos $A_{ij}(\vec{k})A_{ij*}(\vec{q})$, $A_{ij}(\vec{k})B_{ij*}(\vec{q})$, $B_{ij}(\vec{k})A_{ij*}(\vec{q})$ y $B_{ij}(\vec{k})B_{ij*}(\vec{q})$. En todos ellos aparece

$$\left\langle \Delta\tilde{T}_{ij}(\vec{k}, z_1) \Delta\tilde{T}_{ij*}(\vec{q}, z_2) \right\rangle_{\text{est}} \equiv (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{q}) \tilde{T}(k, z_1, z_2) \quad (1.101)$$

Siempre se obtiene la forma expresada del lado derecho cuando se supone que el lado izquierdo es la transformada de Fourier de una función que depende solo de la separación entre dos puntos, es decir, $\langle \Delta T_{ij}^{TT}(\vec{r}_1, t_1) \Delta T_{ij}^{TT*}(\vec{r}_2, t_2) \rangle_{\text{est}} = f(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|, t_1, t_2)$ (homogeneidad e isotropía estadística). A $\tilde{T}(k, z_1, z_2)$ se lo denomina *correlador a tiempos distintos* de la fuente⁵¹. La delta de Dirac de (1.101) elimina la dependencia espacial en (1.100) y la integral respecto \vec{q} . Además, como \tilde{T} solo depende del módulo de \vec{k} se puede integrar la parte angular en $\int d^3k (\dots) = 4\pi \int dk k^2 (\dots)$.

El promedio de baja frecuencia en este caso se reduce a un promedio sobre un intervalo centrado en un “tiempo” x_* de ancho Δx , lo suficientemente grande como para que pasen muchas longitudes de onda típica por un dado punto pero no tanto como para que sea relevante la expansión del universo. Se supone que $\Delta x/x_* \ll 1$ y $x_{\text{fin}} \lesssim x_*$. Entonces es $\langle \dots \rangle_{\text{low}} \approx \Delta x^{-1} \int_{x_* - \Delta x/2}^{x_* + \Delta x/2} dx (\dots)$ y en el integrando valen las aproximaciones $a \approx a_*$ y $e^{\pm ix}/x \approx e^{\pm ix}/x_*$ [que simplifica los productos de derivadas de $\sin(x - x_{\text{fin}})/x$ y $\cos(x - x_{\text{fin}})/x$].

De ese modo se calcula (1.100), que se reemplaza en (1.97) para tener la densidad

⁵⁰La descomposición espectral permite considerar distintos tiempos de inicio y finalización para cada modo por separado. Es decir, $x_{\text{ini}} = x_{\text{ini}}(k)$ y $x_{\text{fin}} = x_{\text{fin}}(k)$.

⁵¹Traducción del inglés, *unequal time correlator*.

de ondas gravitatorias a un tiempo t_* justo después de la generación⁵²

$$\rho_{\text{OG}*} \equiv \tau_{00} = \frac{3}{4\pi^2} \rho_{R*} \int_0^\infty dk k^2 \int_{x_{\text{ini}}}^{x_{\text{fin}}} \frac{dz_1}{z_1} \int_{x_{\text{ini}}}^{x_{\text{fin}}} \frac{dz_2}{z_2} \cos(z_1 - z_2) \tilde{T}(k, z_1, z_2), \quad (1.102)$$

donde ρ_{R*} , la densidad de energía de radiación, aparece cuando se hace la manipulación $k^2/(a_*x_*)^2 = 1/(a_*\bar{t}_*)^2 \approx (\bar{H}_*/a_*)^2 = H_*^2 = 8\pi G \rho_{R*}$.

1.5.2. Detección de Ondas Gravitatorias

Puesto que las ondas gravitatorias se diluyen como radiación (es decir, son ondas “sin masa”, grados de libertad relativistas), la señal de origen cosmológico que puede llegar a registrarse en la actualidad se obtiene corriendo al rojo la expresión (1.102) mediante $\rho_{\text{OG}0} = \rho_{\text{OG}*}(a_*/a_0)^4$. El mismo factor se debe aplicar del lado derecho de (1.102) teniendo en cuenta que $\rho_R \propto gT^4$ y que, en la era dominada por radiación, la conservación de la entropía en un volumen que se expande con el universo implica $T_*a_*/(T_0a_0) = (g_0/g_*)^{1/3}$. Se hace entonces $\rho_{R*}(a_*/a_0)^4 = \rho_{R0}(g_*/g_0)[T_*a_*/(T_0a_0)]^4 = \rho_{R0}(g_0/g_*)^{1/3}$. Se definen las magnitudes adimensionales $\Omega_X = \rho_X/\rho_c$, donde ρ_c es la densidad crítica actual, definida por $\rho_c = 3H_0^2/(8\pi G)$, siendo H_0 el ritmo de expansión actual. De ese modo la señal en la actualidad es

$$\Omega_{\text{OG}}^{\text{Total}} = \frac{3\Omega_R}{4\pi^2} \left(\frac{g_0}{g_*}\right)^{1/3} \int_0^\infty dk k^2 \int_{x_{\text{ini}}}^{x_{\text{fin}}} \frac{dz_1}{z_1} \int_{x_{\text{ini}}}^{x_{\text{fin}}} \frac{dz_2}{z_2} \cos(z_1 - z_2) \tilde{T}(k, z_1, z_2). \quad (1.103)$$

La etiqueta “Total” es para diferenciarla de otra magnitud (que se define a continuación) la cual es comúnmente denotada con Ω_{OG} . En general, aquí la notación suele ser algo confusa y/o abusiva. Se puede re-acomodar $\Omega_{\text{OG}}^{\text{Total}} = \int \frac{dk}{k} k^3(\dots) = \int \frac{dk}{k} \frac{d\Omega_{\text{OG}}}{d \log k}$ donde se define $\frac{d\Omega_{\text{OG}}}{d \log k} \equiv k^3(\dots)$, que debe entenderse como una notación (sino habría un argumento con dimensiones en el logaritmo⁵³). Más aún, esta se expresa en función de k no de “log k ”, no obstante, al graficarse con el eje k en escala logarítmica cobra cierto sentido la notación. En definitiva es una forma de expresar la densidad espectral de la señal actual⁵⁴,

$$\frac{d\Omega_{\text{OG}}}{d \log k} = \frac{3\Omega_R}{4\pi^2} \left(\frac{g_0}{g_*}\right)^{1/3} k^3 \int_{x_{\text{ini}}}^{x_{\text{fin}}} \frac{dz_1}{z_1} \int_{x_{\text{ini}}}^{x_{\text{fin}}} \frac{dz_2}{z_2} \cos(z_1 - z_2) \tilde{T}(k, z_1, z_2). \quad (1.104)$$

También, mediante el reemplazo $k = a_* k_{\text{fis}} = a_*(2\pi f_*)$ en el lado derecho de (1.104) se tiene el espectro en frecuencias, pero expresado con las frecuencias f_* al momento t_* justo después de la generación. Haciendo el reemplazo $f_* = f_0 a_0/a_* \approx f_0 T_*/T_0 (g_*/g_0)^{1/3}$ (donde $f_0 \equiv f$ es la frecuencia medida en la actualidad) ya queda establecida la llamada *densidad de energía de las ondas gravitatorias por frecuencia logarítmica* que puede

⁵²No puede ser mucho después por que en varias de las aproximaciones anteriores se supone que no varían significativamente los grados de libertad relativistas.

⁵³Se puede solucionar esta incongruencia definiendo [68] $K = k/(2\pi/L_S)$ donde L_S es la longitud característica de la fuente (esencialmente es lo mismo que al principio de esta sección se llama λ) y entonces $dk/k = dK/K = d \ln(K)$.

⁵⁴Es la misma ecuación (2.11) de [68] solo que el factor cambia por que ahí se considera la adimensionalización de la fuente con la densidad de entalpía en vez de la densidad de energía.

aparecer expresada como

$$\Omega_{\text{OG}}(f) = \frac{d\Omega_{\text{OG}}}{d \log f} = \frac{1}{\rho_c} \frac{d\rho_{\text{OG}}}{d \log f}. \quad (1.105)$$

El espectro de OG también suele darse en términos de la llamada *amplitud característica* h_c o de la *raíz de la densidad espectral* \sqrt{S} , que se relacionan con Ω_{OG} mediante [15]

$$h_0^2 \Omega_{\text{OG}} = \left(\frac{f}{\text{Hz}} \frac{h_c}{1,263 \times 10^{-18}} \right)^2, \quad (1.106)$$

$$h_c = \sqrt{2fS}, \quad (1.107)$$

donde h_0 es la adimensionalización del ritmo de expansión actual, que se identifica en la expresión $H_0 = 100 h_0 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. En esta tesis se considera $h_0 \simeq 0,72$ [69].

La expresión (1.104), o alguna muy similar, es el punto de partida para el cálculo de ondas gravitatorias en transiciones de fase cosmológicas. En general, usando la expresión (1.104), el problema de determinar el espectro de ondas gravitatorias se reduce a modelar la fuente $\tilde{T}(k, z_1, z_2)$. Ese modelado involucra el estudio de cómo evolucionan durante la transición el campo ϕ , el plasma, campos magnéticos, etc. En la sección 1.5.3 se enumeran resultados de la literatura, correspondientes a tratamientos donde se consideran distintas aproximaciones y aportes a $\tilde{T}(k, z_1, z_2)$ por separado. Esos resultados no se expresan para $\tilde{T}(k, z_1, z_2)$ sino directamente para $\Omega_{\text{OG}}(f)$, pero quedan en función de parámetros de la fuente, que deben determinarse para cada modelo de Física de partículas que se desee estudiar. Es esa determinación, en gran medida, la tarea que corresponde a esta tesis.

1.5.2.1. Estimaciones rápidas para la escala electrodébil

Como se menciona previamente, para OG generadas en un tiempo t_* , el corrimiento al rojo de f_* a la actualidad lo da $f_0 = f_* a_*/a_0$, donde el cociente entre los factores de escala puede expresarse en función de la temperatura y el número de grados de libertad relativista actual y a tiempo t_* (usando la conservación de la entropía en un volumen que se expande adiabáticamente con el universo). Los valores actuales pueden evaluarse y ese cociente queda

$$\frac{a_*}{a_0} \approx 8 \times 10^{-16} \left(\frac{100}{g_*} \right)^{1/3} \frac{100 \text{ GeV}}{T_*}. \quad (1.108)$$

Aquí convenientemente T_* y g_* aparecen con factores que son del mismo orden de magnitud que se espera para la transición electrodébil. Como la longitud de onda típica es una fracción del tamaño de Hubble H_*^{-1} , es conveniente considerar f_*/H_* , donde el ritmo de Hubble viene dado por la ecuación de Friedman (1.58), y en era de radiación se puede aproximar la densidad de energía $\rho_* \approx \rho_{R*} = \pi^2 g_* T_*^4/30$. Así, multiplicando y dividiendo por H_* , se puede expresar la frecuencia de las OG actuales,

$$f_0 = 1,6 \times 10^{-5} \text{ Hz} \left(\frac{g_*}{100} \right)^{1/6} \left(\frac{T_*}{100 \text{ GeV}} \right) \frac{f_*}{H_*}. \quad (1.109)$$

La frecuencia característica es determinada por la escala de longitud típica de la fuente⁵⁵ L_S . De ese modo, se espera que el pico del espectro esté en una frecuencia $f_* \sim 1/L_S$.

La densidad de energía de las ondas gravitatorias viene dada por (1.97) y va como $\rho_{OG} \sim \partial h \partial h / G$. La ecuación (1.94) para h es de la forma $\partial^2 h \sim G \Delta T$. De un análisis dimensional, para una longitud típica de la fuente del mismo orden que la longitud de onda típica $L_S \sim \lambda$ y llamando e_v a la densidad de energía del fluido debido a campos de velocidades no nulos (energía cinética), se espera que la magnitud de h vaya como $L_S^{-2} h \sim G e_v$. Por el mismo motivo, se espera $\partial h \sim G e_v L_S$. Por lo tanto, se tiene $\rho_{OG} \sim G e_v^2 L_S^2$. Usando la ecuación (1.58) y considerando indistintamente la notación $\rho_* = e_*$, en era de radiación ($\rho_* \approx \rho_{R*}$) esto da $\rho_{OG*} \sim (e_v/e_*)^2 (L_S H_*)^2 \rho_{R*}$. Aplicando a ambos lados de esta relación el factor de corrimiento al rojo $(a_*/a_0)^4$, en la actualidad se tiene $\rho_{OG0} \sim (g_0/g_*)^{1/3} (e_v/e_*)^2 (L_S H_*)^2 \rho_{R0}$. La densidad de energía de radiación actual está dada por $\rho_{R0}/\rho_c \equiv \Omega_R \approx 5 \times 10^{-5}$ [69]. Esta estimación da, para la amplitud del espectro de OG actual,

$$\Omega_{OG} \sim 5 \times 10^{-5} \left(\frac{g_0}{g_*} \right)^{1/3} \left(\frac{e_v}{e_*} \right)^2 (L_S H_*)^2 . \quad (1.110)$$

Si en (1.109) se toma, para la transición electrodébil, $g_* \sim 100$, $T_* \sim 100$ GeV, $f_* \sim 1/L_S$, donde además se supone que $L_S \sim \beta^{-1}$ (la escala de tiempo y longitud típica), teniendo en cuenta la estimación (1.81) la frecuencia típica debería ser

$$f_0 \sim 10^{-4} - 10^{-2} \text{ Hz} . \quad (1.111)$$

En (1.110) se puede considerar lo mismo y además estimar que la energía cinética que gana el fluido va como la energía de vacío liberada (ver sección 1.3.2.1) $e_v \sim \lambda v^4 / 4$, donde $\lambda = (m_H/v)^2 / 2$ (coeficiente de ϕ^4 en \mathcal{V}_{ef}), y la energía *casi* total⁵⁶ $e_* \sim \pi^2 g_* / 30 T^4 \sim \pi^2 g_* / 30 v^4$. Eso da que la intensidad típica sería

$$\Omega_{OG} \sim 10^{-14} - 10^{-12} . \quad (1.112)$$

Estas estimaciones suministran una primera noción de por dónde, en un gráfico Ω_{OG} vs. f , se debería encontrar el pico del espectro de OG generadas durante la transición electrodébil. Haciendo eso, se puede comparar con las sensibilidades de los detectores de OG que se exponen en la siguiente subsección, para evaluar cuales son las expectativas de observación.

1.5.2.2. Detección de OG de transición electrodébil: LISA y más allá

Como se ve en la estimación (1.111), en general una señal de OG originada en la escala electrodébil produce un fondo estocástico de OG en el rango de los mHz. Esa señal cae lejos de la sensibilidad de los detectores terrestres como LIGO o sus sucesores *Advanced LIGO* y LIGO III, con picos en $f \sim 100$ Hz. Por lo tanto, aquí solo se consideran detectores espaciales, proyectados a construirse en un futuro cercano.

En nuestra publicación [2] comparamos la posibilidad de detección en varios detectores espaciales: LISA, eLISA, BBO y DECIGO. Posteriormente, luego que la NASA

⁵⁵La S es por *source*, *fuerza* en inglés.

⁵⁶Esta expresión sale de suponer que en el \mathcal{F} de la expresión (1.44) domina el aporte de radiación (lo cual también implica que $e \approx 3P = -3\mathcal{F}$).

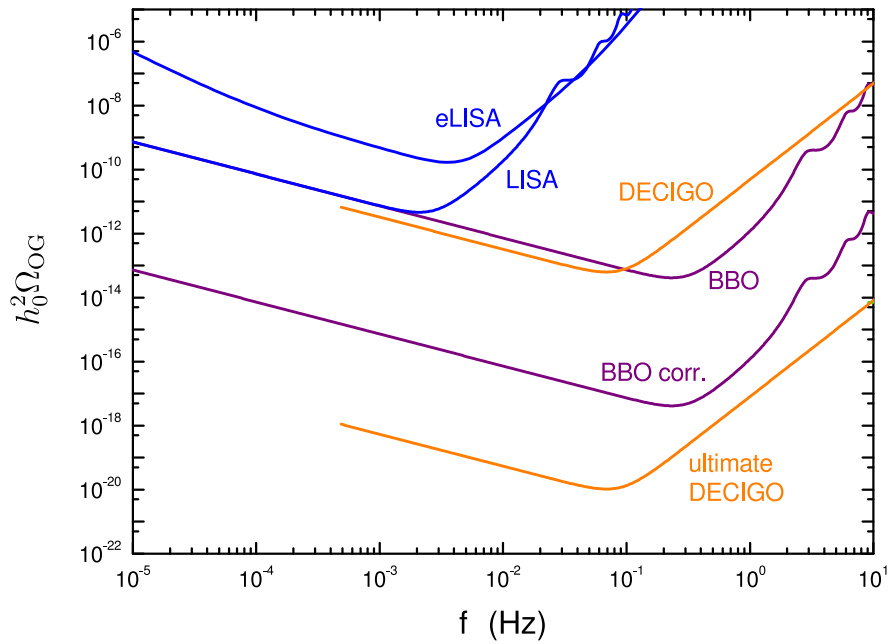


Figura 1.2: Curvas de sensibilidad aproximadas correspondientes a varios proyectos de detección espacial de ondas gravitatorias basados en interferometría laser.

abandonara el desarrollo de LISA, y al ser el proyecto europeo eLISA el más viable (actualmente rebautizado LISA y con la colaboración de la NASA), en [5] nos concentramos exclusivamente en variantes de diseño de eLISA. En [2] se consideraron las curvas de sensibilidad aproximadas que se ilustran en la figura 1.2 (confeccionada a partir de datos disponibles en 2012). Mientras que en [5] las que se ilustran en la figura 1.3 (confeccionada a partir de datos disponibles en 2016).

En la figura 1.2, la sensibilidad de eLISA (línea azul superior) se calcula usando la aproximación analítica dada en [70–72]. Las otras sensibilidades se calculan a partir de las especificaciones de los detectores, siguiendo el método descrito en la referencia [73]. Las especificaciones para LISA (línea azul inferior) se pueden encontrar en [73, 74], la de BBO (línea púrpura superior) se pueden encontrar en [75–78] y las especificaciones para DECIGO (línea naranja superior) se puede encontrar en [79, 80]. BBO y DECIGO siendo una composición de varios detectores tipo LISA, serán capaces de hacer un análisis de correlaciones entre dos detectores independientes, lo cual se espera que incremente la sensibilidad para fondos estocásticos. En el caso de BBO un incremento de cuatro órdenes de magnitud [68, 81–83] (línea púrpura inferior). Por otro lado, la última sensibilidad de DECIGO se estima que sería $h_0^2 \Omega_{\text{GW}} \sim 10^{-20}$ alrededor de 0,1 Hz [79, 81] (línea naranja inferior).

Al momento de escritura de esta tesis, el detalle fino de la arquitectura de eLISA se encuentra aún en debate y varios diseños están bajo investigación. El detalle acerca de estas cuestiones se explica en la referencia [86]. Las curvas de sensibilidad para un fondo estocástico (fuentes cosmológicas) son diferentes para aquellas correspondientes a fuentes localizadas (astrofísicas). Aquí se consideran las curvas para los diseños que se discuten en la referencia [84]. La hoja de datos puede encontrarse en [85]. Estos diseños se denotan por lo general como N2A5M5L6, N2A1M5L6, N2A2M5L4 and N1A1M2L4. En la figura 1.3, y en las que aparecen a lo largo de la sección 4.5, les corresponden curvas de sensibilidad en rojo, magenta, azul y verde respectivamente.

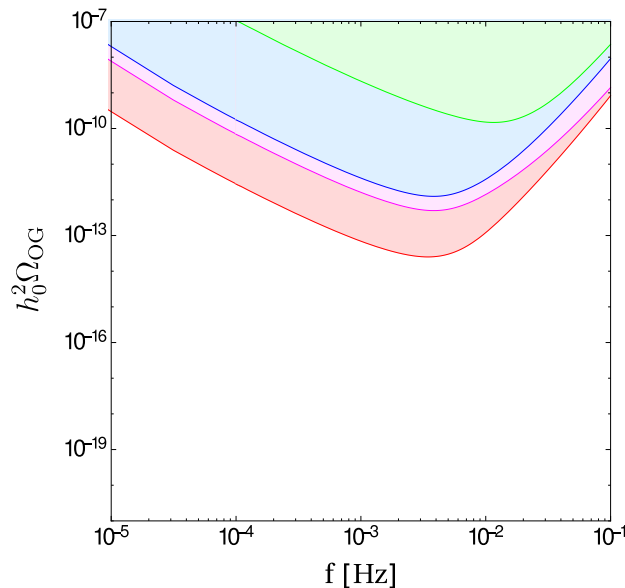


Figura 1.3: Las áreas coloreadas representan regiones de detección para configuraciones más finamente especificadas de eLISA, dadas en [84] y [85]. A la denotada como N2A5M5L6 le corresponde corresponde rojo, a N2A1M5L6 magenta, a N2A2M5L4 azul y a N1A1M2L4 verde. La última de estas es la más parecida a la considerada en la figura 1.2, sacada de la aproximación analítica [70–72].

1.5.3. Mecanismos de generación

Históricamente primero se estudió la transición de fase de vacío, es decir, el caso de un campo escalar sin plasma en el que la parte relevante del tensor es de la forma $\partial_i \phi \partial_j \phi$ [61, 62, 87]. Pero como el campo solo varía en la “pared” de la burbuja, una delgada región entre las dos fases donde ϕ toma el valor de cada mínimo local, la fuente de OG se concentra en esa delgada región. En ese caso se muestra que el sistema de paredes de burbujas colisionantes puede ser aproximado por un set de esferas superpuestas con interfaz infinitamente delgada [62]. En la *aproximación envolvente*⁵⁷, solo las partes no colisionadas de las paredes esféricamente simétricas se tienen en cuenta para el cálculo de OG. En ausencia de un plasma que ejerza fricción, las paredes rápidamente se aceleran a la velocidad de la luz, y la energía cinética y de gradiente de la pared de burbuja se vuelven iguales. Entonces, la cantidad relevante es la energía total de la pared, que para una transición de fase de vacío corresponde a la energía total de vacío liberada por la burbuja [62].

Como se ve más adelante en el capítulo 2, en una transición de fase térmica las paredes de burbuja alcanzan una velocidad terminal debido a la fricción con el plasma. Generalmente, esto sucede en un tiempo muy corto comparado con la duración de la transición de fase. En consecuencia, la pared se mueve con velocidad constante y la energía que libera en la transición va a parar a recalentamiento del plasma y a movimientos masivos de fluido. Estos movimientos de fluido, ya sean turbulentos o acústicos, también producen OG. En este caso, la parte relevante del tensor de energía-momento es cuadrática en la velocidad del fluido, $\propto v_i v_j$. Así, en general, la cantidad relevante para la generación de OG es la energía en un “casarón” alrededor de la pared

⁵⁷Es *envelope approximation*, donde *envelope* es *envolvente* en inglés.

de burbuja, $E_w + E_{fl}$, donde E_w es la energía acumulada en la pared y E_{fl} la energía de movimiento del fluido arrastrado por el avance de la pared.

En la transición de fase térmica la fuente de OG ya no puede modelarse únicamente con la aproximación envolvente. No obstante esta aún se utiliza para describir una etapa de la producción de OG, considerando solo las partes no colisionadas de los cascarones de fluido. Lo cierto es que, luego de la colisión de los cascarones, el plasma queda perturbado y también es fuente de OG. A continuación se ve que en general el espectro de OG puede escribirse como una función del cociente⁵⁸ $(E_w + E_{fl})/E_{tot}$, siendo E_{tot} la energía total de la región abarcada por la burbuja. Es notable que, como se ve más adelante, la estimación de este cociente se puede realizar estudiando la hidrodinámica involucrada en la expansión de una sola burbuja. Y es de hecho ese estudio el que incumbe a los capítulos 2 y 3.

1.5.3.1. Generación por *colisión de burbujas*

El mecanismo que se describe utilizando la aproximación envolvente suele denominarse en las publicaciones del tema como mecanismo de “colisión de burbujas”. Una simulación con un gran número de burbujas se lleva a cabo en la referencia [88] usando la aproximación envolvente. En esos cálculos, la transición de fase se simula nucleando burbujas esféricas en posiciones aleatorias, despreciando las regiones superpuestas de las burbujas colisionantes y computando solo la evolución de las paredes no colisionadas (suponiendo delgados perfiles de fluido). En la referencia [88] consideran un ritmo de nucleación de la forma (1.80) y para la pared de burbuja se supone una velocidad de expansión de la pared constante v_w .

En esta tesis se usan los ajustes de las simulaciones de la referencia [88] para el espectro que debería observarse en la actualidad,

$$h_0^2 \Omega_{env} = 1,67 \times 10^{-5} \left(\frac{100}{g_*} \right)^{1/3} \left(\frac{H_*}{\beta} \right)^2 \left(\frac{E_w + E_{fl}}{E_{tot}} \right)^2 \left(\frac{0,11v_w^3}{0,42 + v_w^2} \right) \frac{3,8(f/f_{env})^{2,8}}{1 + 2,8(f/f_{env})^{3,8}}, \quad (1.113)$$

donde H_* es la escala de Hubble evaluada en el momento de la transición y f_{env} es la frecuencia pico en la actualidad, que se obtiene por corrimiento al rojo de la frecuencia pico f_{env*} en el momento de la transición de fase. Como caso particular, la intensidad pico de esa simulación es

$$h_0^2 \Omega_{env}^p = 1,67 \times 10^{-5} \left(\frac{100}{g_*} \right)^{1/3} \left(\frac{H_*}{\beta} \right)^2 \left(\frac{E_w + E_{fl}}{E_{tot}} \right)^2 \left(\frac{0,11v_w^3}{0,42 + v_w^2} \right). \quad (1.114)$$

La frecuencia pico está determinada por la escala de tiempo β^{-1} . Más precisamente, es $f_{env*} \simeq 0,62/(1,8 - 0,1v_w + v_w^2)\beta$, lo que da, usando la expresión (1.109),

$$f_{env} \simeq 1,65 \times 10^{-5} \text{ Hz} \left(\frac{g_*}{100} \right)^{1/6} \left(\frac{T_*}{100 \text{ GeV}} \right) \left(\frac{0,62}{1,8 - 0,1v_w + v_w^2} \right) \frac{\beta}{H_*}. \quad (1.115)$$

El resultado (1.114) está en acuerdo con la ecuación (1.110), excepto por una leve diferencia en la dependencia respecto a v_w . En efecto, en vez de (1.115), para (1.110)

⁵⁸En realidad, E_w suele ser despreciable respecto a E_{fl} salvo en casos ultra relativistas donde la pared se mantiene acelerada y con velocidad $v_w \approx 1$ (ver la sección 2.6).

se considera $f_* \sim 1/L_S$, que a su vez puede suponerse igual al diámetro típico de una burbuja $L_S \sim 2v_w\beta^{-1}$, ya que la escala de tiempo de esa simulación se estima con β^{-1} .

Notar que los factores con H_* en estas expresiones se introducen para normalizar la constante β , ya que se puede obtener el cociente β/H_* de la dinámica de la transición de fase. En general todas estas expresiones están manipuladas pensando en la transición de fase electrodébil donde $T_* \sim 100\text{GeV}$ y $g_* \sim 100$. Las cantidades g_* y T_* aparecen por suponer que luego de la transición de fase toda la energía de vacío se convierte en radiación. No es estrictamente cierto, pero es compatible con esa suposición estimar H_* tomando $e_{\text{tot}} \approx (g_*\pi^2/30)T_*^4$ (aporte de radiación dominante) en la ecuación de Friedmann (1.58). En el capítulo 4 se discute la forma más conveniente de estimar T_* y g_* .

1.5.3.2. Generación por *turbulencia Magneto-Hidrodinámica*

Los movimientos de fluido ocasionados por el avance de las paredes de burbuja pueden durar un largo tiempo luego que la transición de fase termina. Esto provee mecanismos más eficientes para la generación de OG. Si el movimiento de fluido es turbulento, los remolinos actúan como una fuente de OG luego que la colisión de burbujas terminó. En particular, como el plasma está completamente ionizado, la *turbulencia Magneto Hidro Dinámica* (MHD) puede ser fuente de OG durante varios tiempos de Hubble. Se espera que los torbellinos dados a una escala L_S generen OG con frecuencia dada por $f_* \sim 1/L_S$ y densidad de energía dada por la ecuación (1.110).

La distribución de tamaños de torbellinos, así como la distribución de energía de la turbulencia, es difícil de determinar. En general se supone una única escala de agitación L_S . Por debajo de esta escala, se establece un espectro de Kolmogorov, según el cual los remolinos de un dado tamaño se rompen en otros de tamaño más pequeño. Esto genera una cascada de energía que termina en una escala de disipación térmica, mucho más chica, relacionada con la viscosidad del fluido. Por arriba de la escala de agitación, el espectro es determinado por causalidad⁵⁹. En la referencia [10], estos dos comportamientos se suponen a cada lado de la escala de agitación. En este caso, el resultado para el pico coincide con el estimado (1.110). Más recientemente [68], la turbulencia se modela con una interpolación suave entre el comportamiento a escala grande y a escalas pequeñas. Además, el hecho que la turbulencia dura varias veces el tiempo de Hubble es tenido en cuenta. En [68] el pico es a frecuencia $f_{\text{turb}*} \simeq 3,5/L_S$. Un ajuste a esos resultados para el espectro de OG se da en la referencia [89] (ver también [67, 84]),

$$h_0^2 \Omega_{\text{turb}} = 3,35 \times 10^{-4} \left(\frac{100}{g_*} \right)^{1/3} \left(\frac{E_{\text{fl}}}{E_{\text{tot}}} \right)^{3/2} \frac{L_S H_*}{2} \frac{(f/f_{\text{turb}})^3}{(1 + f/f_{\text{turb}})^{11/3} (1 + 8\pi f_*/H_*)}, \quad (1.116)$$

⁵⁹Para una turbulencia homogénea (infinitamente extendida), en principio están permitidos todos los modos k del aporte al tensor de energía-momento cuadrático en las velocidades, $\propto v_i v_j$. El promedio estadístico de la transformada de Fourier es proporcional al denominado *espectro de la turbulencia*. Se puede argumentar, como en la referencia [10], que en un proceso causal debe haber anulación asintótica para $k \rightarrow 0$, concretame el espectro tiene que ir como una potencia (al menos cuadrática) de k en ese límite. Eso establece el comportamiento del espectro de la turbulencia a grandes escalas.

donde el pico de frecuencia actual es

$$f_{\text{turb}} = 2,7 \times 10^{-5} \text{ Hz} \left(\frac{g_*}{100} \right)^{1/6} \left(\frac{T}{100 \text{ GeV}} \right) \left(\frac{2}{L_S H_*} \right). \quad (1.117)$$

En el denominador de la ecuación (1.116), f_* es la frecuencia al tiempo de generación. En términos de la frecuencia corrida al rojo f , se puede escribir $f_*/H = (3,5f)/(L_S H f_{\text{turb}})$.

Las ecuaciones (1.116-1.117), por motivos de comparación con las (1.113-1.115) de colisiones, usualmente son dadas en función de los parámetros v_w y β en vez de L_S . No obstante, hay que remarcar que en [68] el espectro se calcula como una función de la escala de agitación L_S . Esta escala se estima como $L_S = 2R_b \sim 2v_w \beta^{-1}$, es decir, el tamaño típico de radio de burbuja R_b se supone determinado por la velocidad de la pared y la escala de tiempo β^{-1} . Más adelante, en la sección 4.3, se ve que para transiciones de fase muy fuertes la cantidad β no da una correcta estimación de la escala de tiempo. Esto obliga a tener más cuidado al evaluar L_S en las expresiones (1.116-1.117).

La determinación de la escala L_S tiene ambigüedad, principalmente por pretender que solo existe una escala característica en la turbulencia. Si esa escala viniese dada por el radio de las burbujas se podría reescribir $L_S = 2R_b$, para dejar los valores pico en función del tamaño típico de radio de burbuja⁶⁰ R_b , quedando la frecuencia y la intensidad pico como

$$f_{\text{turb}}^p = 2,7 \times 10^{-5} \text{ Hz} \left(\frac{g_*}{100} \right)^{1/6} \left(\frac{T_*}{100 \text{ GeV}} \right) \frac{1}{R_b H_*}, \quad (1.118)$$

$$h_0^2 \Omega_{\text{turb}}^p = 2,6 \times 10^{-5} \left(\frac{100}{g_*} \right)^{1/3} \left(\frac{E_{\text{fl}}}{E_{\text{tot}}} \right)^{3/2} \frac{R_b H_*}{1 + 3,5 \frac{4\pi}{R_b H_*}}. \quad (1.119)$$

Como se ve, la dependencia paramétrica cambia con respecto a la estimada (1.110). No obstante, notar que, como $(R_b H)_* \ll 1$, la dependencia respecto a la escala espacial en la ecuación (1.119) es prácticamente la de la ecuación (1.110), $\Omega_p^{\text{turb}} \propto (R_b H)_*^2$.

1.5.3.3. Generación por ondas de sonido

En la reciente publicación [90, 91] se realizan simulaciones numéricas en *lattice*⁶¹ del sistema campo-fluido, no encontrando indicios de fluido turbulento pero sí que *ondas de sonido* en el plasma son fuente de OG de larga duración. En ese trabajo se considera un potencial efectivo simplificado, que permite relacionar fácilmente sus parámetros a cantidades termodinámica como la temperatura crítica, el calor latente, o la tensión superficial (energía que se almacena en la pared). Es importante señalar que, en la simulación, limitada por el poder de cálculo, se utiliza una elección de parámetros poco realista. En primer lugar, se nuclean todas las burbujas al mismo tiempo (o temperatura de nucleación) fijado a mano y, entonces, alcanzan aproximadamente el mismo tamaño R_b al momento de la colisión de frentes. La discretización es $dx = 2/T$ con 2400^3 puntos, que da un volumen de $(4800/T)^3$ cuando el tamaño de Hubble sería

⁶⁰Que también tiene ambigüedad, porque hay una distribución de burbujas con distintos tamaños.

⁶¹Es *lattice*, por *enrejado* o *reticulado* en inglés, una técnica de modelado que consiste en discretizar posiciones del espacio, generalmente con el fin de posibilitar un cálculo numérico.

(ver sección 1.4.2) $H^{-3} \sim (M_P/T^2)^3$, muchos órdenes de magnitud mayor. Además, la cantidad de burbujas (también colocada a mano) que meten en ese pequeño volumen es ~ 1000 . En consecuencia, no se llega a alcanzar un régimen estacionario y la transición termina muy rápido.

El parámetro libre de la simulación es la densidad de número de burbujas nucleadas n . Un ajuste del espectro resultante se da en la referencia [84] en función de la escala de longitud $v_w \beta^{-1}$, aunque β no es realmente un parámetro libre en la simulación de la referencia [90, 91]. Para obtener las expresiones de [84] se debe poner n en función de β mediante la expresión

$$n = 1 / [8\pi(v_w \beta^{-1})^3] . \quad (1.120)$$

Este resultado puede obtenerse despreciando la expansión de universo y considerando las expresiones (1.82) para f_+ y (1.80) para Γ en el cálculo de n definido por (1.75), lo cual lleva a que la densidad de burbujas nucleadas a un tiempo “final” t_F es $n(t_F) = -f_+|_{t_c}^{t_F} / [8\pi(v_w \beta^{-1})^3]$, donde $f_+(t_c) \approx 1$ y se supone que t_F es tal que $f_+(t_F) \ll 1$. También se puede traducir n a una escala de longitud, estimando el diámetro característico de burbuja (o distancia promedio entre centros de burbujas) al momento de mayor colisión como

$$d = n^{-1/3} . \quad (1.121)$$

En esta tesis, se expresa el espectro en función de d , entendiendo implícitamente que este se define con (1.121) en función de n , que se computa con la expresión (1.75). Así se escriben los resultados de OG para ondas de sonido como

$$h_0^2 \Omega_{\text{sonido}} = 2,65 \times 10^{-6} \left(\frac{100}{g_*} \right)^{1/3} \left(\frac{E_{\text{fl}}}{E_{\text{tot}}} \right)^2 \frac{d H_*}{(8\pi)^{1/3}} \frac{7^{7/2} (f/f_{\text{sonido}})^3}{[4 + 3(f/f_{\text{sonido}})^2]^{7/2}} . \quad (1.122)$$

La frecuencia pico $f_{\text{sonido}*}$ se estima como $f_{\text{sonido}*} = (2/\sqrt{3})(8\pi)^{1/3}/d$. Luego del corrimiento al rojo, se tiene

$$f_{\text{sonido}} = 1,9 \times 10^{-5} \text{Hz} \left(\frac{g_*}{100} \right)^{1/6} \left(\frac{T}{100 \text{ GeV}} \right) \frac{(8\pi)^{1/3}}{d H_*} \quad (1.123)$$

y la intensidad pico

$$h_0^2 \Omega_{\text{sonido}}^p = 2,65 \times 10^{-6} \left(\frac{100}{g_*} \right)^{1/3} \left(\frac{E_{\text{fl}}}{E_{\text{tot}}} \right)^2 \frac{d H_*}{(8\pi)^{1/3}} . \quad (1.124)$$

Capítulo 2

Hidrodinámica en transiciones de fase: Definiciones y discusiones generales

2.1. Contenido del capítulo

Este capítulo junto con el siguiente abarcan lo tratado dentro de los trabajos que hemos publicado sobre la hidrodinámica involucrada en las transiciones de fase [1, 3, 4]. Mientras que este se concentra en conceptos, definiciones y discusiones lo más generales posibles, en el capítulo 3 se detallan cálculos y resultados en función de diferentes parámetros.

Como se explica en el capítulo 1, en principio el sistema de estudio es un universo constituido por campos. En este capítulo se discute qué le sucede al sistema una vez que comienza la nucleación y hay crecimiento de dominios, en una transición de fase de primer orden. En términos efectivos el sistema puede suponerse como una *sopa* de partículas altamente energéticas que macroscópicamente se modela como un fluido relativista. En particular esa fase nucleada puede ser la de simetría rota en la transición de fase electrodébil. Se pretende un estudio con la mayor generalidad posible pero sin perder de vista tal aplicación. Todas las propiedades termodinámicas de ese plasma se derivan de la energía libre (ver la sección 1.2.3.2), que a su vez se calcula con la teoría de campos a temperatura finita (ver la sección 1.3.2). Además, a partir de estas se pueden calcular magnitudes representativas de los procesos hidrodinámicos que ocurren durante la nucleación y que pueden generar ondas gravitatorias. Por ejemplo, la fracción de energía que se libera durante la transición (por el paso de un mínimo local a otro) que va a parar al movimiento del plasma. La valuación de esa energía se encuentra presente en expresiones para la determinación de intensidad pico de las ondas gravitatorias generadas, e incluso de estimaciones del espectro, como se ve en el capítulo 4.

Ese tipo de magnitudes se obtienen de cálculos hidrodinámicos en torno a los frentes de transición que avanzan al crecer los dominios nucleados. La necesidad práctica de simplificar esos cálculos no se limita a considerar el potencial efectivo hasta un cierto orden en lazos. Además, la manipulación analítica de expresiones hidrodinámicas (algo deseado en esta tesis) requiere que las propiedades termodinámicas se relacionen de forma simple. Para que eso sea posible debe aproximarse la misma ecuación de estado dada por el potencial efectivo. Es decir, mediante el potencial efectivo de teoría de

campos se deben calcular ciertos parámetros que alimentan alguna simplificación de la ecuación de estado utilizada para consideraciones hidrodinámicas. Numéricamente, en un punto a mitad de camino de lo que sería realizar una simulación, es posible hacer un seguimiento temporal de la evolución hidrodinámica del sistema y con el potencial efectivo recalculando paso a paso los parámetros de esa ecuación de estado aproximada. No obstante ese refinamiento no conduce a resultados generales e independientes del modelo como los que se presentan en este capítulo (pero sí se recurre al mismo en el capítulo 4).

En la sección 2.2 se exponen las ecuaciones dinámicas básicas de fluido y campo que establecen el comportamiento macroscópico del sistema. En la sección 2.3 se muestra como la ecuación de campo en la región que separa las fases se puede reemplazar e interpretar como una ecuación de movimiento para esa interfaz sometida a la competencia entre una fuerza impulsiva y una fuerza de fricción. En la sección 2.4 se evalúan las ecuaciones diferenciales de fluido para el caso correspondiente a flujos generados por la nucleación de dominios con cierta simetría. En la sección 2.5 se describen las características generales de los perfiles de fluido que resuelven esas ecuaciones¹ cuando la pared de interfaz avanza con velocidad constante. En la sección 2.6 se comparan similitudes y diferencias entre regímenes estacionarios y acelerados en el límite ultra relativista. En la sección 2.7 se describe la aproximación del *Bag* para la ecuación de estado y se enuncia la definición del factor de eficiencia, una magnitud asociada a la energía que puede ir a fuentes de ondas gravitatorias.

2.2. Sistema Fluido-Campo

El crecimiento de la burbuja puede estudiarse considerando las ecuaciones de las variables ϕ (parámetro de orden), u^μ (cuadrivelocidad del fluido) y T (temperatura). La dinámica de las variables del fluido puede obtenerse de la conservación del tensor de energía-momento. Se supone al plasma como un fluido perfecto relativista con un campo de cuadrivelocidad² $u^\mu = (\gamma, \gamma\mathbf{v})$, siendo $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$. El tensor de energía-momento es de la forma [92, 93]

$$T_{\text{fl}}^{\mu\nu} = (e + P) u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu} \quad (2.1)$$

con $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, $P = -\mathcal{F}$ y $w = e + P = T s = -T \partial \mathcal{F} / \partial T$. Además, el tensor de energía-momento de un campo escalar libre $\hat{\phi}$ es de la forma³:

$$\hat{T}_{\hat{\phi}}^{\mu\nu} = \partial^\mu \hat{\phi} \partial^\nu \hat{\phi} - g^{\mu\nu} \frac{1}{2} \partial_\alpha \hat{\phi} \partial^\alpha \hat{\phi} \quad (2.2)$$

¹En general cuando en este trabajo se habla de *perfiles*, pueden ser de velocidades, densidad de entalpía, densidad de energía cinética, etc.

²Aquí se hace una simplificación, se realizan todos los cálculos en el contexto de relatividad especial. Si la duración de la transición es relativamente corta la expansión del universo podría despreciarse y la métrica resultaría ser *casi minkowskiana*. No obstante, como se ve en el capítulo 4, se realiza un leve refinamiento a esta aproximación cuando se calcula numéricamente la evolución de la transición, haciendo reajustes en cada paso de tiempo en función de la variación de la temperatura por la expansión del universo.

³Así escrito con $\hat{\phi}$ es un operador tensor de energía-momento de mecánica cuántica que permite definir, por *teorema de Noether*, la energía (Hamiltoniano de campo libre) $\hat{H} = \int dV \hat{T}_{00}$ o las componentes del momento $\hat{P}_i = \int dV \hat{T}_{0i}$. Pero en la siguiente expresión (2.3) se considera el valor de expectación $\phi \equiv \langle \hat{\phi} \rangle$ y se tiene un tensor efectivo definido a temperatura finita.

Para el sistema fluido-campo se considera, como primera aproximación, que el acople del campo con el fluido se encuentra ya incorporado en la dependencia $\mathcal{F}(\phi, T)$ (e incluye el potencial efectivo a temperatura cero), y entonces se tiene (ver, por ejemplo [22])

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - \mathcal{F}(\phi, T) \right] - u^\mu u^\nu T \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}(\phi, T), \quad (2.3)$$

La conservación de $T^{\mu\nu}$ da

$$\partial_\mu \left[T \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} u^\mu u^\nu - \mathcal{F} g^{\mu\nu} \right] = \square \phi \partial^\nu \phi. \quad (2.4)$$

Estas ecuaciones gobiernan la dinámica del fluido y también contienen la interacción del fluido con el campo escalar ϕ (mediante la dependencia de \mathcal{F}). Además, la evolución de ϕ es gobernada por una ecuación de movimiento a temperatura finita la cual, dentro de las aproximaciones que se consideran en la referencia [94, 95], es de la forma

$$\square \phi + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} + \sum_i g_i \frac{dm_i^2}{d\phi} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_i} \delta f_i = 0. \quad (2.5)$$

donde la sumatoria es sobre cada especie i -ésima de partícula, con g_i grados de libertad, energía $E_i = \sqrt{P_i^2 + m_i^2}$ y masas m_i dependientes del campo de Higgs ϕ , de la forma (1.38). El potencial efectivo (\mathcal{F}) a temperatura finita tiene en cuenta las correcciones cuánticas y térmicas a la ecuación de campo nivel-árbol. Las correcciones térmicas a un lazo equivalen a considerar funciones de distribución de equilibrio $f_i^{\text{eq}}(p) = 1/(e^{E_i/T} \mp 1)$. Por otro lado, las δf_i son desviaciones a esas distribuciones de equilibrio. El último es un término de disipación debido a la presencia del plasma. Calcular δf_i generalmente implica resolver un sistema de ecuaciones de Boltzmann que tienen en cuenta todas las interacciones entre partículas. Teniendo en cuenta solo los dos primeros términos, comparar la expresión (2.5) con la (1.68), ambas extreman una acción (que en definitiva es la energía libre con términos de gradientes), solo que la solución que se considera aquí tiene una dependencia temporal a diferencia del instantón en (1.68). También esa dependencia temporal es responsable de la aparición del término disipativo por el “movimiento” de la configuración del campo a través del plasma.

Para tener una más clara interpretación de la ecuación (2.5), se considera la descomposición del tensor (2.3), $T^{\mu\nu} = T_\phi^{\mu\nu} + T_{\text{fl}}^{\mu\nu}$, y que su ecuación de conservación $\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T_\phi^{\mu\nu} + \partial_\mu T_{\text{fl}}^{\mu\nu} = 0$, puede desdoblarse en dos ecuaciones no conservadas, donde aparece un término δ^ν asociado al intercambio de energía y momento entre el plasma y el campo de Higgs

$$\begin{aligned} \partial_\mu T_\phi^{\mu\nu} &= +\delta^\nu \\ \partial_\mu T_{\text{fl}}^{\mu\nu} &= -\delta^\nu \end{aligned} \quad (2.6)$$

Como $\partial_\mu T_\phi^{\mu\nu} = \square \phi \partial^\nu \phi$, si tiene sentido tomar $\delta^\nu = \mathcal{Q} \partial^\nu \phi$, con un \mathcal{Q} a definir, se pueden simplificar los factores comunes en la ecuación superior de (2.6) y expresar

$$\square \phi = \frac{d}{dX^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\phi\text{-free}}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{\phi\text{-free}}}{\partial \phi} = \mathcal{Q}, \quad (2.7)$$

donde $\mathcal{L}_{\phi\text{-free}} \equiv \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$ tiene la forma de la densidad Lagrangiana de un campo

escalar libre pero evaluado en un campo ϕ termodinámico, es decir, sería una densidad Lagrangiana efectiva térmica, y la expresión (2.7) coincide con una ecuación de Euler-Lagrange cuando actúa una fuerza generalizada \mathcal{Q} . Teniendo en cuenta esa interpretación, es posible desdoblar \mathcal{Q} en una suma de dos “fuerzas” de distinta naturaleza, una debida a un “potencial” y otra disipativa. Teniendo en cuenta la (2.5), tiene que ser $\mathcal{Q} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} - \mathcal{K}$, con $\mathcal{K} \equiv \sum_i g_i \frac{dm_i^2}{d\phi} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_i} \delta f_i$ representando la contribución disipativa. Se puede reescribir

$$\frac{d}{dX^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\phi+\mathcal{F}}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{\phi+\mathcal{F}}}{\partial \phi} = -\mathcal{K}, \quad (2.8)$$

donde $\mathcal{L}_{\phi+\mathcal{F}} \equiv \mathcal{L}_{\phi\text{-free}} - \mathcal{F}$ sería la densidad Lagrangiana efectiva térmica agregando un potencial efectivo. El término \mathcal{K} , solo es no nulo fuera del equilibrio (límite termodinámico comprometido), situación por lo general debida a la presencia de gradientes elevados (por ejemplo, en frente de transición). Esto respalda asociarlo a algún tipo de disipación energética, como la fricción debida a las partículas del plasma que colisionan contra la pared de una burbuja de transición. Se interpreta entonces que (2.5) coincide con la ecuación de Euler-Lagrange térmica (2.8) en presencia de una fricción⁴.

El campo solo varía dentro de la pared. Como consecuencia, lejos de la pared, las ecuaciones (2.4) dan ecuaciones para el fluido solo

$$\partial_\mu T_{\text{fl}}^{\mu\nu} = 0 \quad (2.9)$$

Y cuando solo se estudia la hidrodinámica, sin considerar el interior de la pared de la burbuja, como la pared puede ser supuesta con delgadez infinitesimal se evita recargar la notación expresando el tensor de energía-momento únicamente debido al aporte de fluido ideal dado en (2.1)

$$T^{\mu\nu} \approx T_{\text{fl}}^{\mu\nu} \quad (2.10)$$

Se puede simplificar el estudio del sistema considerando la ecuación de fluidos (2.9) junto con una ecuación de movimiento para la pared [en vez de una para el campo dada por (2.5)] como se ve en la sección que sigue.

2.3. Ecuación de movimiento para la pared

Como la burbuja de radio R_b tiene una “pared delgada” de espesor $\delta r \ll R_b$ (ver sección 1.4.5) se puede lidiar con la ecuación (2.5) aplicando algunas simplificaciones compatibles con esta aproximación. Puesto que en términos dimensionales es de esperarse que $\partial_r \phi \sim \Delta \phi / \delta r$, y en consecuencia $\partial_r^2 \phi \sim \Delta \phi / \delta r^2$, como $1/(R_b \delta r) \ll 1/\delta r^2$ también debería ser $r^{-1} \partial_r \phi \ll \partial_r^2 \phi$ en la región donde ϕ varía (dentro de la pared, con $r \sim R_b$). En general, por movimientos en el plasma o colisión entre distintos frentes de transición, la simetría esférica no se preserva. En la ecuación (2.5) para el campo ϕ aparece un operador D’Alembertiano que se reduce a $\square = \partial_0^2 - 2r^{-1} \partial_r - \partial_r^2$, cuando se aplica a un ϕ que solo depende de la coordenada radial r (es decir, con simetría esférica). En cambio, para simetría plana no aparece ningún término $\propto r^{-1} \partial_r$ (pero

⁴Algo de esperarse ya que (2.5) sale de calcular el valor de expectación termodinámico de la ecuación de Euler-Lagrange para el operador de campo $\hat{\phi}$ en la teoría cuántica de campos. En las referencias [94, 95] no toman dicho valor de expectación directamente sobre $\hat{\mathcal{L}}(\hat{\phi})$, lo cual tal vez permitiría identificar el “potencial” dependiente de $\partial_\mu \phi$ del cual se derivaría \mathcal{K} .

sí para la cilíndrica). Cuando este no se anula, en algún sentido caracteriza localmente el apartamiento respecto del caso plano. Como en la aproximación de pared delgada es despreciable se toma entonces $\square = \partial_0^2 - \partial_r^2$. En general, cada elemento de pared puede considerarse localmente plano, para burbujas de cualquier forma cuando ϕ solo varía a lo largo de la dirección normal dada por el eje r .

Al reemplazar el D'Alembertiano en la ecuación (2.5), para la aproximación de pared delgada en un elemento de pared, se tiene

$$(\partial_0^2 - \partial_r^2)\phi + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} + \mathcal{K} = 0 \quad (2.11)$$

Donde \mathcal{K} , al igual que en la ecuación (2.8), coincide con el último término de la ecuación (2.5) y se asocia a una disipación energética. Como se argumenta en la sección 2.2, la ecuación (2.11) se puede interpretar como una ecuación de Euler-Lagrange (2.8) para un campo ϕ que, en ausencia de fuerzas disipativas, le correspondería una densidad Lagrangiana efectiva térmica

$$\mathcal{L}_{\phi+\mathcal{F}} = \frac{1}{2} [(\partial_0\phi)^2 - (\partial_r\phi)^2] - \mathcal{F} \quad (2.12)$$

Y a esta a su vez le correspondería una densidad de energía (Hamiltoniana) térmica

$$\mathcal{H}_{\phi+\mathcal{F}} = \Pi \partial_0\phi - \mathcal{L}_{\phi+\mathcal{F}} = \frac{1}{2} [(\partial_0\phi)^2 + (\partial_r\phi)^2] + \mathcal{F} \quad (2.13)$$

Donde $\Pi = \partial \mathcal{L} / \partial (\partial_0\phi) = \partial_0\phi$ es la densidad de momento generalizado. Teniendo en cuenta solo las expresiones (2.3) y (2.4) se indaga o *escarba* menos profundamente en la microfísica que al considerar también la ecuación (2.11), pero las primeras son válidas para análisis hidrodinámicos desentendiéndose de lo que sucede dentro de la pared. No obstante, para cerrar el sistema de ecuaciones hidrodinámicas (2.4), se requeriría establecer forma y evolución de ϕ al menos aproximando la ecuación (2.11). Como se ve a continuación, se hace eso al reemplazar la ecuación de campo (2.11) por una ecuación de movimiento para la pared.

Yendo hacia ese enfoque, primero se analiza el caso en completo equilibrio, que es el de una pared completamente quieta separando las dos fases. Estrictamente hablando dicha situación solo podría darse a temperatura crítica T_c , si mediante algun mecanismo se evitara el sobreenfriamiento y se realizara la transición de manera cuasiestática. En tal caso la ecuación (2.11) no posee derivada respecto al tiempo, ni término \mathcal{K} dependiente de apartamientos δf_i respecto a las distribuciones de equilibrio. Por lo tanto, se reduce a $-\partial_r^2\phi_0 + \partial \mathcal{F} / \partial \phi_0 = 0$, donde $\phi_0 \equiv \phi_0(r - r_w)$ es la configuración de campo para una pared en reposo, tal que fuera de ésta solo toma valores ϕ_- y ϕ_+ constantes. A su vez *la posición* de la pared se define para un $r = r_w$ de su interior, tal que cumpla la condición $\int (r - r_w)(\partial_r\phi_0)^2 dr = 0$. A la ecuación de Euler-Lagrange se la puede multiplicar por $\partial_r\phi_0$ e integrar entre un punto en la fase "+" y otro en el interior de la pared, obteniéndose

$$\frac{1}{2}(\partial_r\phi_0)^2 = \int_+^r dr' \frac{d\mathcal{F}(T_c, \phi_0(r' - r_w))}{dr'} = \mathcal{F}(T_c, \phi(r - r_w)) - \mathcal{F}_{c+}, \quad (2.14)$$

donde $\mathcal{F}_{c+} = \mathcal{F}(T_c, \phi_+)$ y se tiene en consideración que esta situación no hay gradientes

de temperatura y toda la dependencia de \mathcal{F} con respecto a la posición se debe exclusivamente a la dependencia del campo $\phi_0(r - r_w)$, es decir, se cumple $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi_0}{\partial r} = \frac{d\mathcal{F}}{dr}$. Juntando las expresiones (2.14) y (2.13), se tiene que para el caso de completo equilibrio con pared en reposo la densidad volumétrica de energía es

$$\mathcal{H}_0 = (\partial_r \phi_0)^2 + \mathcal{F}_{c+} \quad (2.15)$$

Como en este caso estático \mathcal{F}_{c+} es la energía libre a ambos lados de la pared, pues $\mathcal{F}_-(T_c) = \mathcal{F}_+(T_c)$, resulta ser un valor de fondo homogéneo respecto del cual se puede discriminar la densidad de energía de la pared $(\partial_r \phi_0)^2$. Si a esta se la integra respecto de la posición a través de la pared se tiene la densidad de energía superficial del elemento de pared. Dejándolo expresado en función de la variable $\zeta = r - r_w$ queda

$$\sigma_0 \equiv \int_{-}^{+} [\partial_{\zeta} \phi_0(\zeta)]^2 d\zeta, \quad (2.16)$$

siendo \int_{-}^{+} la integración entre puntos a cada lado de la pared (donde $\partial_{\zeta} \phi_0$ se anula).

Volviendo al caso general, la ecuación (2.11) “de movimiento” para ϕ se puede llevar a una ecuación de movimiento para la pared. En el sistema propio de un elemento de pared en reposo se considera un eje perpendicular a la superficie (es decir, en la dirección del movimiento) y se representa cualquier posición sobre este con una coordenada ζ cuyo origen está en algún punto interno de la pared. Con el fin de simplificar las expresiones se considera el siguiente *ansatz* para ϕ , como aproximación se supone que en el sistema propio vale el perfil de equilibrio (pared en reposo) $\phi_0(\zeta)$, independiente del tiempo propio, que varía entre los valores ϕ_{-} y ϕ_{+} dentro de la pared. Entonces, para la pared en movimiento respecto al centro de la burbuja, ese perfil toma la forma

$$\phi(r, t) = \phi_0(\gamma_w (r - r_w)), \quad (2.17)$$

donde, como la pared corresponde al rango de r en que ϕ varía, se define la *posición de la pared* $r_w(t)$ (o la posición $\zeta = 0$ en el sistema comóvil) mediante la condición $\int (r - r_w)(\partial_r \phi)^2 dr = \int \zeta (\partial_{\zeta} \phi_0)^2 d\zeta = 0$. Con esta misma posición se define el radio de la burbuja, $R_b \equiv r_w$. Además se denota $v_w = \dot{r}_w$ y $\gamma_w = 1/\sqrt{1 - v_w^2}$. Entonces, multiplicando la ecuación (2.11) por $\partial_r \phi$ e integrando a través de toda la pared, se obtiene la ecuación

$$\gamma_w^3 \dot{v}_w \int_{-}^{+} (\partial_{\zeta} \phi_0)^2 d\zeta = \int_{-}^{+} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial r} dr + \int_{-}^{+} \mathcal{K} \frac{\partial \phi}{\partial r} dr \quad (2.18)$$

Para interpretar el lado izquierdo de la ecuación (2.18) se tiene en cuenta lo siguiente. Suponiendo que la pared es realmente de ancho infinitesimal, el tensor de energía-momento para *un elemento plano de pared*, en el sistema comóvil de dicho elemento, tiene una forma $T_{w0}^{\mu\nu} = \sigma_0 \delta(\zeta) \text{diag}(1, 0, \dots)$, donde la delta de Dirac se anula salvo en la posición exacta en la que se encuentra ($\zeta = 0$)⁵. Para obtener el tensor de energía-momento $T_w^{\mu\nu}$ en el sistema de referencia del centro de la burbuja se debe transformar el del sistema comóvil. Considerando que este último coincide con un

⁵Por sencillez en la exposición, sin afectar las conclusiones, se considera el tensor de energía-momento para una distribución superficial plana sin acotarlo en las direcciones paralelas, como correspondería cuando solo en una región pequeña se tiene un elemento de superficie plano.

sistema localmente inercial, la transformación conduce a la densidad volumétrica de energía $T_w^{00} = \sigma\delta(r - v_w t)$, donde $\sigma = \gamma_w \sigma_0$ es la densidad superficial de energía⁶. También, la densidad volumétrica de momento es $T_w^{r0} = \sigma v_w \delta(r - v_w t)$, siendo σv_w la densidad superficial de momento. Luego, la fuerza neta **por unidad de área** sobre el elemento de pared es

$$F_{\text{net}} = \frac{d(\sigma v_w)}{dt} = \sigma_0 \gamma_w^3 \dot{v}_w \quad (2.19)$$

y si se reemplaza σ_0 por la expresión (2.16), el lado izquierdo de (2.18) se interpreta como la fuerza neta por unidad de área F_{net} . Entonces, los términos en el lado derecho representan una descomposición de fuerzas por unidad de área actuando sobre la pared. Como la fuerza que comanda el movimiento de la pared tiene que ser finita, el factor γ_w^3 implica que, respecto del centro de la burbuja, \dot{v}_w decrece a medida que la pared alcanza la velocidad de la luz.

Los términos de fuerza a la derecha en la ecuación (2.18) dependen no solo del perfil del Higgs sino también de los perfiles del fluido. El primer término es muy sensible a la hidrodinámica. En general $\mathcal{F}(T, \phi)$ puede depender de una temperatura $T(r)$ que varía con la posición. Para una temperatura constante, este término da la diferencia de presión $\Delta P = P_- - P_+$, y en general es de esperarse que sea siempre igual a ΔP más alguna corrección que no le cambiaría el signo. Como siempre sería positivo, es decir, radialmente saliente, se interpreta como la fuerza por unidad de área que comanda el movimiento de la pared F_{dr} ⁷ (de aquí en más llamada *fuerza impulsora* o *fuerza de driving*). El término que contiene \mathcal{K} , como se discute en la sección 2.2, representa el apartamiento microscópico del equilibrio causado por el movimiento de la pared, lo que implicaría una disipación energética. Se espera entonces que sea negativo y dependiente de la velocidad v_w . Se refiere a este término como *fuerza de fricción* por unidad de área F_{fr} y, en la sección 2.3.2, se muestra que para el límite no relativista coincide con la forma que usualmente se esperaría para una fricción (proporcional a la velocidad relativa de la pared respecto al fluido). Así, la ecuación (2.18) puede escribirse como el segundo principio de Newton para cada elemento de pared localmente plano

$$\begin{aligned} F_{\text{dr}} &= \int_{-}^{+} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial r} dr \\ F_{\text{fr}} &= \int_{-}^{+} \mathcal{K} \frac{\partial \phi}{\partial r} dr \\ F_{\text{net}} &= \frac{d(\sigma v_w)}{dt} = F_{\text{dr}} + F_{\text{fr}} \end{aligned} \quad (2.20)$$

En las subsecciones (2.3.1) y (2.3.2) se dan los lineamientos generales para determinar las fuerzas de driving y fricción, del mismo modo que proponemos en nuestro trabajo [4]. El detalle fino, incluyendo aproximaciones a la ecuación de estado, se completa en la sección 3.5.

⁶Notar, entonces, que en esta aproximación la densidad de energía superficial no varía en el sistema propio de la pared, pero sí hay una acumulación de energía en el sistema del centro en reposo si la velocidad aumenta en el tiempo.

⁷Subíndice “dr” por *driving* (conductor o impulsor, en inglés).

2.3.1. Fuerza impulsora y obstrucción hidrodinámica

Si bien $\frac{d\mathcal{F}}{dr} = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\phi} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r}$, además es posible reemplazar la dependencia en T por T^2 , es decir, $\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial T^2} \frac{\partial T^2}{\partial r}$, lo cual resulta útil [96] porque aproximaciones analíticas de \mathcal{F} (como el *Bag*, que se ve más adelante en la sección 2.7.1) suelen ser cuadráticas en T . Entonces, la fuerza impulsora dada en (2.20) puede escribirse en la forma

$$F_{\text{dr}} = P_- - P_+ - \int_-^+ \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial T^2} dT^2, \quad (2.21)$$

por teorema del valor medio puede escribirse

$$F_{\text{dr}} = P_- - P_+ - \overline{\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial T^2}} (T_+^2 - T_-^2), \quad (2.22)$$

y en los cálculos puede aproximarse el valor medio de $\partial\mathcal{F}/\partial T^2$ dentro de la pared como

$$\overline{\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial T^2}} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\mathcal{F}_+}{\partial T_+^2} + \frac{\partial\mathcal{F}_-}{\partial T_-^2} \right) \quad (2.23)$$

Como $P = -\mathcal{F}$ y a temperatura cero \mathcal{F} coincide con la densidad de energía en cada fase, en la expresión (2.21) la diferencia de presiones siempre puede escribirse como la diferencia de mínimos del potencial efectivo a temperatura cero (energía de falso vacío) $\Delta\mathcal{V}_{\text{ef}} = \mathcal{V}_{\text{ef}}(\phi_+) - \mathcal{V}_{\text{ef}}(\phi_-)$ más un aporte térmico. Por otro lado, el resto proporcional a $\overline{\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial T^2}}$ también es puramente térmico. Luego, la fuerza impulsora se descompone como⁸

$$F_{\text{dr}} = \Delta\mathcal{V}_{\text{ef}} + F_{\text{hyd}}(T_+, T_-) \quad (2.24)$$

De no haber sobreenfriamiento significativo respecto T_c , sería $F_{\text{hyd}} \sim -\Delta\mathcal{V}_{\text{ef}}$ pues la pared casi no se movería. Por el contrario, si fuese mayor el sobreenfriamiento, F_{hyd} seguiría siendo negativo pero tendría que ser en módulo algo menor a $\Delta\mathcal{V}_{\text{ef}}$ para que fuese $F_{\text{dr}} > 0$.

Para $T < T_c$, el mínimo de energía libre asociado a la fase “-” es menor que el de la fase “+” y la barrera de potencial entre mínimos decrece al bajar T . Pero si hay recalentamiento la diferencia entre mínimos $\mathcal{F}_+ - \mathcal{F}_-$ no es tan grande, y la altura de la barrera entre ϕ_+ y ϕ_- es mayor, luego eso significa que la transición es menos fuerte, la pared no avanza empujada por un gran valor de F_{dr} y, en consecuencia, F_{hyd} tiene que ser mayor en módulo.

Por lo tanto, F_{hyd} , llamada fuerza de *obstrucción hidrodinámica* [97] (ver también [18, 98]), es opuesta al movimiento de la pared (negativa) y depende indirectamente de su velocidad v_w (mediante alguna relación entre esta y la temperatura). No obstante, no se comporta como una fricción del fluido ya que *decrece* a partir de cierto valor de velocidad. En efecto, una pared acelerada con $v_w \rightarrow 1$ acumula parte de la energía liberada y, como se ve en la sección 3.4.1, la hidrodinámica se vuelve más débil en ese límite, lo que implica menos recalentamiento y, en consecuencia, reducción en la intensidad de F_{hyd} .

⁸El subíndice “hyd” por *hydrodynamics* (hidrodinámica, en inglés).

2.3.2. Fuerza de fricción

Como consecuencia de la fricción presente en la ecuación (2.20), la pared puede alcanzar un régimen estacionario con velocidad constante. No obstante, es sabido que tal estado estacionario no necesariamente se alcanza para cualquier situación, ya sea debido a inestabilidades que hacen al movimiento de la pared turbulento [96, 99–104], o solo porque la fricción no es suficiente para evitar que la pared *huya* (o *runaway*, en inglés) [105]. En tal caso, la velocidad rápidamente alcanza un valor $\simeq 1$, con alto y creciente factor relativista γ_w . En cualquier caso, como las fuerzas involucradas dependen de la termodinámica o la microfísica, la temperatura fija la escala de tiempo $\delta t \sim T^{-1}$ en que se alcanza un régimen $v_w \approx cte$. Si la duración de la transición se estima con $\Delta t \sim \beta^{-1}$, usando (1.81), se tiene que la escala de Hubble fija la duración de la transición en el rango $\Delta t \sim H^{-1} 10^{-4}-10^{-2}$. Entonces, usando el resultado (1.66) la relación de tiempos en la transición electrodébil sería $\delta t/\Delta t \sim 10^{-15}-10^{-13}$. Esto justifica concentrarse únicamente en el estudio de lo que ocurre luego del transitorio δt , cuando ya se ha alcanzado un régimen estacionario o *runaway* y transcurre la mayor parte de la transición.

Tomando la definición (2.20) de la fuerza de fricción en el sistema de referencia del centro de la burbuja, pero expresando el integrando con las magnitudes referidas al sistema localmente inercial de la pared en reposo (w.f.)⁹, se tiene $F_{\text{fr}} = \int_{-}^{+} \mathcal{K} \partial_{\zeta} \phi_0 d\zeta$. La magnitud \mathcal{K} depende de los apartamientos del equilibrio δf_i , y estos dependen de la velocidad relativa entre el plasma y la pared. Si no hubiese tal desplazamiento relativo la pared no chocaría con las partículas apartándolas del equilibrio y tanto los δf_i como \mathcal{K} se anularían. Para velocidad relativa pequeña la dependencia puede aproximarse a orden lineal. La velocidad relativa de la pared respecto del fluido coincide con $-v_{\text{w.f.}}$, el opuesto a la velocidad del fluido en el sistema de la pared en reposo, luego a primer orden se tiene $\mathcal{K} \approx \tilde{f} v_{\text{w.f.}}$, donde \tilde{f} es un factor de proporción que depende de la posición por intermedio de alguna dependencia respecto a la configuración del campo $\phi_0(\zeta)$. Además, como el apartamiento respecto del equilibrio sucede principalmente en la pared, \tilde{f} debería ser no nulo solo donde ϕ_0 varía, es decir donde $\partial_{\zeta} \phi_0$ no se anula. Esto implica que razonablemente se podría esperar¹⁰ $\tilde{f} = f \partial_{\zeta} \phi_0$, con $f > 0$ aún preservando alguna dependencia respecto de ϕ_0 . Se toma $\tilde{f} \partial_{\zeta} \phi_0 = f (\partial_{\zeta} \phi_0)^2 = \eta \mathcal{P}(\zeta)$, donde se define $\mathcal{P}(\zeta) > 0$ tal que su integración en el ancho de la pared da 1, es decir, cumple el rol de una función de peso o ponderación, mientras que $\eta > 0$ es una constante que resulta de discriminar esa normalización. Se tiene entonces que la fricción es $F_{\text{fr}} = \eta \int_{-}^{+} \mathcal{P} v_{\text{w.f.}} d\zeta = \eta \langle v_{\text{w.f.}} \rangle$. Al expresarla en el sistema de referencia del centro de la burbuja para velocidad de pared pequeña se tiene $F_{\text{fr}} \approx -\eta \langle v_w - \bar{v} \rangle$, o bien

$$F_{\text{fr}} = -\eta (v_w - \bar{v}), \quad (2.25)$$

donde $\bar{v} = \langle v \rangle$ puede aproximarse como el promedio entre las velocidades del fluido justo por delante y detrás de la pared. La fricción (2.25) es el resultado clásico usualmente esperado y a η se lo denomina *coeficiente de fricción* entre la pared y el plasma.

El coeficiente de fricción (o la fuerza F_{fr}) se obtiene de consideraciones microfísicas,

⁹Las siglas “w.f.” por *wall frame* (sistema de la pared, en inglés).

¹⁰Puesto que en el sentido de integración en la expresión (2.20) con r (o ζ) creciente, $- \rightarrow +$, se tiene $\partial_{\zeta} \phi_0 < 0$ y la fuerza de fricción es negativa (apunta hacia el centro de la burbuja), tiene que ser $\mathcal{K} > 0$. Como la pared es la que arrastra al plasma su velocidad siempre es mayor a la de este y en el sistema de referencia de la pared se tiene $v_{\text{w.f.}} < 0$. Entonces $\tilde{f} < 0$ y $f > 0$.

que implican calcular las desviaciones del equilibrio δf_i mediante la resolución de las ecuaciones de Boltzmann teniendo en cuenta todas las interacciones entre partículas. La fricción no relativista, a bajas velocidades, se calcula en varios estudios de la microfísica [16, 17, 106–110]. Algunas aproximaciones generales son derivadas en las referencias [19, 47]. El coeficiente de fricción recibe contribuciones de las *partículas térmicas*, es decir, aquellas que cumplen la ecuación de transporte de Boltzmann, y contribuciones de *bosones infrarrojos*, es decir, excitaciones infrarrojas de campos bosónicos, que deben ser tratadas clásicamente. Para masas de la forma $m_i^2 = h_i^2 \phi^2 + \mu_i^2$ se tiene la contribución de partículas térmicas¹¹

$$\eta_{\text{th}} = \sum_i \frac{g_i h_i^4}{\bar{\Gamma}/T} T \int_{\phi_+}^{\phi_-} c_1(m_i/T)^2 (\phi/T)^2 \sqrt{2\Delta\mathcal{F}} d\phi, \quad (2.26)$$

donde $\Delta\mathcal{F}(\phi, T)$ es el de la definición (1.8) y los límites de integración (mínimos de energía libre) se toman $\phi_+ = 0$ y $\phi_- = \phi_c$, donde ϕ_c es por que se evalúa a $T = T_c$ ¹², la función c_1 viene dada por

$$c_1(x) = \frac{1}{2\pi^2} \int_x^\infty dy \sqrt{y^2 - x^2} \frac{e^y}{(e^y \mp 1)^2}, \quad (2.27)$$

y $\bar{\Gamma}$ es un ritmo de interacción promedio que surge del término de colisión en una ecuación de transporte de Boltzmann. Para la transición de fase electrodébil, $\bar{\Gamma}$ es típicamente $\sim 10^{-2}$. La contribución de bosones infrarrojos es

$$\eta_{\text{ir}} = \sum_{\text{bosones}} \frac{g_i h_i^4 \pi m_D^2}{8T^2} T \int_{\phi_*}^{\phi_-(T_c)} b(m_i/T) (\phi/T)^2 \sqrt{2\Delta\mathcal{F}} d\phi, \quad (2.28)$$

donde m_D es la masa Debye (la masa térmica que viene de la autoenergía), dado por $m_D^2 = (11/6)g^2 T^2$ para los bosones W y Z del modelo estándar, y $m_D^2 = h^2 T^2/3$ para un singlete escalar. La integral en (2.28) tiene un cut-off infrarrojo ϕ_* para μ_i pequeña, dado por $\phi_* = \sqrt{\delta r^{-2} - \mu_i^2}/h$ para $\mu_i < \delta r^{-1}$, y $\phi_* = 0$ para $\mu_i > \delta r^{-1}$, donde δr es el ancho de la pared. En la aproximación de pared delgada, δr se puede estimar como¹³ $\delta r \approx \int_{0,1\phi_c}^{0,9\phi_c} d\phi/\sqrt{2\Delta\mathcal{F}}$. La función b viene dada por

$$b(x) = \frac{1}{2\pi^2} \int_x^\infty \frac{dy}{y^3} \frac{e^y}{(e^y - 1)^2}. \quad (2.29)$$

Cada una de esas contribuciones domina en un diferente rango de parámetros, y se puede usar $\eta = \eta_{\text{th}} + \eta_{\text{ir}}$. Aproximaciones analíticas para η_{th} y η_{ir} para diferentes límites se pueden encontrar en la referencia [19].

¹¹Subíndice “th” por *thermal* (térmico, en inglés).

¹²Esto es una simplificación, ya que la transición en general sucede a $T = T(t_i) < T_c$.

¹³Si a la ecuación (2.5) en un elemento de pared a temperatura crítica, $\partial_r^2 \phi = \partial\mathcal{F}/\partial\phi$, se la multiplica por $\partial_r \phi$ e integra en r , entre un punto en la región por delante de la pared (donde $\partial_r \phi = 0$) y otro dentro de la misma, se tiene $\frac{1}{2}(\partial_r \phi)^2 = \Delta\mathcal{F}$. Esto implica que, como primera aproximación, $d\phi/\sqrt{2\Delta\mathcal{F}} \approx dr$ y su integración en la región donde ϕ varía sirve para estimar el ancho de la pared. No obstante, se ve, $\phi(r)$ posee una curva similar a la de una tangente hiperbólica, con límites asintóticos (en la bibliografía, a menudo directamente se usa una tanh como *ansatz*). Para identificar a la pared como la región en la cual se tiene el mayor gradiente, en esta tesis se fija a *grosso modo* los límites de integración entre el 10% y 90% de la variación total de ϕ al pasar de una fase a otra.

Las expresiones anteriores para el coeficiente de fricción se derivan en un régimen de velocidad pequeña, no relativista (NR). Es sabido que la aproximación NR comienza a fallar cerca de la velocidad del sonido [111]. En principio la fricción F_{fr} más allá del límite NR debería calcularse con similares consideraciones microfísicas, pero en vez de eso se suele utilizar una extrapolación. Originalmente, en la bibliografía sobre el tema, esa extrapolación se modeló agregando únicamente un factor $\gamma_{\text{w.f.}}$ en la expresión NR y obteniendo $\mathcal{K} = \tilde{f} \gamma_{\text{w.f.}} v_{\text{w.f.}} = f \partial_{\zeta} \phi_0 \gamma_{\text{w.f.}} v_{\text{w.f.}}$, que puede expresarse en una forma invariante relativista. Esto se logra teniendo en cuenta que, en el sistema de referencia de la pared, la cuadrivelocidad contravariante es $u = \gamma_{\text{w.f.}} (1, 0, 0, v_{\text{w.f.}})$ y la derivada temporal de $\phi = \phi_0(\zeta)$ es nula. Entonces, se reescribe como (igual que en [22])

$$\mathcal{K} = f u^{\mu} \partial_{\mu} \phi, \quad (2.30)$$

Se verifica que para $v_{\text{w.f.}}$ pequeño se re obtendría el \mathcal{K} del régimen NR. Integrando se llega a $F_{\text{fr}} = \eta \langle \gamma_{\text{w.f.}} v_{\text{w.f.}} \rangle$, que también conduce a la expresión (2.25) si las velocidades del fluido y la pared son pequeñas. Al factor $\langle \gamma_{\text{w.f.}} v_{\text{w.f.}} \rangle$ se lo puede aproximar como el promedio entre las valuaciones usando las velocidades del fluido justo por delante y detrás de la pared, en el sistema de pared en reposo.

Más recientemente en la referencia [105] se considera el régimen ultra relativista (UR). Notablemente, el estudio del caso UR se vuelve mucho más simple que el NR. En este límite la fricción no depende de la velocidad. Esto es porque las partículas que cruzan la pared UR no tienen tiempo para interactuar, y no hace falta considerar las ecuaciones de Boltzmann para obtener los δf_i . En este caso, es más fácil calcular las ocupaciones completas f_i en vez de las desviaciones δf_i , es decir, considerar los términos segundo y tercero en la ecuación (2.5) simultáneamente. Macroscópicamente, estas cantidades sirven para calcular la fuerza total que actúa sobre la pared. La fuerza total por unidad de área actuando sobre la pared UR (con factor $\gamma \sim 10^9$) viene dada por¹⁴

$$F_{\text{net}} = -(\tilde{\mathcal{F}}_- - \tilde{\mathcal{F}}_+), \quad (2.31)$$

donde $\tilde{\mathcal{F}}(\phi, T)$ se obtiene conservando solo los términos cuadráticos en una expansión de Taylor para la parte de temperatura finita de $\mathcal{F}(\phi, T)$ alrededor de $\phi = 0$ [105, 112],

$$\tilde{\mathcal{F}}(\phi, T) \equiv \mathcal{V}_0(\phi) + \mathcal{V}_1(\phi) + \sum_i [m_i^2(\phi) - m_i^2(0)] \left. \frac{d\mathcal{F}_1}{dm_i^2} \right|_{\phi=0}. \quad (2.32)$$

Para el caso de bosones con masas de la forma $m_i = h_i \phi$ (es decir $\mu_i = 0$)¹⁵, el último término en la ecuación (2.32) se vuelve

$$\sum_i \frac{g_i h_i^2}{24} T^2 \phi^2. \quad (2.33)$$

Para fermiones hay un factor adicional $1/2$. En ese caso la fuerza neta es de la forma¹⁶

$$F_{\text{net}} = \Delta \mathcal{V}_{\text{ef}} - \sum_i g_i c_i \frac{T_+^2 m_i^2(\phi_-)}{24}, \quad (2.34)$$

¹⁴Notar que (2.31) es como una diferencia de “presiones”, $\tilde{P} \equiv -\tilde{\mathcal{F}}$, entre fases.

¹⁵Lo cual da transiciones de fase más fuertes por producir un término $\propto -\phi^3$ en el potencial efectivo.

¹⁶Compararla con las ecuaciones (2.20) y (2.24).

donde $c_i = 1$ (1/2) para bosones (fermiones), y T_+ es la temperatura del fluido sin perturbar en la fase “+” donde el plasma aún no ha sido alcanzado por el frente de transición¹⁷. Notar que, como esta fuerza no depende de la velocidad de la pared, si se alcanza este régimen UR con una fuerza neta $F_{\text{net}} > 0$, entonces ya se encuentra en régimen *runaway*. Puesto que $F_{\text{net}} = F_{\text{dr}} + F_{\text{fr}}$, a la expresión (2.34) se le puede restar F_{dr} , dado por (2.22) evaluada con la aproximación (2.23), lo que conduciría a la expresión de F_{fr} en régimen UR.

El hecho que F_{net} se vuelva independiente de la velocidad de la pared en el límite UR implica que la fuerza de fricción satura como función de la cuadrivelocidad (que tiene un factor relativista divergente). Entonces, la extrapolación dada por la expresión (2.30) no resulta ser adecuada. Un modelo fenomenológico para la fuerza de fricción, que interpola entre los regímenes NR y UR, se introduce en la referencia [113],

$$\mathcal{K} = \frac{f u^\mu \partial_\mu \phi}{\sqrt{1 + [g u^\mu \partial_\mu \phi]^2}}, \quad (2.35)$$

donde f y g son funciones escalares que pueden ser elegidas adecuadamente para dar la correcta dependencia respecto a ϕ en la fricción. En particular, tomando $g = 0$ se re obtiene el modelo (2.30) que solo extrapola el resultado NR sin considerar la saturación UR. En cambio, con $g \neq 0$ se ve que ese término da una fuerza de fricción que satura para velocidad UR pero que tiende al modelo (2.30) si la velocidad es lo suficientemente pequeña, luego contiene el límite NR correcto.

Con el modelo (2.35) la fuerza de fricción definida en (2.20) se escribe como

$$F_{\text{fr}} = \int_{-}^{+} \frac{f u^\mu \partial_\mu \phi}{\sqrt{1 + [g u^\mu \partial_\mu \phi]^2}} \partial_r \phi dr. \quad (2.36)$$

Para el perfil de campo (2.17), se tiene

$$u^\mu \partial_\mu \phi = \gamma(\partial_0 \phi + v \partial_r \phi) = \partial_\zeta \phi_0|_{\zeta=\gamma_w(r-r_w)} \gamma [\gamma_w(v - v_w) + \dot{\gamma}_w(r - r_w)] \quad (2.37)$$

El término $\dot{\gamma}_w(r - r_w)$ se anula en el caso estacionario, pero también se puede despreciar en el régimen *runaway* ya que solo se integra en rangos con $|r - r_w| < \delta r = \delta \zeta / \gamma_w$ ¹⁸ y además, por (2.19), $\dot{\gamma}_w = v_w F_{\text{net}} / \sigma_0$, luego $|\dot{\gamma}_w(r - r_w)| < v_w (\delta \zeta / \gamma_w) (F_{\text{net}} / \sigma_0) \rightarrow 0$ para $v_w \rightarrow 1$ si la F_{net} se mantiene finita. Se tiene entonces¹⁹

$$F_{\text{fr}} = \int_{-}^{+} \frac{\gamma_w \gamma (v - v_w) f (\partial_\zeta \phi_0)^2}{\sqrt{1 + \gamma_w^2 \gamma^2 (v - v_w)^2 g^2 (\partial_\zeta \phi_0)^2}} d\zeta, \quad (2.38)$$

Notar que, si bien se hace el cambio de variable que parametriza la posición $r(\zeta)$ con la coordenada en el sistema de referencia de la pared, las velocidades siguen siendo las referidas al sistema del centro de burbuja en reposo. Es fácil ver que en el límite $\gamma_w \rightarrow \infty$ se tiene $F_{\text{fr}} \sim \text{constante}$, mientras que para $v < v_w \ll 1$ es $|F_{\text{fr}}| \sim v_w$. Del

¹⁷En general, siendo un régimen ultra relativista extremo, el frente de transición se mueve *casi* a la velocidad de la luz y ninguna ubicación en la fase “+” se perturba hasta que este la alcanza.

¹⁸ $\delta \zeta$ es el espesor de la pared en sistema propio del elemento de pared. Es una constante al menos si se usa la aproximación de considerar, en dicho sistema de referencia, la solución ϕ_0 del caso estático.

¹⁹El resultado (2.38) es equivalente al de la referencia [113], como puede verse de la transformación desde el sistema de referencia de la pared al del centro de la burbuja, $\gamma_{w.f.} v_{w.f.} \rightarrow \gamma \gamma_w (v - v_w)$.

mismo modo que se indica anteriormente, se define $\eta \equiv \int_{-}^{+} f (\partial_{\zeta} \phi_0)^2 d\zeta$, y luego una función de ponderación dentro de la pared \mathcal{P} a partir de $\eta \mathcal{P} = f (\partial_{\zeta} \phi_0)^2$. La integral en (2.38) es de la forma $\int_{-}^{+} \eta F(\zeta) \mathcal{P} d\zeta = \eta \langle F \rangle = \eta F(\bar{\zeta})$, donde $\bar{\zeta}$, el valor de una posición interior de la pared. Se define entonces $\lambda^2 \equiv (g \partial_{\zeta} \phi_0)^2|_{\zeta=\bar{\zeta}}$ y el factor $\bar{\gamma}$ como aquel evaluado con \bar{v} , la velocidad del plasma en el sistema del centro de la burbuja, correspondiente a la posición interna de la pared identificada con $\zeta = \bar{\zeta}$. Entonces, de esa integración, la fricción resulta con la forma

$$F_{\text{fr}} = \frac{\eta \gamma_w \bar{\gamma} (\bar{v} - v_w)}{\sqrt{1 + \lambda^2 \gamma_w^2 \bar{\gamma}^2 (\bar{v} - v_w)^2}}, \quad (2.39)$$

donde η y λ quedan como parámetros ajustables. Además, a \bar{v} se lo puede aproximar como el promedio de velocidades del fluido justo por delante y detrás de la pared, en el sistema del centro de la burbuja²⁰.

La velocidad de la pared respecto al plasma para rangos que incluyen el régimen relativista viene dada por $v_w^{\text{rel}} = (v_w - \bar{v}) / (1 - \bar{v} v_w)$. Incluso más allá del límite NR tendría sentido expresar la fuerza de fricción como “proporcional” a esa velocidad relativa, es decir, $F_{\text{fr}} = -\eta_{(v_w)} v_w^{\text{rel}}$, siempre que se tomase como definición del “coeficiente” de fricción a la función $\eta_{(v_w)} \equiv -F_{\text{fr}} / v_w^{\text{rel}}$. Si $\bar{v} < v_w \ll 1$, se tiene que $\eta_{(v_w)} \rightarrow \eta_{NR} \equiv \eta$. Mientras que para $\bar{v} < v_w \rightarrow 1$, se tiene $\eta_{(v_w)} \rightarrow \eta_{UR} \equiv \eta / \lambda$. Reescribiendo la expresión (2.39) en función de esos coeficientes límites se obtiene

$$F_{\text{fr}} = -\frac{\eta_{NR} \eta_{UR} \gamma_w \bar{\gamma} (v_w - \bar{v})}{\sqrt{\eta_{UR}^2 + \eta_{NR}^2 \gamma_w^2 \bar{\gamma}^2 (v_w - \bar{v})^2}}. \quad (2.40)$$

El cálculo de η_{NR} se realiza mediante la suma de los aportes dados por las expresiones (2.26) y (2.28). A su vez, en el límite UR se tiene que $F_{\text{fr}} \rightarrow -\eta_{UR}$, luego para evaluar η_{UR} basta calcular la fuerza neta dada por (2.31) o (2.34) y restarle la fuerza de *driving* como se expone previamente. Se remarca que, si bien descomponer la fuerza neta en fuerzas de *driving* y fricción no es relevante para el régimen *runaway*, determinar el valor UR de la componente de fricción es necesario para utilizar la ecuación (2.39) a todo régimen, como una interpolación entre los casos NR y UR.

2.3.3. Velocidad de pared estacionaria

El caso estacionario corresponde a tomar la fuerza neta igual a cero en la ecuación (2.20). La ecuación resultante puede simplificarse con la aproximación (2.23), para la fuerza impulsora (2.22), y la (2.40) para la fuerza de fricción. Se tiene entonces una ecuación algebraica para la velocidad de la pared v_w en función de los parámetros del modelo físico considerado

$$0 \approx P_- - P_+ - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{F}_+}{\partial T_+^2} + \frac{\partial \mathcal{F}_-}{\partial T_-^2} \right) (T_+^2 - T_-^2) - \frac{\eta_{NR} \eta_{UR} \gamma_w \bar{\gamma} (v_w - \bar{v})}{\sqrt{\eta_{UR}^2 + \eta_{NR}^2 \gamma_w^2 \bar{\gamma}^2 (v_w - \bar{v})^2}}, \quad (2.41)$$

que en general solo es posible resolver numéricamente. Cabe aclarar que, si bien la ecuación (2.41) se considera como la más adecuada para el rango completo de veloci-

²⁰En la referencia [113], en vez tomar $v(\bar{\zeta}) \approx \bar{v} = (v_+ + v_-)/2$ para evaluar el integrando $F(\bar{\zeta})$, se considera $F(\bar{\zeta}) \approx (F_+ + F_-)/2$. Ha sido chequeado que proceder de una u otra forma no implica diferencia numérica significativa.

dades, en uno de nuestros trabajos (ver [2]) se utiliza una ecuación algo distinta. En lugar de considerar para \mathcal{K} el modelo (2.35) se toma la extrapolación (2.30) la cual no satura y conduce a una fricción proporcional a $\langle \gamma_{w.f.} v_{w.f.} \rangle$. Esto es por que en [2] no estudiamos modelos de *Física de partículas* que conduzcan a transiciones tan fuertes como para tener paredes ultra relativistas y los resultados obtenidos bajo la aproximación (2.30) deberían seguir valiendo. Además, al escribir la fuerza de *driving*, en vez de tomar $-\int_{-}^{+} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T^2} dT^2$ se usa $-\int_{-}^{+} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} dT = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}(T_{+} - T_{-})$, la cual se aproxima como $\frac{1}{2}(s_{-} + s_{+})(T_{+} - T_{-})$. En consecuencia, en [2] consideramos

$$0 = P_{+} - P_{-} - \frac{1}{2}(s_{+} + s_{-})(T_{+} - T_{-}) + \frac{\eta}{2}(|v_{+}| \gamma_{+} + |v_{-}| \gamma_{-}). \quad (2.42)$$

2.4. Ecuaciones para régimen estacionario

En esta sección se exponen todas las ecuaciones y asunciones generales necesarias para determinar de qué forma el plasma es perturbado por y durante el avance del frente de transición al expandirse una burbuja. La propagación de un frente de transición en el plasma ocasiona tanto recalentamiento como movimientos masivos de fluido. En lo que resta de este capítulo y el siguiente, el interés es en estos efectos y no en la *backreaction* de la perturbación de fluido sobre la pared de burbuja. Por lo cual ese tipo de efecto no entra en consideración para el siguiente planteo, y la velocidad de la pared v_w se trata como un parámetro libre. En la sección 2.4.1 se expresan las ecuaciones de Euler que establecen el perfil de velocidades y entalpía. En la sección 2.4.2 se exponen e interpretan las condiciones de contorno que deben cumplir las soluciones a esas ecuaciones. También en la sección 2.4.3 se dan condiciones adicionales que deben cumplirse donde esas soluciones poseen discontinuidades, así como la clasificación y principales características de dichas discontinuidades.

2.4.1. Ecuaciones de Euler relativistas

Las ecuaciones de Euler relativistas se obtienen de imponer la conservación (2.9) al tensor de energía-momento (2.10). Lo más general que se considera aquí es una pared de burbuja infinitesimalmente delgada, y que la simetría del problema es tal que la velocidad del fluido es perpendicular a la pared. En esta tesis solo se considera la resolución para simetrías plana, esférica y cilíndrica con flujo radial²¹. Así, el fluido está caracterizado por dos variables, la temperatura T y una velocidad monocomponente (radial), v . Si se denota con r la distancia al punto, eje o plano de simetría, y con t al tiempo desde la nucleación, las ecuaciones (2.9) en las variables libres²² (r y

²¹La razón de considerar estos casos es porque en la secciones 3.3.2 y 3.6.2 se comparan tres tipos de geometrías, burbujas con pared esférica, cilíndrica y plana, para evaluar la sensibilidad de magnitudes hidrodinámicas ante variaciones en la forma de los frentes de transición.

²²Aquí se está expresando la ecuación covariante (2.9) en un sistema de coordenadas particular, cartesiano, polar (cilíndrico) o esférico según el caso. Y cualquier perfil de fluido, armado con las soluciones de la ecuación (2.43) o (2.47), que se muestre en este trabajo estará *visto* en ese sistema de coordenadas (salvo un factor temporal de reescalo debido a la definición de $\xi = r/t$).

t) son [114]

$$\begin{aligned} \partial_t [(e + Pv^2) \gamma^2] + \partial_r [(e + P) \gamma^2 v] &= -\frac{j}{r} [(e + P) \gamma^2 v] \\ \partial_t [(e + P) \gamma^2 v] + \partial_r [(ev^2 + P) \gamma^2] &= -\frac{j}{r} [(ev^2 + P) \gamma^2] , \end{aligned} \quad (2.43)$$

donde $j = 0, 1$ o 2 para la simetría plana, cilíndrica o esférica respectivamente.

Antes de continuar al caso de aplicación que interesa en este trabajo, es instructivo aprovechar estas ecuaciones para repasar rápidamente el caso de pequeñas perturbaciones. En el plasma en reposo las magnitudes termodinámicas consideradas tomarían valores uniformes $e_0, P_0, w_0, s_0, \dots$ que dependerían enteramente de las condiciones termodinámicas del entorno y la ecuación de estado. Ante una perturbación pequeña que lo dotara de un campo de velocidades $v \ll 1$, esas magnitudes también serían levemente perturbadas como $e = e_0 + \delta e$ y $P = P_0 + \delta P$. La densidad de energía en sus variables naturales es $e(s)$, y con esta se puede expresar $P(s) = \frac{\partial e}{\partial s} s - e$. Si $s = s_0 + \delta s$, a primer orden vale $\delta e \approx \left. \frac{\partial e}{\partial s} \right|_0 \delta s$ y $\delta P \approx \left. \frac{\partial P}{\partial s} \right|_0 \delta s$. Esto permite expresar $\delta e \approx \delta P / c_0^2$, donde $c_0^2 = \left. \frac{\partial P}{\partial s} \right|_0 / \left. \frac{\partial e}{\partial s} \right|_0 = \left. \frac{\partial P}{\partial e} \right|_0$ (derivada implícita). Entonces, para una perturbación plana, la linealización de la expresión (2.43) es

$$\left. \begin{aligned} \partial_t \delta e + w_0 \partial_x v &\approx 0 \\ w_0 \partial_t v + \partial_x \delta P &\approx 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \partial_{xx} \delta P - \partial_{tt} \delta e = 0 \implies \partial_{xx} \delta P - \frac{1}{c_0^2} \partial_{tt} \delta P = 0 \quad (2.44)$$

La última es una *ecuación de onda de D'Alembert*. En este caso la onda es de presión o “*de sonido*”, donde el parámetro c_0 resulta ser la velocidad de propagación, también llamada *velocidad del sonido*. En lo que sigue se ve que esa cantidad además de encontrarse en la ecuación para pequeñas perturbaciones (2.44) también aparece al reescribir las ecuaciones más generales (2.43), pero siendo una función de la posición y el tiempo a la que se la sigue interpretando como una velocidad del sonido local²³ [92, 93]

$$c_s \equiv \sqrt{\left. \frac{\partial P}{\partial e} \right|_{\text{Adiabico}}} \quad (2.45)$$

Como en el sistema de estudio que aquí interesa no hay escala de longitud (o tiempo) característica, es usual suponer la *condición de similaridad*, en la que e, P y v dependen solo de la combinación $\xi = r/t$. También se llama *régimen estacionario* cuando a cualquier tiempo t_0 se obtiene la misma curva $v(r, t_0)$ vs $\xi = r/t_0$. Ambas condiciones son equivalentes, pues requieren $v(r, t) \equiv v(r/t)$. Además estas son compatibles con una pared de burbuja avanzando a velocidad constante. De las ecuaciones (2.43) se tiene entonces

$$\begin{aligned} (\xi - v) \frac{e'}{w} &= j \frac{v}{\xi} + \gamma^2 (1 - v\xi) v', \\ (1 - v\xi) \frac{P'}{w} &= \gamma^2 (\xi - v) v', \end{aligned} \quad (2.46)$$

²³Suele señalarse que la derivada de la expresión (2.45) es en un proceso adiabático. Eso no quiere decir que la densidad de entropía s sea constante, sino que la entropía $S = s V_p$ en el volumen propio V_p del elemento de fluido debe serlo. Cabe señalar que en la referencia [92] se dice que la entropía por partícula se conserva en ese elemento de fluido, porque supone conservación de partículas en su interior, que en ese contexto equivale a decir entropía constante en el elemento de fluido.

donde la prima está indicando derivadas con respecto a ξ . De acuerdo con la ecuación (2.45), se tiene una derivada implícita debida a la parametrización en ξ que, según (2.45), coincide con el cuadrado de la velocidad del sonido: $P'/e' = \partial P/\partial e = c_s^2$. Con esta relación, y dividiendo entre sí las ecuaciones (2.46) se obtiene la ecuación del perfil de velocidades

$$j \frac{v}{\xi} = \gamma^2 (1 - v\xi) \left[\frac{\mu(\xi, v)^2}{c_s^2} - 1 \right] v' \quad (2.47)$$

donde lo que coincide con una “suma relativista” de velocidades se denota como²⁴

$$\mu(\xi, v) = \frac{v - \xi}{1 - \xi v} \quad (2.48)$$

Si $j = 1$ o 2 la ecuación (2.47) se resuelve numéricamente. Si $j = 0$ (caso plano) queda una simple ecuación algebraica con soluciones analíticas²⁵

$$\text{Caso } j = 0 : \begin{cases} v(\xi) = \text{cte} \\ v(\xi) = v_{\text{inf}}(\xi) \equiv \mu(-\xi, -c_s) \\ v(\xi) = v_{\text{sup}}(\xi) \equiv \mu(-\xi, c_s) \end{cases} \quad (2.49)$$

Estas soluciones así escritas demuestran ser de gran utilidad para interpretar distintas situaciones físicas. A saber, para un dado elemento de fluido ubicado en la posición e instante r y t , observado desde un sistema con velocidad $\xi = r/t$ respecto al centro de la burbuja se vería a ese elemento de fluido moviéndose con la velocidad del sonido, en sentido hacia el centro o alejándose de este si vale la solución $v_{\text{inf}}(\xi)$ o $v_{\text{sup}}(\xi)$ respectivamente.

A modo de ejemplo y como referencia, en la figura 2.1 se grafican algunas soluciones²⁶ para $j = 0, 1$ y 2 , considerando velocidad del sonido relativista²⁷ e independiente de la posición $c_s = 1/\sqrt{3}$. Esto último no influye en las siguientes observaciones. El caso plano admite cualquier solución constante, las otras simetrías solo admiten $v \equiv 0$. En los casos cilíndrico y esférico existen soluciones multivaluadas (de hasta tres ramas en la figura). Es fácil demostrar que por los puntos $|v'| = \infty$, donde las ramas de valuación se pegan, pasan las curvas de las soluciones planas no constantes²⁸ (ver las tenues líneas a trazos en los gráficos). También es fácil ver, a partir de la ecuación (2.47), que toda solución (no nula) que llega a $v = 0$ lo hace en un punto que cumple $\xi = c_s(\xi)$. Las distintas ramas de soluciones en la figura 2.1 son bien comportadas

²⁴Si ξ y v son las velocidades de un sistema de referencia y de un elemento de fluido respecto del centro, entonces $\mu(\xi, v)$ es la velocidad de ese elemento de fluido respecto del sistema móvil. Es decir, como $v = v(\xi)$, $\mu(\xi, v)$ es la velocidad observada de un elemento de fluido en el sistema de referencia que se mueve con el perfil en la ubicación de dicho elemento.

²⁵Estas soluciones valen en general incluso cuando podría tenerse $c_s = c_s(\xi)$ si las propiedades termodinámicas del medio varían con la posición.

²⁶Solo soluciones $v > 0$ (radialmente salientes) interesan en este trabajo (ver sección 2.4.2). Perfiles más complejos aparecen al considerar dos burbujas nucleadas a cierta distancia entre si (ver [115]). En tal caso podrían tenerse regiones donde el fluido se moviera con velocidades en distintos sentidos, resultado de la *colisión* de las burbujas, pero también esa separación introduciría una nueva escala de longitud en el problema y ya no valdría la *condición de similitud* ni la ecuación (2.47).

²⁷*Relativista* en el sentido de partículas con energía mucho mayor que la correspondiente al término de masa (si lo hubiese), donde vale la ecuación de estado $P = e/3$ y trivialmente $c_s^2 = \partial P/\partial e = 1/3$.

²⁸Basta dividir por v' la ecuación (2.47) y luego tomar el límite $|v'| \rightarrow \infty$ para obtener una relación entre v y ξ igual a la solución de (2.47) para $j = 0$ y $v' \neq 0$.

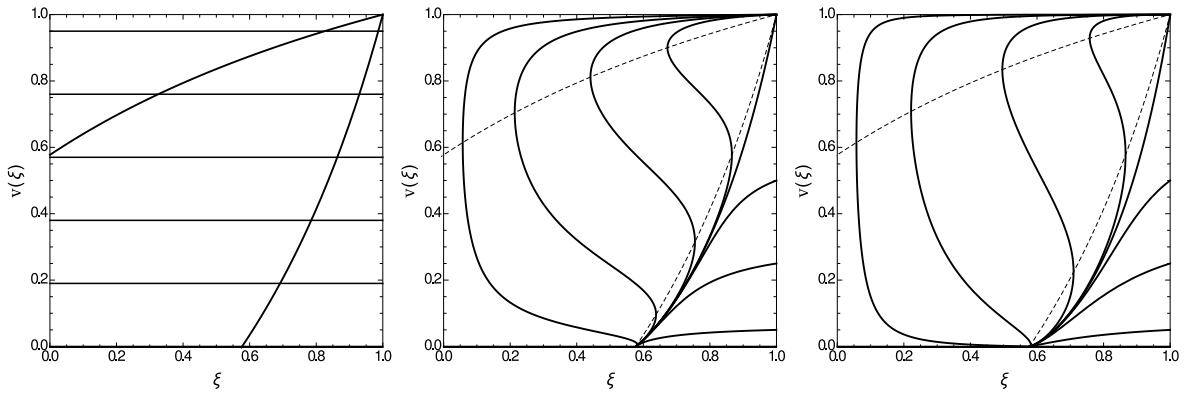


Figura 2.1: Soluciones positivas (velocidad radialmente saliente) a la ecuación (2.47) para distintas geometrías de burbujas considerando $c_s \equiv 1/\sqrt{3}$. Izquierda: burbuja plana. Centro: burbuja cilíndrica. Derecha: burbuja esférica. Las líneas a trazos pasan por puntos donde se pegan ramas de valuación (donde $|v'| = \infty$) y coinciden con las soluciones $v' \neq 0$ del caso plano.

dentro de ciertos rangos. Para distintas condiciones de estudio, corresponden soluciones que pueden presentar discontinuidades. Por ejemplo, perfiles de velocidad que se construyen pegando tramos de estas soluciones bien comportadas. Cabe remarcar que en los tres casos se pueden construir perfiles muy parecidos, incluso con las soluciones del caso plano²⁹.

También es útil determinar el perfil de algún potencial termodinámico, como la densidad de entalpía $w(\xi)$, ya que a partir de este puede encontrarse el perfil de cualquier otro potencial o propiedad termodinámica [$e(\xi)$, $P(\xi)$, $T(\xi)$, etc]. Al despejar e'/w y P'/w de las ecuaciones (2.46), y luego sumarlas [considerando que $w = e + P$ y jv/ξ sale de (2.47)] se obtiene la ecuación diferencial para el perfil de entalpía,

$$\frac{w'}{w} = - \left(1 + \frac{1}{c_s^2} \right) \gamma^2 \mu(\xi, v) v', \quad (2.50)$$

que siendo integrada [6] da

$$\frac{w_b}{w_a} = \exp \left[- \int_{\xi_a}^{\xi_b} \left(1 + \frac{1}{c_s^2} \right) \gamma^2 \mu(\xi, v) v' d\xi \right] \quad (2.51)$$

Esta expresión es la misma para las tres geometrías propuestas. No obstante, el perfil de velocidad en el integrando depende de j .

2.4.2. Condiciones de contorno y de régimen estacionario

Las condiciones de contorno, dadas lo suficientemente lejos por delante o detrás del frente de transición³⁰, son las de fluido en reposo con velocidad nula. La primera porque el fluido lejos por delante se encuentra todavía sin perturbar, a una temperatura de

²⁹En efecto, un perfil plano evoca cierta imagen de bosquejo esquemático del perfil en las otras geometrías (ver la sección 3.3.2).

³⁰De aquí en más donde se mencionan posiciones *por delante* o *por detrás* de un punto se refiere respectivamente al lado más *alejado* o más *cercano* al centro de la burbuja.

nucleación T_N ³¹ aún sin perturbar por la burbuja en expansión. La segunda porque en el centro de burbuja la simetría así lo requiere. Las condiciones de contorno establecen los perfiles de fluido a partir de las soluciones a la ecuación (2.47). En el medio el sistema puede verse forzado a experimentar discontinuidades en los perfiles, ya sea por discontinuidad de la ecuación de estado en el frente de transición, o por las mismas condiciones de contorno que solo pueden satisfacerse si se cambia abruptamente de solución dentro de una misma fase. Como se ve en la siguiente sección 2.4.3, se requieren entonces nuevas condiciones de empalme³² sobre los valores que pueden tomar las soluciones donde hay discontinuidades.

Si no hubiese un frente de transición alejándose de un centro se supone fluido estático. Aquí, cuando lo hay, se considera una única pared de burbuja que no choca con ninguna corriente o flujo avanzando en sentido contrario. Siendo esa la única fuente de perturbación se espera que en general el fluido se mueva radialmente saliente (alejándose del centro). En general, por la hipótesis de flujo estacionario sería absurdo que la posición de cualquier discontinuidad se estuviera contrayendo hacia el centro. Además, las velocidades de las distintas discontinuidades deberían guardar una relación creciente hacia afuera (alejándose del centro) por tratarse de régimen estacionario donde estos frentes no pueden rebasarse en ningún momento. En general, cualquier punto de referencia ξ_* del perfil $v(\xi)$ se mueve con velocidad $v_* \equiv \xi_*$ y todo elemento de fluido debería recorrer completamente de adelante hacia atrás todas las *posiciones* ξ del perfil donde las velocidades son no nulas, $v(\xi) \neq 0$. Si así no sucediera habría una región intermedia delimitada por algún $0 < \xi_* < 1$ con fluido en movimiento, que sería cada vez más grande (de *radio* v_*t), pero a la que no estaría llegando nunca el plasma de un punto inmediato $\xi > \xi_*$ justo por afuera de esa región. En tal situación la energía en el interior se diluiría, disminuirían las velocidades y entonces el perfil cambiaría de forma contraria a lo esperado en un régimen estacionario. Esto implica que ningún perfil de fluido permitido tiene puntos donde la velocidad supera al valor de la *posición* ξ , por lo tanto las velocidades de todo perfil estacionario se encuentran por debajo de la línea $v = \xi$. En consecuencia el fluido entorno a una discontinuidad tiene menor velocidad que esta. En conclusión, en un régimen estacionario solo serían admisibles perfiles de velocidad $v(\xi)$ con $0 \leq v(\xi) < \xi$. Notar que, por ejemplo, en un gas relativista ($P = e/3$) se pueden armar esos perfiles solo con los tramos de solución de la figura 2.1 que se encuentran por debajo de la diagonal $v = \xi$.

2.4.3. Discontinuidades

Si bien el siguiente análisis se podría hacer de forma muy similar para cualquier régimen hidrodinámico, en esta sección en particular es de interés el caso estacionario, para el cual siempre existe un sistema inercial donde la discontinuidad se encuentra

³¹En esta tesis, siempre que se desprecie el enfriamiento del universo por su expansión durante la transición, se refiere a la temperatura del medio (fase “+” lejos de la burbuja) como T_N .

³²En inglés suelen usarse las denominaciones *boundary conditions* y *matching conditions* para lo que aquí se identifica como condiciones de contorno y empalme respectivamente. En general, matemáticamente hablando ambas son condiciones de contorno, también llamadas *de borde*, entendiéndose que cada “borde” delimita una región donde las soluciones son lo suficientemente bien comportadas. Incluso la velocidad de la pared y la temperatura de nucleación son condiciones de contorno suministradas por consideraciones no hidrodinámicas. Más aún, la hipótesis de flujo estacionario se podría traducir a una condición de contorno sobre las soluciones de las ecuaciones (2.43), más generales que las de (2.46-2.47). La distinción aquí presente al denominarlas se basa en la naturaleza física de cada una.

quieta³³. Por la aproximación de pared delgada (ver sección 1.4.5) la discontinuidad es localmente plana, y además aquí solo se consideran simetrías de flujo en las que dicho plano es atravesado perpendicularmente por el plasma. Para expresar las condiciones de empalme a continuación se denota con subíndices “A” y “B” a los valores de las diferentes magnitudes en los entornos *inmediatos* a cada lado de la discontinuidad. Por ejemplo, en el sistema de referencia *de la discontinuidad*, ubicada en $\xi = \xi_{\text{disc}}$, las velocidades de cada lado son v_A y v_B . Y de aquí en más, en el sistema de referencia *del centro de la burbuja* (también llamado sistema *del plasma*³⁴), donde la discontinuidad tiene velocidad $v_{\text{disc}} \equiv \xi_{\text{disc}}$, a las velocidades del fluido a cada lado se las denota con una tilde: $\tilde{v}_B^A = \mu(-v_{\text{disc}}, v_B^A)$.

Requerir la conservación de energía-momento para los elementos de fluido que atraviesan la discontinuidad es equivalente a requerir la continuidad de las componentes normales a la superficie de $T^{\mu\nu}$, el tensor que establece los flujos de esas cantidades. Haciendo eso en el sistema propio de la discontinuidad se tiene que [92, 93]

$$w_A v_A^2 \gamma_A^2 + P_A = w_B v_B^2 \gamma_B^2 + P_B, \quad (2.52)$$

$$w_A v_A \gamma_A^2 = w_B v_B \gamma_B^2 \quad (2.53)$$

O equivalentemente

$$v_B v_A = \frac{P_B - P_A}{e_B - e_A}, \quad \frac{v_B}{v_A} = \frac{e_A + P_B}{e_B + P_A} \quad (2.54)$$

Notar que estas ecuaciones no dependen de la simetría de la burbuja (por ejemplo, no aparece dependencia alguna en j). Esto es por que la superficie de discontinuidad es localmente plana³⁵.

De acuerdo con la ecuación (2.53), v_A y v_B tienen el mismo sentido³⁶. Esto justamente es la consecuencia de tener un flujo, entrante por un lado y saliente por el otro, de alguna magnitud conservada que no se acumula en la discontinuidad. Más aún, el sentido debe ser hacia atrás (hacia el centro) porque son los valores relativos a la discontinuidad, que se mueve a mayor velocidad que el fluido como se argumenta en la sección 2.4.2.

Cuando se lidia con discontinuidades, consideraciones sobre la entropía pueden ser útiles para descartar posibles procesos (ver por ejemplo [116, 117]). Se considera una porción de fluido que pasa a través de una superficie de discontinuidad. Si esa porción de fluido tiene un volumen propio V_p , en un sistema no comóvil donde se mueve con velocidad v transforma como $V = V_p/\gamma$. Considerando el sistema de referencia de la discontinuidad y un paralelepípedo con caras de área \mathcal{A} , paralelas a su superficie, que la atraviesa en un tiempo Δt a velocidad v , entonces el volumen de éste es $V = v\mathcal{A}\Delta t$.

³³Las soluciones *runaway* de la sección 2.6 no cumplen esto por estar aceleradas, e incluso aunque $v_w \approx 1$ es casi constante no es posible fijar un sistema inercial comóvil a la velocidad de la luz.

³⁴En ese sistema está en reposo (sin perturbar) el plasma que se encuentra lejos por delante del frente de transición.

³⁵La ecuación para las componente paralelas a la pared son sencillamente las condiciones de continuidad para esas componentes. El caso en que estas son no nulas es importante cuando se considera la estabilidad hidrodinámica del movimiento estacionario [92, 93, 96, 99–104].

³⁶Entendiendo *igual signo* como *igual sentido*, ya que \vec{v}_A y \vec{v}_B son paralelos en dirección perpendicular al plano de la discontinuidad. Los signos son iguales pues la densidad de entalpía preserva su signo en todo punto, como se verifica en la ecuación (2.51). Más aún, por la relación de Euler en un sistema con potenciales químicos o cargas netas nulas esta simplemente es $w = sT > 0$, ya que $s > 0$ y en equilibrio estable también $T > 0$.

La entropía S , siempre definida en el sistema propio, se puede escribir en función de la densidad de entropía s y la velocidad v , mediante $S = sV_p = s\gamma V = s\gamma v \mathcal{A} \Delta t$. Por la *segunda ley de la termodinámica* el proceso de atravesar la discontinuidad desde una región entrante “in” a la saliente “out” (explotando la brevedad del idioma inglés) solo puede conservar o aumentar la entropía, lo que implica $s_{out}v_{out}\gamma_{out} \geq s_{in}v_{in}\gamma_{in}$. Usando $s = w/T$ y la ecuación (2.53), esta condición implica

$$T_{in}/T_{out} \geq \gamma_{out}/\gamma_{in} \quad (2.55)$$

donde la igualdad solo valdría en procesos reversibles, que no es en general el caso considerado aquí³⁷. Se cumple entonces que

$$T_{in} < T_{out} \Rightarrow |v_{in}| > |v_{out}| \quad (2.56)$$

Es decir, en el sistema de referencia de la discontinuidad, si la temperatura del lado entrante es menor que del saliente, entonces el flujo entrante es más veloz que el saliente.

Si las velocidades son iguales $v_{in} = v_{out}$, la condición (2.53) implica $w_{in} = w_{out}$. Teniendo en cuenta ambas igualdades la condición (2.52) implica que debería ser $P_{in} = P_{out}$ y, como $w = e + P$, entonces $e_{in} = e_{out}$. Si la discontinuidad física considerada es una región donde sucede un proceso irreversible, el incremento de entropía representado por la desigualdad (2.55) implica en este caso $T_{in} > T_{out}$. Entonces solo sería patológicamente posible la continuidad³⁸ de e , w y P (que dependen de T) en el caso de un frente de transición, donde la ecuación de estado varía. En cualquier otra situación las velocidades no pueden ser iguales a ambos lados de la discontinuidad.

La aplicación, donde corresponda, de estas condiciones o restricciones de empalme generales junto con condiciones de contorno resuelve el problema de determinar la forma de un perfil posible. Los dos tipos de discontinuidades que puede aparecer en un perfil son las que se listan a continuación.

2.4.3.1. Frente de transición:

En este trabajo cuando se considera justo la posición del frente de transición, se usan los subíndices “+” y “-” para hacer referencia a magnitudes de cada lado de ese frente. Por ejemplo la temperatura de cada lado es T_+ y T_- . Hay un mínimo riesgo de confusión entre las ecuaciones de estado en las respectivas fases $e_{\pm}(T)$, $P_{\pm}(T)$, $w_{\pm}(T)$, ... (las cuales se pueden llegar a expresar omitiendo la dependencia en T) y los valores que esas magnitudes toman justo a ambos lados del frente de transición $e_{\pm} \equiv e_{\pm}(T_{\pm})$, $P_{\pm} \equiv P_{\pm}(T_{\pm})$, $w_{\pm} \equiv w_{\pm}(T_{\pm})$, ... pero por el contexto en el que aparecen unas u otras tal ambigüedad no debería ser inconveniente.

En el eje ξ , la pared de la burbuja está en la *posición* $\xi_w \equiv v_w$. La entalpía y otras cantidades son discontinuas en ξ_w , y por ende también la velocidad del fluido. *En el sistema de referencia de la pared*, el fluido pasa de la fase dominante a alta temperatura con velocidad v_+ , hacia la fase dominante a baja temperatura con velocidad v_- . En general, valen las ecuaciones (2.52-2.56) reemplazando por v_+ (entrante) y v_- (saliente) a cada lado de la discontinuidad. Como se explica arriba, si vale $v_+ = v_-$ entonces

³⁷Una transición de fases en principio es reversible, pero el proceso en sí solo lo sería sucediendo cuasiestáticamente a temperatura T_c , que no es el caso de una transición de primer orden a $T_N < T_c$.

³⁸Efectivamente patológica aunque no imposible para cualquier ecuación de estado, como se muestra en la sección 3.3.3.4 en el límite entre detonaciones y deflagraciones.

$P_+ = P_-$ y $T_+ > T_-$. Si solo la diferencia de presión constituyera a la fuerza impulsora sobre la pared de burbuja F_{dr} , esta no podría avanzar en forma estacionaria porque la fricción la frenaría. Pero como hay otras contribuciones [ver expresión (2.22) teniendo en cuenta que generalmente $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T^2} < 0$] tal situación no queda descartada. No obstante, en el caso particular de doble anulación $\tilde{v}_{\pm} = 0$, las únicas soluciones admitidas de cada lado solo serían idénticamente nulas (ver sección 2.5.1). Pero que el fluido no esté perturbado ni delante ni detrás implicaría que toda la energía liberada en la transición va a parar a recalentamiento, en contradicción con (2.55) que establece enfriamiento $T_- < T_+ = T_N$ ³⁹. Es entonces imposible tal situación, *el fluido no puede estar en reposo a ambos lados del frente de transición*.

2.4.3.2. Frente de choque:

La presencia de discontinuidad en la misma fase puede también ser necesaria para satisfacer las condiciones de contorno. Por ejemplo, si lejos delante de la pared el fluido se supone sin perturbar en reposo, $v \equiv 0$ respecto al centro, las soluciones posibles (como las ejemplificadas en la figura 2.1) no permiten una atenuación completa para ξ creciente y el sistema *se ve obligado* a pegar un salto abrupto para reducir la velocidad a cero. Tal tipo de discontinuidad es llamada *frente de choque*. También al perfil de fluido entre el frente de transición y el frente de choque se lo suele denominar *onda de choque*. En este trabajo se denota la velocidad del frente de choque como v_{sh} ⁴⁰ y a su *posición* en el eje ξ como $\xi_{sh} \equiv v_{sh}$; además se usan los índices “1” y “2” para las variables de fluido en $\xi = \xi_{sh}$ justo por detrás y delante del frente de choque respectivamente. La ecuación de estado es la misma de ambos lados de la discontinuidad. Aquí también se aplican las condiciones (2.52-2.56) reemplazando por v_2 (entrante) y v_1 (saliente) a cada lado de la discontinuidad.

Cuando un elemento de fluido atraviesa un frente de choque en la fase “+” y llega a ubicarse por detrás de este, se acerca más al frente de transición, fuente del recalentamiento. Entonces debería haber pasado más tiempo recalentándose y tener mayor temperatura que otro elemento de fluido aún ubicado por adelante del frente, es decir, $T_1 > T_2$. Por la desigualdad (2.56) el flujo proveniente de 2 es más veloz que el emergente en 1 respecto al frente de transición. En consecuencia, respecto del centro de la burbuja se tiene $\tilde{v}_1 > \tilde{v}_2$, el flujo en 1 es radialmente saliente y con mayor velocidad que en 2. Es decir, *hay un salto negativo de velocidad de atrás hacia delante en un frente de choque (en la fase +)*. Es lo mismo que decir que un elemento de fluido se acelera abruptamente hacia adelante cuando lo alcanza el frente de choque. Si delante de ese frente el fluido está sin perturbar en reposo respecto al centro, entonces $\tilde{v}_2 = 0 < \tilde{v}_1 < v_{sh}$ y $v_{sh} = -v_2$. Además, en la sección 2.5.1 se argumenta que *no puede haber más de una onda de choque y solo se propaga por delante de un frente de transición (la fase “+”)*.

³⁹Es necesariamente $T_+ = T_N$ por condiciones de contorno y porque no es posible una discontinuidad de temperatura sin discontinuidad de velocidad en la misma fase “+”, como también se muestra previamente.

⁴⁰Subíndice “sh” por *shock* (choque, en inglés).

2.5. Soluciones estacionarias

En esta sección se expone con la mayor generalidad (hasta donde es posible) cuáles son los perfiles de fluido que pueden llegar a darse en casos realistas. Estos dependen de distintos parámetros, que a nivel más fundamental son dados por los distintos modelos de partículas en la teoría de campos considerada. A su vez, esos parámetros fundamentales fijan otros a un nivel macroscópico, como pueden ser la temperatura a la cual sucede la nucleación y la velocidad estacionaria que llega a desarrollar la pared de la burbuja. Otro parámetro, previamente no considerado en la bibliografía especializada es la velocidad del sonido⁴¹, lo cual podría ocultar un posible tipo de solución (ver secciones 3.3.3.3) que se encuentra incluida en el tratamiento más general de la presente sección, inspirado en la discusión que hemos dado en nuestro trabajo [3].

Primero, en la sección 2.5.1 se discute sobre la ubicación y cantidad posible de los frentes de choque, así como el tipo de perfil que puede haber detrás de la pared de transición. En la sección 2.5.2 se expone una forma de clasificar tipos de soluciones basada en la nomenclatura utilizada para el estudio de frentes de combustión. En la sección 2.5.3 se listan dentro de esa clasificación los tipos de soluciones que, según la bibliografía sobre el tema, estarían prohibidas. En la sección 2.5.4 se deduce la forma que deberían tener los perfiles de las soluciones permitidas y se discute como habría que calcularlos.

2.5.1. Algunos argumentos heurísticos adicionales

Para ganar intuición y sin entrar a evaluar ecuaciones de estado particulares, se pueden dar algunos argumentos que justifican qué clase de perfiles deberían esperarse como solución al problema hidrodinámico considerado.

2.5.1.1. Velocidades en torno a frentes de choque:

Un elemento de fluido en la fase “+” experimenta una abrupta aceleración al ser rebasado por el frente de choque. Luego de eso sigue siendo empujado por fluido que venía detrás de ese frente. Si más atrás del frente de choque, más cerca del de transición, hay mayor recalentamiento, entonces hay mayor presión. Luego, el gradiente de presión es decreciente hacia adelante. Al ser un fluido perfecto el que se está considerando se descarta disipación por viscosidad. Por lo tanto ese elemento de fluido no debería disminuir su velocidad, esto incluso parece más evidente en el caso plano donde las líneas de flujo no se separan transversalmente. A su vez, si durante al menos un breve intervalo ese elemento de fluido mantiene una velocidad \tilde{v}_1 que no puede ser mayor que la del frente de choque, entonces se alejará de este ubicándose en una posición $\xi < \xi_{sh}$, donde su velocidad no decrece. Es decir, en el entorno detrás del frente de choque solo estarían permitidas soluciones $v(\xi)$ que no decrecen al alejarse de este (no crecen con ξ creciente), las cuales son como las que se encuentran entre las líneas a trazos en la figura 2.1 [dadas por $v_{inf}(\xi)$ y $v_{sup}(\xi)$ introducidas en (2.49)]. Teniendo en cuenta esa restricción detrás del frente de choque se tiene que $\tilde{v}_1 > v_{inf}(\xi_{sh}) = \mu(-\xi_{sh}, -c_s)$,

⁴¹El tratamiento histórico del tema se ha limitado a considerar en ambas fases la velocidad del sonido de un gas relativista $c_s = 1/\sqrt{3}$, lo cual no siempre podría ser una buena aproximación. En la sección 3.2.2 se discute sobre las implicaciones de considerar a c_s como un parámetro en cada fase.

equivalente a $v_1 > -c_s$, equivalente a:

$$|v_1| < c_s \quad (2.57)$$

La condición (2.54) implica $|v_1||v_2| = (P_1 - P_2)/(e_1 - e_2)$. La presión en función de la energía interna $P(e)$ admite expandir $P_1 = P(e_1)$ en potencias de $\Delta e = e_1 - e_2$. A primer orden ese cociente es $(P_1 - P_2)/(e_1 - e_2) \approx \partial P/\partial e|_2 = c_s^2$. Entonces $|v_1||v_2| \approx c_s^2$. Esto es una buena aproximación solo si el choque es débil, es decir, si el salto en las perfiles es lo suficientemente chico. En el supuesto que algunos más de los principales términos del desarrollo sean positivos (o bien todos nulos) valdría la desigualdad $|v_1||v_2| \geq c_s^2$. Notar que un siguiente término iría como $\frac{1}{2}(\partial c_s^2/\partial e)\Delta e$, donde por recalentamiento $\Delta e > 0$, y además $\partial c_s^2/\partial e = c_s^2 \partial c_s^2/\partial P$ es de esperarse que sea positivo, ya que a mayor presión el medio es más “rígido” y la velocidad de propagación debería aumentar. Combinando con (2.57) se tiene:

$$c_s < |v_2| \quad (2.58)$$

También en algunos casos es posible obtener estos resultados de forma más directa a partir de condiciones sobre la entropía. Por ejemplo, para una ecuación de estado de la forma: $e = aT^4 + b$, “radiación+vacío”, se tiene $c_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y además $w_2/w_1 = (T_2/T_1)^4$, que junto con la desigualdad (2.55) se puede insertar en la condición (2.53) para obtener $|v_2|(1 - |v_2|^2) \leq |v_1|(1 - |v_1|^2)$. Usando la condición (2.54) en ese modelo se tiene $|v_1||v_2| = 1/3$, juntando con esa desigualdad se llega a que $(|v_1|^2 - 1/3)^3 \leq 0$ y $(|v_2|^2 - 1/3)^3 \geq 0$, donde la igualdad solo vale si no existe salto y ambas velocidades son iguales. Por lo tanto, en el frente de choque se cumple que $|v_1| < c_s < |v_2|$, los mismos resultados (2.57) y (2.58), pero en esta última derivación no se restringe el estudio a la fase “+” ni a choques débiles.

2.5.1.2. Perfil detrás del frente de transición:

Se podría suponer que existen frentes de choque detrás del frente de transición, en la fase “-”. Las condiciones de contorno implican que en el centro de la burbuja la velocidad es cero. Si en algún valor $\xi = \xi_{sh}$ hubiese un salto, se tendría que $\xi_{sh} = |v_1|$. Para este análisis en la fase “-” se consideran verdaderas las desigualdades (2.57) y (2.58), que en el apartado anterior se demuestran en esta fase para el caso simple de “radiación+vacío”. Entonces se debería cumplir $\xi_{sh} = |v_1| < c_s < |v_2|$, en particular $v_2 < -\xi_{sh}$ implica $\tilde{v}_2 < 0$, lo cual es incompatible con un régimen estacionario, donde todas las velocidades tienen que ser radialmente salientes (positivas). La imposibilidad de comenzar el perfil con un salto, requiere que $v(\xi < c_s) \equiv 0$ (ver, por ejemplo, en la figura 2.1 las soluciones que comienzan en $v(c_s) = 0$). En $\xi = c_s$ esa solución podría empalmarse con una de las soluciones por debajo de la curva $v_{inf}(\xi)$, pues estas comienzan con velocidad nula en $\xi = c_s$. Todavía podría suponerse que existe un salto más adelante, pero en tal caso $\tilde{v}_1 < v_{inf}(\xi_{sh}) = \mu(-\xi_{sh}, -c_s)$, lo que implica $|v_1| > c_s$, contradiciendo la desigualdad (2.57). Por lo tanto no es posible esa discontinuidad. Cabe aclarar que en el caso plano es posible pegar una solución creciente, la curva $v_{inf}(\xi)$, a una solución constante sin pérdida de continuidad (en las magnitudes consideradas para estos razonamientos). Tal composición entre dos soluciones tiene el mismo “efecto” que considerar en las otras simetrías una de las soluciones suaves que une los puntos $(\xi = c_s, v = 0)$ y $(\xi = \xi_w, v = \tilde{v}_-)$. A esa solución creciente detrás de la pared se la

llama *onda de rarefacción* o *cola de rarefacción*.

2.5.1.3. Cantidad de frentes de choque:

Se podría suponer que existe un segundo frente de choque (de adelante para atrás) en la fase “+” con velocidad $\bar{\xi}_{sh} < \xi_{sh}$, llamando 2’ al entorno inmediato por delante y 1’ al entorno inmediato por detrás. Por lo ya argumentado, entre $\bar{\xi}_{sh}$ y ξ_{sh} solo estarían permitidas soluciones $v_{sup}(\xi) > v(\xi) > v_{inf}(\xi)$, por lo tanto $\tilde{v}_{2'} > v_{inf}(\xi_{sh})$, equivalente a $|v_{2'}| < c_s$. No obstante, si también vale la desigualdad (2.58) se tiene $c_s < |v_{2'}|$ que implica un absurdo. Entonces no es posible la existencia de múltiples frentes de choque en la fase “+”⁴². A su vez, si hay solo un frente de choque, las condiciones de contorno implican que delante suyo el fluido se encuentra sin perturbar y la desigualdad $c_s < |v_2| = \xi_{sh}$ implica que éste avanza supersónicamente.

2.5.1.4. Perfiles posibles:

Como conclusión de los anteriores apartados, la figura 2.2 ilustra esquemáticamente las formas del perfil de velocidad que se pueden dar en la práctica cumpliendo esas restricciones que se argumentan previamente. Cuál finalmente se da depende de la ecuación de estado, la velocidad de la pared y la temperatura de nucleación, que no se obtienen por consideraciones enteramente hidrodinámicas. Una representación más

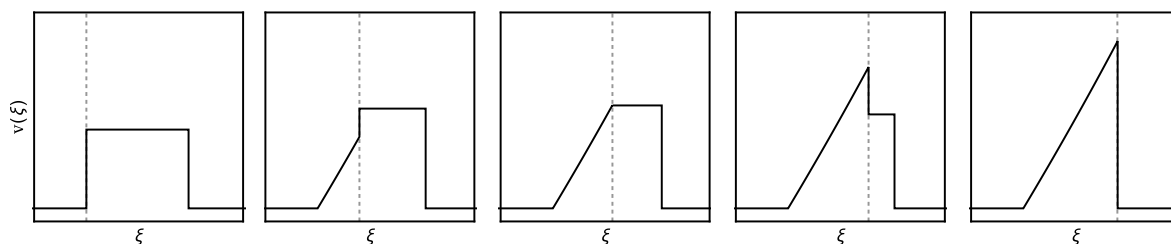


Figura 2.2: Forma esquemática de los perfiles de velocidad posibles. La línea a trazos representa la *posición* del frente de transición o pared de burbuja. Las condiciones de contorno imponen que vale la solución $v \equiv 0$ en $\xi \rightarrow 1$ (el “infinito” a fines prácticos) y a lo sumo puede haber un frente de choque con velocidad $\xi_{sh} > c_s$, seguido detrás por una onda de choque correspondiente a una solución no creciente [aquí se esquematiza con una línea plana horizontal pero puede ser decreciente en ξ]. Detrás de la pared corresponde la solución $v = 0$ desde $\xi = 0$ y a lo sumo se admite una onda de rarefacción desde $(\xi = c_s, v = 0)$ [aquí se esquematiza con una única línea oblicua]. Además, como no es admisible la doble anulación $\tilde{v}_{\pm} = 0$, al menos una de las dos, choque o rarefacción, tiene que estar presente en el perfil.

realista de los perfiles se puede ver para el caso de cálculo concreto graficado la figura 3.20 de la sección 3.3.3.4.

⁴²Incluso, más allá de la ecuación de estado que valide a la desigualdad (2.58), si hubiesen varios frentes de choque deberían empalmarse soluciones que crecen cada vez más yendo hacia el centro, cuando las velocidades de los frentes deberían ir disminuyendo. Pero a su vez estos siempre deberían moverse con una velocidad superior al valor que tome la solución por delante y detrás. Tal configuración parece cuando menos intuitivamente muy restrictiva en términos de rangos de ξ y v .

2.5.2. Clasificación de soluciones

Haciendo uso de las condiciones de empalme (2.52) y (2.53), o (2.54), y la ecuación de estado en el frente de transición, en principio es posible eliminar la temperatura T_- y obtener ecuación para $|v_+|$ como función de $|v_-|$ y T_+ . No obstante, algunas características generales de estas relaciones termodinámicas no dependen de la ecuación de estado. Identificándolas se pueden clasificar las soluciones a las ecuaciones de fluido con bastante generalidad.

Una primera clasificación se realiza teniendo en cuenta que, a partir de las ecuaciones (2.52) y (2.53), es inmediato llegar a⁴³

$$\frac{|v_+| - |v_-|}{|v_+|} = \frac{P_- - P_+}{w_+ \gamma_+^2 v_+^2}. \quad (2.59)$$

Por lo tanto, se ve que, para un dado valor de v_+ y T_+ , se tienen en general dos soluciones para el fluido saliente. Una de ellas con $|v_-| < |v_+|$ y $P_+ < P_-$, llamada *detonación*, y otra con $|v_-| > |v_+|$ y $P_+ > P_-$, llamada *deflagración*. Estas denominaciones se heredan del estudio de combustiones, donde también hay interfaces, que en ese caso separan fluido quemado y sin quemar.

En segundo lugar, notar que *variaciones* de cantidades termodinámicas están en general relacionadas mediante la velocidad del sonido. Por ejemplo, de las definiciones (1.12) y (2.45) se tiene

$$dP = dw / (1 + c_s^{-2}) \quad (2.60)$$

Por lo tanto, diferenciando las ecuaciones (2.52) y (2.53) se puede recopilar toda la información que suministra la ecuación de estado dentro de la *variable* c_- , la velocidad del sonido en la fase “-”, que en general no es constante y depende de las variables termodinámicas. Para realizar la diferenciación se debe considerar que T_+ (o w_+) se fija como condición de contorno (o sea, es constante) y entonces v_- y T_- dependen solo de v_+ . En tal caso se puede expresar

$$\left(v_-^2 \gamma_-^2 + \frac{c_-^2}{1 + c_-^2} \right) dw_- + 2w_+ v_+ \gamma_+^2 \gamma_-^2 dv_- = 2w_+ v_+ \gamma_+^4 dv_+, \quad (2.61)$$

$$v_- \gamma_-^2 dw_- + w_+ \gamma_+^2 \gamma_-^2 \frac{v_+}{v_-} (1 + v_-^2) dv_- = w_+ \gamma_+^4 (1 + v_+^2) dv_+, \quad (2.62)$$

donde, para obtener estos resultados, se usan las relaciones $d(v^2 \gamma^2) = 2v \gamma^4 dv$ y $d(v \gamma^2) = \gamma^4 (1 + v^2) dv$, se reemplazan las apariciones de w_- usando la ecuación (2.53), y por estar fijado w_+ se toma $dw_+ = 0$. Combinando las ecuaciones (2.61-2.62), se obtiene [96]

$$\left. \frac{\partial v_-}{\partial v_+} \right|_{T_+} = \frac{\gamma_+^2}{\gamma_-^2} + \frac{\gamma_+^2 (v_-^2 + c_-^2) (1 - v_+ v_-)}{v_-^2 - c_-^2} \frac{v_+ - v_-}{v_+}, \quad (2.63)$$

$$\frac{1}{w_-} \left. \frac{\partial w_-}{\partial v_+} \right|_{T_+} = - \frac{2v_- \gamma_-^2 \gamma_+^2 (1 + c_-^2) (1 - v_+ v_-)}{v_-^2 - c_-^2} \frac{v_+ - v_-}{v_+}. \quad (2.64)$$

Se aprecia que la velocidad del sonido en la fase “-” juega un rol relevante dentro de las ecuaciones (2.63-2.64). Por ejemplo, la ecuación (2.63) diverge para $|v_-| = c_-$

⁴³Notar que $(v_+ - v_-)/v_+ = (|v_+| - |v_-|)/|v_+|$, y además $w > 0$, como se explica en la nota n° 36.

y, por lo tanto, $\partial v_+ / \partial v_- = 0$. Esto significa que la curva v_+ como función de v_- (para un T_+ fijo) tiene un extremo. Así, el caso $|v_-| = c_-$ separa dos comportamientos diferentes, se llaman soluciones *débiles* cuando v_+ crece con v_- , y soluciones *fuertes* cuando v_+ decrece con v_- . El caso límite $|v_-| = c_-$ es llamado punto de Jouget. El extremo de v_+ en función de v_- ubicado en el punto de Jouget puede ser un máximo o un mínimo, dependiendo del signo de $(v_+ - v_-)/v_+$. Así, para detonaciones se tiene un mínimo, mientras que para deflagraciones se tiene un máximo⁴⁴. En este trabajo se denota el mínimo $|v_+| = v_J^{\text{det}} > c_-$ para detonaciones y el máximo $|v_+| = v_J^{\text{def}} < c_-$ para deflagraciones, donde el subíndice J se debe a que en esos casos el proceso es llamado detonación o deflagración *de Jouget* respectivamente. Usando las condiciones (2.52-2.53) y la ecuación de estado de puede poner v_J en función de T_+ .

La interpretación física de estas definiciones es la siguiente. Se sabe que deben haber soluciones con valores pequeños de v_- y v_+ , correspondientes a una pared lenta. En el límite de pared quieta, se debería tener $v_- = v_+ = 0$, mientras que si la velocidad es pequeña pero no nula, ambos v_- y v_+ serán no nulos (y tendrían el mismo signo). Entonces, esas soluciones corresponden a la parte *débil* de la curva (es decir, $\partial v_+ / \partial v_- > 0$). Si se incrementa bastante la velocidad, se alcanza el punto de Jouget $|v_-| = c_-$, donde $|v_+|$ tiene un extremo. En este caso, el extremo tiene que ser un máximo, y $|v_+|$ tiene que decrecer para $|v_-| > c_-$ (soluciones fuertes). Así, esa curva resulta ser la de deflagración. Por otro lado, debe haber una solución con $|v_-| \approx |v_+| \approx 1$, correspondiente a pared muy rápida⁴⁵. A medida que velocidad de la pared disminuye desde el límite $v_w \rightarrow 1$, ambos $|v_+|$ y $|v_-|$ tienen que decrecer. Por lo tanto, se está de nuevo en la parte débil de una curva. Esta curva tiene un mínimo en el punto de Jouget $|v_-| = c_-$ y, así, corresponde a soluciones detonantes.

Entonces en el sistema de referencia de la pared, para detonaciones, el fluido entrante por delante es supersónico, mientras que para deflagraciones el fluido entrante es subsónico (siempre respecto del c_- al que tendería continuamente $|v_-|$ para llegar al mínimo o máximo respectivo). Notar también que para soluciones débiles corresponde un valor más pequeño de $|v_+ - v_-|$ que en soluciones fuertes y, entonces, a menores perturbaciones del fluido. Más en concreto, cuando el proceso hidrodinámico es *débil* las velocidades v_+ y v_- son ambas supersónicas o subsónicas. Las detonaciones débiles son con $|v_+| > |v_-| > c_-$ y las deflagraciones débiles con $|v_+| < |v_-| < c_-$. Por el contrario, cuando el proceso hidrodinámico es *fuerte* una de las velocidades es subsónica y la otra supersónica. Este hecho permite entender la denominación de procesos *fuertes* y *débiles*, como aquellos en los que el fluido experimenta mayor o menor perturbación al atravesar la pared.

⁴⁴Históricamente, al realizarse estas clasificaciones, tanto para combustiones como para transiciones se supone que la velocidad del sonido no posee una gran variación y esencialmente es una constante. Pero en general depende de variables termodinámicas que varían con la posición, como la temperatura (ver el capítulo 3). En este capítulo se pretende mantener la discusión lo más general posible, suponiendo que c_+ y c_- están bien diferenciados. Pero por simplicidad, no se tiene en consideración cómo varían, sacrificando cierto *detalle fino* (por ejemplo, v_J^{det} y v_J^{def} no necesariamente se dan para el mismo $|v_-|$). Y de hecho en esta tesis solo se consideran ecuaciones de estado con c_{\pm} constantes.

⁴⁵En efecto, una pared con $v_w \rightarrow 1$ no puede perturbar el fluido delante, con lo que $|v_+| = v_w \rightarrow 1$. Tampoco se espera que pueda arrastrar el fluido detrás más allá de un cierto límite, luego se mantiene $\tilde{v}_- < 1$. Por lo tanto, también $|v_-| \rightarrow 1$.

2.5.3. Soluciones excluidas

No todos los procesos de la clasificación dada en la sección anterior se llegan a realizar en una transición de fases. Es sabido que detonaciones fuertes no son posibles, ya que no pueden satisfacer las condiciones de contorno [21, 92, 93, 118]. Ha sido argumentado en la referencia [118] que detonaciones débiles son también imposibles, como en el caso de combustiones químicas [92, 93]. Como consecuencia, solo habrían detonaciones de Jouguet, y la velocidad⁴⁶ $v_w = v_J$ estaría completamente determinada por la hidrodinámica y no dependería de la microfísica. No obstante, se ha mostrado [21] que esto no es cierto en las transiciones de fase, donde la situación es similar a las discontinuidades de condensación [92, 93] en vez de combustiones químicas. En consecuencia solo detonaciones fuertes están prohibidas.

Deflagraciones fuertes no parecen realizarse tampoco. En la referencia [21] se argumenta que, como en el caso de combustiones químicas, están prohibidas por consideraciones sobre la entropía [92, 93]. No obstante, en la referencia [119], se muestra que esa prueba no es válida para transiciones de fase cosmológicas. De todos modos, un argumento sobre inestabilidad mecánica contra las deflagraciones fuertes [92, 93] parece ser válido también para transiciones de fase cosmológicas [119]. Cálculos numéricos [22, 119] apoyan esta afirmación. También se muestra esto en trabajos más nuevos como [96, 100, 104]. Por otro lado, en la referencia [119] se muestra que las deflagraciones supersónicas de Jouguet pueden existir.

Como consecuencia, cuatro tipos de soluciones estacionarias parecen posibles en transiciones de fase cosmológicas, las detonaciones débiles, las deflagraciones débiles y los procesos de Jouguet (tanto para detonaciones como deflagraciones). En la sección 3.3.3, para el caso plano y una ecuación de estado aproximada⁴⁷, se demuestra que esas son las únicas soluciones posibles (fácilmente se generalizaría para otras simetrías). En el resto de esta sección, se describen generalidades de esas soluciones y cómo debería encararse el cálculo de perfiles, que luego se llevan a cabo en el capítulo 3.

2.5.4. Perfiles asociados a las soluciones permitidas

A continuación se analizan los distintos perfiles de las soluciones permitidas (no excluidas) sin considerar una ecuación de estado particular y teniendo en cuenta las restricciones que se concluyen en la sección 2.5.1. Se hace explícita distinción entre velocidades del sonido en cada fase, c_+ y c_- , pero sin considerar cómo varían. Esto repercute en las curvas $v_{\text{inf}\pm}$ y $v_{\text{sup}\pm}$ para cada fase. Estrictamente hablando las conclusiones a las que aquí se llega estarían demostradas para el caso con velocidades de sonido constantes en cada fase (ver también la sección 3.2.2). En cualquier otra situación deberían considerarse como nociones aproximadas. Se explica de qué forma deberían empalmarse las soluciones teniendo en cuenta que la velocidad de la pared v_w y la temperatura de nucleación T_N (o en su lugar la densidad de entalpía w_N ⁴⁸) son

⁴⁶Se ve en la sección 2.5.4.1 que para detonaciones débiles $v_w = |v_+|$.

⁴⁷Y un caso particular de esa ecuación de estado, la del modelo (o aproximación) del *Bag* (ver sección 2.7.1), es la que se considera en las referencias mencionadas donde se analizan las posibles soluciones. En particular, el caso esférico ha sido estudiado numéricamente usando esa aproximación en la referencia [112].

⁴⁸La densidad de energía interna en cada fase solo depende de la densidad de entropía s , es decir $e = e(s)$. Luego puede escribirse $T(s) = \partial e / \partial s = de / ds$ (como derivada total). Por estabilidad termodinámica, $dT / ds = \partial^2 e / \partial s^2 > 0 \Rightarrow ds / dT > 0$. Entonces s crece en forma monótona respecto a

parámetros que quedan libres para ser calculados a partir de la microfísica en la pared y la teoría de campos a temperatura finita⁴⁹.

2.5.4.1. Detonación débil:

Por definición se cumple $|v_+| > |v_-| > c_-$. La condición $|v_-| > c_-$ es equivalente a $\tilde{v}_- < v_{\text{inf}-}(\xi_w)$, lo cual implica que la pared tiene una velocidad mayor a la del sonido en la fase “-” y aparece la posibilidad que detrás haya una cola de rarefacción dada por alguna solución de la ecuación (2.47) por debajo a la curva $v_{\text{inf}-}(\xi)$ (si $j = 0$, un tramo de perfil puede coincidir con esa curva pero nunca superarla). Si hubiese un frente de choque \tilde{v}_+ sería parte de una solución $v(\xi) > v_{\text{inf}+}(\xi)$ en la fase “+”, lo que implica $|v_+| < c_+$. Si $c_+ \leq c_-$ se tiene un absurdo ($|v_+| < |v_-|$, que no es una detonación). Si $c_+ > c_-$, con las condiciones $|v_-| > c_-$ y $|v_+| < c_+$ el perfil sería posible pero es inestable⁵⁰. Por lo tanto, la detonación débil no puede tener un frente de choque.

Vale un razonamiento recíproco. Imponer $\tilde{v}_+ = 0$ ($|v_+| = v_w = \xi_w$) conduce a que, para tener solución (no-identícamente nula) compatible con las condiciones de contorno tras la pared, es decir, una cola de rarefacción, solo puede ser $|v_+| = \xi_w > c_-$. Además esas soluciones son $\tilde{v}_- \leq v_{\text{inf}-}(\xi_w) \Rightarrow |v_-| \geq c_-$. Por lo tanto es un proceso débil ya que $|v_-|$ y $|v_+|$ son ambos supersónicos. Si fuera $v_w = |v_+| < |v_-| \Rightarrow 0 = \tilde{v}_+ > \tilde{v}_-$ caso descartado porque no se están considerando situaciones donde sean posibles las velocidades negativas. Entonces se tiene pared supersónica ($v_w > c_-$) en el rango $v_J^{\text{det}}(w_N) \leq v_w < 1$ y el régimen es una detonación débil pues $|v_+| \geq |v_-| \geq c_-$, donde la primer igualdad sería un caso límite entre detonación y deflagración, y la segunda caso límite de Jouget.

Entonces se tiene la situación del quinto panel en la figura 2.2, la pared se mueve supersónicamente (al menos respecto a c_-), afuera de la burbuja detonante el fluido no se encuentra aún perturbado (no hay frente de choque), la velocidad del fluido se anula y la temperatura permanece en la que se nucleó la burbuja, es decir $\tilde{v}_+ = 0$ y $T_+ = T_N$. Por lo tanto se tiene

$$v_+ = -v_w, \quad w_+ = w_N. \tag{2.65}$$

La pared de burbuja es seguida por una cola u onda de rarefacción, solución de la ecuación (2.47) la cual se anula en $\xi = c_-$ y llega hasta $v(\xi_w) = \tilde{v}_-$, donde \tilde{v}_- se relaciona con v_- involucrando el parámetro v_w , y v_- se relaciona con $v_+ = -v_w$ [mediante las condiciones (2.52 y 2.53) o (2.54)] involucrando el parámetro w_N .

El perfil de entalpía $w(\xi)$ es dado por la integración (2.51) desde justo detrás de la pared en $\xi_a = \xi_w$ hasta un $\xi_b = \xi$ tal que $c_- < \xi < \xi_w$, considerando que en $\xi = \xi_w$

T , y lo mismo sucede con la densidad de entalpía, $w = Ts$.

⁴⁹Por ejemplo, usando (2.41), que involucra información microfísica en los términos de fricción, se puede calcular v_w y a partir de lo que se discute en la sección 1.4, que involucra a los ritmos de nucleación y expansión del universo, se puede establecer una T_N con la cual calcular w_N . En ambos casos se requiere conocer la ecuación de estado, que se puede aproximar a partir de los métodos de teoría campos a temperatura finita.

⁵⁰Esas condiciones son las mismas que las del análisis de las referencias [96, 104], el cual muestra que este tipo de frente no es *evolutivo*. En breve, significa que el número total de modos inestables es mayor que las condiciones de empalme en la interfaz, y la solución es trivialmente inestable.

toma el valor $w = w_-$ relacionado con $w_+ = w_N$ a través de la ecuación (2.53),

$$w_- = \frac{v_w/(1 - v_w^2)}{|v_-|\gamma_-^2} w_N. \quad (2.66)$$

Según la expresión (2.51), integrando hasta un $\xi < c_-$, donde la velocidad del fluido es nula, no varía el valor respecto de $w|_{\xi=c_-}$. A su vez, como tampoco hay frente de choque, en todo $\xi > \xi_w$ se tiene fluido sin perturbar con densidad de entalpía w_N .

Reforzando lo argumentado en la nota n° 45, al considerar la ecuación (2.63), y que en una detonación débil es $|v_+| = v_w$ [$\tilde{v}_+ = 0$], tomando $v_w \rightarrow 1$ la única forma que la derivada $\left. \frac{\partial v_-}{\partial v_+} \right|_{T_+}$ se mantenga finita (fuera del punto de Jouget) es que también $|v_-| \rightarrow 1$. Es decir, en torno a ese límite, aumentan tanto $|v_+| = v_w$ como $|v_-|$ y tienden a uno [pero en general es $\tilde{v}_- = \mu(-v_w, v_-) \neq 0$, incluso en el límite].

2.5.4.2. Deflagración débil:

Por definición se cumple $|v_+| < |v_-| < c_-$. Si $\xi_w > c_-$ las únicas soluciones admitidas por detrás de la pared implicarían $\tilde{v}_- < v_{\text{inf}}(\xi_w)$, que es equivalente a $|v_-| > c_-$ contradiciendo la definición. Por lo tanto la pared es subsónica, $\xi_w = v_w < c_-$, por detrás no admite cola de rarefacción y el fluido se encuentra sin perturbar. Como no es admisible la doble anulación $\tilde{v}_\pm = 0$ el perfil debe tener una onda de choque.

Vale un razonamiento recíproco. Imponiendo $\tilde{v}_- = 0$ ($|v_-| = v_w = \xi_w$), y en consecuencia la presencia de una onda de choque, si fuera $v_w = |v_-| < |v_+|$ implicaría $0 = \tilde{v}_- > \tilde{v}_+$, caso descartado porque no se están considerando situaciones donde sean posibles las velocidades negativas. Entonces solo es posible $|v_+| \leq |v_-|$. Si fuera $|v_+| > c_- \Rightarrow \tilde{v}_+ < v_{\text{inf}}(\xi_w)$, pero con esa restricción no hay soluciones decrecientes (o constantes) respecto ξ para constituir una onda de choque. Por lo tanto debería ser $|v_+| < c_-$. Si la pared fuera supersónica, $v_w = |v_-| > c_-$, implicaría deflagración fuerte, pero las referencias que se citan en la sección 2.5.3 indican que estarían prohibidas ese tipo de soluciones. Por lo tanto, se tiene pared subsónica, $v_w = |v_-| < c_-$, en el rango $0 < v_w \leq c_-$ y el régimen es una deflagración débil pues $|v_+| \leq |v_-| \leq c_-$, donde la primer igualdad es caso límite entre detonación y deflagración, y la segunda caso límite de Jouget.

Entonces se tiene la situación del primer panel en la figura 2.2. En general no es tan simple como en detonaciones encontrar cuál es solución a la ecuación de fluidos (2.47) correspondiente a la onda de choque, porque simultáneamente se deben encontrar los valores que ésta toma en sus extremos, e incluso la posición de uno de ellos. Se tienen dos condiciones de empalme en la pared y otras dos en el frente de choque [dadas por (2.52 y 2.53), o (2.54)], que involucran cuatro magnitudes relevantes cada una. En la pared se relacionan v_- , v_+ , w_- y w_+ , mientras que en choque se relacionan v_1 , v_2 , w_1 y w_2 . Son necesarias entonces otras cuatro ecuaciones más. Trivialmente se tienen dos debidas a que el fluido está en reposo en la fase “-” y sin perturbar por delante del choque:

$$v_- = -v_w, \quad w_2 = w_N. \quad (2.67)$$

Mientras que las otras dos ecuaciones faltantes las brindan la del perfil de velocidades (2.47) y la de entalpía (2.51), que vinculan v_+ con v_1 y w_+ con w_1 . Además, sin alterarse el conteo de incógnitas, la velocidad v_2 puede reemplazarse por la del frente de choque

v_{sh} , puesto que el fluido por delante está sin perturbar ($\tilde{v}_2 = 0$), lo que implica

$$\xi_{sh} \equiv v_{sh} = |v_2| \quad (2.68)$$

Una forma general de proceder es la siguiente. De las condiciones de empalme [más la aplicación de las (2.67) y la ecuación de estado considerada], en la pared hay una relación entre $|v_+|$ y w_+ (que además involucra a v_w), mientras que el choque hay otra que relaciona a $|v_1|$ y w_1 (involucrando a w_N). Para utilizar las ecuaciones de perfiles de velocidad y entalpía, resulta más práctico reemplazar $|v_+|$ y $|v_1|$ por \tilde{v}_+ y \tilde{v}_1 . El cambio de sistema de referencia involucra a v_w y v_{sh} respectivamente. Donde v_{sh} , según lo expresado en (2.68), coincide con $|v_2|$ y, como este último con las condiciones de empalme puede expresarse en función de $|v_1|$ y w_1 (con w_N involucrado), conduce al reemplazo $v_1 = v_1(\tilde{v}_1, w_1)$ que sale de invertir $\tilde{v}_1 = \mu[-v_{sh}(v_1, w_1), v_1]$. Junto con la ecuación del perfil de velocidades (2.47) constituyen un sistema de ecuaciones acopladas para $w(\xi)$ y $v(\xi)$. Las condiciones que deben cumplir sus soluciones en los extremos están acopladas por dos ecuaciones (al menos implícitas) que relacionan \tilde{v}_+ con w_+ y \tilde{v}_1 con w_1 (y que involucran a los parámetros v_w y w_N). Resolviendo ese sistema se tiene el perfil de la onda de choque⁵¹.

2.5.4.3. Proceso de Jouguet:

Por definición $|v_-| = c_-$, equivalente a $\tilde{v}_- = v_{inf-}(\xi_w)$, que en el caso no plano ($j > 0$) se cumple justo donde las soluciones cambian la rama de valuación cortadas por $v_{inf-}(\xi)$ (como se ilustra en la figura 2.1). En el caso plano requiere tomar $v_{inf-}(\xi)$ como solución tras la pared. En cualquier situación implica que hay una cola de rarefacción presente, luego $\xi_w > c_-$, salvo el caso límite con $\xi_w = c_-$. A partir de las condiciones (2.52 y 2.53) o (2.54) se pueden relacionar $|v_+|$ con $|v_-|$ y el parámetro w_+ . Al fijar $|v_-| = c_-$, dependiendo si se trata de una detonación o una deflagración, v_+ toma el valor $v_J^{det}(T_+)$ o $v_J^{def}(T_+)$ respectivamente, que depende solo de T_+ a determinar (o equivalentemente w_+) y parámetros de la ecuación de estado (como, por ejemplo, velocidades del sonido de cada fase). Solo puede haber un frente de choque por delante de la pared si $\tilde{v}_+ > v_{inf+}(\xi_w)$, es decir $v_J(T_+) = |v_+| < c_+$.

Detonación de Jouguet Por definición $v_J^{det}(T_+) = |v_+| > |v_-| = c_-$, que implica $\tilde{v}_+ < \tilde{v}_- = v_{inf-}(\xi_w)$, la velocidad decrece delante de la pared (cuarto panel en la figura 2.2). En el caso límite sin cola se cumpliría $|v_+| > c_- = |v_-| = v_w$, en particular $|v_+| > v_w$ implica $\tilde{v}_+ < 0$ velocidad negativa, hacia el centro de la burbuja, incompatible con régimen estacionario. Por lo tanto no existen detonaciones de Jouguet sin cola. Si no hay un frente de choque se tiene $v_w = |v_+| = v_J^{det}(T_N)$, es decir, solo se da esa situación para una velocidad de la pared particular que coincide con la de Jouguet evaluada en $T_+ = T_N$ (el cual no depende de v_w ⁵²).

Deflagración de Jouguet Por definición $v_J^{def}(T_+) = |v_+| < |v_-| = c_-$, que implica $\tilde{v}_+ > v_{inf-}(\xi_w) = \tilde{v}_-$, la velocidad se incrementa delante de la pared (segundo panel

⁵¹Un algoritmo de resolución: probar un valor de \tilde{v}_1 (lo que automáticamente fija a w_1 y v_{sh}); resolver numéricamente la ecuación (2.47) para $v(\xi)$ desde $\xi_{sh} = v_{sh}$ hasta $\xi_w = v_w$; usando w_1 y la expresión (2.51) calcular la $w(\xi_w)$; verificar si $\tilde{v}_+ = v(\xi_w)$ con $w_+ = w(\xi_w)$ satisfacen la relación requerida dentro de una precisión deseada; si no se verifica probar un nuevo valor de \tilde{v}_1 y repetir...

⁵²A diferencia de T_+ en general, que podría depender de v_w si hay frente de choque.

en la figura 2.2). Si no hubiese un frente de choque sería $\xi_w = v_w = |v_+| < |v_-| = c_-$, pared subsónica, lo que contradice la presencia de la cola de rarefacción, es un absurdo. Por lo tanto la deflagración de Jouguet siempre tiene frente de choque.

Vale un razonamiento recíproco. Como se ve en los apartados previos, imponer $\tilde{v}_+ = 0$ conduce a detonaciones débiles, e imponer $\tilde{v}_- = 0$ a deflagraciones débiles. Luego, para cubrir las combinaciones restantes se deben buscar soluciones con ambos $\tilde{v}_+ > 0$ y $\tilde{v}_- > 0$. Teniendo en cuenta las soluciones no nulas permitidas de cada lado de la pared, onda de choque y cola de rarefacción, de la primera se tiene $\tilde{v}_+ \geq v_{\text{inf}+}(\xi_w) \Rightarrow |v_+| \geq c_+$ ⁵³, mientras que de la segunda $\tilde{v}_- \leq v_{\text{inf}-}(\xi_w) \Rightarrow |v_-| \geq c_-$. Además, siempre $v_w > \tilde{v}_\pm \geq 0 \Rightarrow v_w \geq |v_\pm| > 0$. Pero en la referencia [96, 104] se establece que un régimen con $|v_+| < c_+$ y $|v_-| > c_-$ no es estable. Entonces solo es posible si se cumple $|v_-| = c_-$ (proceso de Jouguet). Y a este corresponden las posibilidades $|v_-| = c_- \geq c_+ \geq |v_+|$ (deflagración) o $c_+ > c_-$, que a su vez puede ser $c_+ > c_- = |v_-| \geq |v_+|$ (deflagración) o $c_+ \geq |v_+| \geq |v_-| = c_-$ (detonación). Notar que aquí el caso límite $|v_-| = |v_+|$ podría interpretarse tanto como una deflagración o una detonación. La razón es que así es útil para discutir a continuación cómo los perfiles barren las distintas configuraciones de deflagraciones y detonaciones variando con continuidad el parámetro v_w .

Similarmente a la situación del frente de choque en deflagraciones, fijado w_N (o T_N) para cada $\xi_w = v_w$ hay una solución a la ecuación de fluidos, que es una onda de choque $v(\xi)$, la cual incluye al punto $\{\xi_{\text{sh}}, \tilde{v}_1\}$ que satisface las condiciones de contorno y las propias de un proceso de Jouguet [ver (2.70) más adelante]. Esa solución queda así unívocamente determinada, por lo tanto el valor $\tilde{v}_+ = v(\xi_w)$ también⁵⁴. Dependiendo si este valor es mayor o menor que \tilde{v}_- será una deflagración o una detonación. Además \tilde{v}_- y v_w tienen una relación uno a uno en el régimen de Jouguet ya que $|v_-| = c_- \Rightarrow \tilde{v}_- = \mu(-v_w, -c_-)$. Todo esto implica que, fijando T_N , para cada valor de v_w hay solo una solución estable y que, variando v_w , se pasa de deflagraciones a detonaciones. Mientras que los rangos que toma v_w para deflagraciones y detonaciones débiles están bien determinados en general. Los rangos que corresponden a deflagraciones y detonaciones de Jouguet deben determinarse en cada caso concreto. El rango de v_w en *todos* los procesos de Jouguet lo da la región excluida para deflagraciones y detonaciones débiles. Es decir, teniendo en cuenta la discusión en apartados anteriores, $c_- \leq v_w \leq v_J^{\text{det}}(T_N)$, o equivalentemente $0 \leq \tilde{v}_- \leq v_{\text{inf}-}(v_J^{\text{det}}(T_N))$.

Cuando hay frente de choque hay recalentamiento y $T_+ > T_N$. En cambio, sin frente de choque, se tiene $T_+ = T_N$. En deflagraciones de Jouguet $v_J^{\text{def}}(T_+) = |v_+| \leq |v_-| = c_-$. En detonaciones de Jouguet $c_- = |v_-| \leq |v_+| = v_J^{\text{det}}(T_+)$. Como siempre, sea deflagración o detonación, $|v_\pm| \leq v_w$ y la cota superior en procesos de Jouguet es

⁵³En principio cuando la onda de choque se achica tienden a ser $v_{\text{sh}} \rightarrow v_w$ y, en consecuencia, $\tilde{v}_1 \rightarrow \tilde{v}_+$ y $w_1 \rightarrow \tilde{w}_+$. Pero el caso $\tilde{v}_+ = v_{\text{inf}+}(\xi_w)$ (o $|v_+| = c_+$) correspondería a un frente de choque ubicado en la misma posición que la pared. Es decir, en el límite no hay onda de choque, no están definidos los valores $\{\tilde{v}_1, w_1\}$ y en general no tienden a coincidir con $\tilde{v}_+ = 0$ y $w_+ = w_N$, salvo en el caso muy particular de $v_{\text{sh}} \rightarrow v_w = c_+$.

⁵⁴La ecuación (2.47) es una ecuación diferencial ordinaria, donde vale el teorema de existencia y unicidad, dado un punto $\{\xi_{\text{sh}}, \tilde{v}_1\}$ hay una única solución que pasa por este. Lo mismo se aplica para el punto $\{\xi_w, \tilde{v}_+\}$. Luego, la curva que los une es única, independientemente de la forma en que son determinados los valores $\xi_{\text{sh}}, \tilde{v}_1$ y \tilde{v}_+ . No obstante, dados v_w y w_N podría haber, por ejemplo, más de un v_+ posible a tener en cuenta. Esas valuaciones extra se ha visto que corresponden a configuraciones inestables, como las citadas en la sección 2.5.3, las cuales no se consideran aquí.

$v_w \leq v_J^{\text{det}}(T_N)$, luego vale

$$v_J^{\text{def}}(T_+) \leq c_- \leq v_J^{\text{det}}(T_+) \leq v_w \leq v_J^{\text{det}}(T_N), \quad (2.69)$$

para el T_+ que se obtiene, vía ecuación de estado, a partir del $w_+ = w(\xi_w)$, si hay un perfil de onda de choque $w(\xi)$, o directamente tomando $T_+ = T_N$ cuando no lo hay. Reiterando, en la desigualdad (2.69), para proceso de Jouget, $|v_-| = c_-$ y $|v_+| = v_J^{\text{def}}$ o $|v_+| = v_J^{\text{det}}$ si es una deflagración o una detonación respectivamente. Como se argumenta previamente, en los procesos de Jouget siempre hay cola de rarefacción, salvo en el caso límite de deflagraciones débiles donde $v_w = c_-$. En general la existencia de onda de choque implica $v_J \leq c_+$ ⁵⁵.

Si $c_+ < c_-$ no hay detonaciones de Jouget con onda de choque, ya que no se cumple $v_J^{\text{det}}(T_+) \leq c_+$, pero en principio no queda descartada la detonación de Jouget sin frente de choque al tener $v_w = v_J^{\text{det}}(T_N)$, ni las deflagraciones de Jouget (con choque) cuando $v_J^{\text{def}}(T_+) < c_+ < c_- \leq v_w \leq v_J^{\text{det}}(T_N)$. En particular, el límite $v_J^{\text{def}}(T_+) = c_+ < c_-$ no es posible, ya que en ese caso debería ser $v_w = c_+$ cuando $c_+ < c_- \leq v_w$, un absurdo. Entonces, variando v_w se pasa de deflagraciones a detonación con una discontinuidad en la altura de la onda de choque respecto de v_w . Si $c_+ = c_-$ la única detonación de Jouget posible sigue siendo para $v_w = v_J^{\text{det}}(T_N)$ y solo en la singular situación en la que $c_+ = v_J^{\text{det}}(T_N)$ desaparece la discontinuidad en la altura de la onda de choque cuando se pasa de deflagración a detonación. Si $c_- < c_+$, son posibles detonaciones de Jouget con frente de choque, puede haber un valor de v_w para el cual se pase por el caso límite entre deflagración y detonación donde se cumple $v_J^{\text{def}} = c_- = v_J^{\text{det}}$ (sin salto en la altura de la onda de choque), pero si $c_+ > v_J^{\text{det}}(T_N)$ se tiene discontinuidad de detonación de Jouget con onda de choque al límite de detonación débil en $v_w = v_J^{\text{det}}(T_N)$. Las condiciones para que dicha discontinuidad no esté son extremadamente particulares.

Entonces, en general, un proceso de Jouget tiene ambas, cola de rarefacción y onda de choque. El caso límite sin cola es una deflagración de Jouget con $v_w = c_-$, el caso límite sin frente de choque es una detonación de Jouget con $v_w = v_J^{\text{det}}(T_N) > c_-$. En las deflagraciones de Jouget la velocidad $v(\xi)$, en $\xi = \xi_w$, tiene un salto positivo al pasar de la fase “-” a la fase “+”, mientras que en las detonaciones el salto es negativo. El caso de pasaje continuo es cuando $|v_+| = |v_-|$ (tercer panel en la figura 2.2). En la figura 3.20 de la sección 3.3.3.4 se ilustra un cálculo concreto en el que se barren todas las soluciones variando v_w desde deflagraciones débiles, pasando por deflagraciones de Jouget, luego detonaciones de Jouget y finalmente detonaciones débiles. En general siempre hay un $v_w = v_J^{\text{det}}(T_N)$ al que le corresponde una detonación de Jouget sin frente de choque, pero solo resultan posibles las detonaciones con frente de choque si $c_- < c_+$, pues solo cuando $v_{\text{inf-}} > v_{\text{inf+}}$ se admiten choques más bajos que el valor detrás de la pared $\tilde{v}_1 = v_{\text{inf-}}(\xi_w)$. Fuimos nosotros quienes nos percatamos de este tipo de solución en nuestro trabajo publicado [3], ya que la misma se pierde al tomar $c_- = c_+$ en la aproximación del *Bag* usualmente considerada por la bibliografía especializada (ver sección 2.7.1).

Se obtiene el perfil como en la detonación o deflagración débil, salvo que en las condiciones (2.65) o (2.67) deben hacerse las modificaciones:

$$v_- = -c_-, \quad w_2 = w_N \quad (2.70)$$

⁵⁵Reiterando, la igualdad representa solo el caso patológico que se explica en la nota n°53.

Además, en el caso límite sin cola $\xi_w = c_-$ y en el caso límite sin frente $w_+ = w_N$. Para el proceso de Jouget se debe integrar a ambos lados de la discontinuidad para tener la entalpía.

2.6. Solución no estacionaria *runaway*

Como se anticipa en la sección 2.3.2, si la fricción que experimenta la pared no llega a igualar la fuerza impulsora, la velocidad de la pared rápidamente alcanza un valor $v_w \simeq 1$, con alto y creciente factor relativista γ_w . Como la fuerza neta ultrarelativista (2.34) no depende de la velocidad de la pared, si se alcanza ese régimen UR con una fuerza neta $F_{\text{net}} > 0$, la pared y la hidrodinámica en su entorno quedan en régimen *runaway* sin posibilidad de volverse estacionarias. En lo que resta de este capítulo y el siguiente, se considera a F_{net} (en vez de v_w usado en caso estacionario) como un parámetro libre para estudiar sus efectos en la hidrodinámica (y el impacto de esta en la generación de ondas gravitatorias). Luego, esos resultados hidrodinámicos pueden evaluarse mediante la ecuación (2.34) para dejarlos en función de parámetros del modelo concreto que se esté considerando.

En las siguientes subsecciones, para comparar con casos ultra relativistas estacionarios ($F_{\text{net}} = 0$), solo interesan las paredes supersónicas, es decir, con $v_w > c_+$. Concretamente, solo se consideran velocidades de la pared que son tan grandes que el fluido delante de la pared se encuentra sin perturbar. Por lo tanto, en la fase “+” la velocidad del fluido \tilde{v}_+ se anula y la temperatura T_+ coincide con la de nucleación. También se supone que el fluido detrás de la pared está en equilibrio local, y que entonces las variables T y v están bien definidas en todos lados.

Dentro de la burbuja, la evolución espacial y temporal de las variables del fluido están dadas por las ecuaciones (2.9), $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Como se vio en la sección 2.4.3, los valores \tilde{v}_- y T_- inmediatamente detrás de la pared pueden obtenerse integrando las ecuaciones $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ a través de la interfaz, lo cual en definitiva para una pared delgada que no acumula energía implica considerar la continuidad de los flujos representados por $T^{\mu\nu}$. Pero cuando la pared acumula energía, como en el caso *runaway*, esos flujos tienen una discontinuidad. Además, como condición de contorno la velocidad del fluido se tiene que anular en el centro de la burbuja. En el caso estacionario, es usual considerar el marco de referencia de la pared, donde la condición de empalme queda más simple, sin dependencia explícita en v_w . En tal caso la pared tiene velocidad constante y el marco de referencia es inercial, pero cuando es *runaway* el sistema ya no es inercial. Incluso a pesar que v_w es aproximadamente constante, el valor ronda la velocidad de la luz y se torna conflictivo considerar un sistema inercial propio si se aproxima $v_w = 1$. En esta sección en cambio, para interpretar expresiones identificando la fuerza sobre la pared F_{net} y tomar más fácil el límite $v_w \rightarrow 1$, se considera el marco de referencia donde el centro de la burbuja o plasma enfrente de la pared está en reposo. Así se obtienen \tilde{v}_- y T_- como funciones de v_w y T_+ a partir de las condiciones de empalme en la pared.

2.6.1. Perfiles del régimen *runaway*

Al igual que con las detonaciones débiles, puesto que la velocidad de la pared es $v_w \approx 1$, no es posible que se transmita información por delante de la pared y el fluido

debe encontrarse sin perturbar a temperatura T_N . Los perfiles de v y T detrás de la pared son una solución de las ecuaciones (2.9) con condiciones de contorno $v = \tilde{v}_-$, $T = T_-$ justo detrás de la pared. Igual que en régimen estacionario (ver sección 2.4.1), para un sistema con simetría esférica, cilíndrica o plana, el problema es 1+1 dimensional, ya que el perfil del fluido depende solo del tiempo y de la distancia r al centro, eje o plano de simetría. En principio las ecuaciones (2.47) y (2.51) valen para régimen estacionario, pues la condición de similaridad es compatible con una pared la cual se ubica en un valor fijo de ξ , $\xi_w = v_w$. Para una pared acelerada, esta condición no es compatible, en general, con las condiciones de contorno en la interfaz. No obstante, en el límite ultra relativista, la posición de la pared esencialmente corresponde al valor $\xi_w \approx 1$. De hecho, como se muestra en la sección 2.6.3, los valores de T_- y \tilde{v}_- son constantes en el límite para una F_{net} constante. Por lo tanto, como en el caso de detonaciones, **el perfil de fluido de una solución runaway también puede obtenerse de las ecuaciones (2.47) y (2.50) de régimen estacionario**, donde las condiciones de contorno/empalme para la pared (con velocidad *casi constante*) se toman en la posición $\xi \approx 1$. Además, en la sección 2.6.3, se aprecia que las condiciones de empalme sobre estos perfiles en la posición de la pared son similares a los de detonaciones ultra relativistas, y de hecho coinciden cuando la fuerza neta sobre la pared tiende a cero. Como consecuencia, no se espera diferencias cualitativas importantes en la forma de los perfiles respecto al caso de detonaciones débiles.

2.6.2. Condición de empalme en detonación ultra relativista

En la sección 2.4.3 se expresan las condiciones de empalme en el sistema de referencia de la discontinuidad. Lo mismo puede hacerse respecto a cualquier sistema de referencia inercial, en particular interesa en el sistema de referencia del centro de la burbuja.

Con cierta generalidad, en el sistema de referencia del centro de la burbuja, se toma el movimiento de una discontinuidad en una dirección *radial* r positiva con velocidad v_* . De ese modo solo se necesitan considerar las componentes temporales y en la dirección r del tensor $T^{\mu\nu}$. En un tiempo pequeño Δt la discontinuidad se mueve una distancia $\Delta r = v_* \Delta t$. Durante ese tiempo, en un pequeño volumen imaginario quieto respecto al centro de la burbuja, en forma de caja con caras de área \mathcal{A} paralelas a la discontinuidad⁵⁶, se tiene un flujo entrante que viene por detrás de la discontinuidad siguiéndola, dado por T_-^{0r} , y también hay un flujo saliente debido al flujo empujado por delante de la discontinuidad (por ejemplo, en deflagraciones), dado por T_+^{0r} . Por lo tanto, una energía neta $(T_-^{0r} - T_+^{0r})\mathcal{A}\Delta t$ estaría entrando a ese volumen de plasma a menos que una parte de esta cantidad se acumule en la pared. Siempre, el cambio de energía del plasma en un volumen $\mathcal{A}\Delta r$ está dado por $(T_-^{00} - T_+^{00})\mathcal{A}v_*\Delta t$. Para una discontinuidad en estado estacionario no se acumula energía en la misma y el balance da

$$T_-^{0r} - T_+^{0r} = (T_-^{00} - T_+^{00})v_*. \quad (2.71)$$

Similarmente, considerando al densidad de momento T^{r0} y el flujo de momento T^{rr} ,

⁵⁶El siguiente razonamiento también puede hacerse, dado un cierto sistema inercial, considerando a cada instante un volumen infinitesimal móvil con velocidad constante que contiene a la discontinuidad (en ese instante), con caras planas paralelas a la superficie de la discontinuidad. La única consideración adicional es tener en cuenta que el flujo efectivo que atraviesa cada una de esas caras tiene un aporte adicional debido a su propio movimiento.

se obtiene

$$T_-^{rr} - T_+^{rr} = (T_-^{r0} - T_+^{r0})v_*. \quad (2.72)$$

Notar, por el camino considerado en la deducción, que estos resultados son válidos para cualquier sistema de referencia inercial, no solo respecto al centro de la burbuja. Si se está en un régimen estacionario, la discontinuidad se mueve con velocidad constante, y existe un sistema inercial donde dicha velocidad es nula (el sistema propio). En tal sistema las ecuaciones (2.71) y (2.72) se reducen a $T_-^{0r} = T_+^{0r}$ y $T_-^{rr} = T_+^{rr}$ respectivamente. Es decir, se obtienen las condiciones de continuidad que conducen a las ecuaciones expresadas en la sección 2.4.3.

Se pueden trabajar estas expresiones para el caso particular en que la discontinuidad considerada es la pared de la una burbuja detonante. En tal situación se tiene que $v_* = v_w$, $\tilde{v}_+ = 0$ (sección 2.5.4.1) y $\tilde{v}_- > 0$. Teniendo en cuenta esto en la expresión (2.10) para el tensor de energía-momento de fluido a cada lado de la pared, se tiene que en el sistema del centro de la burbuja

$$T_+^{00} = e_+, \quad T_+^{0r} = T_+^{r0} = 0, \quad T_+^{rr} = P_+, \quad (2.73)$$

y

$$T_-^{00} = w_- \tilde{\gamma}_-^2 - P_-, \quad T_-^{0r} = T_-^{r0} = w_- \tilde{\gamma}_-^2 \tilde{v}_-, \quad T_-^{rr} = w_- \tilde{\gamma}_-^2 \tilde{v}_-^2 + P_-. \quad (2.74)$$

Insertando las ecuaciones (2.73-2.74) en (2.71-2.72), se obtiene el sistema de ecuaciones

$$w_-(v_w - \tilde{v}_-) = (P_- + e_+)v_w(1 - \tilde{v}_-^2), \quad (2.75)$$

$$w_-(v_w - \tilde{v}_-)\tilde{v}_- = (P_- - P_+)(1 - \tilde{v}_-^2), \quad (2.76)$$

del cual fácilmente se obtiene

$$\tilde{v}_- v_w = \frac{P_- - P_+}{e_+ + P_-}, \quad \frac{\tilde{v}_-}{v_w} = \frac{e_- - e_+}{e_- + P_+}. \quad (2.77)$$

Estas expresiones son análogas, pero diferentes, a las (2.54) para $v_+ = -v_w$ y v_- en el sistema de referencia de la pared detonante.

Ya que las variables w , P , e y T están relacionadas por la ecuación de estado, las ecuaciones (2.77) pueden resolverse para, por ejemplo, w_- y \tilde{v}_- como funciones de w_+ y v_w . También se podrían obtener las ecuaciones análogas a las (2.63-2.64)⁵⁷ y ver que las derivadas $\partial w_- / \partial v_w|_{T_+}$ y $\partial \tilde{v}_- / \partial v_w|_{T_+}$ divergen para v_w tal que

$$\frac{v_w - \tilde{v}_-}{1 - v_w \tilde{v}_-} = c_-, \quad (2.78)$$

que es equivalente a $v_- = \mu(v_w, \tilde{v}_-) = -c_-$, la condición para que la detonación sea de Jouget. Luego, en detonaciones débiles, \tilde{v}_- tiene un máximo para el punto de Jouget y el proceso se vuelve más débil, es decir, \tilde{v}_- decrece, para velocidades de pared más grandes (ver también las secciones 2.5.4.1 y 3.4.1). En el límite $v_w \rightarrow 1$, las ecuaciones (2.77) tienden a

$$e_- - P_- = e_+ - P_+, \quad \tilde{v}_- = \frac{P_- - P_+}{e_+ + P_-} = \frac{e_- - e_+}{e_+ + P_-}. \quad (2.79)$$

⁵⁷Esto puede hacerse diferenciando las ecuaciones (2.75-2.76) para un dado T_+ fijo y usando la relación $dP_- = dw_- / (1 + c_-^2)$.

La primera de estas ecuaciones da la temperatura T_- como función de T_+ y la segunda da la velocidad del fluido detrás de la interfaz, ambas para una solución estacionaria ultra relativista. Además, puesto que dicha solución es caso límite de una detonación débil, la cual no tiene frente de choque (sección 2.5.4.1), se cumple que $T_+ = T_N$.

2.6.3. Condición de empalme en pared *runaway*

Previamente solo se consideró el régimen estacionario, es decir, velocidad de pared constante. En general puede tenerse una pared acelerada. En tal caso se debe tener presente que una parte de la energía se acumula en la pared [105]. En el tiempo Δt , una cantidad de energía $\mathcal{A} \Delta \sigma$ se acumula en la superficie de la interfaz de área \mathcal{A} , donde σ es la densidad superficial de energía. Entonces, el balance de energía [análogo a (2.71)] en este caso da

$$T_-^{0r} - T_+^{0r} = (T_-^{00} - T_+^{00})v_w + \frac{d\sigma}{dt}. \quad (2.80)$$

Similarmente, como el momento de un elemento de pared está dado por $\mathcal{A} \sigma v_w$ (ver sección 2.3), se tiene

$$T_-^{rr} - T_+^{rr} = (T_-^{r0} - T_+^{r0})v_w + \frac{d(v_w \sigma)}{dt}. \quad (2.81)$$

Luego de cierto período de tiempo (generalmente corto), la pared acelerada alcanza una velocidad terminal o continúa acelerando indefinidamente tendiendo a velocidades ultra relativistas. El régimen de aceleración ultra relativista es similar al de estado estacionario en el sentido que la velocidad de la pared es esencialmente constante, $v_w \simeq 1$ (aunque γ_w y σ varían). En este límite se tiene

$$\frac{d\sigma}{dt} \approx \frac{d(v_w \sigma)}{dt} = F_{\text{net}}, \quad (2.82)$$

donde F_{net} es la fuerza neta por unidad de área actuando sobre la pared, acorde a la definición (2.19) que en límite relativista toma la forma (2.34). Insertando las ecuaciones (2.73-2.74) en (2.80-2.81) se obtiene

$$e_- - P_- = e_+ - P_+ - 2F_{\text{net}}, \quad \tilde{v}_- = \frac{w_- - w_+}{w_- + w_+}. \quad (2.83)$$

Para $F_{\text{net}} = 0$, las ecuaciones (2.83) coinciden con las del caso de detonación ultra relativista, de la ecuación (2.79). De las ecuaciones (2.83) se pueden obtener la temperatura T_- y la velocidad \tilde{v}_- como funciones de F_{net} y T_+ . Se ve que, para una fuerza neta constante, \tilde{v}_- y T_- son constantes, como en el caso estacionario.

2.7. El *Bag* y los factores de eficiencia

En la sección 1.3 se exponen los resultados de teoría de campos a temperatura finita que permiten obtener la ecuación de estado en cada fase. Como se explica en la sección 1.2.3.2, con esa forma explícita de la densidad de energía libre \mathcal{F} se pueden calcular todas las magnitudes útiles para el estudio de la hidrodinámica durante la nucleación

y expansión de burbujas de fase. Pero por conveniencia de cálculo o para realizar un tratamiento semi-analítico donde aún pueda hacerse un seguimiento de las distintas dependencias, la ecuación de estado debe ser simplificada. La información distintiva propia a cada modelo considerado de Física de altas energías (teoría de campos) sobrevive en los parámetros de los cuales depende la ecuación de estado simplificada. Estos aún pueden ser calculados correctamente a partir de la teoría de campos. Incluso recalculados paso a paso si numéricamente se sigue la expansión de las burbujas.

En esta sección se expresa la ecuación de estado del *Bag*, de amplia utilización en la bibliografía especializada, así como la definición de los factores de eficiencia, los cuales son de gran importancia para el cálculo de ondas gravitatorias.

2.7.1. Ecuación de estado del *Bag*

Una aproximación simple para la ecuación de estado en cada fase es dada por el modelo del *Bag* donde densidad de energía, entalpía y presión suelen escribirse como⁵⁸

$$e_{\pm} = a_{\pm} T^4 + \varepsilon_{\pm}, \quad P_{\pm} = \frac{1}{3} a_{\pm} T^4 - \varepsilon_{\pm}, \quad w_{\pm} = \frac{4}{3} a_{\pm} T^4 \quad (2.84)$$

donde todas estas expresiones corresponderían a las derivadas a partir de una energía libre de la forma

$$\mathcal{F}_{\pm}(T) = -\frac{1}{3} a_{\pm} T^4 + \varepsilon_{\pm} \quad (2.85)$$

Esta ecuación de estado está basada en el modelo del *Bag* para hadrones⁵⁹. Físicamente, en la transición de fase de la escala QCD, la aproximación representada por la ecuación (2.85) corresponde a suponer que las dos fases consisten de un gas de partículas sin masa, cada una con diferente número (y tipos) de especies de partículas (como quarks y gluones en la fase “+”, y piones en la fase “-”). Estos números de grados libertad son proporcionales a las constante a_{\pm} .

Con el objetivo de simplificar el tratamiento de la hidrodinámica, la ecuación del *Bag* suele ser considerada como una aproximación que describe transiciones de fase a altas energías en general, incluida la transición electrodébil (ver, por ejemplo, [6, 97, 112, 118, 122]). Esta ecuación de estado puede ser interpretada del siguiente modo. Para $T > T_c$, el sistema está en un falso vacío y se tiene un cierto número de grados de libertad asociados a partículas sin masa. Por lo tanto, se tiene una densidad de energía de vacío ε_+ y una densidad de energía de radiación $a_+ T^4$. En $T = T_c$, un número de grados de libertad (proporcional a $\Delta a = a_+ - a_-$) repentinamente se vuelven muy masivos y desaparecen del plasma. Al mismo tiempo, es liberada una densidad de energía de falso vacío $\Delta\varepsilon = \varepsilon_+ - \varepsilon_-$. Inmediatamente se aprecia que el calor latente, dado por la definición (1.14), aquí es $L = 4\Delta\varepsilon$.

⁵⁸Aunque no están expresadas en su variables naturales, pero sí en las de \mathcal{F} de la cual pueden derivarse todas ellas. La variable natural de e es s , pero puede ponerse en función de la temperatura con una relación biunívoca, $T \propto s^{1/3}$.

⁵⁹El nombre viene de la referencia [120], donde suponen una región del espacio a la que llaman “*Bag*” (“Bolsa” en inglés), que es capaz de contener campos hadrónicos y tiene una energía potencial por unidad de volumen constante, y que aquí corresponde al término constante en la ecuación de estado (2.84-2.85). Esa descripción ha sido usada para describir una transición de fase que inicialmente se supuso de primer orden en la escala de QCD (quark-hadron), aunque posteriormente cálculos en *lattice* [121] muestran que es de hecho un *crossover* (orden superior).

2.7.2. Uso del *Bag*

Es claro que, este tipo de aproximación, solo sirve para describir cada fase, pero de ninguna manera para describir lo que pasa dentro de la pared, ni en el ritmo de nucleación. En esta sección, se discute cómo pueden aproximarse modelos realistas, en cada fase, utilizando la ecuación de estado del *Bag*. Para eso es necesario identificar la adecuada forma de parametrizar resultados hidrodinámicos obtenidos con el *Bag* en función de magnitudes termodinámica que tengan una clara interpretación en cualquier modelo. De ese modo, se calculan dichas magnitudes usando la ecuación de estado correcta (forma explícita de \mathcal{F}) y se las usa para evaluar los resultados obtenidos considerando el *Bag*.

2.7.2.1. Parametrización del *Bag*

La ecuación de estado del *Bag* ha sido frecuentemente usada como una aproximación para los modelos realistas. En general, se espera que la fase “+” se aproxime muy bien con el *Bag*. Por ejemplo, en (1.44-1.45) se ve que $\mathcal{F}_+ = \mathcal{F}(\phi = 0) = -\frac{\pi^2}{90}g_*T^4 + \rho_{fv}$. En cambio la ecuación de estado real en la fase de simetría rota (fase “-”) no es de la forma (2.85), al utilizarse resultados de consideraciones hidrodinámicas hay alguna ambigüedad en la definición de los parámetros ε_- y a_- .

Los resultados de cálculos, usando la ecuación del *Bag*, generalmente dependen de la diferencia $\Delta\varepsilon = \varepsilon_+ - \varepsilon_-$. Algunas formas de realizar el ajuste de este parámetro son:

- * En general para cualquier modelo que se desee aproximar se podría ajustar $\varepsilon_{\pm} = e_{\pm}|_{T=0} = \mathcal{V}_{\text{ef}}(\phi_{\pm})$ e interpretarla como la energía de vacío o falso vacío (mínimo local no absoluto asociado a la fase considerada). Entonces la densidad de energía de vacío liberada en la transición de fase puede evaluarse del potencial efectivo a temperatura cero como $\Delta\varepsilon = \mathcal{V}_{\text{ef}}(\phi_+(T)) - \mathcal{V}_{\text{ef}}(\phi_-(T))$ (donde usualmente, por simetría, corresponde $\phi_+ = 0$), aunque el mínimo ϕ_{\pm} , como depende de la temperatura, debería aproximarse en torno a alguna temperatura como la crítica T_c o, mejor aún, la de nucleación T_N . A pesar de que la cantidad $\mathcal{V}_{\text{ef}}(\phi_{\pm}(T))$ generalmente no se comporta como una densidad de energía de vacío (depende de T), la cantidad $\Delta\varepsilon$ representa la energía de vacío liberada a la temperatura T (de un total $\mathcal{V}_{\text{ef}}(0) - \mathcal{V}_{\text{ef}}(v) = \rho_{fv} - 0$).
- * Para la ecuación de estado del *Bag* se tiene la relación $L = 4\Delta\varepsilon$. Entonces, alternativamente se podría definir la constante del *Bag* como $\Delta\varepsilon = L/4$, con $L = e_+(T_c) - e_-(T_c)$ calculada con el potencial efectivo realista, de modo que la aproximación del *Bag* da el valor correcto del calor latente. Notar que para un modelo general se tendría $e_+(T_c) - e_-(T_c) \neq 4(\mathcal{V}_{\text{ef}}(\phi_+) - \mathcal{V}_{\text{ef}}(\phi_-))$, y no se pueden ajustar las dos cantidades con la ecuación de estado del *Bag*.
- * En las referencias [90, 91, 112] se propone tomar $\varepsilon_{\pm} = (e_{\pm} - 3P_{\pm})/4$, lo cual se satisface para la ecuación de estado del *Bag*. Esto da $\Delta\varepsilon = (\Delta e - 3\Delta P)/4$, con $\Delta e = e_+ - e_-$ y $\Delta P = P_+ - P_-$. Para un modelo general, la cantidad $\Delta\varepsilon$ así definido depende de la temperatura. En $T = T_c$ se tiene $P_- = P_+$ y, así, $\Delta\varepsilon = \Delta e/4 = L/4$, mientras que en $T = 0$ se tiene $e_{\pm} = -P_{\pm}$ y, así, $\Delta\varepsilon = \Delta e = \mathcal{V}_{\text{ef}}(\phi_+(0)) - \mathcal{V}_{\text{ef}}(\phi_-(0)) = \rho_{fv}$. Entonces, para una transición de fase con poco sobreenfriamiento (es decir, $T \simeq T_c$), definiendo $\Delta\varepsilon$ por este camino se tendría una ecuación de estado del *Bag* con el mismo calor latente que en el

modelo real, mientras que en una transición de fase con fuerte sobreenfriamiento (es decir, $T \ll T_c$), esta definición de $\Delta\varepsilon$ daría el valor correcto de la diferencia de densidad de energía de vacío.

Para elegir una de estas definiciones del parámetro del *Bag* $\Delta\varepsilon$, se necesita considerar cual de estas cantidades (el calor latente o la densidad de energía de vacío) es más relevante para la dinámica. El calor latente representa la energía que es liberada por el frente de transición a temperatura crítica, mientras que la diferencia de energía de vacío se libera a temperatura cero. El calor latente recalienta el plasma, lo cual afecta significativamente el movimiento de la pared si T es cercano a T_c pero no para $T \ll T_c$. Por otro lado, la diferencia $\mathcal{V}_{\text{ef}}(\phi_+) - \mathcal{V}_{\text{ef}}(\phi_-)$ da la fuerza neta que comanda el movimiento de la pared en $T = 0$ y es así relevante para el caso de gran sobreenfriamiento. Como aquí se consideran transiciones de fase con diferentes cantidades de sobreenfriamiento, es conveniente adoptar el último de los ajustes que se sugieren para la constante del *Bag*, a saber,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\pm} &= (e_{\pm} - 3P_{\pm})/4 \\ \Rightarrow \Delta\varepsilon &= (\Delta e - 3\Delta P)/4,\end{aligned}\tag{2.86}$$

donde se computa $e_{\pm} = \mathcal{F}_{\pm} - Td\mathcal{F}_{\pm}/dT$ y $P_{\pm} = -\mathcal{F}_{\pm}$ con el \mathcal{F} de un modelo realista. Para fijar un valor constante, cuando ese ajuste es bueno debería ser buena aproximación evaluar a una temperatura de nucleación $T = T_N$ en un rango de $T(t_i)$ a $T(t_p)$ ⁶⁰, que para transiciones poco sobre enfriadas es $\approx T_c$.

Igualmente, no hay un único modo de ajustar la constante efectiva de radiación a_{\pm} . Algunas de las más frecuentes formas de hacerlo son las siguientes:

- * Habiendo definido ε_{\pm} , se podría definir una densidad de energía *térmica* como $e_{R\pm}(T) \equiv e_{\pm}(T) - \varepsilon_{\pm}$ [19] (La “*R*” es porque en el *Bag* coincide con el término de radiación), y aproximar la “constante de radiación” como $a_{\pm} = e_{R\pm}/T^4$.
- * Para la ecuación de estado del *Bag* se tiene la relación $\Delta a T_c^4/3 = \Delta\varepsilon$. Así, si se usa la definición $\Delta\varepsilon = L/4$, se puede también definir $\Delta a = 3L/(4T_c^4)$.
- * Se puede definir la constante de radiación con la densidad de entalpía [112], $a_{\pm} = 3w_{\pm}/(4T_{\pm}^4)$ (que en $T = T_c$ coincide con la definición anterior). A un dado T esta definición, junto con aquella que se adopta para ε_{\pm} en la expresión (2.86), permite descomponer la presión y densidad de energía realistas en la forma del *Bag* $P_{\pm} = -\varepsilon_{\pm} + a_{\pm}T_{\pm}^4/3$, $e_{\pm} = \varepsilon_{\pm} + a_{\pm}T_{\pm}^4$ (con ε_{\pm} y a_{\pm} dependientes de T).

Resulta entonces más adecuada (y englobadora) la tercer forma de ajuste, tomando

$$a_{\pm} = 3w_{\pm}/(4T_{\pm}^4)\tag{2.87}$$

donde se computa $w_{\pm} = -Td\mathcal{F}_{\pm}/dT$ con el \mathcal{F} de un modelo realista y, para fijar un valor constante, cuando ese ajuste es adecuado debería ser buena aproximación evaluar a una temperatura de nucleación $T = T_N$ en un rango de $T(t_i)$ a $T(t_p)$.

⁶⁰Si se sigue la evolución de la transición en cada paso de tiempo se puede realizar el ajuste en función de la T_N en ese momento.

2.7.2.2. Variable $\alpha(T)$

Evidentemente, los resultados hidrodinámicos pueden expresarse en función de los parámetros libres del *Bag* y de la temperatura. En varios resultados estos elementos aparecen conjuntamente de forma que constituyen una única variable térmica la cual relaciona densidades de energía. Es decir, naturalmente aparece una variable que contiene toda la dependencia en la temperatura y la información ajustable del modelo. Entonces, en aquellos resultados, en vez de ajustar los parámetros del *Bag* usando (2.86) y (2.87) se puede directamente ajustar esa variable (pero manteniendo un criterio similar). Históricamente, se toma como definición de esa variable

$$\alpha(T) \equiv \frac{\Delta\varepsilon}{a_+ T^4}. \quad (2.88)$$

Dependiendo de la forma en que se ajusten los parámetros del *Bag*, se le puede dar a esta variable diferente interpretación desde el punto de vista de una ecuación de estado general. Por ejemplo, **en el *Bag*** siempre se la podría reescribir como

$$\alpha(T) = \frac{\Delta\varepsilon}{e_{R+}(T)}, \quad (2.89)$$

o bien

$$\alpha(T) = \frac{L}{4 e_{R+}(T)}, \quad (2.90)$$

o bien

$$\alpha(T) = \frac{L}{3 w_+(T)}. \quad (2.91)$$

Tomando siempre (2.88) como la referencia, la expresión (2.89) sería consistente con el ajuste $\varepsilon_{\pm} = \mathcal{V}_{\text{ef}}(\phi_{\pm})$ y $a_+ = (e_+ - \varepsilon_+)/T^4 = e_{R+}/T^4$. Si se considera la expresión (2.90), que podría corresponder a la asignación $\varepsilon_- = 0$, $\Delta\varepsilon = \varepsilon_+ = L/4$, se tiene una forma de calcular esta variable en cualquier modelo. No obstante, e_{R+} puede diferir considerablemente de un término de radiación y no tiene una interpretación clara. A su vez la magnitud (2.91) parece tener la más clara interpretación física en cualquier modelo, esto sugiere que quizás convendría expresar

$$\alpha(T) = \alpha_c \left(\frac{T_c}{T} \right)^4 \quad (2.92)$$

$$\alpha_c = \frac{L}{3 w_+(T_c)},$$

pues los parámetros L y $w_+(T_c)$ están claramente definidos en cualquier modelo, además de la cantidad de sobreenfriamiento T/T_c . Para esta forma de expresar α , cuando $T_N \approx T_c$ es consistente con los ajustes que establecen las expresiones (2.86-2.87). Si se toman esos ajustes a cualquier temperatura [como funciones $\varepsilon_{\pm}(T)$ y $a_{\pm}(T)$] y se los reemplaza en la definición (2.88), se tiene la generalización

$$\alpha(T) = \frac{\Delta e(T) - 3\Delta P(T)}{3 w_+(T)}, \quad (2.93)$$

donde todas las magnitudes involucradas se deben calcular a partir del \mathcal{F} de un modelo

realista. En cualquier resultado hidrodinámico obtenido mediante la ecuación de estado del *Bag* puede reemplazarse cada aparición de α por la expresión (2.93).

En los cálculos numéricos que se realizan en esta tesis, siguiendo la evolución de la transición, se reajustan instante a instante los parámetros del *Bag* ε y a con (2.86-2.87) para la temperatura $T = T_N$ que tiene el universo en ese momento lo cual es equivalente a evaluar (2.93) instante a instante con esa temperatura.

Si el modelo realista está bien aproximado por la ecuación de estado del *Bag*, todas estas formas de interpretar y ajustar α (o de ajustar los parámetros del *Bag*) no conducen a resultados significativamente diferentes. En distintas publicaciones fuimos progresivamente adaptando la definición adoptada hasta converger a la que se expone aquí. En general las asignaciones que hemos tomado, en los rangos de validez que hemos considerado, resultan ser compatibles con las dadas en las expresiones (2.86, 2.87, 2.93). En aquellos puntos de esta tesis, donde se exponen resultados evaluados para modelos realistas, se señala explícitamente qué definición se tuvo en cuenta en la publicación asociada.

A lo largo de esta tesis aparecen valuaciones a distintas temperaturas que se denotan como $\alpha_+ \equiv \alpha(T_+)$, $\alpha_1 \equiv \alpha(T_1)$, $\alpha_2 \equiv \alpha(T_2)$, $\alpha_c \equiv \alpha(T_c)$, $\alpha_N \equiv \alpha(T_N)$, etc.

2.7.3. Factores de eficiencia

Como se ve en la sección 1.5.3, los cálculos de ondas gravitatorias conducen a expresiones que pueden ponerse en función de la energía acumulada donde el campo varía (la pared) o donde hay movimientos masivos de fluido. Esa energía, para el campo escalar, corresponde a la integración de $(\partial_r \phi)^2$. Como también se menciona en la sección 1.5.3, históricamente primero se estudió la transición de fase de vacío, donde la fuente de OG se concentra en la pared de burbuja y la energía total de la pared corresponde a la energía total de vacío liberada por la burbuja [62], es decir, $E_w = 4\pi \int dr r^2 (\partial_r \phi)^2 = \Delta \varepsilon V_b$, siendo el volumen de la burbuja $V_b = 4\pi t^3/3$. Para una transición de fase térmica, una parte de la energía que se libera en la transición va a parar a recalentamiento del plasma y a movimientos masivos de fluido. En un régimen estacionario la energía almacenada en la pared es despreciable y solo es relevante la energía de movimiento del fluido. Esta última se expresa como una fracción de la energía total que se hubiera aprovechado en una transición de vacío, $E_{fl} = \kappa_{fl} \Delta \varepsilon V_b$, siendo el volumen de la burbuja $V_b = 4\pi v_w^3 t^3/3$ y el *factor de eficiencia* κ_{fl} es la fracción de energía de vacío liberada que va a parar a movimientos de fluido. En el caso de paredes *runaway* se tiene $v_w \approx 1$ como en una transición de vacío. Para una pared *runaway*, una importante fracción de la energía liberada (pero no toda) va a la pared de la burbuja, es decir, una cantidad $E_w = \kappa_w \Delta \varepsilon V_b$, con un factor de eficiencia κ_w . El resto de la energía de vacío va a recalentamiento y a movimientos de fluido. Entonces, si hay un delgado “casarón” de fluido en movimiento avanzando con la pared, la cantidad relevante para la generación de OG es $E_w + E_{fl} = (\kappa_w + \kappa_{fl}) \Delta \varepsilon V_b$.

2.7.3.1. Factor de eficiencia hidrodinámico tradicional

Al encontrarse porciones de plasma aceleradas por el crecimiento de diferentes burbujas, se pueden alcanzar configuraciones en las que ya no es buena aproximación considerar al fluido como ideal y, teniendo en cuenta la viscosidad del plasma, es posible que se desarrolle un régimen turbulento. Se espera que la energía de porciones

macroscópicas de fluido puestas en movimiento por el avance de la pared de burbuja sea esencialmente la que va a parar a los procesos turbulentos. Por ese motivo, directamente del estudio de la hidrodinámica involucrada en la expansión de una sola burbuja (considerando fluido ideal en esa etapa), se puede estimar cuánta energía contribuye a la turbulencia.

La densidad de energía del fluido ideal está dada por la componente 00 del tensor de energía-momento que en el caso de la expresión (2.10) puede descomponerse de varias formas:

$$T^{00}(v) = w\gamma^2 - P = (e + Pv^2)\gamma^2 = e + wv^2\gamma^2 \quad (2.94)$$

La cantidad que aparece en el último término,

$$e_v = w\gamma^2 v^2 \quad (2.95)$$

es esta expresión la que se vuelve relevante para el cálculo de ondas gravitatorias. Concretamente $E_{\text{fl}} \equiv E_v$, donde $E_v \equiv \int e_v$ es la integral en el volumen donde el plasma se encuentra perturbado. Como se tiene $T^{00}(v=0) = e$, se puede escribir

$$e_v = T^{00}(v) - T^{00}(0) \quad (2.96)$$

En consecuencia, es frecuente asociar esta cantidad a la densidad de energía cinética en movimientos macroscópicos de fluidos (ver, por ejemplo, [6, 112, 123]). Sin embargo, como lo hacemos en nuestra publicación [3], es importante mencionar que, en el límite no-relativista (es decir, un fluido con constituyentes microfísicos no-relativistas y baja velocidad macroscópica $v \ll 1$), la cantidad e_v se vuelve ρv^2 en vez de $\frac{1}{2}\rho v^2$. Por otro lado, es bien sabido [92, 93] que la densidad de energía total $T^{00}(v)$ da el valor límite esperado $\rho + \frac{1}{2}\rho v^2$, donde ρ es la densidad de masa en el sistema de referencia del “laboratorio”⁶¹. Esta discrepancia se debe a que e_v se obtiene como la *diferencia* de dos *densidades* de energía. Considerando un dado elemento de fluido el cual tiene un volumen $V(0)$ cuando está en reposo y un volumen $V(v)$ cuando se mueve con velocidad v , si se define la energía cinética de este elemento de fluido como $E_{\text{kin}} = E(v) - E(0) = T^{00}(v)V(v) - T^{00}(0)V(0)$, entonces se podría tomar como densidad de energía cinética a $e_{\text{kin}} = E_{\text{kin}}/V(v) = T^{00}(v) - \gamma T^{00}(0)$, que da el límite no-relativista correcto⁶². No obstante, trabajar con una densidad que involucra dos volúmenes diferentes no es del todo cómodo tampoco. Como la ecuación (2.94) suministra una descomposición natural de la densidad de energía en un término independiente de la velocidad [la densidad de energía interna $e(T)$] y otro que se anula para $v = 0$ [dado por e_v], en el contexto relativista e_v parece más apropiada para cuantificar el aporte asociado al movimiento macroscópico. No es un abuso de lenguaje excesivo decir directamente que e_v es la *densidad de energía cinética* del fluido, y que su integración volumétrica E_v es la *energía cinética* del fluido en el volumen de integración. En cualquier caso, sea o no conceptualmente correcto identificarlo con la energía cinética, en general el espectro

⁶¹En (2.94) y (2.95) se debe tener en cuenta que la densidad de energía interna coincide con la densidad de masa propia $e = \rho_p = \rho/\gamma$, donde ρ es la densidad de masa en el sistema de laboratorio. En el límite con velocidad no relativista se preserva solo hasta orden cuadrático en v y la microfísica no relativista implica $P + \rho \approx \rho$. Otra forma es tomar el límite por partes, considerando primero $P/e \ll 1$, luego expresar en función de ρ y finalmente tomar el límite para v pequeño.

⁶²Se puede ver que en referencias como [10] y [68], implícitamente se usa la definición $e_{\text{kin}} = \frac{1}{2}wv^2\gamma^2$, que también da el límite correcto y es proporcional a e_v . Más aún, en realidad eluden toda esta discusión porque simplifican los cálculos tomando $\gamma \approx 1$.

de onda gravitatoria depende de esta magnitud (ver sección 1.5.3). Lo relevante es que quede clara su definición matemática, para aplicar correctamente cualquier resultado donde aparezca.

Entonces, los distintos resultados de cálculos para generación de ondas gravitatorias donde aparece E_v suelen expresarse en función del *factor de eficiencia*, que relaciona la energía cinética del fluido luego de la transición con la energía de vacío liberada. Considerando una burbuja de volumen V_b en torno a la cual⁶³ hay una energía cinética neta E_v , el factor de eficiencia se define como [6]

$$\kappa_{\text{fl}} = \frac{E_v}{\Delta\varepsilon V_b}. \quad (2.97)$$

Si bien esta es la definición del factor de eficiencia, a continuación se lo reescribe en una forma más conveniente para su cálculo en función de los perfiles de fluido, válida con los regímenes estacionario y *runaway*. En la sección 2.6.1 se muestra que el régimen *runaway* está esencialmente descrito por las mismas ecuaciones de perfil que en los casos de expansión estacionaria pero tomando $v_w \approx 1$, en consecuencia para reescribir κ_{fl} basta considerar la pared avanzando a una velocidad constante⁶⁴ y la validez de la condición de similaridad (introducida en la sección 2.4.1). A tiempo t desde la nucleación, la pared moviéndose con velocidad v_w se encuentra a una distancia $R_b = v_w t$ de un punto, eje, o plano de simetría *central*, y el volumen de la burbuja es de la forma $V_b = c_j R_b^{j+1} / (j+1)$, donde $j = 0, 1$, o 2 para el caso plano, cilíndrico o esférico respectivamente (El factor c_j se cancela en los siguientes cálculos). Integrando (2.95) en el volumen con la simetría correspondiente, se obtiene la “energía cinética” de porciones macroscópicas de fluido $E_v = c_j \int_0^\infty w v^2 \gamma^2 r^j dr$, donde r es la coordenada “radial”. Como vale la condición de similaridad cada punto de los perfiles de fluido avanza también con velocidad constante. Entonces se puede escribir el factor de eficiencia

$$\kappa_{\text{fl}} = \frac{j+1}{\Delta\varepsilon v_w^{j+1}} \int_0^1 w v^2 \gamma^2 \xi^j d\xi \quad (2.98)$$

donde $\xi = r/t$ queda como variable muda de integración⁶⁵. Notar que κ_{fl} no depende de t . El parámetro κ_{fl} definido en la expresión (2.97), o la (2.98) más práctica para cálculos, es el que históricamente se consideraba en la bibliografía especializada para expresar E_v , que a su vez luego se utiliza para cálculos de ondas gravitatorias.

⁶³Ese entorno puede ocupar un volumen mayor a V_b si el frente de transición empuja fluido en la fase “+”, como es en el caso de las deflagraciones. En tal situación E_v se obtiene integrando en ese volumen extendido.

⁶⁴En una situación realista incluso luego de alcanzar un régimen estacionario la velocidad de la pared puede variar debido al enfriamiento del universo y a la liberación de calor latente [98, 124, 125]. En este trabajo se considera esa variación al calcular el desarrollo de la transición en el capítulo 4. Sin embargo, se calcula κ_{fl} a un dado momento “final” de la transición (el tiempo de percolación t_p), para usar los resultados de OG. Además en ese cálculo de κ_{fl} se supone $v_w = cte$ para obtener resultados analíticos utilizables.

⁶⁵Además en la integración $\xi \leq 1$ por que razonablemente se supone un soporte compacto para $v(r)$ a todo t y ningún punto (dado por r) de ese perfil puede avanzar más rápido que la luz.

2.7.3.2. Factor de eficiencia hidrodinámico alternativo

Reproduciendo también aquí parte de la discusión que hacemos en nuestra publicación [3], es importante señalar que suele interpretarse mal el factor κ_{fl} . Esto no implica necesariamente que se obtienen resultados incorrectos, siempre que la cantidad $\kappa_{\text{fl}} \Delta\varepsilon$ sea correctamente usada en los cálculos de, por ejemplo, ondas gravitatorias. De acuerdo con la ecuación (2.97), el factor κ_{fl} da el cociente entre la energía cinética y la energía de vacío liberada. La energía de vacío suele confundirse con la energía total disponible o el calor latente (ver, por ejemplo, la referencia [6]). En consecuencia, κ_{fl} es generalmente interpretada como la fracción de energía liberada que va a parar a la energía cinética macroscópica del fluido, y una fracción $1 - \kappa_{\text{fl}}$ se supone que va a parar a energía térmica (ver, por ejemplo, [112]). Sin embargo, $\Delta\varepsilon V_b$ no es la energía total liberada en la transición de fase, pues la energía interna del sistema no está constituida únicamente por energía de vacío. Por ejemplo, para la aproximación del *Bag*, el calor latente $L \equiv e_+(T_c) - e_-(T_c)$ está dado por $L = 4\Delta\varepsilon$, es decir, la energía liberada en $T = T_c$ es bastante más grande que $\Delta\varepsilon V_b$. Entonces, la proporción de energía que va a incrementar la energía interna será más grande que $1 - \kappa_{\text{fl}}$.

Una definición más apropiada para el factor de eficiencia sería tal vez $\kappa_{\text{fl}} \rightarrow E_v/(L V_b)$. Sin embargo, la transición de fase no ocurre exactamente en $T = T_c$ pues siempre hay cierta cantidad de sobreenfriamiento. A una temperatura $T_N < T_c$, la diferencia de energía entre las dos fases está dada por

$$\Delta e_N = e_+(T_N) - e_-(T_N) \quad (2.99)$$

más que por $L = e_+(T_c) - e_-(T_c)$. Aunque la temperatura T_N es en muchos casos muy cercana a T_c , para una transición de fase extremadamente sobreenfriada ocurriendo en $T_N = 0$ se tendría $\Delta e_N = \Delta\varepsilon$. Para una burbuja expandiéndose en $T = T_N$, se puede suponer que la energía liberada está dada por $\Delta e_N V_b$.

En la práctica, la temperatura en la fase “-” nunca está dada por la temperatura T_N , pues la energía que es liberada durante la conversión de fase en torno a la pared de burbuja causa recalentamiento (en general a ambos lados, dentro y fuera de la burbuja) al igual que movimientos de fluido. En un estado estacionario se tienen perfiles estacionarios para la temperatura y la velocidad del fluido. Así, cuando el volumen de la burbuja cambia un δV_b , la diferencia de energía $\Delta e_N \delta V_b$ va instantáneamente a mantener el perfil del fluido. En lo que sigue se muestra que la energía liberada $\Delta e_N V_b$ naturalmente se separa en la energía E_v y en la cantidad ΔE_r que puede interpretarse como la energía usada para recalentar el plasma.

Se considera conservación de la energía en el volumen V que contiene a la burbuja y la región del fluido siendo perturbada. La energía en ese volumen la da la integral de la ecuación (2.94), $E_f = \int_V e + E_v$, mientras que inicialmente, justo antes de la nucleación, es $E_i = e_+(T_N) V$. Despreciando por simplicidad la pérdida de energía debida a la expansión adiabática del universo, por conservación se tiene que cumplir $E_f = E_i$, lo que conduce a

$$E_v + \int_V [e(T) - e_+(T_N)] = 0 \quad (2.100)$$

De acuerdo con esta ecuación, la integral $\int_V [e(T) - e_+(T_N)]$ es negativa y no puede interpretarse como la energía que va a recalentamiento. Como la ecuación de estado es

diferente en las dos fases, es conveniente separar esta integral,

$$E_v + \int_{V_b} [e_-(T) - e_+(T_N)] + \int_{\bar{V}_b} [e_+(T) - e_+(T_N)] = 0 \quad (2.101)$$

donde V_b y \bar{V}_b son el volumen de la burbuja y su complemento, dentro del volumen total V . La última integral cuantifica la energía usada para cambiar la temperatura desde T_N uniforme a un perfil $T(\vec{r})$ en la fase “+”. Por otro lado, la primer integral no puede interpretarse de este modo, ya que involucra un cambio de fase. Restando y sumando $e_-(T_N)$, se descompone esta integral en $-\Delta e_N V_b + \int_{V_b} [e_-(T) - e_-(T_N)]$. El primero de esos términos puede interpretarse como la energía que el sistema tiene que perder para cambiar la fase en $T = T_N$, mientras que el integrando del segundo cuantifica la densidad energía usada para recalentar el sistema desde T_N uniforme a un perfil $T(\vec{r})$ en el volumen V_b , con fase $-$. Así, la ecuación (2.101) se vuelve

$$E_v + \Delta E_r = \Delta e_N V_b \quad (2.102)$$

donde

$$\Delta E_r = \int_{V_b} [e_-(T) - e_-(T_N)] + \int_{\bar{V}_b} [e_+(T) - e_+(T_N)] \quad (2.103)$$

$$= \int_V [e(T) - e(T_N)] \quad (2.104)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (2.102), en [3] hemos propuesto definir un *nuevo* factor de eficiencia:

$$\tilde{\kappa}_{fl} \equiv \frac{E_v}{\Delta e_N V_b} \quad (2.105)$$

que cuantifica la fracción de energía liberada que va a movimientos masivos de fluido. De la ecuación (2.102) se tiene

$$1 - \tilde{\kappa}_{fl} = \frac{\Delta E_r}{\Delta e_N V_b} \quad (2.106)$$

que puede interpretarse como la fracción de energía liberada que va a parar a recalentamiento⁶⁶. Análogamente a la ecuación (2.98),

$$\tilde{\kappa}_{fl} = \frac{j+1}{\Delta e_N v_w^{j+1}} \int_0^1 w v^2 \gamma^2 \xi^j d\xi \quad (2.107)$$

con el que obviamente también se puede despejar E_v , y que se relaciona con κ_{fl} mediante un factor de proporción $\frac{\Delta e(T_N)}{\Delta \varepsilon}$. A continuación, se expone algún detalle más sobre el contraste entre la interpretación errónea que se le suele dar a κ_{fl} y como $\tilde{\kappa}_{fl}$ sí se ajusta mejor a las expectativas intuitivas.

⁶⁶De acuerdo a la discusión que se desarrolla a continuación de la ecuación (2.95-2.96), podría usarse una densidad de energía cinética alternativa $e_{kin} = w v^2 \gamma^2 + e - \gamma e$, ya que la densidad de energía e corresponde al sistema en reposo del elemento de fluido. Similarmente, se podría usar $\gamma e(T)$ en vez de $e(T)$ en la ecuación (2.104). Esto da una definición alternativa de ΔE_r la cual, junto con $\int e_{kin}$, da una descomposición de $\Delta e_N V_b$ alternativa a la de la ecuación (2.102).

Energía de recalentamiento e interpretación de “ $1 - \kappa_{fl}$ ” vs “ $1 - \tilde{\kappa}_{fl}$ ”

Notar que $\tilde{\kappa}_{fl}$, expresado en (2.105) y (2.107), está bien definida en cualquier modelo, pues la cantidad Δe_N se define sin ambigüedad en cada modelo, en contraste con el parámetro $\Delta\varepsilon$ que solo parece tener una interpretación clara en el modelo del *Bag* y que se define forzosamente en cualquier otro caso. Para la ecuación de estado del *Bag* y para T_N cercano a T_c , se tiene la relación $\tilde{\kappa}_{fl} \simeq \kappa_{fl}/4$ (y $\Delta e_N \simeq L$).

Para el *Bag*, la ecuación (2.100) puede reescribirse en la forma

$$E_v + \int_V \frac{3}{4} [w(T) - w_+(T_N)] = \Delta\varepsilon V_b \quad (2.108)$$

lo cual conduce a [112]

$$1 - \kappa_{fl} = \frac{1}{\Delta\varepsilon V_b} \int_V \frac{3}{4} [w(T) - w_+(T_N)] \quad (2.109)$$

De acuerdo con la discusión previa, la integral en las ecuaciones (2.108) y (2.109) no debería interpretarse como la energía de recalentamiento. De hecho, de acuerdo con la definición dada en (2.103), que en el *Bag* conduce a $\Delta E_r = \int_V \frac{3}{4} [w(T) - w(T_N)]$ (notar la ausencia de un índice + en esta expresión), la expresión (2.106) puede reescribirse en forma similar a la (2.109)

$$1 - \tilde{\kappa}_{fl} = \frac{1}{\Delta e_N V_b} \int_V \frac{3}{4} [w(T) - w(T_N)] \quad (2.110)$$

En la referencia [112] a la integral que aparece en la ecuación (2.109) la escriben como $\int \frac{3}{4} [w(T) - w_+(T_N)] = \int [e(T) - e_+(T_N)]$, la cual es entonces interpretada como el aporte que incrementa la energía térmica. Sin embargo, esta última igualdad **no es correcta** y de todos modos, acorde a la ecuación (2.100), $\int [e(T) - e_+(T_N)] = -E_v < 0$. Debe remarcar que las ecuaciones (2.109) y (2.110) son equivalentes. Las diferencias están en el modo en que la energía es acomodada y en la interpretación. Fuera de la burbuja, los integrandos en las ecuaciones (2.109) y (2.110) coinciden. Dentro de la burbuja, el integrando en la ecuación (2.109) está dado por $\frac{3}{4} [w_-(T) - w_+(T_N)]$, mientras que en la ecuación (2.110) se tiene $\frac{3}{4} [w_-(T) - w_-(T_N)]$. En esta tesis se interpreta a la última como una densidad de energía involucrada en el cambio de temperatura de T_N a T en la fase “-”, y toda la integral en la ecuación (2.110) como la parte de la energía total liberada $\Delta e_N V_b$ que va a parar a recalentamiento.

Dejando de lado esos problemas de interpretación, la cantidad κ_{fl} obtenida usando la ecuación de estado del *Bag* es útil (por ejemplo, para cálculos de ondas gravitatorias) porque es relativamente fácil calcular en función de las cantidades v_w y $\alpha_N = \Delta\varepsilon/(a_+ T_N^4)$. Sin embargo, como se discute en la sección 2.7.2.1 (y más adelante en la 3.2.2.3), la cantidad $\Delta\varepsilon$ no está claramente definida en cualquier modelo general, y debe tenerse cuidado al aplicar los resultados para $\kappa_{fl}(v_w, \alpha_N)$. Por otro lado, la definición (2.105) es tan útil para aplicaciones como la definición en la ecuación (2.97). De hecho, la cantidad E_v se puede obtener tanto de $\kappa_{fl} \Delta\varepsilon V_b$ como de $\tilde{\kappa}_{fl} \Delta e_N V_b$. Para el *Bag*, la relación entre estas cantidades está dada por $\kappa_{fl}/\tilde{\kappa}_{fl} = \Delta e_N/\Delta\varepsilon = 1 + 3T_N^4/T_c^4$.

2.7.3.3. Factor de eficiencia de la pared

Como se expone en la sección 1.5.3, además de los movimientos turbulentos del fluido, hay otro mecanismo posible de generación de ondas gravitatorias, denominado como *colisión de burbujas*. Esencialmente en este la fuente son las paredes de burbujas deformadas durante el encuentro de los frentes de transición. La energía que se atribuye al entorno de la pared es en parte debida al fluido acelerado por esta (que previamente a la colisiones constituye un *cascarón* de dimensiones comparables al radio de la burbuja), y se podría estimar con el factor de eficiencia hidrodinámico igual que para la turbulencia (la cual se desarrollaría completamente un tiempo después). También contribuye a esa fuente la energía superficial σ contenida en el interior de la pared, de espesor microscópico respecto al radio de la burbuja. A temperatura finita, en procesos estacionarios σ es constante y despreciable, pero en transiciones a temperatura cero la pared se movería a la velocidad de la luz y toda la energía liberada se concentraría en un σ creciente. Como caso intermedio, en el régimen *runaway* (ver sección 2.6), una porción de la energía liberada va al σ de la pared acelerada. Este incremento en la concentración de la energía favorece la generación de ondas gravitatorias por *colisiones*. Es útil entonces definir un factor de eficiencia que involucre ese incremento de energía en la pared.

Para ello se debe considerar que el volumen total de la burbuja, V_b , se incrementa una cantidad ΔV_b al mismo tiempo que la energía total contenida en la pared, E_w , se incrementa una cantidad ΔE_w . El factor de eficiencia de la pared se define como

$$\kappa_w \equiv \frac{\Delta E_w}{\Delta \varepsilon \Delta V_b}. \quad (2.111)$$

Notar que, a diferencia de κ_{fl} , este factor de eficiencia no es exactamente una fracción de la densidad de energía de vacío liberada durante todo el crecimiento de la burbuja, sino más bien una fracción de potencia liberada (basta dividir numerador y denominador con el tiempo Δt en que se realizan esos incrementos). No obstante, en caso de expansión a velocidad constante (estacionario) resulta coincidir $\Delta E_w / \Delta V_b = E_w / V_b$. Además, a continuación se muestra que cuando la pared de la burbuja posee velocidad ultra relativista $\Delta E_w / \Delta V_b \propto F_{net}$, entonces, si en la mayor parte de su expansión se encuentra en ese régimen con fuerza neta constante, también $\Delta E_w / \Delta V_b \approx E_w / V_b$.

Considerando un elemento de interfaz delgada (pared) de área $\delta \mathcal{A}$, avanzando a velocidad v_w , en un pequeño intervalo de tiempo Δt la densidad superficial de energía se incrementa en una cantidad $\Delta \sigma$ mientras que el incremento de la energía en ese elemento de pared está dada por $\delta(\Delta E_w) = \Delta \sigma \delta \mathcal{A}$ y corresponde a una fracción de la liberada en la transición de un volumen $\delta(\Delta V_b) = v_w \Delta t \delta \mathcal{A}$. Por lo tanto, $\Delta E_w / \Delta V_b = \delta(\Delta E_w) / \delta(\Delta V_b) = (d\sigma/dt) / v_w$. Y por la expresión (2.19) se tiene

$$\kappa_w = \frac{F_{net} - \frac{dv_w}{dt} \sigma}{\Delta \varepsilon v_w^2} \quad (2.112)$$

que en un régimen estacionario ($F_{net} = 0$ y $\frac{dv_w}{dt} = 0$) se anula y en régimen *runaway* ($v_w \rightarrow 1$ y, por ser temporalmente asintótico, $\frac{dv_w}{dt} \rightarrow 0$) se reduce a

$$\kappa_w \rightarrow F_{net} / \Delta \varepsilon \quad (2.113)$$

donde esa fuerza neta ultra relativista constante viene dada por la expresión (2.34).

Capítulo 3

Hidrodinámica en transiciones de fase: Cálculos numéricos y analíticos

3.1. Contenido del capítulo

El contenido de este capítulo integra análisis y resultados obtenidos en tres trabajos que hemos publicado sobre hidrodinámica de la transición de fase [1, 3, 4]. Con estos se cubren soluciones estables estacionarias y *runaway*, así como discusiones sobre sensibilidad de resultados respecto a geometría de la burbuja o simplificaciones en la dependencia de los parámetros hidrodinámicos.

En la sección 3.2 se discuten las limitaciones de la ecuación de estado del *Bag* y se introduce una generalización de la misma que se analiza exhaustivamente. En la sección 3.3 se calculan los perfiles de fluido en régimen estacionario para esas ecuaciones de estado. Esto incluye estudio de sensibilidad respecto a la geometría de la burbuja, y soluciones analíticas para el caso de paredes de burbuja planas. En la sección 3.4 se calculan los perfiles para régimen *runaway* y se lo compara con las detonaciones ultra relativistas. En la sección 3.6 se calculan los factores de eficiencia para la pared y para el fluido en regímenes estacionarios y *runaway*. También en esa sección, se exponen resultados de estudiar como dependen de las aproximaciones consideradas (principalmente la sensibilidad con la velocidad del sonido), y de qué forma se distribuye la energía liberada durante la transición.

3.2. Modelando la ecuación de estado

Una primera simplificación a la ecuación de estado, que permite un tratamiento semi-analítico de la hidrodinámica, es la del modelo del *Bag* que se introduce en la sección 2.7.1. No obstante, como toda simplificación, tiene limitaciones y pierde información. Es de interés estudiar el alcance del *Bag*, sus limitaciones, y alguna generalización del mismo.

Se estudian las limitaciones del *Bag* en la sección 3.2.1, en particular señalando como la velocidad del sonido en el plasma varía respecto de esa aproximación (y que esa velocidad a su vez es una medida de como se desvía el *Bag* de la verdadera ecuación de estado). En la sección 3.2.2 se describe una aproximación que generaliza al *Bag* y

que hemos introducido en nuestra publicación [3], la cual admite un tipo de solución hidrodinámica que no se manifiesta con el *Bag*.

3.2.1. Limitaciones del *Bag*

Para comparar la ecuación de estado del *Bag* (2.7.1) con un caso realista, en el contexto del mecanismo de Higgs, se puede considerar un sistema simple en el que algunas de las masas de partículas dependen del campo de Higgs ϕ , y la densidad de energía libre es dada (a orden un lazo) por el potencial efectivo a temperatura finita, que puede descomponerse como se muestra en la expresión (1.39) en el aporte a temperatura cero más una corrección térmica. Esa corrección, a 1-lazo, juntando las expresiones (1.40) y (1.41), tiene la forma:

$$\Delta\mathcal{V}_{\text{ef}}^\beta(\phi, T) \approx \mathcal{F}_1(\phi, T) = \sum_i (\pm g_i) T^4 \int \frac{dy y^2}{2\pi^2} \log \left[1 \mp e^{-\sqrt{y^2 + (m_i(\phi)/T)^2}} \right] \quad (3.1)$$

(es la expresión (1.53) pero por simplicidad se omite el segundo término que es irrelevante en esta discusión).

Para $m_i = 0$, las especies contribuyen con un término $-c_i g_i (\pi^2/90) T^4$ a $\Delta\mathcal{V}_{\text{ef}}^\beta$, donde $c_i = 1$ para bosones y $7/8$ para fermiones. Por otro lado, para $m_i/T \gg 1$, la exponencial en la integral de la ecuación (3.1) se suprime, y las especies dan una contribución nula. Así, la ecuación del *Bag* es obtenida en el límite en el cual todas las partículas son muy livianas en la fase dominante a alta temperatura, es decir, $m_i(\phi_+)/T \simeq 0$, mientras que algunas adquieren masas muy grandes en la fase dominante a más baja temperatura, es decir $m_i(\phi_-)/T \gg 1$, y el resto permanece relativista. De hecho, en tal caso se tiene

$$\mathcal{F}_\pm(T) = \mathcal{V}_{\text{ef}}(\phi_\pm) - g_\pm \frac{\pi^2}{90} T^4, \quad (3.2)$$

donde $g_+ = \sum_i c_i g_i$, con i corriendo sobre todas las especies de partículas, mientras $g_- = \sum_{i'} c_{i'} g_{i'}$, donde i' corre solo sobre las partículas que permanecen livianas en la fase “-”. En la mayoría de los casos de interés se tiene $\phi_+ = 0$, y $\mathcal{V}_{\text{ef}}(\phi_+)$ es una constante. En algunos casos, ϕ_- está cerca de su valor a temperatura cero, y es también aproximadamente constante. Entonces, se tiene la ecuación (2.85), con $\varepsilon_\pm = \mathcal{V}_{\text{ef}}(\phi_\pm)$ y $a_\pm = g_\pm \pi^2/30$. Si algunas de las condiciones anteriores no se cumplen, se espera una desviación del comportamiento de la ecuación del *Bag*.

Como en general se tiene $\phi_+ = 0$, las masas $m_i(\phi_+)$ son constantes en la fase “+”. Así, se espera una desviación de la ecuación (2.85) solo para aquellas partículas con $m_i \sim T$ (de otro modo las partículas también se comportan como radiación o desaparecen del plasma). Una medida de esa desviación la provee la cantidad adimensional dada por la ecuación (2.45) para $c_+^2 = dP_+/de_+ = P'_+(T)/e'_+(T)$, donde la prima indica una derivación respecto T . Suponer, por ejemplo, que se tiene un número g_{tot} de grados de libertad, y solo g de estos tiene una masa (constante) m en la fase +, mientras que el resto son de masa nula. Se obtiene la velocidad del sonido c_+ por integración numérica de la ecuación (3.1) en función de m/T . El resultado se muestra en la figura 3.1. La figura corresponde al caso de distintos grados de libertad fermiónicos; la contribución bosónica es cualitativamente y cuantitativamente muy similar. Se ve que, como se es-

peraría¹, para muy pequeños o muy grandes valores de m/T se obtiene el resultado para el caso de radiación $c_+ = 1/\sqrt{3}$. Notar también que el apartamiento de ese valor nunca es demasiado grande, incluso si una fracción importante de grados de libertad tiene masa $m \sim T$.

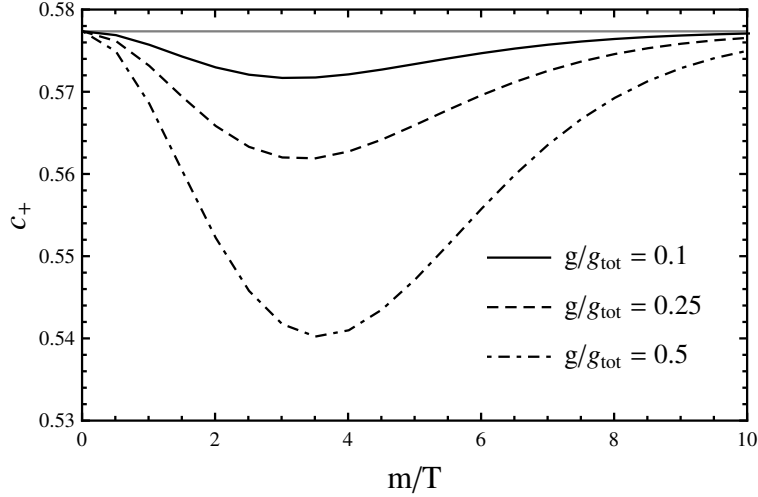


Figura 3.1: La velocidad del sonido para un sistema con g_{tot} grados de libertad, de los cuales g tienen una masa constante m y el resto son de masa nula. La línea horizontal indica el valor $1/\sqrt{3}$.

Por otro lado, en la fase dominante a menor temperatura se tiene $\phi_- \sim T$ (a menos que la transición de fase sea muy débilmente de primer orden, en cuyo caso $\phi_- \ll T$), y algunas de las masas cumplen la relación $m(\phi_-) \sim T$. Más aún, en caso general el valor del mínimo ϕ_- depende de la temperatura. Esto ocasiona una función $c_-(T)$ dependiente del modelo. En el caso $m_i \lesssim T$, se puede expandir la ecuación (3.1) en potencias de m_i/T . A orden cuadrático se tiene [según las expansiones (1.42) y (1.43)]

$$\Delta \mathcal{V}_{\text{ef}}^\beta(\phi, T) = \sum_i g_i \left[-c_i \frac{\pi^2}{90} T^4 + \tilde{c}_i \frac{m_i^2}{24} T^2 \right], \quad (3.3)$$

donde $\tilde{c}_i = 1$ para bosones y $1/2$ para fermiones. Así, para pequeño $m_i(\phi_+)/T$ y moderado $m_i(\phi_-)/T$, se tiene

$$\mathcal{F}_+(T) = \mathcal{V}_{\text{ef}}(\phi_+) - g_+ \frac{\pi^2}{90} T^4, \quad (3.4)$$

$$\mathcal{F}_-(T) = \mathcal{V}_{\text{ef}}(\phi_-) - g_+ \frac{\pi^2}{90} T^4 + bT^2, \quad (3.5)$$

donde $g_+ = \sum_i c_i g_i$, con i corriendo sobre todas las especies de partículas, y $b = \sum_{i'} g_{i'} \tilde{c}_{i'} m_{i'}^2(\phi_-)/24$, donde i' corre solo sobre partículas que adquieren masa. Notar que la componente de radiación es la misma en ambas fases, es decir, el término $\sim T^4$ es proporcional a g_+ incluso en la fase $-$, ya que esta aproximación es apenas una corrección al régimen relativista. Por otro lado, se tiene una corrección $\sim T^2$ a la

¹Pues $m/T \ll 1$ corresponde a altas temperaturas, luego velocidades relativistas, mientras que con $m/T \gg 1$ las partículas de la especie considerada serían muy masivas y se desacoplarían del plasma.

ecuación de estado de radiación solo en la fase $-$, ya que dicha corrección es de orden m^2 y se anula en la fase $+$. Si se desprecia la dependencia de ϕ_- en T , se tiene $P_- = -\varepsilon_- + a_+T^4/3 - bT^2$, mientras que en la fase $+$ se puede suponer $P_+ = -\varepsilon_+ + a_+T^4/3$. En términos de los parámetros termodinámicos T_c y L definidos en la sección 1.2.3.2, se tiene en este caso

$$P_-(T) = P_+(T) + \frac{L}{2} \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2}\right), \quad e_-(T) = e_+(T) - \frac{L}{2} \left(1 + \frac{T^2}{T_c^2}\right) \quad (3.6)$$

Esta aproximación provee una simple ecuación de estado² con algunas interesantes diferencias respecto al modelo del *Bag*. Una de ellas es que la velocidad del sonido en la fase $-$ es distinta, es decir $c_-(T) \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Este modelo (3.6) puede ser útil para estudiar los efectos de una velocidad del sonido dependiente de la temperatura en la hidrodinámica de los frentes de transición. Como la ecuación de estado puede apartarse significativamente de la ecuación del *Bag* (particularmente en la fase $-$), el valor de c_{\pm} puede apartarse del valor del *Bag* $c_s = 1/\sqrt{3}$. Para el modelo (3.6) se tiene

$$c_- = \sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{1 - 3\alpha_c \left(\frac{T_c}{T}\right)^2}{1 - \alpha_c \left(\frac{T_c}{T}\right)^2}}, \quad (3.7)$$

donde $\alpha_c = L/(4a_+T_c^4) = \frac{1}{3}L/w_+(T_c)$ es similar a la variable del *Bag* dada por (2.90), o por (2.91) a $T = T_c$. Así se ve que la ecuación (3.7) da $c_- < 1/\sqrt{3} = c_+$, y en particular para $T = T_c$ con $\alpha_c = 0,1$ se tiene $c_-(T_c) \simeq 0,51$.

El que la ecuación de estado (3.6) se pueda obtener de la energía libre a un lazo a través de potencias de m/T en vez de tomar el límite $m/T \gg 1$, indica que este modelo puede ser más realista que el *Bag* en varias situaciones físicas. Por otro lado, esta ecuación de estado tiene esencialmente el mismo número de parámetros libres que la ecuación del *Bag*, y por lo tanto es en principio tan limitado como este último en reproducir el modelo general. No obstante, a pesar de la simplicidad de la ecuación de estado, la variación espacial de la temperatura implica una velocidad del sonido dependiente de la posición que dificulta evitar un tratamiento numérico. Aquí no se utiliza esa aproximación. En este trabajo se deprecia la dependencia de c_{\pm} de T . Esta es una aproximación razonable si la temperatura varía en un rango pequeño alrededor de T_c (o incluso T_N), lo cual es cierto para la mayoría de las transiciones de fase³. Para considerar valores generales de las cantidades c_{\pm} pero eludiendo el tratamiento numérico de la hidrodinámica, se introduce en la sección 3.2.2 un modelo en el cual esas dos cantidades son parámetros libres constantes.

Volviendo al caso general, considerando (3.1) en vez de la aproximación (3.3), la dependencia con la temperatura del mínimo $\phi_-(T)$ puede hacer al valor de c_- separarse significativamente del de c_+ , dependiendo de las características del modelo. Para explorar los posibles valores de la velocidad del sonido en un caso realista, a continuación se considera el caso de la transición electrodébil, para algunas extensiones del Modelo Estándar. La transición electrodébil ocurre a $T_c \sim 100\text{GeV}$. El número de

²Un modelo de esta forma ya fue usado en la referencia [100].

³Algunas cantidades son muy sensibles a la variación de T en rangos que contienen a T_c y T_N (por ejemplo, el ritmo de nucleación de burbujas o la velocidad de la pared de burbuja), pero no es el caso de la velocidad del sonido.

grados de libertad del SM es $g_* \approx 107$. Las masas dependientes del Higgs son de la forma $m_i = h_i \phi$ y se tiene $\phi_+ = 0$. Entonces, en la fase estable a alta temperatura las partículas son de masa nula. En la fase dominante a baja temperatura, en torno a la transición, la mayoría de las partículas permanecen relativistas, es decir, efectivamente sin masa, puesto que los acoples con el Higgs son $h_i \ll 1$ excepto para el quark top y los bosones W y Z . En el SM la transición de fases ni siquiera es de primer orden, pero en extensiones del SM se pueden tener transiciones fuertemente de primer orden ($\phi_+ \gtrsim T$). Aquí se van a considerar modelos con bosones extra y fermiones con masas de la forma $m(\phi) = h\phi$ (para detalles de estos modelos mirar la referencia [19], también se utilizan más adelante en la sección 4.4).

En la figura 3.2 se muestran los valores de $c_-(T_c)$ en función del acople h . La línea sólida que es más cercana al valor $c_- = 1/\sqrt{3}$ corresponde a agregar un campo escalar con $g = 2$ grados de libertad al SM. La otra línea sólida corresponde a un campo escalar con $g = 12$. Las líneas a trazos-puntos corresponden a fermiones extra fuertemente acoplados con el Higgs⁴. Nuevamente, se consideraron grados de libertad extra $g = 2$ y $g = 12$, y el caso $g = 2$ es aquel con el apartamiento más pequeño respecto del caso de radiación. También se consideró un caso de bosones y fermiones extra (línea a trazos) con el mismo acoplamiento h y el mismo número de grados de libertad, $g = 12$.

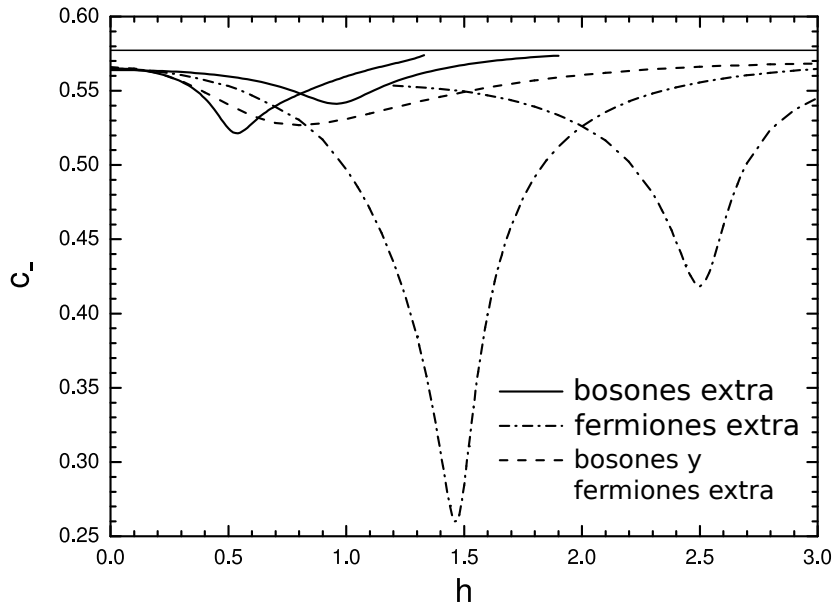


Figura 3.2: La velocidad del sonido en la fase dominante a baja temperatura de la transición de fase electrodébil, para algunas extensiones del Modelo Estándar, en función del acoplamiento de partículas extra con el Higgs. La línea horizontal indica el valor de $c_- = 1/\sqrt{3}$.

Es interesante comprobar que la velocidad del sonido se aproxima al valor relativista en los dos límites esperados; a saber, para pequeños y grandes valores de h . De hecho, cuando $h \rightarrow 0$ la masa de la partícula extra se anula y la especie se comporta como radiación. El valor exacto $c_- = 1/\sqrt{3}$ en ese límite no es alcanzado debido a que aún se

⁴Este modelo también tiene bosones con el mismo acoplamiento pero con masas más altas debidas a términos independientes de ϕ (es decir, los μ^2 en $m_b^2 = h^2 \phi^2 + \mu^2$). Entonces, esos bosones están desacoplados del resto de la física a $T = T_c$ [126].

tienen las partículas masivas del Modelo Estándar. Para h grande, las partículas extras se vuelven muy masivas y decaen desapareciendo del plasma. Además, en algunos casos la transición de fase se vuelve muy fuerte, con grandes valores de ϕ/T , e incluso partículas del SM adquieren valores grandes de m/T (esencialmente, porque T_c se vuelve pequeño). Ese es el por qué las líneas sólidas en la figura 3.2 rápidamente se aproximan al valor $c_- = 1/\sqrt{3}$ a medida que h crece. De hecho, para valores más grandes de h que los considerados en la figura, la transición se vuelve tan fuerte que este modelo se hace no físico (la transición se queda trabada en la fase metaestable).

Se observa que el apartamiento de la ecuación de estado de radiación es más significativo para el caso de fermiones fuertemente acoplados. No obstante, notar que incluso con solo dos grados de libertad bosónicos extra se puede tener un apartamiento de la radiación que es comparable con el caso más fuerte considerado en la figura 3.1 para una masa constante. Esa diferencia entre los posibles valores de c_- y c_+ es debida a la dependencia con la temperatura que tiene el mínimo $\phi_-(T)$. Esto induce una masa dependiente de la temperatura $m(\phi_-(T))$ así como una densidad de energía de “vacío” dependiente de la temperatura $\mathcal{V}_{\text{ef}}(\phi_-(T))$. Ambas afectan el valor de $c_-^2 = p'_-(T)/e'_-(T)$.

Notar que los grados de libertad livianos del SM se comportan como radiación, y sus contribuciones a la densidad de energía libre es del orden de $100T^4$. Por otro lado, la contribución de las partículas con masas dependientes de la temperatura [el término bT^2 en la expresión (3.5)] es más pequeña porque es proporcional a su número de grados de libertad, g . Desde un punto de vista dimensional, esta contribución es de orden gT_c^4 . Del mismo modo, la parte de “vacío” es de orden T_c^4 . Como se consideraron valores de $g \lesssim 10$, la parte de radiación de la densidad de energía libre debería ser un factor 10 más grande que la parte que no es de radiación, y uno podría preguntarse por qué las desviaciones de $c_-^2 = 1/3$ son tan grandes en algunos casos. De hecho, la velocidad del sonido involucra derivadas de estas contribuciones. Entonces, las partículas livianas contribuyen en términos de orden $400T_c^3$ mientras que las partículas que se vuelven muy pesadas contribuyen con términos $\sim g(d\phi_-/dT)T_c^3$. La última derivada es en muchos casos grande para $T = T_c$, y en algunos casos incluso se tiene $d\phi_-/dT \sim 100$. Como consecuencia, esta última contribución puede ser más grande que la contribución de las partículas livianas⁵. Para mostrar este efecto, en la figura 3.3 se considera el gráfico de la diferencia $\Delta\mathcal{F}(\phi, T) = \mathcal{F}(\phi, T) - \mathcal{F}(0, T)$ (normalizada a T^4), es decir, sustrayendo la contribución de radiación a la densidad de energía libre. El panel izquierdo corresponde al caso de 12 fermiones extra fuertemente acoplados con $h = 1,5$ (el cual, de acuerdo a la figura 3.2, tiene un gran apartamiento respecto al caso de radiación). Se ve que, de hecho, el mínimo a baja temperatura tiene una variación $\delta\phi_- \sim 0,1T_c$ en un rango de temperatura $\delta T \sim 10^{-3}T_c$ (por lo tanto, $d\phi_-/dT \sim 100$). Por comparación también se muestra el caso de $h = 2$ (panel derecho), correspondiente a una transición de fase más fuerte. En este caso el mínimo ϕ_- está más cerca de su valor a temperatura cero y varía muy poco en un rango más grande de temperatura. En tal caso se tiene una

⁵Más precisamente, los términos proporcionales a $d\phi_-/dT$ se cancelan en la derivada dP_-/dT e incrementan la derivada de_-/dT , ocasionando un valor menor de c_-^2 . De hecho, notar que $\mathcal{F}_-(T)$ está dado por $\mathcal{F}(\phi, T)$ evaluado en $\phi = \phi_-$. Entonces se tiene $s_- = dP_-/dT = -d\mathcal{F}_-/dT = -(\partial\mathcal{F}/\partial\phi)(d\phi_-/dT) - \partial\mathcal{F}/\partial T$. Como ϕ_- es el mínimo de \mathcal{F} , se obtiene $s_- = -\partial\mathcal{F}/\partial T$ [es fácil verificar, de los dos paneles en la figura 3.3, que el tamaño de la variación de \mathcal{F}_- con T no está correlacionada con la de ϕ_-]. Por otro lado, para $de_-/dT = T ds_-/dT$, los términos proporcionales a $g d\phi_-/dT$ (y dimensionalmente $\sim T^3$) no se cancelan sino que dan una contribución positiva.

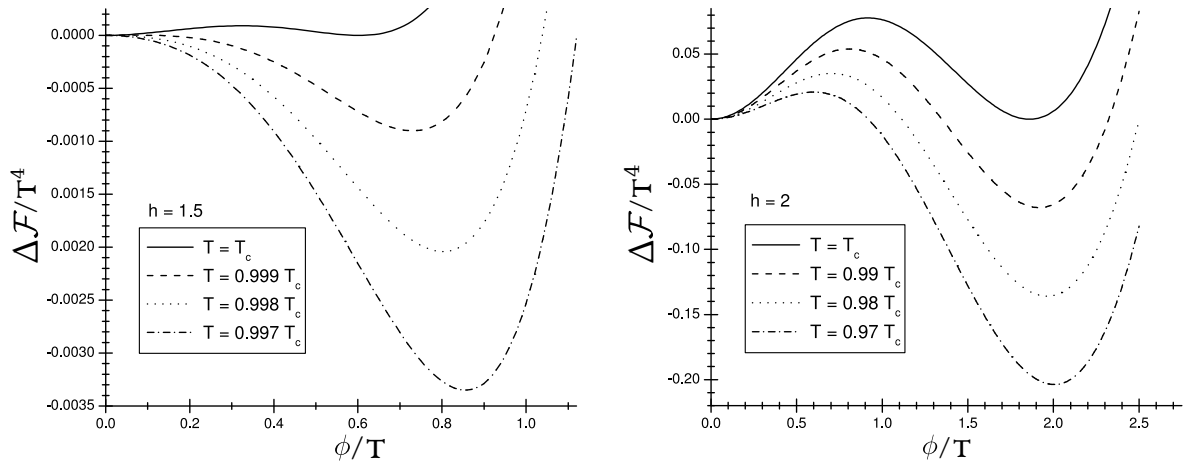


Figura 3.3: Gráfico de $\Delta\mathcal{F}/T^4$ en función de ϕ/T para la extensión del SM con 12 fermiones extra fuertemente acoplados, para $h = 1,5$ (panel izquierdo) y $h = 2$ (panel derecho).

desviación más pequeña respecto a $c_-^2 = 1/3$.

Así se concluye que en un caso realista lo más probable es que $c_- < c_+ \simeq 1/\sqrt{3}$. En particular, el potencial efectivo a 1-lazo da la velocidad del sonido acotada $c_s < 1/\sqrt{3}$. Esto parece ser una cota general para la velocidad del sonido en cualquier medio, incluido teorías de campo con fuertes acoplamientos como QCD [127, 128], aunque no hay razón fundamental para esta cota [129]. Respecto a la relación $c_- < c_+$, aunque es el caso más probable, también se puede tener $c_- = c_+$ o incluso $c_- > c_+$. Por ejemplo, considerando una especie de partícula que tenga una masa dada por (1.38). Para $\mu \sim T$ y h suficientemente grande se tiene $m(\phi_+) \sim T$, $m(\phi_-) \gg T$. La sola contribución de esta especie al potencial efectivo puede hacer la transición de fase fuertemente de primer orden. Por otro lado, en la fase “+” esta contribución tiende a bajar la velocidad del sonido respecto a su valor de radiación, mientras que en la fase “-” la partícula desaparece del plasma, el cual se comporta como radiación. En tal caso se tiene $c_+ < 1/\sqrt{3}$, $c_- \simeq 1/\sqrt{3}$.

3.2.2. Una generalización del *Bag*: *Modelo* c_{\pm}

El contenido de esta sección 3.2.2 con sus respectivas subsecciones, se basa en el modelo/aproximación que hemos propuesto en el trabajo publicado [3].

Se desea tener en cuenta la posibilidad de que la velocidad del sonido tenga valores arbitrarios c_+ y c_- en cada fase. No obstante, por simplicidad, aquí solo se consideran los casos de c_{\pm} constantes. Esta condición implica una ecuación de estado que es casi tan simple como la del *Bag*, pero tiene un parámetro libre extra para cada fase. En posteriores secciones se refiere a este modelo, que aproxima la ecuación de estado de forma un poco más realista, como “*Modelo* c_{\pm} ”.

3.2.2.1. Ecuación de estado cuando la velocidad del sonido es constante

Imponiéndose la condición $\partial P/\partial e = c_s^2 = cte$ queda restringida la ecuación de estado a la forma⁶ $P = c_s^2 e + cte$. Reemplazando en este resultado las expresiones (1.10) y (1.11) para s y e respectivamente, se tiene una ecuación diferencial simple, $P = c_s^2 (T \partial P/\partial T - P)$, que da P en función de T . Una vez resuelta y teniendo en cuenta las expresiones (1.11) y (1.12) para e y w se concluye que

$$e = aT^\nu + \varepsilon, \quad P = c_s^2 aT^\nu - \varepsilon, \quad w = (1 + c_s^2) aT^\nu \quad (3.8)$$

donde a y ε son constantes⁷, y el exponente ν está dado por

$$\nu = 1 + 1/c_s^2. \quad (3.9)$$

Esta ecuación de estado es la más general con velocidad del sonido constante, y correspondería a la que se derivaría de una energía libre

$$\mathcal{F} = -c_s^2 aT^\nu + \varepsilon \quad (3.10)$$

que podría usarse para aproximar una \mathcal{F} realista fijando adecuadamente a , c_s y ε .

Un sistema descrito por esta ecuación de estado tiene dos componentes: una densidad de energía de “vacío” (la constante ε) y una densidad de energía “térmica” (la parte dependiente de la temperatura aT^ν). El exponente ν puede tomar cualquier valor entre 2 (correspondiente a $c_s = 1$) e ∞ (correspondiente a $c_s = 0$). Por ejemplo, para $c_s^2 = 1/3$ se tiene $e = aT^4 + \varepsilon$, densidades de energía de vacío y radiación. Para $c_s^2 \neq 1/3$, el coeficiente a es dimensional. Se puede tratar de dar una interpretación a esta ecuación de estado considerando un a efectivo que depende de la temperatura dado por $a(T) = aT^{\nu-4}$. Tal interpretación podría ser útil si se suministrara una forma de elegir el valor de ν tal que $a(T)$ se comporte de alguna manera física. Sin embargo, similarmente a lo discutido en la sección 2.7.2.1 el comportamiento general de tal $a(T)$ efectivo no es claro a priori⁸. Al igual que en el caso del *Bag*, se puede fijar los parámetros para que den ciertos valores requeridos de cantidades físicas. Además, en este caso también se puede fijar la velocidad del sonido.

3.2.2.2. Estructura de fases

Buscándose describir una transición donde las velocidades del sonido entre las fases pueden llegar a ser claramente distinguibles pero con una variabilidad relativamente pequeña respecto de sí mismas, se puede utilizar una ecuación de estado de la forma (3.10) para aproximar la energía libre en cada fase. La ecuación del modelo del *Bag* sería un caso particular de este otro modelo, correspondiendo a $\nu = 4$ en ambas fases. Previo a interpretar el rol de cada una se denotan a esas fases como I y II. El sistema

⁶Reescribiendo $\partial P/\partial e = \frac{\partial P}{\partial s}/\frac{\partial e}{\partial s}$ e igualando a una constante c_s^2 respecto de s , se despeja $\partial P/\partial s$ y se lo integra respecto a s para obtener esa ecuación de estado.

⁷Como $T \propto s^{c_s^2}$, son constantes tanto respecto de T como de s (variable natural de e).

⁸Eso en lo que respecta a ajustar los parámetros de esta aproximación a partir del potencial efectivo realista. Es ilustrativo ver que, si se tuviera en cuenta el criterio dado en (2.86-2.87) para ajustar el *Bag* a partir de este modelo (que ya es una simplificación), los parámetros serían $\varepsilon_{bag} = \frac{\nu/4-1}{\nu-1} aT_c^\nu + \varepsilon$ y $a_{bag} = \frac{3}{4} \frac{\nu}{\nu-1} aT_c^{\nu-4}$, una forma más de evidenciar que a y ε no se interpretan como en el *Bag* salvo que $\nu = 4$ en cada fase.

es descripto por

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_I &= -c_I^2 a_I T^{\nu_I} + \varepsilon_I \\ \mathcal{F}_{II} &= -c_{II}^2 a_{II} T^{\nu_{II}} + \varepsilon_{II}\end{aligned}\quad (3.11)$$

Las cantidades ε_I y ε_{II} dan la densidad de energía de vacío en cada fase. Teniendo en cuenta el principio de mínima energía, a muy baja temperatura, la fase estable será aquella con el menor valor de ε , mientras que a muy alta temperatura la más estable será la de mayor exponente ν . Sin embargo, a temperaturas intermedias, pueden tenerse distintas situaciones, dependiendo de los valores de los parámetros. Para identificar las fases “+” y “-” en cada una de esas situaciones, es necesario estudiar más profundamente la estructura de este modelo.

Sin pérdida de generalidad, en lo que sigue se considera $\nu_I \leq \nu_{II}$. Se verifica que la dinámica de la transición de fases depende de ε_I y ε_{II} solo a través de el valor relativo $\varepsilon_{II} - \varepsilon_I$. Por ejemplo, en particular, la temperatura crítica, según la expresión (1.13), está dada por la ecuación

$$c_{II}^2 a_{II} T_c^{\nu_{II}} - c_I^2 a_I T_c^{\nu_I} = \varepsilon_{II} - \varepsilon_I \quad (3.12)$$

En la siguiente discusión, una vez que se identifican las fases “+” y “-” se considera, en vez de cada ε por separado, el parámetro

$$\Delta\varepsilon \equiv \varepsilon_+ - \varepsilon_- \quad (3.13)$$

Del mismo modo también resulta útil definir

$$\Delta a \equiv a_+ - a_- \quad (3.14)$$

Caso A ($c_+ = c_-$): Considerando primero el caso $\nu_I = \nu_{II}$, se puede suponer $\varepsilon_I < \varepsilon_{II}$ sin pérdida de generalidad. En consecuencia, para $a_{II} \leq a_I$ la fase I es siempre la estable (mirar la figura 3.4). Por lo tanto, habrá una transición de fases solo si $a_{II} > a_I$. Para esta transición, a la cual aquí se refiere como *Caso A*, la situación es similar a la del *Bag*. Para $T > T_c$ se tiene $P_{II}(T) > P_I(T)$, mientras que para $T < T_c$ se tiene $P_{II}(T) < P_I(T)$. Por lo tanto, la fase II domina a alta temperatura y la fase I domina a baja temperatura. Se denotan entonces con un “+” y un “-”, respectivamente. La velocidad del sonido es la misma en ambas fases, $c_+ = c_- \equiv c_s$, solo que ahora se puede tener $c_s \neq 1/\sqrt{3}$. La temperatura crítica está dada por $T_c = [\Delta\varepsilon/(c_s^2 \Delta a)]^{1/\nu}$. En este caso el calor latente definido con la expresión (1.14) está dado por

$$L = \nu \Delta\varepsilon = \nu c_s^2 \Delta a T_c^\nu \quad (3.15)$$

Caso B ($c_+ < c_-$): Si los exponentes son diferentes, como $\nu_I < \nu_{II}$, se tienen varias situaciones, dependiendo de los valores relativos entre ε_I y ε_{II} . Para $\varepsilon_I \leq \varepsilon_{II}$ (ver figura 3.5) hay una transición de fases para cualquier configuración de valores de a_I y a_{II} , lo cual ocurre a la temperatura dada por la ecuación (3.12). A esta transición aquí se la refiere como *Caso B1*. Entonces se denota a la fase II (la dominante a alta temperatura) con un “+” y a la fase I (la dominante a baja temperatura) con un “-”. Por lo tanto,

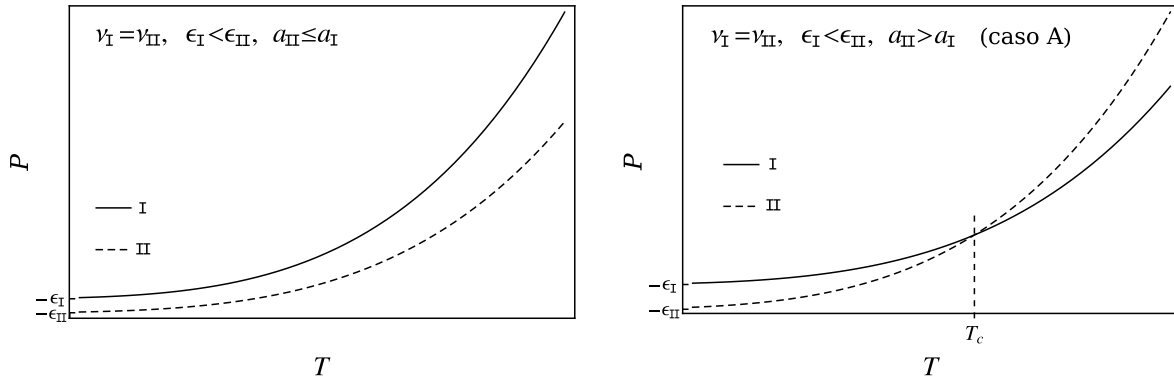


Figura 3.4: La presión $P = -\mathcal{F}$ en función de la temperatura para las dos fases dadas por la ecuación (3.11), con $\nu_I = \nu_{II}$ y $\epsilon_I < \epsilon_{II}$. Para $a_{II} > a_I$ el modelo tiene una transición de fases.

se tiene $\nu_- < \nu_+$ y $c_+ < c_-$. El calor latente está dado por

$$L = \frac{c_-^2 - c_+^2}{c_-^2} a_+ T_c^{\nu_+} + \nu_- \Delta\epsilon \quad (3.16)$$

Se tiene una transición de primer orden (es decir $L > 0$) incluso en el caso $\Delta\epsilon = 0$ (ver la figura 3.5, panel derecho). De hecho, si se consideran valores negativos de $\Delta\epsilon$, aún se tiene una transición de primer orden, debido a que $L > 0$ hasta $\Delta\epsilon_{\min} = -\frac{c_-^2 - c_+^2}{\nu_- c_-^2} a_+ T_c^{\nu_+}$ (ver la figura 3.6, el panel derecho es justo el caso $\Delta\epsilon_{\min}$). Esta transición de fases con $\Delta\epsilon < 0$ aún corresponde al caso B ($c_+ < c_-$), y aquí se la refiere como *Caso B2*. Evidentemente, si se acepta que $\Delta\epsilon < 0$ y solo se desea modelar una única transición de

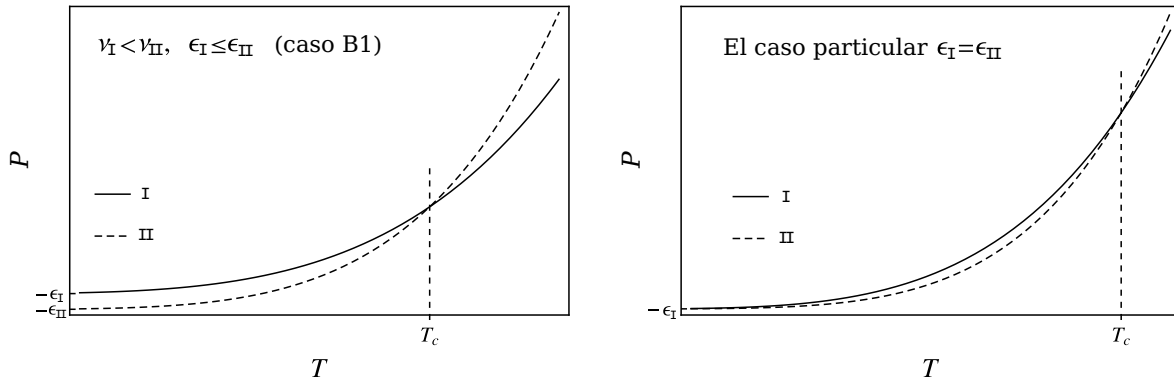


Figura 3.5: La presión $P = -\mathcal{F}$ en función de la temperatura para las dos fases dadas por la ecuación (3.11), con $\nu_I < \nu_{II}$ y $\epsilon_I \leq \epsilon_{II}$. Hay una transición de fase para cualquier valor de a_+ y a_- .

fase se está renunciando a utilizar esta aproximación en temperaturas *demasiado* bajas, porque en tal situación $e_+ \sim \epsilon_+ < \epsilon_- \sim e_-$ no se estaría denominando correctamente a la fase $-$ como la que domina a baja temperatura. También queda más manifiesto que los ϵ no deben interpretarse como densidades de energía de vacío.

Caso C ($c_- < c_+$): Como se puede ver en la figura 3.6, para $\nu_I < \nu_{II}$ y $\varepsilon_{II} - \varepsilon_I < 0$ se pueden tener dos transiciones de fase⁹, es decir, la ecuación (3.12) puede tener dos soluciones T_c y T'_c . La transición en $T = T_c$ corresponde al caso B2, y a la transición que sucede a menor temperatura T'_c aquí se la refiere como *Caso C*. En éste, la transición es de vuelta de I a II. Como aquí solo interesa utilizar esta aproximación en torno al punto de cruce para describir la transición de una fase + a una fase -, se denota a la fase I con un “+” y a la fase II con un “-”. Es decir, los roles de las fases se invierten con respecto a la transición que sucede en T_c . A diferencia de los casos anteriores aquí corresponde $\Delta\varepsilon \equiv \varepsilon_+ - \varepsilon_- = \varepsilon_I - \varepsilon_{II}$ positivo. El calor latente está dado por

$$L' = \frac{c_-^2 - c_+^2}{c_-^2} a_+ T_c^{\nu_+} + \nu_- \Delta\varepsilon \quad (3.17)$$

Esta es la misma expresión dada en la ecuación (3.16), pero la temperatura crítica está ahora dada por otra solución de la ecuación (3.12), y se tiene $\Delta\varepsilon > 0$, $c_-^2 - c_+^2 < 0$, mientras que en la ecuación (3.16) se tiene $\Delta\varepsilon < 0$, $c_-^2 - c_+^2 > 0$. El Caso C es caracterizado por la relación $c_- < c_+$. Esta transición de fases existe solo para $\nu_I < \nu_{II}$ y $\varepsilon_I > \varepsilon_{II}$, siempre que $\varepsilon_I - \varepsilon_{II}$ no sea muy grande, como puede apreciarse en la figura 3.6. Para $\varepsilon_I - \varepsilon_{II} = 0$, se tiene $T'_c = 0$ (figura 3.5, panel derecho). Cuando se incrementa $\varepsilon_I - \varepsilon_{II}$, las dos transiciones se aproximan, juntándose en un solo punto (figura 3.6, panel derecho). Esto ocurre para¹⁰

$$(\varepsilon_I - \varepsilon_{II})_{\text{máx}} = \left[\left(\frac{\nu_I}{\nu_{II}} \right)^{\nu_I} \frac{(c_I^2 a_I)^{\nu_{II}}}{(c_{II}^2 a_{II})^{\nu_I}} \right]^{\frac{1}{\nu_{II} - \nu_I}} \frac{\nu_{II} - \nu_I}{\nu_{II}} \quad (3.18)$$

Para valores más altos de $\varepsilon_I - \varepsilon_{II}$, no hay transiciones de fase.

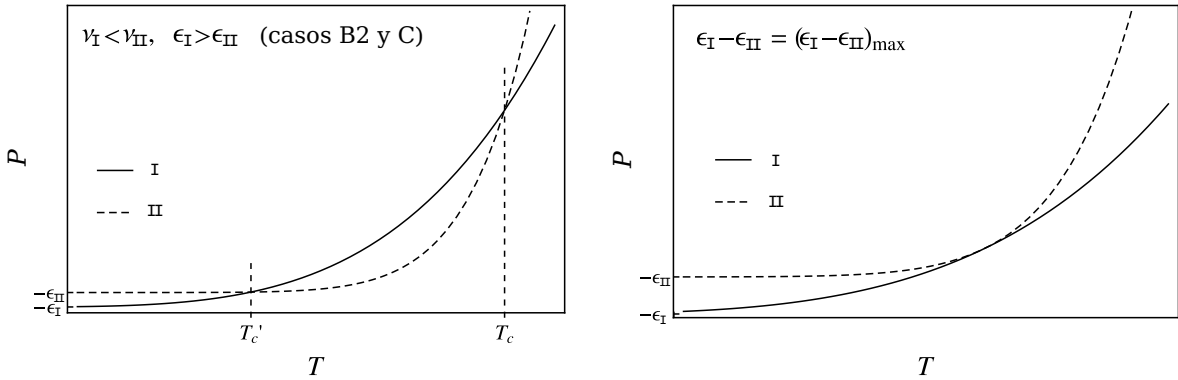


Figura 3.6: La presión $P = -\mathcal{F}$ en función de la temperatura para las dos fases dadas por la ecuación (3.11), con $\nu_I < \nu_{II}$ y $\varepsilon_I > \varepsilon_{II}$. Bajo la condición $\varepsilon_I - \varepsilon_{II} < (\varepsilon_I - \varepsilon_{II})_{\text{máx}}$, hay dos transiciones de fase.

Es importante señalar que con este modelo simple, como el del *Bag*, no se pretende describir una situación física realista en el rango entero de temperaturas. Por ejemplo,

⁹En cada caso, como la temperatura del universo decrece se tiene, primero una transición en $T = T_c$ y, luego, una segunda transición en $T = T'_c$.

¹⁰Esta expresión se puede obtener imponiendo, además de $P_I = P_{II}$ para temperatura crítica, la condición $s_I = s_{II}$ (es decir, $dP_I/dT = dP_{II}/dT$), que además implica $w_I = w_{II}$ y luego $e_I = e_{II}$. Entonces el calor latente de ese único punto crítico en el límite es nulo ($L = |e_I - e_{II}| = 0$).

en el caso $\nu_I < \nu_{II}$, $\varepsilon_I > \varepsilon_{II}$, se tienen dos transiciones de fase, de la fase II a la I, y luego de regreso de la I a la II. Aunque transiciones de fase en dos pasos son posibles en Cosmología (ver por ejemplo [130]), por lo general involucrarían tres fases diferentes. A pesar de esto, cada uno de los casos mencionados proporciona aproximaciones útiles para transiciones de fase realistas, al menos en un rango pequeño de temperaturas en el cual la transición ocurre. En particular, de las discusiones de la sección 3.2.1 parece probable que en un caso realista se tenga que $c_- < c_+$, lo cual es descrito en este modelo para el caso C (la transición en $T = T'_c$). Si se extrapola a más altas temperaturas, este modelo podría dar otra transición de fases en $T = T_c$ (caso B2), pero esto no ocurrirá en el modelo físico que está siendo aproximado en torno a $T = T'_c$.

3.2.2.3. Parametrización de resultados hidrodinámicos

Al igual que en el *Bag*, se ve en la siguiente sección, hay resultados hidrodinámicos que se expresan en función de una magnitud $\alpha(T)$, generalización de la definida en (2.88). Entonces, en vez de ε_{\pm} y a_{\pm} , directamente queda α como magnitud ajustable a casos realistas¹¹. En este apartado se discute cuál es el modo más conveniente de generalizar en este modelo la definición de $\alpha(T)$ y qué interpretación tiene.

Se pueden comparar las distintas expresiones que en el *Bag* resultaban equivalentes para expresar α . La magnitud e_R definida en la sección 2.7.2.1, evaluada en este modelo es $e_{R+}(T) = a_+ T^{\nu_+}$. Entonces el lado derecho de la expresión (2.89) toma la forma

$$\frac{\Delta\varepsilon}{e_{R+}(T)} = c_+^2 \left(\frac{T_c}{T}\right)^{\nu_+} - c_-^2 \frac{a_- T_c^{\nu_-}}{a_+ T^{\nu_+}}. \quad (3.19)$$

A su vez la expresión (2.90) involucra la cantidad

$$\frac{L}{e_{R+}(T)} = (1 + c_+^2) \left(\frac{T_c}{T}\right)^{\nu_+} - (1 + c_-^2) \frac{a_- T_c^{\nu_-}}{a_+ T^{\nu_+}}. \quad (3.20)$$

También la expresión (2.91) contiene

$$\frac{L}{w_+(T)} = \left(\frac{T_c}{T}\right)^{\nu_+} - \left(\frac{1 + c_-^2}{1 + c_+^2}\right) \frac{a_- T_c^{\nu_-}}{a_+ T^{\nu_+}}. \quad (3.21)$$

En el llamado *Caso A*, introducido en la sección 3.2.2.2 y que incluye al *Bag*, todas estas expresiones son proporcionales a $\frac{L}{w_+(T)} = \frac{\Delta a_-}{a_+} \left(\frac{T_c}{T}\right)^{\nu}$ y da lo mismo una u otra para expresar resultados hidrodinámicos. No obstante, la situación cambia en los casos *B* y *C* no considerados previamente en la bibliografía. En general cuando tal magnitud se desea calcular a partir de un modelo de energía libre realista, lo preferible sería elegir aquella cantidad entre (3.19), (3.20) y (3.21), cuya interpretación fuera clara para cualquier modelo considerado.

La interpretación de $\Delta\varepsilon$ como la energía de vacío que es liberada en la transición de fase está lejos de ser clara, lo mismo al interpretar a $a_+ T^{\nu_+}$ como un término de *energía*

¹¹La prescripción que se da en las secciones 2.7.2.1 y 2.7.2.2 tiene una generalización natural tomando la definición (3.22) de $\alpha(T)$ que se adopta en el *Modelo* c_{\pm} y reemplazando la aparición de los parámetros por las funciones $\varepsilon_{\pm}(T) = (e_{\pm} - c_{\pm}^{-2} P_{\pm})/\nu_{\pm}$ y $a_{\pm}(T) = c_{\pm}^{-2} w_{\pm}/(\nu_{\pm} T_{\pm}^{\nu_{\pm}})$, donde todas esas magnitudes deben ser calculadas a partir de un \mathcal{F}_{\pm} realista. En este caso, los resultados hidrodinámicos además de α dependen de las velocidades c_{\pm} , que en un modelo realista no son constantes, y también deberían ajustarse de algún modo a partir de valores realistas.

térmica (que claramente no es de radiación). La razón de esto es, por ejemplo, que para poder darle significado a ε_{\pm} se debe confiar en la ecuación de estado de este modelo a toda temperatura, llegando a $T = 0$, y como se discute en la sección 3.2.2 solo tendría sentido utilizarla en torno de T_c o T'_c para aproximar una transición realista. Así, la variable más física sería el cociente de cantidades físicas $\frac{L}{w_+(T)}$.

No obstante, en el *Modelo* c_{\pm} , a pesar que las magnitudes involucradas en su cálculo no tienen una interpretación clara, se define

$$\alpha(T) \equiv \frac{\Delta\varepsilon}{a_+ T^{\nu_+}} = c_+^2 \left(\frac{T_c}{T}\right)^{\nu_+} - c_-^2 \frac{a_- T_c^{\nu_-}}{a_+ T^{\nu_+}}. \quad (3.22)$$

La razón de esta elección es que, en este modelo igual que en el *Bag*, los resultados de la hidrodinámica dependen directamente de este parámetro. A su vez, la cantidad $\frac{L}{w_+(T)}$ mantiene (respecto del *Bag*) una propiedad interesante: la de ser una magnitud que cuantifica en algún sentido la *fuerza de la transición*. En efecto, es proporcional a la discontinuidad de la energía, y crece con el sobreenfriamiento (al decrecer T). Por ese motivo es útil definir el parámetro \bar{L} relacionado con esa magnitud, mediante

$$\frac{L}{w_+(T)} = \frac{L}{w_+(T_c)} \left(\frac{T_c}{T}\right)^{\nu_+} \equiv \bar{L} \left(\frac{T_c}{T}\right)^{\nu_+}, \quad (3.23)$$

donde $(T_c/T)^{\nu_+}$ caracteriza el sobreenfriamiento. En cambio α , como se observa en la sección 3.3.1.1, puede tomar valores negativos. Sin embargo, mantiene una relación de orden: mayor α implica mayor perturbación del fluido. En la siguiente sección se ve de qué forma \bar{L} se relaciona con α o, dicho de otro modo, cómo la *fuerza de la transición* (discontinuidades debidas al alto y ancho de la barrera de energía libre) está relacionada con la *fuerza de la hidrodinámica* (perturbaciones del fluido por el avance del frente de transición).

También se definen las valuaciones a distintas temperatura α_+ , α_1 , α_2 , α_c , α_N , etc del mismo modo que en el *Bag*.

3.3. Cálculo de perfiles estacionarios

En esta sección se lleva a cabo el cálculo concreto expresado en la sección 2.5, para el *Modelo* c_{\pm} introducido en la sección 3.2.2. En la subsección 3.3.1 se analizan las distintas situaciones posibles en los frentes de transición y de choque. En la subsección 3.3.2 se exponen los cálculos (numéricos) de perfiles en los distintos regímenes estacionarios, para distintas geometrías de burbuja (usando el *Bag*). En la subsección 3.3.3 se repiten estos cálculos analíticamente para la simetría plana (usando el *Modelo* c_{\pm}).

3.3.1. Discontinuidades

El contenido de esta subsección integra análisis y cálculos, referentes a condiciones que deben cumplirse en los frentes de transición y choque, que hemos realizado en el trabajo publicado [3] (y, en cierta medida, también en [1] que publicamos previamente).

3.3.1.1. Frentes de transición

Se consideran las condiciones de empalme (2.52) y (2.53) aplicadas a la pared de burbuja, teniendo en cuenta la forma que toma la ecuación de estado en el *Modelo* c_{\pm} que implica P y w dados por las expresiones (3.8). Esto permite eliminar la temperatura T_- detrás de la pared y despejar

$$|v_+| = \frac{q \left(\frac{|v_-|}{2} + \frac{c_-^2}{2|v_-|} \right) \pm \sqrt{q^2 \left(\frac{|v_-|}{2} + \frac{c_-^2}{2|v_-|} \right)^2 + (1 + \alpha_+) (\alpha_+ - c_+^2)}}{1 + \alpha_+}, \quad (3.24)$$

donde $\alpha_+ \equiv \alpha(T_+)$ y

$$q = \frac{1 + c_+^2}{1 + c_-^2} \quad (3.25)$$

Esta es la generalización de la relación bien conocida para del *Bag* [118],

$$|v_+| = \frac{\left(\frac{|v_-|}{2} + \frac{1}{6|v_-|} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{|v_-|}{2} + \frac{1}{6|v_-|} \right)^2 + (1 + \alpha_+) (\alpha_+ - 1/3)}}{1 + \alpha_+}, \quad (3.26)$$

donde en ese caso es $\alpha_+ = \varepsilon/(a_+ T_+^4)$. Notar que, si se toman c_{\pm} como parámetros fijos del modelo, las curvas de $|v_+|$ vs $|v_-|$ dependen solo de la variable térmica α_+ .

A partir de la ecuación (3.24) y salvo alguna configuración muy particular de parámetros, se verifica lo siguiente. Que $|v_+|$ dentro del rango $0 < |v_-| < 1$ solo tiene un extremo, mínimo al considerar el signo positivo en la expresión (3.24) y máximo con el negativo. Además, también se deduce que $|v_+|$ solo puede llegar a tocar a la recta idénticamente igual a $|v_-|$ en los límites $|v_-| = 0$ y $|v_-| = 1$. Lo cual implica que la rama correspondiente al signo negativo se encuentra por debajo de esa recta anulándose en $|v_-| = 0$, y la del signo positivo por encima de la recta llegando al valor 1 cuando $|v_-| = 1$. Esa última llega a 1 también para un $|v_-| < c_-$ ya que en $|v_-| = 0$ la expresión (3.24) presenta una divergencia. Por lo tanto, como se anticipa en la sección 2.5.2, se tienen dos distintos tipos de procesos hidrodinámicos dependiendo de los signos \pm en la ecuación (3.24). Por definición, los regímenes correspondientes al signo $+$, donde $|v_+| > |v_-|$, son *detonaciones*, y para el signo $-$, donde $|v_+| < |v_-|$, son *deflagraciones*. Notar que para $\alpha_+ > c_+^2$ solo se tienen detonaciones¹².

El valor extremo que toma $|v_+|$ cuando $|v_-| = c_-$, viene dado por la velocidad de Jouguet (que se menciona en la sección 2.5.2)

$$v_J^{\det}(\alpha_+) = \frac{qc_- \pm \sqrt{q^2 c_-^2 - (1 + \alpha_+) (c_+^2 - \alpha_+)}}{1 + \alpha_+}, \quad (3.27)$$

y que para el *Bag* toma la forma

$$v_J^{\det}(\alpha_+) = \frac{1 \pm \sqrt{\alpha_+ (2 + 3\alpha_+)}}{\sqrt{3} (1 + \alpha_+)}. \quad (3.28)$$

¹²Esto es porque para $\alpha_+ = c_+^2$ las deflagraciones en la ecuación (3.24) dan $|v_+| = 0$, y para valores mayores se tendría que el signo de v_+ es distinto al de v_- , lo cual contradiría a la expresión (2.53) en función de lo argumentado en la sección 2.4.3 [Notar que vale la misma (3.24) pero con la velocidades v_+ y v_- sin tomarlas en módulo].

También resulta práctico expresar v_- *invirtiendo* la expresión (3.24):

$$|v_-| = \left(\frac{|v_+|(1 + \alpha_+)}{2q} + \frac{c_+^2 - \alpha_+}{2q|v_+|} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{|v_+|(1 + \alpha_+)}{2q} + \frac{c_+^2 - \alpha_+}{2q|v_+|} \right)^2 - c_-^2}, \quad (3.29)$$

que para el *Bag* toma la forma

$$|v_-| = \left(\frac{|v_+|(1 + \alpha_+)}{2} + \frac{\frac{1}{3} - \alpha_+}{2|v_+|} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{|v_+|(1 + \alpha_+)}{2} + \frac{\frac{1}{3} - \alpha_+}{2|v_+|} \right)^2 - \frac{1}{3}}. \quad (3.30)$$

Como puede verse en las figuras 3.7, 3.8, 3.10 (que cubren todos los casos introducidos en la sección 3.2.2.2), se tiene un hueco en los valores de $|v_+|$ alrededor de c_- , lo cual indica que la raíz cuadrada en la ecuación (3.29) se vuelve imaginaria. Este salto separa la rama de detonaciones de la de deflagraciones; para $|v_+| \geq v_J^{\text{det}} > c_-$ corresponden detonaciones y para $|v_+| \leq v_J^{\text{def}} < c_-$ corresponden deflagraciones. Para cada una de esas ramas $|v_-|$ es una función multivaluada de $|v_+|$. Así, los signos \pm en (3.29) corresponden a soluciones débiles y fuertes. En el punto de Jouguet la raíz cuadrada en la ecuación (3.29) se anula.

A continuación se analizan las relaciones entre $|v_+|$ y $|v_-|$ para los tres tipos de transiciones descritas en la sección 3.2.2.2 (los llamados casos A, B, y C).

Caso A ($c_- = c_+$) Es la más simple generalización del *Bag*. Hay solo una velocidad del sonido $c_+ = c_- \equiv c_s$ (un solo parámetro $\nu = \nu_+ = \nu_-$) y $q = 1$ [dado por la ecuación (3.25)]. Se grafica $|v_+|$ vs $|v_-|$ en la figura 3.7 para varios valores de α_+ . El panel izquierdo corresponde al caso del *Bag*, $c_s = 1/\sqrt{3}$. La estructura general de las curvas es similar para cualquier valor de c_s . Las curvas superiores ($|v_+| > c_s$) corresponden a detonaciones y las inferiores ($|v_+| < c_s$) a deflagraciones. Las detonaciones débiles corresponden a $|v_-| > c_s$ y deflagraciones débiles a $|v_-| < c_s$.

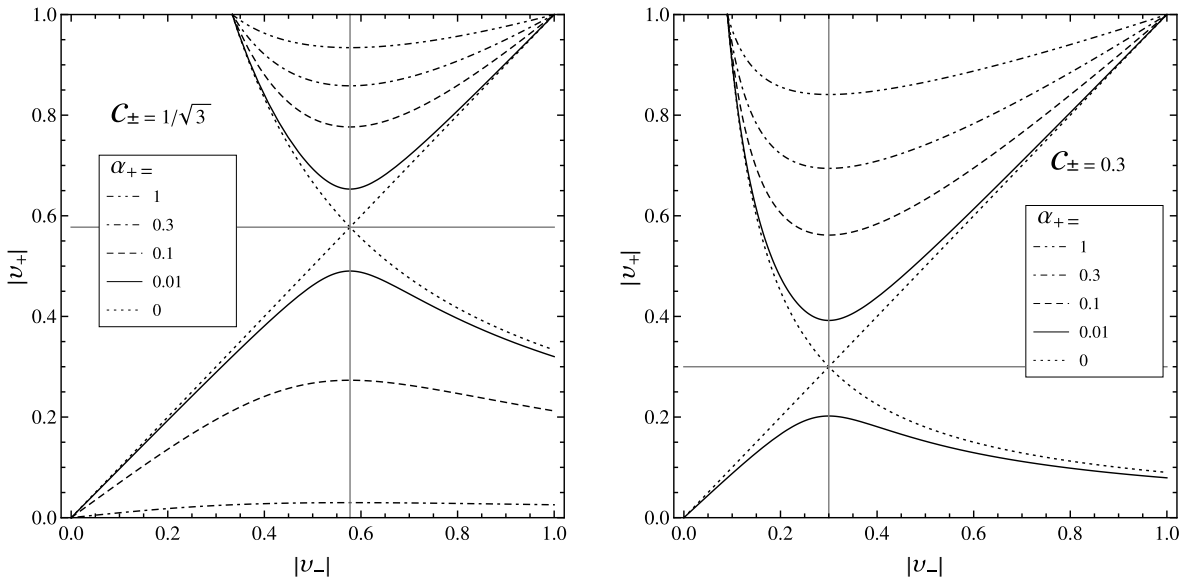


Figura 3.7: $|v_+|$ vs $|v_-|$ para el caso $c_+ = c_-$. Las líneas grises horizontales y verticales indican los valores $|v_{\pm}| = c_{\pm}$.

Si la temperatura de nucleación T_N es cercana a la crítica T_c , el calor latente L definido por la expresión (1.14) representa aproximadamente bien la energía liberada durante la transición, de la cual una parte iría a perturbación del fluido. Y cuanto mayor es L se libera más energía, se espera mayor perturbación en el fluido, es decir, una *hidrodinámica más fuerte*. Por definición (3.22), α_+ es proporcional a $\Delta\varepsilon$. Y en este caso, según la expresión (3.15), $\Delta\varepsilon$ es proporcional a la discontinuidad de la densidad de energía L . Entonces la variable α_+ está directamente relacionada a la *fuerza de la transición*,

$$\alpha_+ = c_s^2 \bar{L} \left(\frac{T_c}{T_+} \right)^\nu = c_s^2 \frac{L}{w_+} = c_s^2 \frac{\Delta a}{a_+} \left(\frac{T_c}{T_+} \right)^\nu \quad (3.31)$$

Para un dado T_+ , valores más altos de α_+ corresponden a transiciones más fuertes, es decir a valores más altos de L o Δa , mientras que para transiciones débilmente de primer orden (L y Δa pequeños) se tiene α_+ pequeño. Además, α_+ crece a medida que T_+ decrece, es decir, a medida que el sobreenfriamiento aumenta. Notar que la energía liberada a $T < T_c$ es $\Delta e > L$. Por lo tanto, se espera más fuerte apartamiento para valores más altos de α_+ . Esto se refleja en la figura 3.7. Cuando más altos los valores de α_+ , mayor es la diferencia entre $|v_+|$ y $|v_-|$. Esto significa, como es de esperarse, que las perturbaciones causadas por la pared de fluido son más fuertes para transiciones de fase más fuertes. Por el contrario, para $\alpha_+ \rightarrow 0$, las curvas (en la región débil) se aproximan a la línea de $|v_+| = |v_-|$.

Aunque un T_+ pequeño implique fuerte sobreenfriamiento, lo contrario no siempre es cierto, porque puede haber recalentamiento enfrente de la pared ($T_+ > T_N$). Así, en algunos casos puede tenerse $T_+ \simeq T_c$ e incluso $T_+ > T_c$ (que correspondería a un plasma con la fase “+” sobrecalentada localmente). En cualquier caso, T_+ nunca sería mucho más grande que T_c . Notar que el punto exacto $T_+ = T_c$, que corresponde a $\alpha_+ = c_s^2 \Delta a / a_+ \equiv \alpha_c$, no es un caso especial para la hidrodinámica de acuerdo a las ecuaciones (3.24-3.28). Para $T_+ \ll T_c$ (fuerte sobreenfriamiento) se tiene $\alpha_+ \gg 1$, mientras que para $T_+ \approx T_c$ (pequeño o moderado sobreenfriamiento) el valor de α_+ es esencialmente el parámetro $\frac{L}{w_+} \approx \bar{L}$. En el límite $\alpha_+ = 0$ la curva de detonación y la de deflagración se tocan en el punto de Jouguet. En principio, este limite correspondería a una transición de segundo orden (pues $L = \Delta a = 0$). No obstante, si se considera T_c fijo y se toma este limite queda una sola fase (ver la figura 3.4). Entonces, en este límite el modelo de aproximación considerado no da ninguna transición de fases.

Caso B: $c_- > c_+$ Se tiene $c_I = c_-$ y $c_{II} = c_+$. Una peculiaridad en este caso es que se puede tener $\Delta\varepsilon < 0$, luego $\alpha_+ < 0$. A pesar de eso, de acuerdo a la ecuación (3.16), en este caso $\Delta\varepsilon$ ya no es proporcional al calor latente L . Por lo tanto, no está directamente relacionado a la fuerza de la transición. Como consecuencia, en el limite $\alpha_+ = 0$ aún habrá una transición de primer orden con $L > 0$. Esto puede verse también en la figura 3.5 (panel derecho). Se puede escribir

$$\alpha_+ = \left(q c_-^2 \bar{L} - \frac{c_-^2 - c_+^2}{1 + c_-^2} \right) \left(\frac{T_c}{T_+} \right)^{\nu_+} = q c_-^2 \frac{L}{w_+} - \frac{c_-^2 - c_+^2}{1 + c_-^2} \left(\frac{T_c}{T_+} \right)^{\nu_+} \quad (3.32)$$

La ecuación (3.32) muestra que α_+ depende separadamente de L/w_+ y de la cantidad de sobreenfriamiento T_c/T_+ (en contraste con el caso A donde se tiene $\alpha_+ \propto L/w_+$). Las curvas de v_+ vs v_- para este caso son graficadas en la figura 3.8. Las curvas negras corresponden a valores positivos de α_+ (caso B1), mientras que las curvas rojas

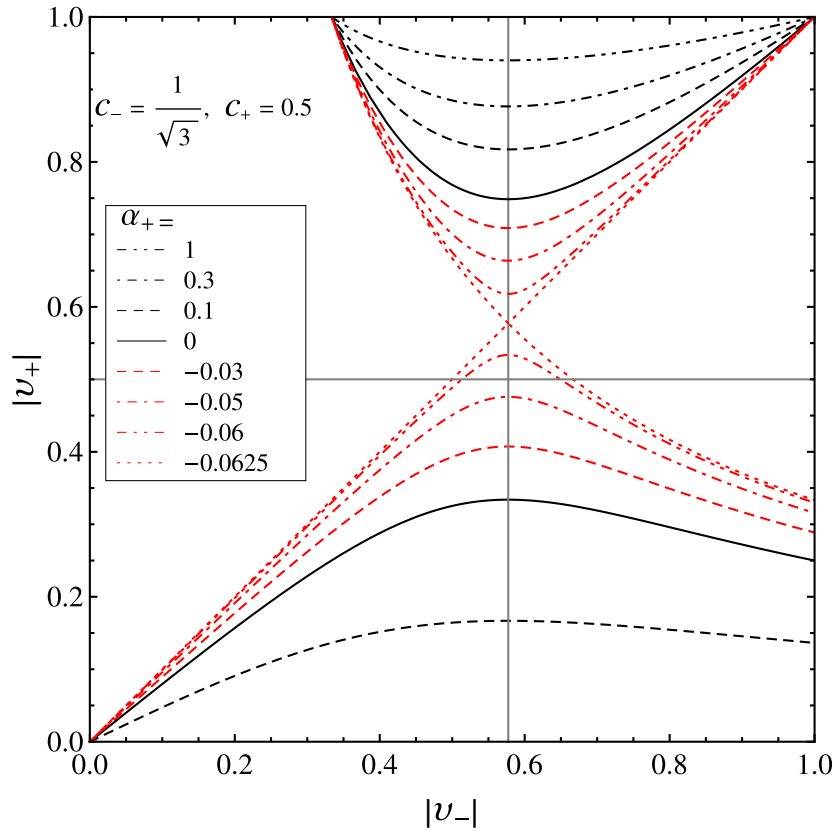


Figura 3.8: $|v_+|$ vs $|v_-|$ para $c_- > c_+$. En líneas grises horizontales y verticales se indican los valores $v_{\pm} = c_{\pm}$.

corresponden a valores negativos de α_+ (caso B2).

Como en el caso A, diferentes curvas pueden corresponder a diferentes valores de los parámetros a_+ y $\Delta\varepsilon$ o a diferentes valores de la variable T_+ , debido a la dependencia en una simple combinación de estos tres (que resulta ser la variable α_+). El caso B1 ($\Delta\varepsilon > 0$) se comporta muy parecido al caso A. Los valores altos de α_+ corresponden o a valores grandes de L o a grandes cantidades de sobreenfriamiento. Como consecuencia, mayor α_+ da mayor diferencia entre v_+ y v_- . Por lo tanto la fuerza de la hidrodinámica decrece cuando α_+ decrece. Sin embargo, el límite $\alpha_+ = 0$ aún corresponde a un L finito y nada relevante sucede a la hidrodinámica¹³. En este límite, el caso B1 coincide con el caso B2. En el caso B2 ($\Delta\varepsilon < 0$) la fuerza de la hidrodinámica continúa decreciendo al decrecer α_+ , el cual en este caso es negativo. El límite de una hidrodinámica extremadamente débil (correspondiente a la curva límite $|v_+| = |v_-|$) se alcanza para $\alpha_+ = \alpha_w$, donde¹⁴

$$\alpha_w = -(c_-^2 - c_+^2)/(1 + c_-^2) \quad (3.33)$$

Una forma simple de obtener este resultado es igualar la velocidad de Jouguet a c_- en la expresión (3.27) y despejar α_+ . Notar que este resultado coincide con tomar $L = 0$ y $T_+ = T_c$ en (3.32). No obstante, se puede llegar al límite débil también considerando

¹³Para $\alpha_+ = 0$, las relaciones v_+ con v_- y w_+ con w_- no dependen del valor de T_+ . Sin embargo, otras discontinuidades no dependen solamente de α_+ . Por ejemplo, la relación entre T_- y T_+ , debe obtenerse de $w_{\pm} = (1 + c_{\pm}^2)a_{\pm}T_{\pm}^{v_{\pm}}$.

¹⁴Subíndice “w” por *weak* (débil, en inglés).

una temperatura $T_+ = T_w \neq T_c$ tal que $\alpha_+ = \alpha_w$ [igualando (3.33) con (3.32)]

$$1 - \left[\frac{T_w}{T_c} \right]^{\nu_+} = \frac{c_-^2(1 + c_+^2)}{c_-^2 - c_+^2} \bar{L} \quad (3.34)$$

Esta expresión implica que $T_w < T_c$ si $\bar{L} \neq 0$. Significa que la curva punteada en la figura 3.8 se obtiene no solo en el límite $L = 0$ a $T_+ = T_c$, sino también con $L > 0$ para una cierta cantidad de sobreenfriamiento. Esto evidencia que cuando se habla de la “fuerza” de la transición o la hidrodinámica, es decir cuánto difieren $|v_+|$ y $|v_-|$, no necesariamente se está hablando de cuan grande o chico es L . En general esa fuerza depende de la energía liberada en la transición, pero L no representa ese valor salvo que ésta suceda a una temperatura cercana a T_c .

En general resulta más adecuado considerar la diferencia de energías entre las fases a la temperatura de nucleación. Parece posible entonces que, para el caso B2, la fuerza de la hidrodinámica en algún punto decrezca a medida que el sobreenfriamiento crece. Esto es porque al sobreenfriar, llegando cerca de la segunda temperatura crítica T'_c , las fases $+$ y $-$ vuelven a estar asociadas a mínimos de igual energía libre. Para alguna temperatura T_s tal que $T'_c < T_s < T_c$ la diferencia de presiones en el panel izquierdo de la figura 3.6 es máxima¹⁵. En la figura 3.9 se grafica la diferencia de energía libre, que es equivalente. Entonces para un T_N por arriba o por abajo la fuerza de la transición sería cada vez menor cuando más alejado de T_s se encontrara. Así, dicha temperatura es un vínculo físico para la temperatura de nucleación T_N . La separación máxima de los valores $\mathcal{F}_\pm(T)$ es dada por la condición $s_1(T_s) = s_2(T_s)$, que conduce a

$$T_s^{\nu_{\text{II}} - \nu_{\text{I}}} = \frac{1 + c_{\text{I}}^2}{1 + c_{\text{II}}^2} \frac{a_{\text{I}}}{a_{\text{II}}} \quad (3.35)$$

Definiendo $\alpha_s = \Delta\varepsilon / (a_+ T_s^{\nu_+})$, usando la cota máxima (3.18) para $|\Delta\varepsilon|$ y la definición (3.33) de α_w se tiene que $|\alpha_s| < (\varepsilon_- - \varepsilon_+)_{\text{máx}} / (a_+ T_s^{\nu_+}) = |\alpha_w|$. Esto implica que $T_w < T_s$. Y el caso límite $T_w = T_s$ solo se alcanzaría en el máximo de $|\Delta\varepsilon|$, es decir, en el límite $L = 0$, en el cual la transición de fase desaparece (figura 3.6, panel derecho).

Como consecuencia, la hidrodinámica puede volverse bastante extraña (en comparación al comportamiento más familiar del caso A) cerca del valor límite $\alpha_+ = \alpha_w$. Notar, en particular, que para deflagraciones puede tenerse $v_+ > c_+$, lo cual nunca ocurre en el caso A. Aunque sería interesante estudiar la hidrodinámica para T_+ cerca de T_w , se puede argumentar que es improbable para un sistema físico alcanzar tal situación. El sobreenfriamiento ocurre porque hay una barrera entre los mínimos ϕ_\pm de la energía libre $\mathcal{F}(\phi, T)$. Es importante remarcar que este modelo fenomenológico para la ecuación de estado solo describe las cantidades termodinámicas *en los mínimos* y no tiene información de la barrera que los separa. A pesar de eso, con el conocimiento de esos mínimos y una idea básica de lo que usualmente sucede en transiciones de primer orden, es posible imaginar qué sucede con la curva $\mathcal{F}(\phi, T)$. En la temperatura crítica T_c , los dos mínimos son degenerados, es decir, $\mathcal{F}_-(T_c) = \mathcal{F}_+(T_c)$, y la nucleación es imposible. Por debajo de T_c , ϕ_- se vuelve el mínimo absoluto de \mathcal{F} , y la fase $+$ se vuelve metaestable. Así, se tiene $\mathcal{F}_-(T) < \mathcal{F}_+(T)$. Generalmente, a medida que T desciende y el valor $\mathcal{F}_-(T)$ se aleja de $\mathcal{F}_+(T)$, la barrera entre los mínimos se achica y la

¹⁵Subíndice “s” por la densidad de entropía, ya que si se busca maximizar $\Delta P = P_-(T) - P_+(T)$ se debe igualar a cero su derivada, y como $s = \partial P / \partial T$ eso implica igualar las densidades s .

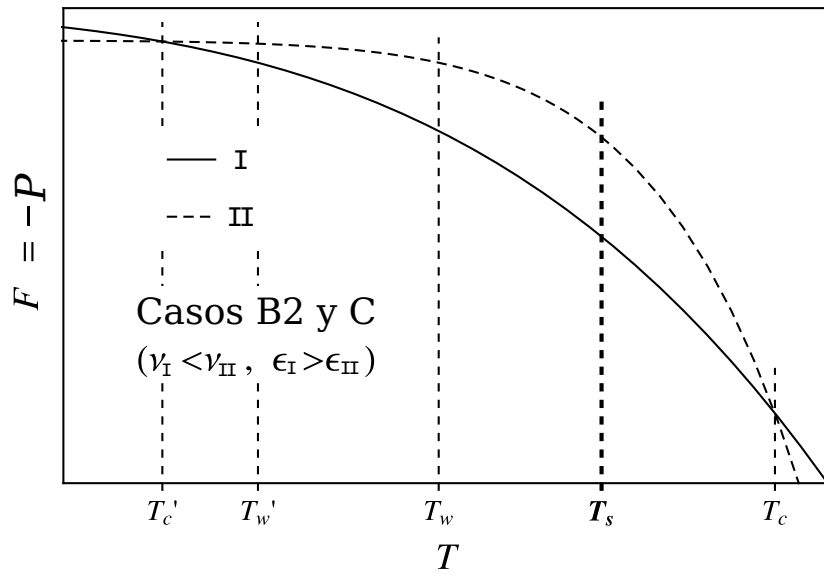


Figura 3.9: La densidad de energía libre $\mathcal{F}(T) = -P(T)$ correspondiente al panel izquierdo de la figura 3.6.

nucleación se vuelve más probable. La nucleación de burbujas efectivamente comienza cuando una cierta cantidad de sobreenfriamiento es alcanzada, tal que la barrera es suficientemente pequeña y los valores $\mathcal{F}_{\pm}(T)$ están suficientemente separados. En algunos casos puede suceder que la barrera nunca se haga suficientemente pequeña y el sistema permanezca trabado en la fase metaestable. En particular si la diferencia de energía libre entre los mínimos no es muy grande la barrera no necesita ser grande para “impedir” la transición, porque las fases tendrían aproximadamente la misma presión y esa barrera actuaría a nivel efectivo como una tensión superficial que impide la expansión de la burbuja. En el caso B2, sería eso lo que sucede si se llega a la temperatura T_s . La barrera no se reduce lo suficiente al disminuir la temperatura, porque hay otra transición de fases a la temperatura T'_c . Debajo de la temperatura T_s , $\mathcal{F}_-(T)$ y $\mathcal{F}_+(T)$ se aproximan uno al otro nuevamente (ver la figura 3.9). Al suceder esto, la nucleación se vuelve menos probable, y en $T = T'_c$ ésta no es posible en absoluto (los mínimos vuelven a ser degenerados)¹⁶. Por lo tanto, esperando eso, si la nucleación de burbujas no comienza antes que T decrezca por debajo de T_s , entonces la transición ya no debería suceder. En este trabajo se asume que la temperatura de nucleación (que es un parámetro libre) satisface $T_N \geq T_s$, entonces $T_N \geq T_s > T_w$. Y en general, de lo discutido en la sección 2.5.4, $T_+ = T_N$ en detonaciones débiles y $T_+ > T_N$ cuando hay frente de choque, por lo que T_+ no alcanzaría el límite débil.

Caso C: $c_- < c_+$ Para una transición de fase a temperatura T'_c se tiene $c_- < c_+$, con $c_- = c_{II}$ y $c_+ = c_I$. En este caso se tiene $\Delta\varepsilon > 0$ (ver la figura 3.6) y, por lo tanto, La variable $\alpha_+ \equiv \Delta\varepsilon/(a_+ T_+^{\nu_+})$ es siempre positiva. Además, el límite hidrodinámico débil

¹⁶A temperatura crítica solo podría suceder una transición de segundo orden con $P_+ = P_-$ y $\partial P_+/\partial T = \partial P_-/\partial T$, que no es el caso que aquí se considera donde la derivadas en el cruce de la figura 3.9 son distintas.

$v_+ = v_-$ se alcanza en este caso para un valor positivo (no nulo)¹⁷,

$$\alpha'_w = (c_+^2 - c_-^2)/(1 + c_-^2). \quad (3.36)$$

Se puede escribir la variable α_+ como

$$\alpha_+ = \left(q c_-^2 \bar{L}' + \frac{c_+^2 - c_-^2}{1 + c_-^2} \right) \left(\frac{T'_c}{T_+} \right)^{\nu_+} = q c_-^2 \frac{L'}{w_+} + \frac{c_+^2 - c_-^2}{1 + c_-^2} \left(\frac{T'_c}{T_+} \right)^{\nu_+} \quad (3.37)$$

Las curvas de $|v_+|$ vs $|v_-|$ para este caso están graficadas en la figura 3.10. Como en

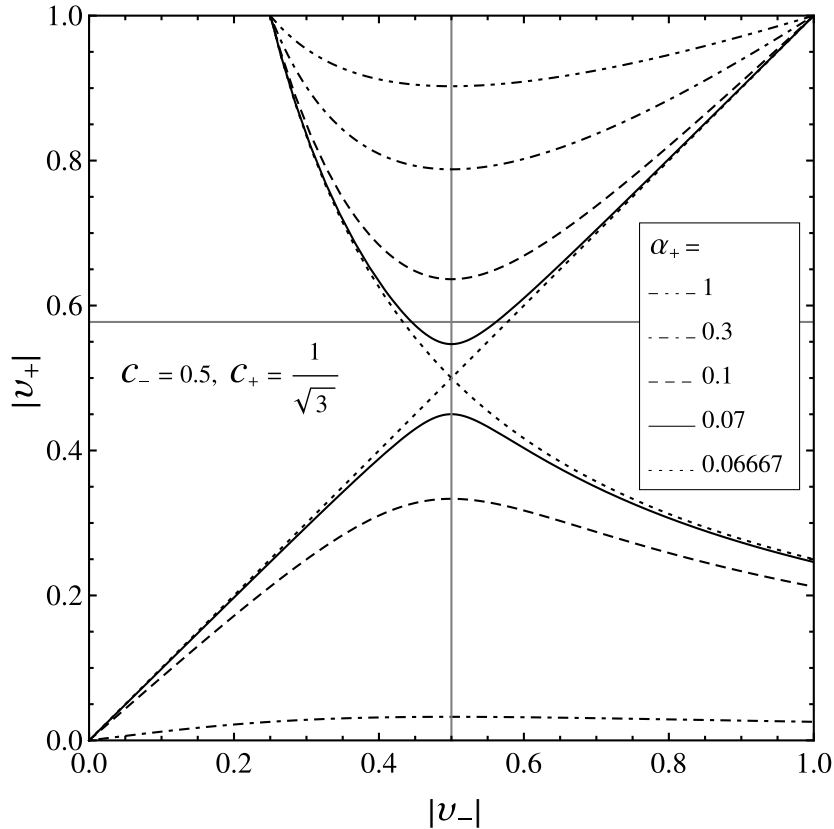


Figura 3.10: $|v_+|$ vs $|v_-|$ para $c_- < c_+$. Las líneas grises horizontales y verticales indican los valores $|v_{\pm}| = c_{\pm}$.

el caso B2, se ve que la hidrodinámica se vuelve poco familiar cerca del límite débil. Como se puede ver en las figuras 3.7, 3.8 y 3.10, en las curvas de detonaciones y deflagraciones los valores de $|v_+|$ están limitados por c_- en vez de c_+ . Esto es porque esta cota está dada por las condiciones $|v_+| = v_J(\alpha_+)$ (el extremo de $|v_+|$) y $|v_+| = |v_-|$ (el límite débil), lo cual implica $|v_+| = c_-$. Para el caso presente, como la velocidad del sonido es más grande en la fase +, se pueden tener detonaciones con $|v_+| < c_+$, como puede observarse en la figura 3.10. Esto correspondería a detonaciones que son subsónicas con respecto al fluido en la fase +. Tales detonaciones subsónicas son en principio posibles cerca del límite débil. Puede verse que este límite corresponde a la

¹⁷Aunque las ecuaciones (3.33) y (3.36) parecen iguales, los subíndices \pm tienen diferente significado en cada caso. Se tiene $\alpha_w = -(c_1^2 - c_{II}^2)/(1 + c_1^2)$ y $\alpha'_w = (c_1^2 - c_{II}^2)/(1 + c_{II}^2)$. Notar que los numeradores son opuestos y los denominadores son diferentes.

temperatura $T_+ = T'_w > T'_c$, como se indica en la figura 3.9. De hecho, igualando las ecuaciones (3.37) y (3.36) se tiene

$$\left[\frac{T'_w}{T'_c} \right]^{\nu_+} - 1 = \frac{c_-^2(1 + c_+^2)}{c_-^2 - c_+^2} \bar{L}' > 0. \quad (3.38)$$

Estas detonaciones para las cuales el fluido entrante es subsónico ($|v_+| < c_+$, como se explica en la sección 2.5.4), son precedidas por una onda de choque la cual recalienta el fluido enfrente de la pared.

3.3.1.2. Frentes de choque

Para el *Modelo* c_{\pm} , recordando que la ecuación de estado es la misma de ambos lados de la discontinuidad, las ecuaciones (2.54) pueden escribirse en la forma

$$v_1 v_2 = c_s^2, \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{T_2^\nu + c_s^2 T_1^\nu}{T_1^\nu + c_s^2 T_2^\nu} \quad (3.39)$$

que para el caso del *Bag* toma la forma

$$v_1 v_2 = \frac{1}{3}, \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{3T_2^4 + T_1^4}{3T_1^4 + T_2^4} \quad (3.40)$$

donde v_1 y v_2 son las velocidades (negativas, hacia el centro) en *el sistema de referencia del frente de choque*. Notar que la primera de las ecuaciones (3.39) implica que, en el sistema de referencia del frente de choque, una de las velocidades del fluido es subsónica y la otra supersónica. Como se explica en las secciones 2.4.3 y 2.5.1, como un elemento de fluido incrementa su entropía al atravesar discontinuidades, se concluye que la velocidad del fluido debe tener un salto negativo en el frente de choque. También se argumenta que un frente de choque solo puede propagarse por delante de un frente de transición. Además, respecto al centro de la burbuja, enfrente de un choque se tiene $\tilde{v}_2 = 0$. Entonces, el frente de choque se propaga con una velocidad dada por $v_{\text{sh}} = |v_2|$. Por lo tanto, la primera de las ecuaciones (3.39) da la relación

$$\tilde{v}_1 = \frac{c_+^2}{1 - c_+^2} \frac{v_{\text{sh}}^2 / c_+^2 - 1}{v_{\text{sh}}} \quad (3.41)$$

(teniendo en cuenta que el choque se propaga en la fase +). Para el *Bag* sería

$$\tilde{v}_1 = \frac{3 v_{\text{sh}}^2 - 1}{2 v_{\text{sh}}} \quad (3.42)$$

Equivalentemente a la (3.41) se tiene

$$v_{\text{sh}} = \frac{1 - c_+^2}{2} \tilde{v}_1 + \sqrt{\left(\frac{1 - c_+^2}{2} \tilde{v}_1 \right)^2 + c_+^2} \quad (3.43)$$

la cual verifica que el frente de choque es supersónico, $v_{\text{sh}} > c_+$. Para el *Bag* sería

$$v_{\text{sh}} = \frac{\tilde{v}_1}{3} + \sqrt{\left(\frac{\tilde{v}_1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}} \quad (3.44)$$

Por otro lado, la segunda de las ecuaciones (3.39) da la relación

$$\frac{T_1^{\nu+} - T_2^{\nu+}}{\sqrt{T_1^{\nu+} + c_+^2 T_2^{\nu+}} \sqrt{T_2^{\nu+} + c_+^2 T_1^{\nu+}}} = \frac{\tilde{v}_1}{c_+} > 0 \quad (3.45)$$

Esto confirma que efectivamente el fluido está recalentado detrás del frente de choque, pues implica $T_1 > T_2$. Equivalentemente, se tiene

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\nu+} = \frac{c_+^2(1 - v_{\text{sh}}^2)}{v_{\text{sh}}^2 - c_+^4} \quad (3.46)$$

3.3.2. Perfiles en distintas geometrías de burbuja

Esta sección con sus respectivos apartados contiene análisis y cálculos, referentes a la forma que poseen los perfiles de fluido posibles en las diferentes simetrías de burbuja, que hemos realizado en [1].

Aquí se ejemplifican los cálculos descritos con generalidad en la sección 2.5.4. Se contrastan las soluciones para distintas geometrías de burbuja mostrando que, a grandes rasgos, son análogas y cualitativamente similares. Esto es un paso previo para mostrar que, como se expone más adelante en la sección (3.6.2), el factor de eficiencia también es poco sensible a la geometría de la burbuja. Para este estudio se considera por simplicidad solo el caso del *Bag*, las conclusiones razonablemente se espera que sean válidas en general. Los cálculos para las simetrías esférica y cilíndrica son ineludiblemente numéricos. Se ve más adelante, en la sección 3.3.3, como obtener los perfiles de la simetría plana analíticamente para el *Modelo* c_{\pm} en general.

La aproximación del *Bag* es dada por las ecuaciones (2.84), tomando $\Delta\varepsilon > 0$ y $a_+ > a_- > 0$. Por simplicidad en la notación se toma $\varepsilon_- = 0$ y $\varepsilon_+ = \Delta\varepsilon \equiv \varepsilon$ (ya que la hidrodinámica sólo depende de $\Delta\varepsilon$). En este modelo, como se explica en la sección 3.2.2.2, la temperatura crítica está dada por $T_c = (3\varepsilon/\Delta a)^{1/4}$, y el calor latente está relacionado con la densidad de energía de vacío por $L = 4\varepsilon$. En ambas fases la velocidad del sonido está dada por $c_s^2 = 1/3$, y reemplazándola en la expresión (2.51) el perfil de entalpía queda como

$$\frac{w_b}{w_a} = \exp \left[- \int_{\xi_a}^{\xi_b} 4\gamma^2 \mu(\xi, v) v' d\xi \right] \quad (3.47)$$

Notar que, en este modelo, las ecuaciones para los perfiles de velocidad y entalpía son las mismas en ambas fases. En un modelo con velocidad del sonido dependiente de las propiedades termodinámicas, que varían punto a punto, esto no se cumple. Como lejos, por delante del frente de transición, la temperatura se mantiene igual a T_N , la condición de contorno para la entalpía en esa región es $w = w_N \equiv w_+(T_N) = \frac{4}{3}a_+T_N^4$. De las que se mencionan en la sección 2.5, tres tipos de soluciones son posibles en el caso del *Bag*, detonaciones débiles, deflagraciones débiles y deflagraciones supersónicas de Jouguet. La detonación de Jouguet como caso límite de las detonaciones débiles

también está incluida, pero sin frente de choque por delante, ya que no se cumplen la condición necesaria $|v_+| < c_s$ que se explica en la sección 2.5.4.3.

3.3.2.1. Detonaciones débiles

De la discusión en la sección 2.5.4 se sabe que este tipo de solución debe constar únicamente de una cola de rarefacción, constituida por una solución continua creciente a partir de $v = 0$ en $\xi = c_-$, y que delante de la pared el fluido se encuentra sin perturbar. Con el modelo del *Bag*, la condición delante de la pared (2.65) para w_+ es equivalente a $\alpha_+ = \alpha_N \equiv \alpha(T_N) = \varepsilon/(a_+ T_N^4)$ y la velocidad $v_- = -|v_-|$ detrás de la pared está dada por la expresión (3.30) en función de $|v_+| = v_w$ y α_+ . Siguiendo los lineamientos detallados en la sección 2.5.4 se calculan los perfiles. La cola de rarefacción es resultado de resolver la ecuación (2.47) con la condición $v(\xi_w) = \tilde{v}_-$, siendo $\tilde{v}_- = \mu(-v_w, v_-)$. Para *armar* la cola en el caso plano, se requiere empalmar un tramo de solución $v_{\text{inf}}(\xi)$ entre $c_s < \xi < \xi_0$ y una solución constante $v = \tilde{v}_-$ entre $\xi_0 < \xi < \xi_w$, donde ξ_0 se despeja de $v_{\text{inf}}(\xi_0) = \tilde{v}_-$ (más detalle en sección 3.3.3.1). La figura 3.11 (izquierda) muestra el perfil de velocidad para las tres geometrías de pared. Como indica la definición (2.95), para calcular la densidad de energía “cinética” $e_v = wv^2\gamma^2$ se requiere también calcular el perfil de densidad de entalpía, dado por la expresión (3.47) y la condición (2.66). La figura 3.11 (derecha) muestra el perfil de e_v para detonaciones en las tres geometrías de pared.

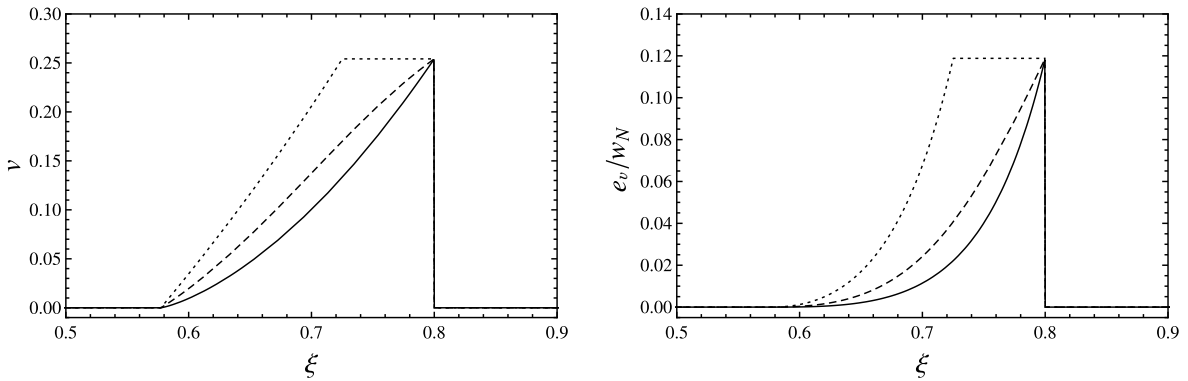


Figura 3.11: Izquierda: el perfil de velocidades del fluido en una detonación con $v_w = 0,8$ y $\alpha_N = 0,1$ para una pared esférica (solida), cilíndrica (a trazos), y plana (punteada). Derecha: los correspondientes perfiles de densidad de energía cinética.

3.3.2.2. Deflagraciones débiles

Si la pared se ubica en $\xi_w < c_s$ es precedida por un frente de choque en $\xi_{\text{sh}} > c_s$. Detrás de la pared la velocidad del fluido se anula. Entonces, $\tilde{v}_- = 0$ y (como $\tilde{v}_+ > 0$) $|v_+| < |v_-| = v_w < c_s$, el proceso hidrodinámico es una deflagración débil (en el caso límite $v_w = c_s$, se tiene una deflagración de Jouguet). Valen entonces, detrás de la pared y delante del frente de choque, las condiciones dadas por (2.67) y (2.68): $v_- = -v_w$, $\alpha_2 = \alpha_N$ y $v_{\text{sh}} = |v_2|$. Como se expone en la sección 2.5.4, calcular un perfil con frente de choque es lo que resulta más laborioso. A continuación se describen resumidamente los pasos de cálculo numérico seguidos para determinar forma y límites de las ondas de

choque que se ilustran en las figuras de esta sección¹⁸.

De la ecuación en el frente de choque (3.40) se obtiene

$$\alpha_1 = \frac{3(1 - v_{sh}^2)}{9v_{sh}^2 - 1} \alpha_N. \quad (3.48)$$

Equivalentemente, usando la ecuación (3.44) para reemplazar $v_{sh}(\tilde{v}_1)$, se tiene

$$\alpha_1 = \alpha_1(\tilde{v}_1, \alpha_N) = \frac{\tilde{\gamma}_1^2}{3} \left(3 + 5\tilde{v}_1^2 - 4\tilde{v}_1 \sqrt{3 + \tilde{v}_1^2} \right) \alpha_N. \quad (3.49)$$

De la ecuación en el frente de transición (3.26) se obtiene

$$\alpha_+ = \gamma_+^2 \left(v_+^2 + \frac{1}{3} - v_+ v_- - \frac{1}{3} v_+ / v_- \right), \quad (3.50)$$

donde $v_- = -v_w$ y $v_+ = \mu(v_w, \tilde{v}_+)$, lo que conduce a

$$\alpha_+ = \alpha_+(\tilde{v}_+, v_w) = \frac{\tilde{\gamma}_+^2 \tilde{v}_+}{3v_w} (2v_w \tilde{v}_+ + 1 - 3v_w^2). \quad (3.51)$$

Dada la monotonía de la solución correspondiente al frente de choque (ver figura 2.1), la ecuación (2.47) para el perfil $v(\xi)$ en forma inmediata se re interpreta como una ecuación para perfiles $\xi(v)$. Al resolverse numéricamente, para cada valor de \tilde{v}_1 da una solución $\xi(v; \tilde{v}_1)$, la cual contiene al punto $(\tilde{v}_1, \xi_{sh}(\tilde{v}_1))$. Una vez obtenida la aproximación para la función¹⁹ $\xi(v; \tilde{v}_1)$ se procede del siguiente modo: En (3.51), se reemplaza y/o evalúa $v_w = \xi_w \rightarrow \xi(\tilde{v}_+; \tilde{v}_1)$, lo que conduce a un $\alpha_+(\tilde{v}_+, \tilde{v}_1) \equiv \alpha_+(\tilde{v}_+, \xi(\tilde{v}_+; \tilde{v}_1))$. Además, como en el *Bag* se cumple que $w_a/w_b = \alpha_b/\alpha_a$ y en la expresión (3.47) puede reescribirse la integral respecto v (pues $\frac{dv}{d\xi} d\xi = dv$) entre los límites \tilde{v}_1 y \tilde{v}_+ , integrando se tiene una dependencia solo en esas variables,

$$\frac{\alpha_+}{\alpha_1} = \frac{w_1}{w_+} = \exp \left[- \int_{\tilde{v}_+}^{\tilde{v}_1} 4\gamma^2 \mu(\xi(v; \tilde{v}_1), v) dv \right] \equiv \mathcal{F}(\tilde{v}_+, \tilde{v}_1). \quad (3.52)$$

Entonces, juntando $\alpha_1 = \alpha_1(\tilde{v}_1, \alpha_N)$, $\alpha_+ = \alpha_+(\tilde{v}_+, \tilde{v}_1)$ y $\frac{\alpha_+}{\alpha_1} = \mathcal{F}(\tilde{v}_+, \tilde{v}_1)$ se despeja $\tilde{v}_+(\alpha_N, \tilde{v}_1)$ con la que también se obtiene $\xi_w(\alpha_N, \tilde{v}_1) \equiv \xi(\tilde{v}_+(\alpha_N, \tilde{v}_1); \tilde{v}_1)$. Pero el *verdadero* parámetro libre es $v_w = \xi_w$, la anterior curva puede invertirse para obtener $\tilde{v}_1(v_w, \alpha_N)$ y con esta $\tilde{v}_+(v_w, \alpha_N) \equiv \tilde{v}_+(\alpha_N, \tilde{v}_1(v_w, \alpha_N))$. Una vez obtenidos los puntos (ξ_w, \tilde{v}_+) y (ξ_{sh}, \tilde{v}_1) (entre los cuales se encuentra la onda de choque) se puede usar cualquiera de ellos para calcular el perfil $v(\xi)$ como solución de (2.47).

Una vez obtenido el perfil $v(\xi)$, para calcular el perfil de la densidad de energía cinética e_v definida por (2.95) solo se requiere determinar el perfil de densidad de entalpía. Como $\alpha_1/\alpha_N = w_N/w_1$, de la expresión (3.48) se obtiene

$$w_1 = \frac{9v_{sh}^2 - 1}{3(1 - v_{sh}^2)} w_N, \quad (3.53)$$

¹⁸Son los que nos resultaron de fácil implementación con el programa *Wolfram Mathematica*.

¹⁹Independientemente de la implementación implica reiteradas resoluciones y valuaciones para distintos valores de \tilde{v}_1 y v .

donde²⁰ $w_N/\varepsilon = 4/(3\alpha_N)$ y v_{sh} a esta altura ya se encuentra calculado para cierto valor de los parámetros v_w y α_N . Integrando (3.47) desde ξ_{sh} hasta cualquier posición ξ de la onda de choque²¹, se obtiene $w(\xi)/w_1$. Esto completa todos los ingredientes para calcular el perfil de densidad de energía cinética e_v .

La figura 3.12 muestra los perfiles de velocidad y densidad de energía cinética para una deflagración subsónica en las tres geometrías de pared.

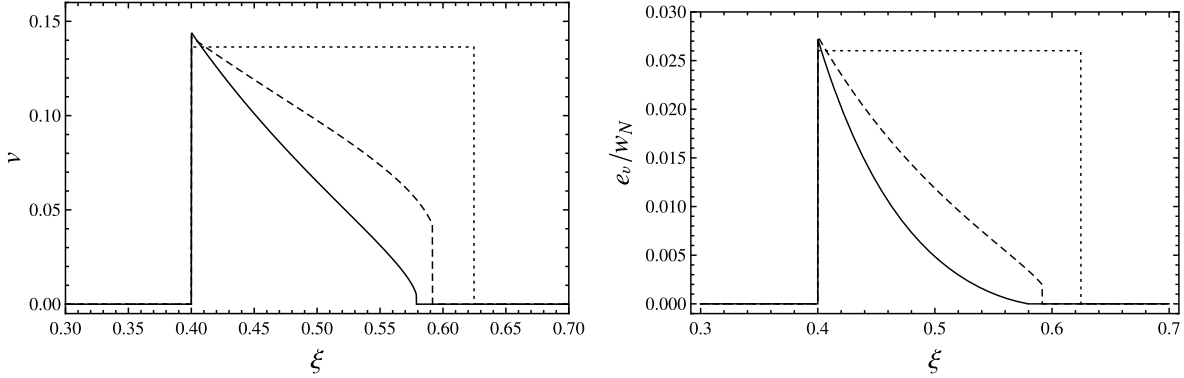


Figura 3.12: Izquierda: perfil de velocidades del fluido en una deflagración con $v_w = 0,4$ y $\alpha_N = 0,1$ para una pared esférica (solida), cilíndrica (a trazos), y plana (punteada). Derecha: los correspondientes perfiles de densidad de energía cinética.

3.3.2.3. Deflagraciones de Jouguet

Si la pared se encuentra ubicada en $c_s < \xi_w < v_J^{det}$, el frente de transición es precedido por un frente de choque en $\xi_{sh} > \xi_w$, y es antecedido por una cola de rarefacción que se anula en $\xi = c_s$. Por lo tanto, ambas velocidades \tilde{v}_+ y \tilde{v}_- son no nulas (ver la figura 3.13). En este caso las condiciones de contorno que se modifican respecto a detonaciones y deflagraciones débiles son las dadas en (2.70), $v_- = -c_-$ y $\alpha_2 = \alpha_N$. Como consecuencia la ecuación (3.50) se vuelve $\alpha_+ = \gamma_+^2 (v_+ + 1/\sqrt{3})^2$, y la ecuación (3.51) es remplazada por

$$\alpha_+ = \alpha_+(\tilde{v}_+, v_w) = \frac{\tilde{\gamma}_+^2 \tilde{\gamma}_w^2}{3} \left[1 - \sqrt{3} v_w - \tilde{v}_+(v_w - \sqrt{3}) \right]^2 \quad (3.54)$$

A partir de este punto se procede igual que con deflagraciones débiles para obtener el perfil de velocidades del frente de choque. El perfil de densidad de entalpía a lo largo de la onda de choque está determinado por (3.47) y el valor w_1 en el frente de choque, que se expresa en función de w_N (o α_N) usando la ecuación (3.53). El perfil de velocidades de la cola de rarefacción es similar al de una detonación, pero en particular para este caso la condición en la pared es $v(\xi_w) = \tilde{v}_- = \mu(-v_w, -c_-)$. El perfil de entalpía detrás de la pared se obtiene integrando (3.47) y fijando la condición $w(\xi_w) = w_-$. A su vez, la expresión (2.53) establece

$$w_- = (2/\sqrt{3})|v_+|\gamma_+^2 w_+, \quad (3.55)$$

²⁰Notar la conveniencia, en todo este cálculo, de trabajar con α en vez de w , no resulta necesario explicitar ε sino hasta el punto donde debe establecerse la escala de energía.

²¹Pequeño abuso de notación, no confundirla con la variable de integración *muda*.

con $v_+ = \mu(v_w, \tilde{v}_+)$, siendo \tilde{v}_+ y w_+ obtenidos de la resolución del frente de choque.

La figura 3.13 muestra los perfiles de velocidad y densidad de energía cinética para deflagraciones supersónicas en las tres geometrías de pared.

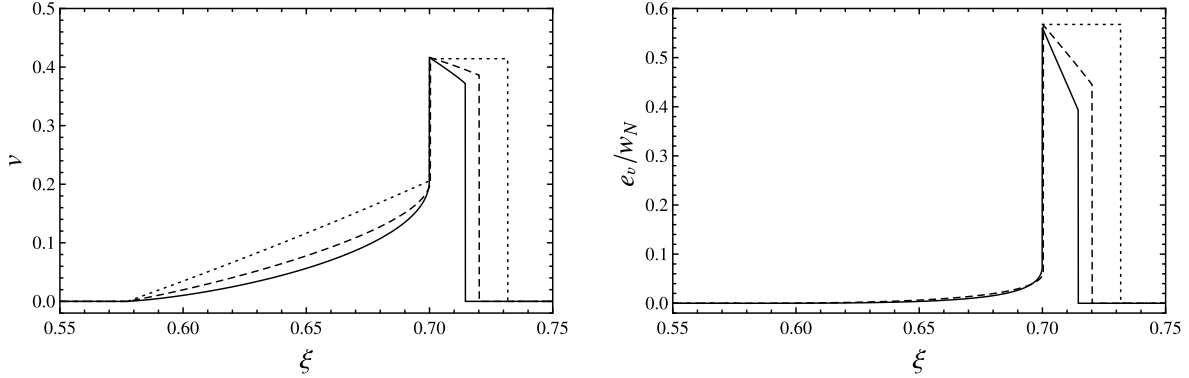


Figura 3.13: Izquierda: el perfil de velocidad del fluido en una deflagración con $v_w = 0,7$ y $\alpha_N = 0,1$ para una pared esférica (sólida), cilíndrica (a trazos), y plana (punteado). Derecha: los correspondientes perfiles de densidad de energía cinética.

3.3.3. Perfiles de burbujas planas (resolución analítica)

El contenido de esta sección 3.3.3 con sus respectivas subsecciones integra cálculos y resultados, referentes a la determinación analítica de los perfiles de fluido posibles para burbujas con simetría plana, que hemos realizado primeramente en el trabajo publicado [1], para el *Bag*, y posteriormente extendido al *Modelo* c_{\pm} en [3].

En esta sección se considera la ecuación de estado (3.8), que incluye la del *Bag* como parte del *caso A*, el cual se introduce en la sección 3.2.2.2. Para simetría plana se supone un frente de transición (pared de burbuja) plano moviéndose en una dirección $+X$ y velocidad de fluido solo con componente en esa dirección y sentido. Como se muestra en las figuras de la sección 3.3.2, los perfiles de fluido no son idénticos en las tres simetrías (plana, cilíndrica, esférica), aunque cualitativamente parecidos. Siempre pueden resolverse las ecuaciones de hidrodinámica numéricamente, pero en el caso de la simetría plana es posible obtener los resultados de forma analítica, reduciendo considerablemente el tiempo de cálculo y, en algunas puntos, permitiendo un mejor seguimiento de las dependencias, lo que facilita la interpretación física.

En este caso la “burbuja” de $1 + 1$ dimensiones consiste en dos paredes planas en las posiciones $x = \pm v_w t$ y posee un volumen *infinito* ya que formalmente se calcularía como $\mathcal{A} \cdot 2|x|$, donde \mathcal{A} es el área *infinita* de una cara plana. El sistema es simétrico en ambos planos, y para este estudio basta considerar solo el movimiento de una pared moviéndose hacia la derecha (eje X , sentido positivo). Las soluciones de la ecuación de velocidad de fluido son las dadas en la expresión (2.49). Por lo extensamente discutido en las secciones 2.4.2, 2.4.3 y 2.5 se descarta la solución $v_{\text{sup}}(\xi)$ y todos los tramos de solución constante por encima de ésta. Además, la solución $v_{\text{inf}}(\xi)$ representa a la cola de rarefacción entorno a $\xi = c_s$. Por tal motivo resulta natural renombrarla como $v_{\text{rar}} \equiv v_{\text{inf}}$. Entonces todo perfil de velocidad posible se construye a partir del empalme

de las soluciones continuas

$$\begin{aligned} v(\xi) &\equiv \text{cte} \\ v_{\text{rar}}(\xi) &= \mu(-\xi, -c_-) \end{aligned} \quad (3.56)$$

La primera, es una constante arbitraria la cual tiene que ser determinada por condiciones de contorno o de empalme en discontinuidades. En contraste, la segunda, se encuentra fijada y parametrizada con $c_s = c_-$ porque esta solución solo es físicamente posible por detrás de la pared en la fase “-”. Estas soluciones se ejemplifican para el *Bag* en la figura 2.1 (panel izquierdo), o con más detalle en la figura 3.14. Por lo discutido en las secciones 2.4.2, 2.4.3 y 2.5, solo se necesita considerar el cuadrante $\xi \geq 0$ y $v \geq 0$ (en torno a la pared opuesta en $\xi = -\xi_w$ se construiría el perfil con las soluciones *espejadas*) y por arriba de la curva punteada $v(\xi) \equiv \xi$ no están permitidas soluciones ya que contradirían la hipótesis de flujo estacionario. Además con la línea a trazos se marca la curva $\tilde{v}_1(\xi_{\text{sh}})$ dada por la expresión (3.41).

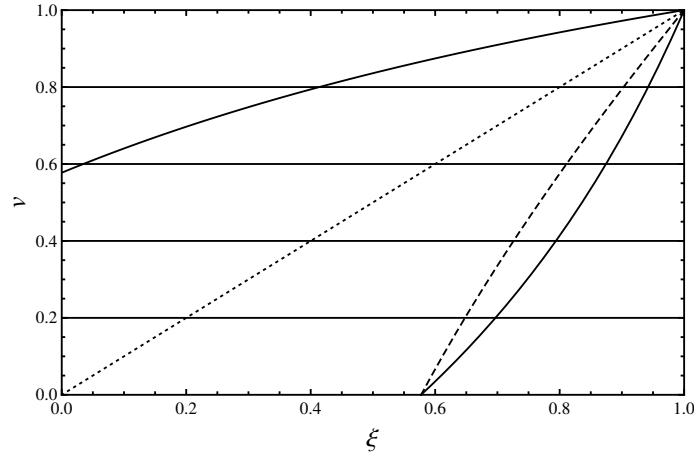


Figura 3.14: Soluciones a la ecuación de velocidad de fluido en una fase con velocidad del sonido constante ($c_s = 1/\sqrt{3}$) para el caso plano (líneas solidas). La línea punteada es la curva $v(\xi) \equiv \xi$. Las soluciones físicas están bajo esta curva. La línea guionada corresponde a valores de velocidad de fluido $\tilde{v}_1(\xi_{\text{sh}})$ en el frente de choque.

Para las soluciones $v = \text{cte}$ se tiene entalpía constante, mientras que para la solución v_{rar} se tiene, como caso particular de la expresión (2.51), [92, 93, 114, 118]

$$w_{\text{rar}}(\xi) = w_0 \exp \left[\int_{\xi_0}^{\xi} \left(\frac{1}{c_-^2} + 1 \right) c_- \gamma^2 \frac{dv}{d\xi_*} d\xi_* \right] \quad (3.57)$$

donde $w_0 = w(\xi_0)$, la densidad de entalpía en una posición de referencia ξ_0 . Aquí ξ_* es una variable muda de integración, y aquí se tiene en cuenta que $\mu(\xi_*, v_{\text{rar}}(\xi_*)) = \mu(\xi_*, \mu(-\xi_*, -c_-)) = -c_-$.

En un caso más general se tendría $c_s(T)$ (no constante) y v_{rar} tendría la misma forma que en (3.56) pero no estaría completamente determinado hasta no conocerse $c_s(\xi)$. En tal situación con la ecuación de estado se podrían calcular $w = w(T)$ y $c_s = c_s(T)$, insertar la solución v_{rar} (que depende de c_s) y $w(T)$ en la expresión (3.57) para obtener una ecuación integral de $T(\xi)$. Entonces, insertando $T(\xi)$ en $c_s(T)$ se obtendría $c_s(\xi)$ e insertando $c_s(\xi)$ en v_{rar} se tendría $v(\xi)$ completamente determinado,

para la simetría plana con cualquier ecuación de estado.

El caso aquí en consideración con $c_s = c_-$ constante es mucho más simple, porque la expresión para v_{rar} en (3.56) ya da el perfil de velocidades mientras que la ecuación (3.57) da $w(\xi) = w[v(\xi)]$. Entonces, haciendo el cambio de variable $\frac{dv}{d\xi_*} d\xi_* = dv$ en la expresión (3.57), se tiene

$$w_{\text{rar}}(\xi) = w_0 \exp \left[\nu_- c_- \int_{\tilde{v}_0}^{v_{\text{rar}}(\xi)} \frac{dv}{1-v^2} \right] = w_0 \left(\frac{1-\tilde{v}_0}{1+\tilde{v}_0} \frac{1+v_{\text{rar}}(\xi)}{1-v_{\text{rar}}(\xi)} \right)^{\frac{c_- \nu_-}{2}} \quad (3.58)$$

Insertando la ecuación (3.56) en la (3.58), se obtiene

$$\frac{w_{\text{rar}}(\xi)}{w_0} = \left(\frac{1-c_-}{1+c_-} \frac{1-\tilde{v}_0}{1+\tilde{v}_0} \frac{1+\xi}{1-\xi} \right)^{c_- \nu_- / 2} \quad (3.59)$$

donde los valores $w_0 = w(\xi_0)$ y $\tilde{v}_0 = v_{\text{rar}}(\xi_0)$, para un $c_- < \xi_0 < \xi_w$ deben suministrarse para que esta expresión suministre el valor de la entalpía en cualquier otro punto ξ donde valga la solución $v_{\text{rar}}(\xi)$.

Las condiciones de contorno expuestas en la sección (2.4.2) requieren que la velocidad del fluido se anule lejos por delante y por detrás de la pared, y que la temperatura lejos por delante esté dada por la de nucleación T_N [por lo tanto, la densidad de entalpía está dada por $w_N = w_+(T_N)$]. Por otro lado, se tienen condiciones de empalme para la pared y el frente de choque. En la pared, los v_{\pm} están relacionados por la ecuación (3.24) o (3.29). También se pueden tener frente de choque en la fase + con velocidad ξ_{sh} . Delante del choque la velocidad del fluido se anula, $\tilde{v}_2 = 0$, mientras que detrás \tilde{v}_1 en función de ξ_{sh} está dada por la ecuación (3.41). Tanto ξ_{sh} como \tilde{v}_1 (en función de ξ_{sh}) pueden expresarse como funciones de la temperatura usando la ecuación (3.46). Enfrente del choque en general se tiene $T_2 = T_N$. Y la onda de choque solo puede construirse con una solución constante en el caso plano, luego la entalpía (y la temperatura) es constante. Además, al igual que en el *Bag*, se cumple $\alpha_a/\alpha_b = w_b/w_a$ entre dos puntos cualesquiera de cada fase. Entonces, a partir de la condición en el frente de transición (3.39), se obtiene la generalización de (3.48) y (3.53), que en simetría plana vale en toda la extensión de la onda de choque,

$$\frac{\alpha(\xi)}{\alpha_N} = \frac{w_N}{w(\xi)} = \left[\frac{T_N}{T(\xi)} \right]^{\nu_+} = \frac{c_+^2 (1 - v_{\text{sh}}^2)}{v_{\text{sh}}^2 - c_+^4}, \quad (3.60)$$

donde $\alpha(\xi) = \alpha_+ = \alpha_1$, $w(\xi) = w_+ = w_1$ y $T(\xi) = T_+ = T_1$ para $\xi_w \leq \xi \leq \xi_{\text{sh}}$. Esto permite eludir el cálculo (3.52), donde el integrando resulta de resolver numéricamente una ecuación diferencial cuando se considera simetría esférica o cilíndrica.

En lo que sigue se consideran diferentes tipos de perfiles que pueden construirse usando estas soluciones y condiciones. Para ayudar la construcción, es útil graficar las soluciones $v(\xi)$ junto con la curva de puntos $(\xi_{\text{sh}}, \tilde{v}_1)$ que está dada por la ecuación (3.41). En la figura 3.15 se realiza este gráfico para los tres tipos de transiciones que se discuten en la sección 3.2.2.2, con $c_+ = c_-$ (caso A), $c_+ < c_-$ (caso B), y $c_+ > c_-$ (caso C). Si bien el panel izquierdo corresponde a la situación de la figura 3.14, donde los distintos tipos de tramos usados para armar las soluciones en ambas fases son iguales, en los paneles central y derecho están juntas las soluciones de rarefacción para la fase “-”, constantes que son indistintas de la fase, y el valor que toma \tilde{v}_1 en la fase “+”

(línea a trazos). El punto más bajo de esta línea representa el caso límite en que $\tilde{v}_1 = 0$ para $\xi_{\text{sh}} = c_+$ (mientras que la curva de rarefacción termina en c_-).

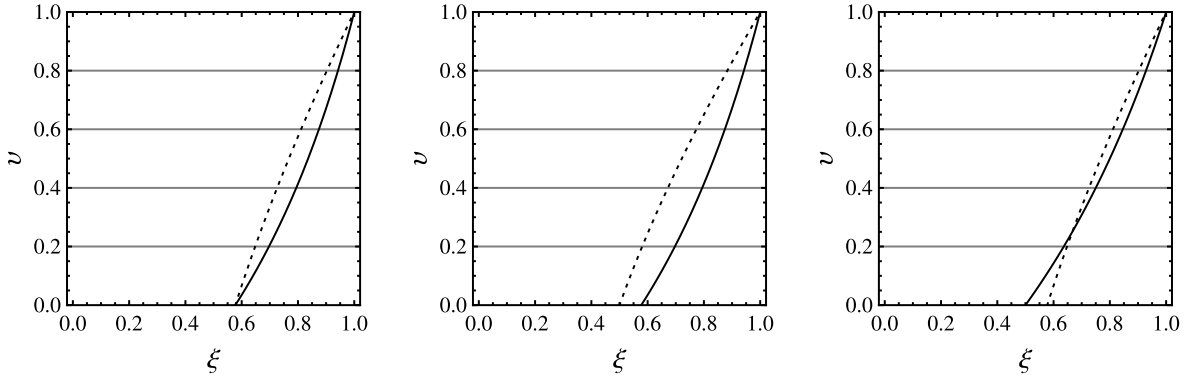


Figura 3.15: La solución $v_{\text{rar}}(\xi)$ (líneas sólidas) y la curva de puntos $(\xi_{\text{sh}}, \tilde{v}_1)$ (líneas punteadas), para $c_+ = c_- = 1/\sqrt{3}$ (panel izquierdo), $c_+ = 0,5$, $c_- = 1/\sqrt{3}$ (panel central), y $c_+ = 1/\sqrt{3}$, $c_- = 0,5$ (panel derecho). Se marcan algunas de las soluciones constantes.

3.3.3.1. Detonación débil

Es muy fácil la obtención analítica del perfil de velocidad para una detonación débil. De lo expuesto en la sección 2.5.4 se sabe que este debe constar únicamente de una cola de rarefacción, constituida por una solución continua creciente a partir de $v = 0$ en $\xi = c_-$, y que delante de la pared el fluido se encuentra sin perturbar. Teniendo en cuenta las soluciones posibles (3.56) (e ilustradas en las figuras 3.14 y 3.15), la única posibilidad es que $v \equiv 0$ en $\xi < c_-$ y $v = v_{\text{rar}}(\xi)$ para $\xi \geq c_-$. En algún punto ξ_0 tal que $c_- \leq \xi_0 \leq \xi_w$, la solución $v_{\text{rar}}(\xi)$ puede pegarse de nuevo a una constante $\tilde{v}_0 \equiv v_{\text{rar}}(\xi_0) = \tilde{v}_-$ [invirtiendo es $\xi_0 = \mu(-c_-, \tilde{v}_-)$], o puede continuar creciendo hasta $\xi = \xi_w$. En cualquier caso, se tiene $\tilde{v}_- \leq v_{\text{rar}}(\xi_w) = \mu(-\xi_w, -c_-)$, equivalente a $|v_-| \geq c_-$ (condición de detonación débil). Donde la igualdad es el caso límite en que la detonación se vuelve de Jouguet. Entonces solo se requiere conocer $\tilde{v}_- = \mu(-\xi_w, v_-)$ y con este calcular la posición ξ_0 donde se empalman con continuidad la solución constante y v_{rar} de (3.56). Para ello se recurre a la expresión (3.29) que pone $|v_-|$ en función de $|v_+|$ y α_+ , donde estos se remplazan con las condiciones de contorno. Como $\tilde{v}_+ = 0$, entonces $|v_+| = v_w = \xi_w$, y además $\alpha_+ = \alpha_N = \alpha(T_N)$. Haciendo esto se tiene el perfil de velocidad definido por los parámetros v_w y T_N (o α_N).

En la figura 3.16 se muestran dos ejemplos de detonación débil. El caso $|v_-| = c_-$ corresponde a un perfil límite (de Jouguet) como el mostrado en el panel derecho de la figura 3.16. Los gráficos mostrados en la figura 3.16 corresponden al caso C. Para los otros dos casos las formas de los perfiles son similares (incluyendo aquellos del caso B con valores negativos de α_N).

A su vez, el perfil de entalpía entre c_- y ξ_0 está dado por la ecuación (3.59), con condiciones de contorno $\tilde{v}_0 = \tilde{v}_-$ y $w_0 = w_-$ en $\xi = \xi_0$. El valor de w_- está relacionado con $w_+ = w_N$ a través de la ecuación (2.66).

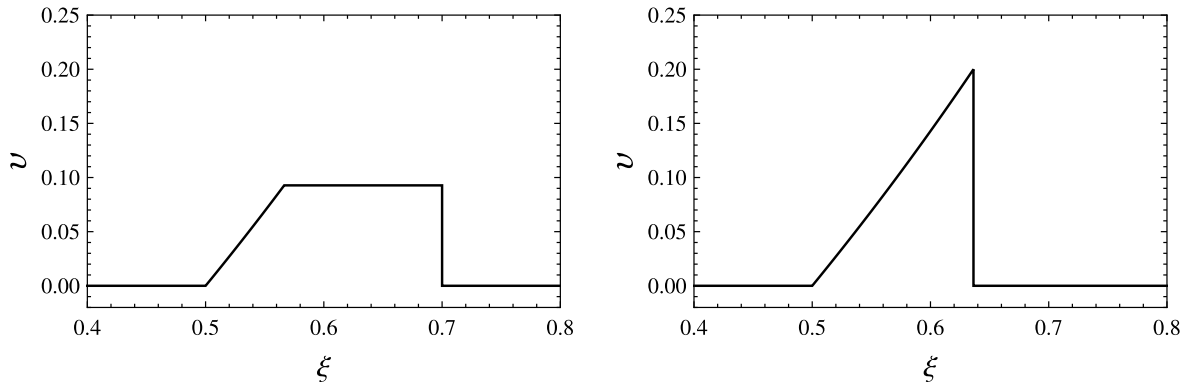


Figura 3.16: El perfil de velocidad del fluido para una pared detonante débil con velocidad $v_w = 0,7 > v_J^{\text{det}}(\alpha_N)$ (panel izquierdo) y una detonación de Jouguet con velocidad $v_w = v_J^{\text{det}}(\alpha_N) \simeq 0,64$ (panel derecho), para el caso $c_+ = 1/\sqrt{3}$, $c_- = 0,5$, con $\alpha_N = 0,1$.

3.3.3.2. Deflagración débil

De lo expuesto en la sección 2.5.4 se sabe que el perfil de este tipo de solución debe constar únicamente de una onda de choque delante de la pared en la posición $\xi_w < c_-$, que en el caso plano [con soluciones (3.56) ilustradas en la figura 3.15] solo puede constituirse con una solución constante hasta la posición $\xi_{\text{sh}} > c_+$ del frente de choque. Como $\tilde{v}_- = 0$, efectivamente se verifica que $|v_-| = v_w < c_-$ (condición de deflagración débil), y el caso límite donde vale la igualdad $\xi_w = c_-$ corresponde a una deflagración de Jouguet. No obstante la simplicidad de forma en el caso plano, aún en este hay cierta dificultad en relación a calcular de esa constante $\tilde{v}_+ = \tilde{v}_1$ y $v_{\text{sh}} = \xi_{\text{sh}}$.

Comparando el procedimiento con el que se describe en la sección 3.3.2.2, a partir de la expresión (3.24) o (3.29) se obtiene la generalización de (3.50),

$$\alpha_+ = \gamma_+^2 \left[v_+^2 + c_+^2 - q \left(v_+ v_- + c_-^2 \frac{v_+}{v_-} \right) \right]. \quad (3.61)$$

Aquí si se reemplaza $v_+ = \mu(v_w, \tilde{v}_+)$ y, como es una deflagración débil, $v_- = -v_w$, se tiene la generalización de (3.51). Por otro lado, se puede despejar α_1 a partir de (3.60) [que generaliza a (3.48)], y si se usa (3.43) para reemplazar v_{sh} como función de \tilde{v}_1 se obtiene la generalización de (3.49). Al considerar simetría plana, además vale $\tilde{v}_1 = \tilde{v}_+$ y $\alpha_+ = \alpha_1$, lo que permite juntar (3.61) y (3.60) para eliminar α_+ y despejar

$$\alpha_N = \frac{q \left[\frac{1-c_+^2}{1+c_+^2} v_w \tilde{v}_+^2 + \tilde{v}_+ (c_-^2 - v_w^2) + \frac{c_+^2 - c_-^2}{1+c_+^2} v_w \right]}{v_w \left[1 + \frac{1+c_+^4}{2c_+^2} \tilde{v}_+^2 - \frac{1+c_+^2}{c_+} \tilde{v}_+ \sqrt{1 + \frac{(1-c_+^2)^2}{4c_+^2} \tilde{v}_+^2} \right]}. \quad (3.62)$$

La valuación particular de este resultado para $c_{\pm} = 1/\sqrt{3}$ se obtiene también a partir de las ecuaciones (3.51) y (3.49) junto con la condición de simetría plana. La expresión (3.62) puede reescribirse como una ecuación polinómica de orden cuártico en \tilde{v}_+ (donde los coeficientes dependen de v_w y α_N). Existen formulas conocidas para las raíces de este tipo de polinomio (encontradas mediante factorización de radicales). En particular

la solución $\tilde{v}_+ = \tilde{v}_+(v_w, \alpha_N)$ es bastante engorrosa²² y no vale la pena escribirla aquí. El valor de $v_{sh} = v_{sh}(v_w, \alpha_N)$ se calcula con (3.43) reemplazando $\tilde{v}_1 = \tilde{v}_+(v_w, \alpha_N)$.

Este perfil se muestra en la figura 3.17. Los gráficos corresponden al caso C. Las formas de los perfiles son similares para los otros casos. Para el caso B los perfiles tienden a ser más delgados y más altos, como podía esperarse considerando la figura 3.15. Físicamente, esto sucede porque el frente de choque en ese caso se propaga a una velocidad relativamente más baja. Como puede verse en la figura, para deflagraciones débiles la velocidad del choque es cercana a la del sonido, $v_{sh} = \xi_{sh} \simeq c_+$.

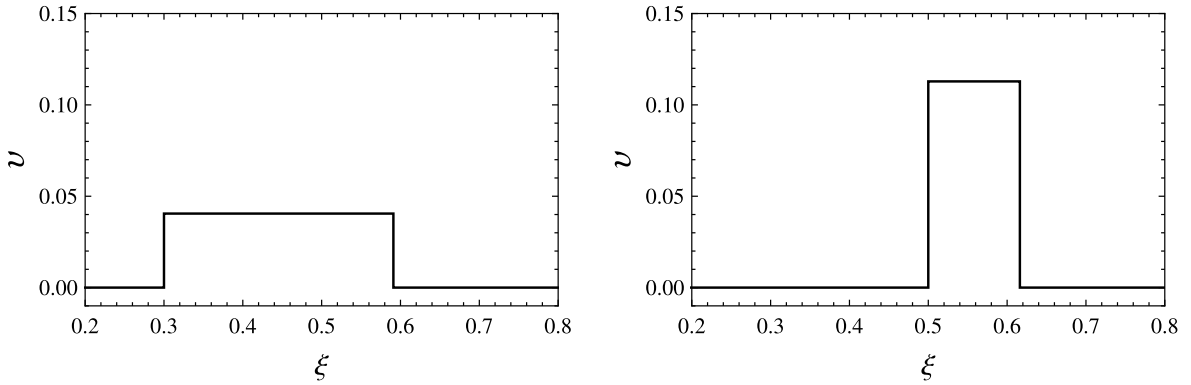


Figura 3.17: Los perfiles de velocidad de fluido para frente de deflagración débil con una velocidad $v_w = 0,3 < c_-$ (panel izquierdo) y para una deflagración de Jouguet con velocidad $v_w = c_-$ (panel izquierdo), para el caso $c_+ = 1/\sqrt{3}$, $c_- = 0,5$, con $\alpha_N = 0,1$.

La entalpía delante del frente de choque viene dada por $w_N = \Delta\varepsilon/(c_+^2 \nu_+ \alpha_N)$. La entalpía en la región de la onda de choque $w_+ = w_1$ está dada por la expresión (3.60) reemplazando $v_{sh} = v_{sh}(v_w, \alpha_N)$. La entalpía detrás de la pared w_- está dada por la condición de empalme en la pared (2.53) con $v_- = -v_w$ y $v_+ = \mu(v_w, \tilde{v}_+)$.

3.3.3.3. Procesos de Jouguet

Como se expone en la sección 2.5.4, en general pueden existir dos tipos de soluciones de Jouguet: la deflagración supersónica y la detonación subsónica. Esto se puede corroborar inspeccionando los tres casos ilustrados en la figura 3.15. Para cada uno está admitida solución cuyo perfil tiene una cola de rarefacción junto con una onda de choque, en la pared (ξ_w) la solución tiene que saltar desde la línea sólida hasta algo más arriba de la punteada (que marca el punto más bajo de la onda de choque). Se ve que en los paneles izquierdo (caso A) y central (caso B) la solución v_{rar} cae completamente a la derecha de la curva para $\tilde{v}_1(\xi_{sh})$. Para el panel derecho (caso C, $c_- < c_+$), no toda la línea punteada se encuentra a la izquierda de v_{rar} . En los casos A y B solo se admite que la onda de choque aparezca como un salto positivo de velocidad delante de la pared, es decir, $\tilde{v}_- < \tilde{v}_+ \Rightarrow |v_+| < |v_-|$ (deflagraciones). Mientras que en el caso C, además de esa posibilidad, también se admite la solución donde el salto es negativo, es decir, $\tilde{v}_- > \tilde{v}_+ \Rightarrow |v_+| > |v_-|$ (detonaciones).

Se diferencian en que la velocidad $|v_+|$ está dada por $v_J^{def}(\alpha_+)$ y $v_J^{det}(\alpha_+)$, respectivamente. A pesar de eso, la ecuación (3.61) permite tratar las dos soluciones de Jouguet

²²Identificar cuál raíz es la correcta no tiene mayor dificultad. Basta, por ejemplo, con chequear cuál cumple $0 < \tilde{v}_+ < \xi_w$ dentro del rango donde valen las deflagraciones, es decir, donde $\alpha_+(v_w, \alpha_N) < c_+^2$.

al mismo tiempo. De hecho, notar que esta expresión es válida tanto para detonaciones como deflagraciones (es invirtiendo esta ecuación que las dos soluciones aparecen para v_+ en función de v_- y α_+). En el caso de Jouguet, la ecuación (3.61) da

$$\alpha_+ = \gamma_+^2 (v_J^2 + c_+^2 - 2qc_-v_J) \quad (3.63)$$

que es equivalente a ambas ecuaciones (3.27) (es decir, al invertir esta expresión se obtiene v_J^{det} en función de α_+). Procediendo como en deflagraciones débiles, se obtiene

$$\alpha_N = \frac{(\tilde{v}_+ - v_w)^2 + c_+^2(1 - \tilde{v}_+v_w)^2 + 2qc_- (\tilde{v}_+ - v_w)(1 - \tilde{v}_+v_w)}{(1 - v_w^2) \left[1 + \frac{1+c_+^4}{2c_+^2} \tilde{v}_+^2 - \frac{1+c_+^2}{c_+} \tilde{v}_+ \sqrt{1 + \frac{(1-c_+^2)^2}{4c_+^2} \tilde{v}_+^2} \right]} \quad (3.64)$$

la cual da \tilde{v}_+ en función de α_N y ξ_w ²³. La posición del choque ξ_{sh} se obtiene entonces de la ecuación (3.44), teniendo en cuenta que $\tilde{v}_1 = \tilde{v}_+$. La onda de rarefacción comienza en $\xi_0 = \xi_w$ (no tiene tramo plano) pues como la condición de Jouguet así lo requiere $v_- = -c_-$ y entonces se tiene que $\tilde{v}_- = \mu(-v_w, -c_-) = v_{\text{rar}}(\xi_w)$.

La entalpía en la región de la onda de choque $w_+ = w_1$ está dada, como el caso de la deflagración débil, por la expresión (3.60) haciendo uso de ξ_{sh} previamente despejado y w_N calculado con la ecuación de estado. Por otro lado, la entalpía detrás de la pared está dada por (3.59), con condiciones de contorno $\tilde{v}_0 = \tilde{v}_-$ y $w_0 = w_-$ en $\xi = \xi_w$. El valor de w_- está relacionado al de w_+ a través de la condición (2.53)

$$w_- = \frac{|v_+|\gamma_+^2}{c_- \gamma_{(c_-)}^2} w_+ \quad (3.65)$$

Deflagración de Jouguet: Para dados ξ_w y α_N , cuando la \tilde{v}_+ despejada de la ecuación (3.64) se compara con $\tilde{v}_- = v_{\text{rar}}(\xi_w) = \mu(-v_w, -c_-)$ y resulta $\tilde{v}_+ > \tilde{v}_-$, implica $|v_+| < |v_-|$, deflagración de Jouguet. El perfil se muestra en la figura 3.18. A

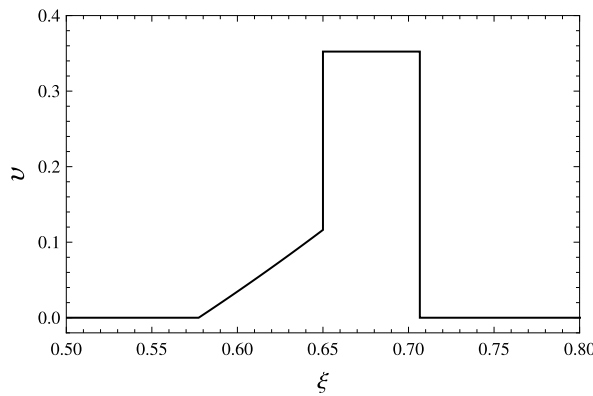


Figura 3.18: El perfil de velocidades del fluido para una deflagración supersónica de Jouguet con velocidad $v_w = 0,65$, para el caso $c_+ = c_- = 1/\sqrt{3}$, y con $\alpha_N = 0,1$.

medida que crece la velocidad de la pared, su posición ξ_w se aproxima a la del frente de choque ξ_{sh} . Como consecuencia, la máxima velocidad de pared para este tipo de

²³Aquí también se debe identificar la raíz correcta, por ejemplo, aquella que cumple $0 < \tilde{v}_+ < \xi_w$ dentro del rango donde valen los procesos de Jouguet $c_- < \xi_w < v_J^{\text{det}}(\alpha_N)$.

solución se obtiene cuando $\xi_w = \xi_{sh}$. Para el caso A, se puede mostrar que en este límite la velocidad de pared coincide con la de una detonación de Jouguet $v_J^{det}(\alpha_N)$. Así, las deflagraciones supersónicas de Jouguet llenan el hueco entre deflagraciones débiles y detonaciones débiles. Esta solución existe también en los casos B y C. Sin embargo, en el caso C no llena todo el hueco entre c_- y $v_J^{det}(\alpha_N)$, debido a que hay también detonaciones de Jouguet.

Detonación de Jouguet: Igual que en el apartado anterior, para dados v_w y α_N , si despejando \tilde{v}_+ de la ecuación (3.64) y calculando $\tilde{v}_- = v_{rar}(\xi_w)$ se verifica $\tilde{v}_+ < \tilde{v}_-$, se tiene una detonación de Jouguet. Esto solo sucede, como se ve en el panel derecho

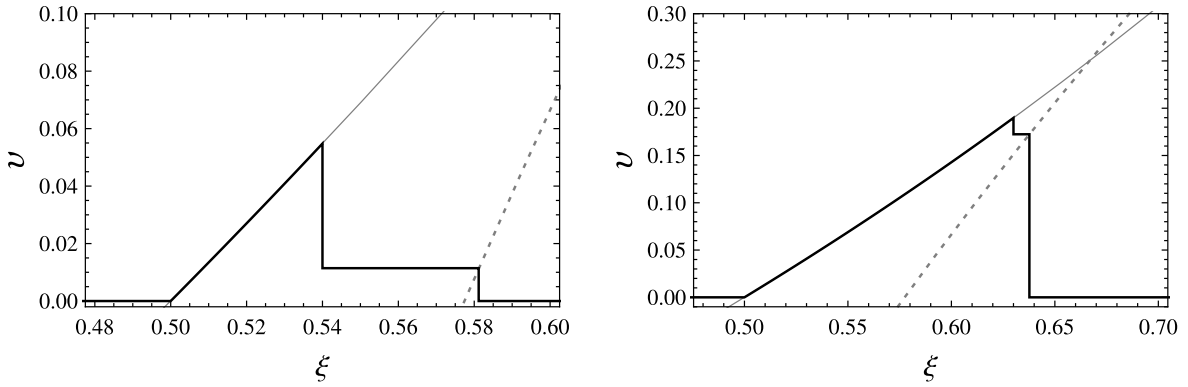


Figura 3.19: La velocidad del fluido de dos detonaciones subsónicas (líneas solidas) para el caso $c_+ = 1/\sqrt{3} \simeq 0,58$, $c_- = 0,5$. Las líneas grises indican las funciones $v_{rar}(\xi)$ y $\tilde{v}_1(\xi_{sh})$ (correspondientes al panel derecho de la figura 3.15). La solución en el panel izquierdo corresponde a $\alpha_N = 0,07$ y $v_w = 0,54$, la del panel derecho corresponde a $\alpha_N = 0,1$ y $v_w = 0,63$.

de la figura 3.15, para el caso C en un limitado rango de valores de $\xi_w > c_-$ en los que $v_{rar}(\xi_w) > \tilde{v}_1(\xi_{sh})$, siempre que la velocidad del choque ξ_{sh} esté lo suficientemente cerca de c_+ y la velocidad de la pared ξ_w esté lo suficientemente cerca de c_- . Como se ve en la figura 3.10, en el caso $c_+ > c_-$ el fluido entrante puede ser subsónico ($v_+ < c_+$) para parámetros cerca del límite débil. Como se puede observar en la figura 3.19, se fija $\xi_0 = \xi_w$, es decir, la condición de Jouguet que también cumple la detonación débil como caso límite. La pared es supersónica con respecto al centro de la burbuja, pero puede tener o $\xi_w < c_+$, como en el panel izquierdo de la figura 3.19, o bien $\xi_w > c_+$ como en el panel derecho. El cálculo del perfil se realiza del mismo modo que para deflagración de Jouguet.

3.3.3.4. Comparativa de perfiles planos

En la figura 3.20 se grafican varios perfiles de velocidad para el caso C, para velocidades de pared en un rango que contiene todas las soluciones posibles. En esta se considera una transición de fase lo suficientemente débil, es decir, $\alpha_N = 0,08$, la cual está cerca del límite débil (ver la figura 3.10). Por lo tanto, se tienen detonaciones subsónicas, que no existen para valores grandes de α_N . El primer gráfico corresponde a una deflagración débil. La segunda solución corresponde a una pared moviéndose a la velocidad del sonido c_- , y es el límite entre deflagración débil y de Jouguet. El tercer y cuarto perfil corresponden a deflagraciones supersónicas de Jouguet ($\xi_w > c_-$). Estas

son subsónicas, sin embargo, con respecto a la velocidad del sonido en la fase +. El quinto caso es la solución en el límite entre deflagración de Jouguet y detonación de Jouguet. Los siguientes tres gráficos corresponden a detonaciones de Jouguet. Estos son supersónicos respecto a la velocidad del sonido c_- . El primero de ellos es subsónico con respecto a c_+ , el segundo se mueve con velocidad c_+ , y el último es supersónico con respecto a c_+ . Sin embargo, la pared se mueve subsónicamente con respecto al fluido en frente de ésta, $v_+ = v_J^{\text{det}}(\alpha_+) < c_+$. Entonces, es precedida por un frente de choque. La novena solución está en el límite entre la detonación Jouguet y la débil, y se mueve con velocidad $v_J^{\text{det}}(\alpha_N)$. Finalmente, el último gráfico corresponde a una detonación débil.

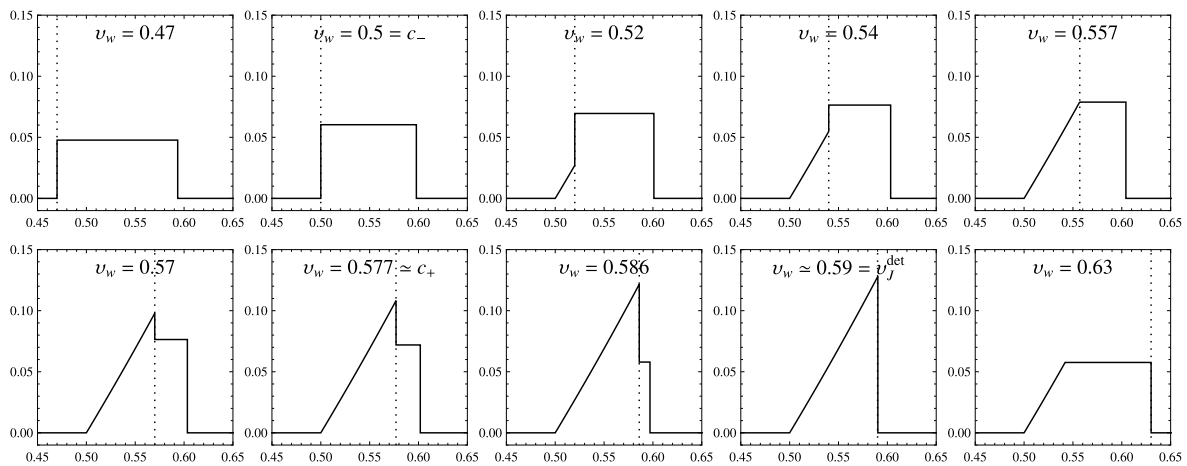


Figura 3.20: Velocidad del fluido v en función de ξ para el caso $c_+ = 1/\sqrt{3}$, $c_- = 0,5$, con $\alpha_N = 0,08$ y diferentes velocidades de pared. La línea punteada indica el frente de transición.

Se ve que las soluciones de Jouguet son las más fuertes, es decir, las que causan mayores perturbaciones en el fluido. De hecho, para deflagraciones y detonaciones débiles más lentas y más rápidas, respectivamente, que las mostradas en la figura 3.20 se tienen menores velocidades de fluido. El primer perfil ya corresponde a una deflagración débil relativamente rápida. A medida que se incrementa el valor de ξ_w y se alcanza $\xi_w = c_-$, la cola de rarefacción aparece detrás de la pared. Así, el perfil de las deflagraciones débiles transforma continuamente al de la deflagración supersónica de Jouguet. Cuando se incrementa la velocidad de la pared más aún la deflagración supersónica de Jouguet continuamente se transforma en la detonación subsónica de Jouguet. Mientras tanto, los valores de ξ_w y ξ_{sh} se aproximan uno al otro. Finalmente, cuando ξ_w alcanza el valor $v_J^{\text{det}}(\alpha_N)$, el frente de transición se junta con el frente de choque, y la detonación subsónica de Jouguet se transforma en una detonación débil. A pesar que el perfil parece cambiar en forma continua (respecto a la variación de ξ_w), el cambio de hecho es discontinuo cuando desaparece la onda de choque, pues la velocidad \tilde{v}_+ cambia de un valor finito a $\tilde{v}_+ = 0$. En el caso en que las detonaciones subsónicas no existen, de la deflagración supersónica de Jouguet se pasa a una detonación débil de manera similar, como se muestra para el caso del *Bag* en la referencia [119].

3.4. Cálculos para perfiles ultra relativistas

El contenido de esta sección integra análisis, cálculos y resultados, que corresponden a las particularidades para determinar los perfiles de regímenes ultra relativistas (en especial el régimen *runaway*), que hemos realizado en el trabajo publicado [4], utilizando por simplicidad el modelo del *Bag*.

Se explica en la sección 2.3.2 que el estudio de paredes ultra relativista no solo es de interés en si mismo, sino que es necesario para determinar el coeficiente η_{UR} para la aproximación (2.40) de la fricción. De la comparativa dada en la sección 2.6, se concluye que si bien en regímenes estacionarios la velocidad de la pared sirve para parametrizar resultados hidrodinámicos, en régimen *runaway* es buena aproximación tomar $v_w \approx 1$ y parametrizar la hidrodinámica con la fuerza neta F_{net} sobre la pared (la cual en régimen estacionario se anula). No obstante, el régimen *runaway* tiene esencialmente el mismo tipo de perfil que las detonaciones débiles (ver sección 2.6.1). De hecho, a continuación en esta sección, se muestra que de cierto modo las soluciones *runaway* “se pegan” con continuidad a las detonaciones ultra relativistas.

3.4.1. Frente de transición y perfiles ultra relativistas

Considerando la aproximación del *Bag* (2.84), de las condiciones de empalme o continuidad (2.77) se obtienen las variables del fluido detrás de una pared débilmente detonante,

$$\tilde{v}_- = \frac{3\alpha_+ - 1 + 3(1 + \alpha_+)v_w^2 - \sqrt{[3\alpha_+ - 1 + 3(1 + \alpha_+)v_w^2]^2 - 12\alpha_+(2 + 3\alpha_+)v_w^2}}{2(2 + 3\alpha_+)v_w} \quad (3.66)$$

$$\frac{w_-}{w_+} = \frac{\gamma_w^2}{3} \left[1 - 3\alpha_+ + 3(1 + \alpha_+)v_w^2 - 2\sqrt{(1 - 3\alpha_+ + 3(1 + \alpha_+)v_w^2)^2 - 12v_w^2} \right] \quad (3.67)$$

que es equivalente a la ecuación (3.30) pero en el sistema de referencia del plasma o centro de la burbuja. Hay también una solución con un signo + enfrente de la raíz cuadrada, correspondiente a detonaciones fuertes, pero no son de interés (están descartadas como se explica en la sección 2.5.3). Notar que la velocidad del fluido y el cociente de entalpías dependen solo de la variable $\alpha_+ = \alpha(T_+)$ (siendo $T_+ = T_N$ para detonaciones débiles) y de la velocidad de la pared v_w . Además, también por (2.84), la temperatura tras la pared T_- se despeja de

$$\frac{T_-^4}{T_+^4} = \frac{1}{1 - 3\alpha_c} \frac{w_-}{w_+}. \quad (3.68)$$

El límite ultra relativista se obtiene tomando $v_w \rightarrow 1$ en las ecuaciones (3.66-3.67), o bien directamente de la ecuación (2.79). Se tiene

$$\frac{w_-}{w_+} = 1 + 3\alpha_+, \quad \tilde{v}_- = \frac{3\alpha_+}{2 + 3\alpha_+} \quad (\text{detonación UR}). \quad (3.69)$$

Para una pared *runaway* se obtiene, de las ecuaciones (2.83),

$$\frac{w_-}{w_+} = 1 + 3(\alpha_+ - \bar{F}), \quad \tilde{v}_- = \frac{3(\alpha_+ - \bar{F})}{2 + 3(\alpha_+ - \bar{F})} \quad (\text{runaway}), \quad (3.70)$$

donde

$$\bar{F} \equiv \frac{F_{\text{net}}}{aT_+^4} = \frac{4}{3} \frac{F_{\text{net}}}{w_+}. \quad (3.71)$$

Notar que las ecuaciones (3.70) “se pegan” con las de detonaciones para $F_{\text{net}} = 0$. Por otro lado, para F_{net} más grande, T_- y \tilde{v}_- son más chicos. Entonces, la perturbación hidrodinámica se vuelve más débil para una aceleración más grande. Este comportamiento es similar al caso de detonación, en el cual a mayores velocidades de pared corresponde una hidrodinámica más débil (mirar la figura 3.21). Esto es relevante en el hecho que la hidrodinámica obstruye el movimiento de la pared²⁴ [18, 97]. Más aún, se ve que para $\bar{F} = \alpha_+$ se tiene $w_- = w_+$ y $\tilde{v}_- = 0$, es decir, el fluido permanece sin perturbarse luego del paso de la pared.

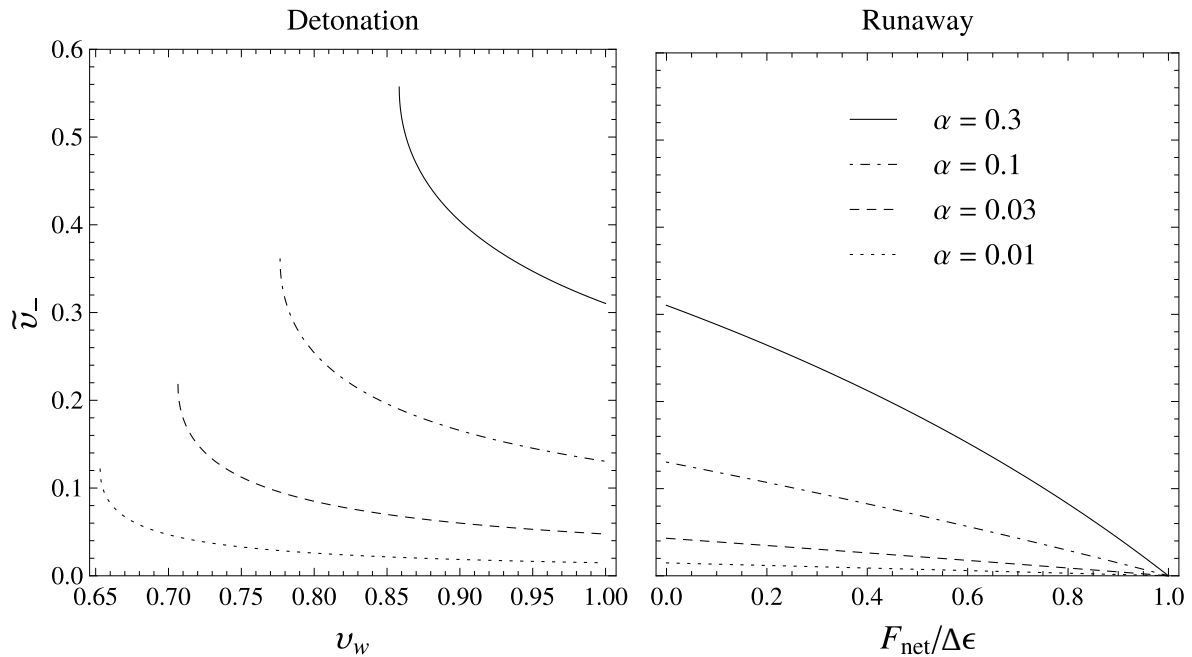


Figura 3.21: La velocidad del fluido detrás de la pared en función de la velocidad de la pared para el caso de una detonación (panel izquierdo) y en función de la fuerza neta para el caso de una pared *runaway* (panel derecho).

La condición $\bar{F} = \alpha_+$ fija un valor máximo para la fuerza neta, la cual está dada por la densidad de energía de falso vacío, $F_{\text{máx}} = \Delta\varepsilon$. Para entender esto físicamente, notar que la fuerza que comanda el movimiento de la pared es esencialmente dada por la diferencia de presión entre las dos fases. Esta fuerza se anula a la temperatura crítica y alcanza su máximo valor a temperatura cero. En $T = 0$ la diferencia de presión está simplemente dada por el potencial efectivo a temperatura cero, y coincide con la densidad de energía de falso vacío. En el modelo del *Bag*, este está dado por el parámetro $\Delta\varepsilon$ (a temperatura finita hay también una fuerza de fricción debida al plasma, pero a temperatura cero la fuerza de fricción desaparece). Por lo tanto, F_{net} puede alcanzar el máximo valor $\Delta\varepsilon$ si la transición de fases ocurre a $T_+ = 0$. No obstante, tal sobreenfriamiento extremo no es probable en modelos físicos concretos²⁵.

²⁴Aquí se fija a mano v_w como parámetro libre, pero más adelante en la sección 3.5 se ve el efecto de dicha obstrucción, al calcular v_w .

²⁵Esto es por naturalidad, $T_N \sim T_c \sim v$. Como se menciona en la sección 1.4.4, hay dos fenómenos

Para la ecuación del *Bag* es relativamente simple obtener los perfiles de fluido, ya que c_- es una constante. No obstante, excepto para el caso plano, las ecuaciones de fluido (2.47-2.50) deben resolverse numéricamente. Detrás de la pared, las soluciones que satisfacen las condiciones de contorno de anulación de velocidad de fluido en $\xi = 0$ son ondas de rarefacción, en las cuales $v(\xi)$ se anula para $0 < \xi < c_-$ y crece para $\xi > c_-$ hasta el valor de \tilde{v}_- . La temperatura y la presión pueden calcularse a partir del perfil de entalpía (2.51), ya que para régimen *runaway* valen las ecuaciones de perfil (2.47-2.50), que son las mismas que en el régimen estacionario, como se explica en la sección 2.6.1. En la figura 3.22 se muestran algunos perfiles para el caso de burbujas simétricamente esféricas.

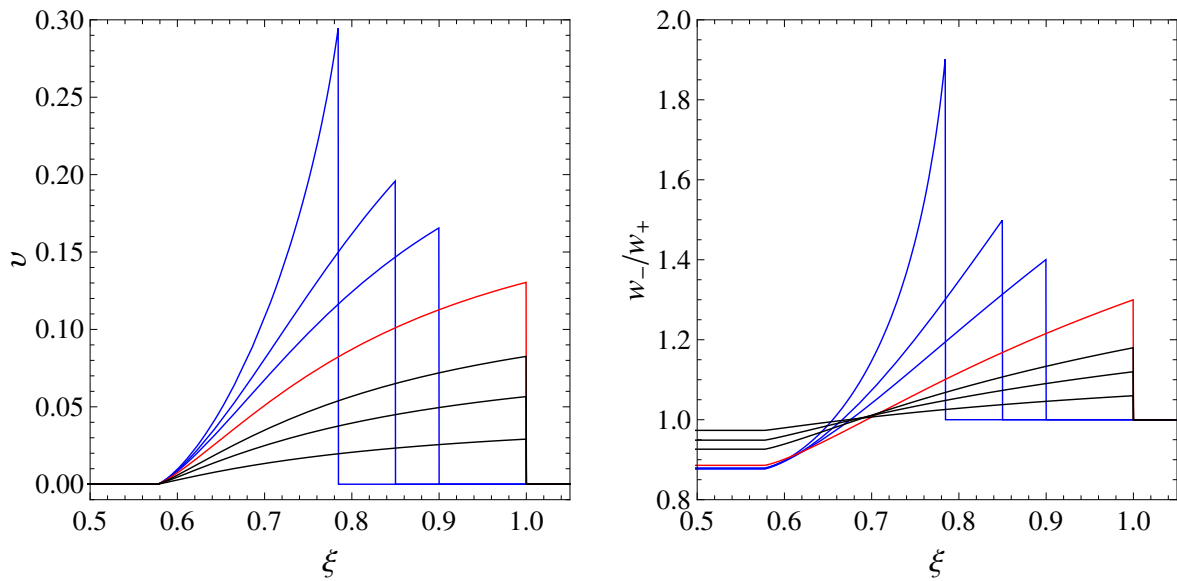


Figura 3.22: Perfiles de velocidad del fluido y entalpía para burbujas esféricas, con $\alpha_+ = 0,1$ y diferentes velocidades de pared. La curva más alta corresponde a la detonación de Jouguet con velocidad de pared $v_J(\alpha_+) \simeq 0,78$. Las otras curvas azules corresponden a detonaciones débiles con velocidades $v_w = 0,85$ y $v_w = 0,92$. La curva roja corresponde al límite de una detonación con $v_w \rightarrow 1$ o una pared *runaway* con $F_{\text{net}} \rightarrow 0$. Las curvas negras corresponden a paredes *runaway* con $F_{\text{net}}/F_{\text{máx}} = 0,4, 0,6, \text{ y } 0,8$.

3.5. Cálculo de fuerzas y velocidad de la pared

En las secciones anteriores se discute el cálculo de perfiles en régimen estacionario y *runaway* tomando la velocidad de la pared v_w y la fuerza \bar{F} como parámetros libres. En un cálculo numérico concreto estas magnitudes deben obtenerse teniendo en cuenta la fricción, como se expone en la sección 2.3.

que contribuyen a que la nucleación suceda: uno es la activación térmica, es decir, fluctuaciones de energía que permiten al sistema “trepár” la barrera de energía libre; la otra es el efecto túnel. El máximo de probabilidad de activación térmica se ve que está alrededor de $T_c/2$, muy por debajo de este valor la transición queda virtualmente trabada ya que la nucleación solo depende del efecto túnel (de temperatura cero). Ver, por ejemplo, discusión al principio de la sección 4.5.1.1.

La fuerza de *driving* y la de *obstrucción hidrodinámica*, pueden expresarse en términos simples para la aproximación del *Bag*. Usando la ecuación de estado (2.85), la ecuación (2.22) y la aproximación (2.23), se obtiene

$$F_{\text{dr}} = \frac{L}{4} \left(1 - \frac{T_-^2 T_+^2}{T_c^4} \right) = \Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon \frac{T_-^2 T_+^2}{T_c^4}. \quad (3.72)$$

Si se toma el parámetro del *Bag* $\Delta\varepsilon$ como aproximación a la diferencia de potencial efectivo a temperatura cero $\Delta\mathcal{V}_{\text{ef}}$, entonces el segundo término en la ecuación (3.72) se identifica con el segundo término de la ecuación (2.24), es decir, la fuerza de obstrucción hidrodinámica $F_{\text{hyd}} = -(L/4)T_-^2 T_+^2 / T_c^4$. Como se expone en la sección 2.3.1, la F_{hyd} es una fuerza opuesta al movimiento de la pared y depende indirectamente de la velocidad de la pared, aunque no se comporta como una fricción del fluido, ya que a partir de cierto punto *decrece* con la velocidad de la pared. En efecto, F_{hyd} decrece al decrecer T_- ($T_+ = T_N$ está fija), y se ve en la figura 3.22 que el recalentamiento detrás de la pared es máximo para v_w cercano al punto de Jouguet y mínimo para $v_w \rightarrow 1$. Es importante remarcar que la aproximación (3.72) preserva este importante efecto de recalentamiento, mientras que una aproximación más simple como fijar $T_- = T_+$ en la ecuación (2.21) despreciando el efecto sobre el plasma debido al avance de la pared (ver por ejemplo [112]) *sobrestima* la fuerza de *driving*.

Como se explica en la sección 2.3.2, en un régimen UR se puede obtener la fricción como $F_{\text{fr}} = F_{\text{net}} - F_{\text{dr}}$, teniendo en cuenta el límite UR de las fuerzas neta (2.34) y de *driving*, que está dada por la ecuación (3.72), evaluando con las (3.68) y (3.70). Como resultado se obtiene

$$\frac{\eta_{UR}}{aT_+^4} = \alpha_+ - \bar{F} - \alpha_c \sqrt{\frac{1 + 3(\alpha_+ - \bar{F})}{1 - 3\alpha_c}}. \quad (3.73)$$

Para un dado modelo, las cantidades $\alpha_+ = L/(3w_+)$ y $\bar{F} = 4F_{\text{net}}/(3w_+)$ pueden obtenerse en función de la temperatura de nucleación $T_+ = T_N$. Luego, de esta expresión (3.73) se obtiene el parámetro η_{UR} .

Vale la pena comparar con enfoques publicados anteriormente. Un modelo para la fricción fenomenológico similar, pero mas simple, se considera en la referencia [112]. Aquella aproximación involucraba un único parámetro y es equivalente a fijar $\lambda = 1$ en la ecuación (2.39). También este modelo da una fricción que satura para valores altos de γ_w , es numéricamente correcto si correspondiera el caso $\eta_{UR} = \eta_{NR}$ (además, la aproximación $T_- = T_+$ es usada en [112] para la fuerza de *driving*; se discute esta aproximación en lo que sigue más adelante). Por otro lado, el modelo fenomenológico (2.39) ya se considera en la referencia [113]. No obstante, en [113] la perturbación sobre el plasma en cierta medida se desprecia, tomándose $T_- = T_+$ para paredes *runaway*, aunque no para las soluciones estacionarias. Esto resulta en un valor diferente de η_{UR} , ya que el lado derecho de la ecuación (3.73) se vuelve $\alpha_+ - \bar{F} - \alpha_c$. Las diferentes consideraciones entre *runaway* y detonaciones llevan en [113] a que las soluciones estacionarias no empalman continuamente con las aceleradas. Esto no es correcto ya que, como se discute en la sección 2.6, la hidrodinámica de la pared *runaway* es similar a la de detonaciones, y empalma con estas para $F_{\text{net}} = 0$.

De las ecuaciones de movimiento para la pared (2.20), la fuerza impulsora en la

aproximación del *Bag* (3.72) y la fricción fenomenológica (2.40), se tiene

$$\bar{F} = \frac{F_{\text{net}}}{aT_+^4} = \alpha_+ - \alpha_c \frac{T_-^2}{T_+^2} - \frac{\bar{\eta}_{NR}\bar{\eta}_{UR}(v_w - \bar{v})}{\sqrt{\bar{\eta}_{UR}^2(1 - v_w^2)(1 - \bar{v}^2) + \bar{\eta}_{NR}^2(v_w - \bar{v})^2}} \quad (3.74)$$

donde se usa la notación $\bar{\eta} = \eta/(aT_+^4)$ para los dos coeficientes de fricción. En el límite UR, la ecuación (3.74) se vuelve

$$\bar{F} = \alpha_+ - \alpha_c T_-^2/T_+^2 - \bar{\eta}_{UR}. \quad (3.75)$$

Se remarca de nuevo que esta ecuación, equivalente a (3.73), es solo una descomposición de la fuerza neta ultrarelativista, la cual realmente define el valor del coeficiente de fricción η_{UR} , mientras que la anterior (3.74) da una ecuación de movimiento para la pared fuera de ese límite. En particular, si el cálculo microfísico de la fuerza neta, en la ecuación (2.34), da $F_{\text{net}} < 0$, significa que, de hecho, la pared nunca alcanza el régimen UR. No obstante, incluso en ese caso el cálculo ultrarelativista es aún útil y la ecuación (3.75) tiene sentido. La interpretación es que la fricción UR es tan alta que la fuerza de driving no puede compensarla. En ese caso simplemente se obtiene $\bar{\eta}_{UR}$ de la ecuación (3.73), y entonces se computa la velocidad de la pared para el estado estacionario fijando $F_{\text{net}} = 0$ en la ecuación (3.74), lo que resulta equivalente a la ecuación (2.41).

3.5.1. Detonaciones y *runaway*

Para obtener v_w a partir de (3.74), se deben usar las ecuaciones (3.66-3.68) para \tilde{v}_- y T_- . Es importante mencionar que, para detonaciones, el resultado no depende de la geometría de la pared, ya que todas las cantidades que aparecen en la ecuación (3.74) son las mismas en cualquier caso. Esto es porque la relación entre $\{\tilde{v}_-, T_-\}$ y $\{\tilde{v}_+, T_+\}$ viene dada por las condiciones de empalme (independientes de la simetría por ser locales). Además, para detonaciones las condiciones enfrente de la pared $\{\tilde{v}_+ = 0, T_+ = T_N\}$ son también las mismas (en contraste, para deflagraciones, el fluido enfrente de la pared se perturba diferente para distintas geometrías de la pared).

Se muestran los resultados en la figura 3.23 (línea sólida) para valores fijos de los parámetros de fricción variando la cantidad α_+ . Para una valuación concreta, y para comparar con resultados previos, se considera el caso $\eta_{UR} = \eta_{NR}$ (para otros casos y diferentes variaciones de parámetros, ver [113]). Las líneas verticales guionadas delimitan las detonaciones débiles. Incrementando α_+ generalmente se incrementa la fuerza de driving y, consecuentemente, la velocidad de la pared. La figura no muestra los casos de deflagraciones, para los cuales $v_w \lesssim c_-$ (hay discontinuidad entre deflagraciones y detonaciones), pero más adelante esta se extiende para incluirlas en la figura 3.25.

La línea punteada en la figura 3.23 se obtiene despreciando el recalentamiento en el cálculo de la fuerza de driving, es decir, fijando $T_- = T_+$, para el cual el término de fuerza de driving en la ecuación (3.74) se vuelve $\alpha_+ - \alpha_c$. Esto se usa como aproximación en la referencia [112]. Se considera esa curva aquí para apreciar el rol de la hidrodinámica, es decir, cómo influye considerar o no la ecuación de continuidad de flujo [o condición de empalme (3.70)] en el frente de transición, que en general implica $T_- \neq T_+$. Cuantitativamente, se ve que esta aproximación sobrestima la fuerza de *driving*, obteniendo valores de velocidad más altos. Además, se observa una diferencia significativa entre los resultados en el extremo inferior de la curva. Este extremo corres-

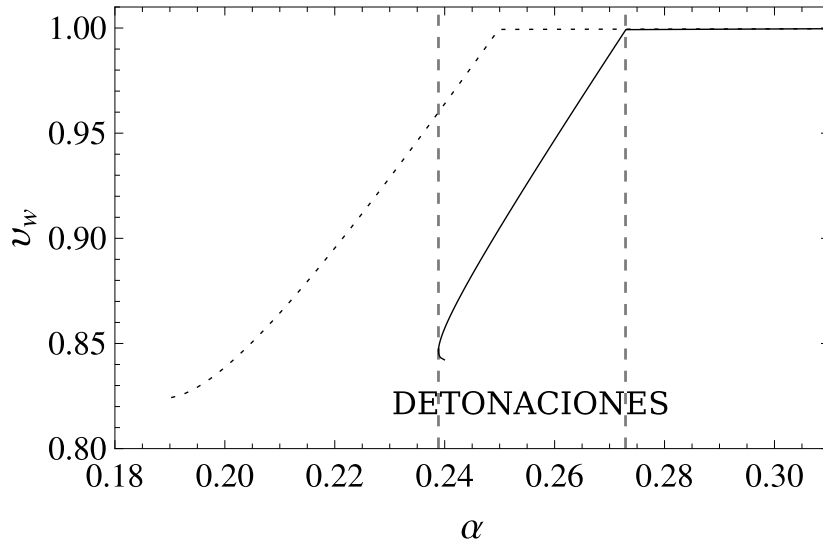


Figura 3.23: La velocidad de la pared para $\alpha_c = 0,05$, $\bar{\eta}_{UR} = 0,2$, y $\eta_{NR} = \eta_{UR}$. La línea punteada corresponde a la aproximación $T_- = T_+$.

ponde al punto de Jouguet. Puesto que la hidrodinámica se vuelve muy fuerte cerca de este punto, la ecuación (3.74) da dos soluciones para v_w , mientras que con la aproximación $T_- = T_+$ se pierde completamente este efecto. En la referencia [96] se muestra que las detonaciones débiles correspondientes a la rama más baja son inestables.

Los valores de α_+ para los cuales la detonación alcanza el régimen ultra relativista en la figura 3.23 pueden obtenerse de la ecuación (3.75) la cual, para $\bar{F} = 0$, da $\alpha_+ = \alpha_c T_-^2 / T_+^2 + \bar{\eta}_{UR}$. Notar que T_- realmente depende de α_+ a través de las ecuaciones (3.68) y (3.69), $T_-^4 / T_+^4 = (1 + 3\alpha_+) / (1 - 3\alpha_c)$. Así, para valores dados de α_c y $\bar{\eta}_{UR}$ se tiene una ecuación cuadrática de α_+ (o de T_-), que conduce a

$$\alpha_+ = \alpha_c T_0^2 / T_+^2 + \bar{\eta}_{UR} \equiv \alpha_0, \quad (3.76)$$

donde T_0 es el valor correspondiente de T_- , dado por

$$\frac{T_0^4}{T_+^4} = \frac{3\alpha_c}{2(1 - 3\alpha_c)} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4(1 + 3\bar{\eta}_{UR})(1 - 3\alpha_c)}{3\alpha_c^2}} \right]. \quad (3.77)$$

Si $\alpha_+ > \alpha_0$, la ecuación para el estado estacionario da $v_w > 1$, lo cual en realidad indica que la fuerza de fricción no puede compensar la fuerza de driving y se tiene $F_{\text{net}} > 0$, es decir, una pared *runaway*.

En régimen estacionario v_w crece en función de α . Al pasar a régimen *runaway* $v_w \approx 1$ y es la aceleración propia (proporcional a la fuerza neta) la que crece con α . Es interesante calcular el valor de F_{net} correspondiente a la figura 3.23, que puede obtenerse de la ecuación (3.75) [aunque para un dado modelo, en vez de esto se puede calcular F_{net} directamente de la ecuación (2.34), y entonces determinar η_{UR}]. Se debe tener en cuenta la dependencia respecto T_- en F_{net} , la cual está dada por las ecuaciones (3.68) y (3.70),

$$T_-^4 / T_+^4 = (1 + 3\alpha_+ - 3\bar{F}) / (1 - 3\alpha_c). \quad (3.78)$$

De las ecuaciones (3.78) y (3.75) se obtiene la ecuación cuadrática para \bar{F} y T_- / T_+ en

función de α_+ , α_c , y $\bar{\eta}_{UR}$. No obstante, la dependencia en α_+ se cancela en la ecuación para T_- , y se obtiene

$$T_- = T_0, \quad \bar{F} = \alpha_+ - \alpha_c T_0^2 / T_+^2 - \bar{\eta}_{UR} = \alpha_+ - \alpha_0, \quad (3.79)$$

con α_0 y T_0 dados por las ecuaciones (3.76-3.77). Por otro lado, si se usa la aproximación $T_- = T_+$, simplemente se desprecia la ecuación (3.78), mientras que la ecuación (3.75) da $\bar{F} = \alpha_+ - \alpha_c - \bar{\eta}_{UR}$. Este resultado puede también ser escrito en la forma $\bar{F} = \alpha_+ - \alpha_0$, pero el valor de α_0 es diferente, $\alpha_0 = \alpha_c + \bar{\eta}_{UR}$. En la figura 3.24 se grafica la fuerza neta, normalizada a su máximo valor $\Delta\varepsilon$, como función de α_+ para los parámetros de la figura 3.23. Se ve que despreciando la hidrodinámica da una mayor aceleración de la pared.

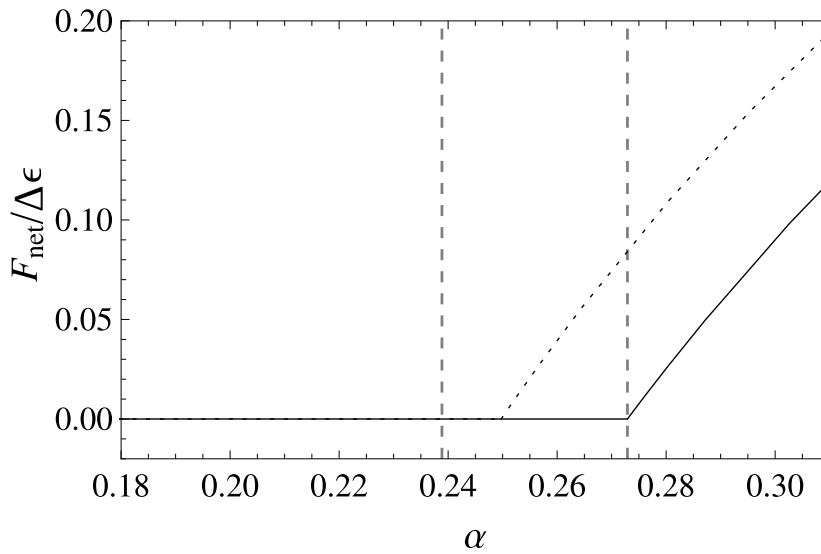


Figura 3.24: La fuerza neta correspondiente a la figura 3.23.

Comparando las líneas sólidas de las figuras 3.23 y 3.24, se ve que la solución detonante empalma con la de *runaway* en $\alpha_+ = \alpha_0$. En la referencia [113] este empalme no ocurre, debido a aquella suposición ($T_- = T_+$) que da diferente hidrodinámica. Como consecuencia, en esa referencia, se encuentra erróneamente que las dos soluciones coexistirían en un pequeño rango de parámetros. No se encuentra tal coexistencia de detonaciones y *runaways* aquí, ya que los regímenes hidrodinámicos se suceden con continuidad respecto a v_w y \bar{F} . En realidad, podría aparecer coexistencia de soluciones también debido a una fuerte hidrodinámica, incluso si ocurre tal variación continuamente con los parámetros. Por ejemplo, cerca del punto de Jouguet se tienen múltiples soluciones que son detonaciones débiles (ver en torno a $\alpha_+ = 0,24$ en la figura 3.23), incluso aunque v_- y T_- son funciones continuas de α_+ y v_w . Esto no pasa en el límite UR, ya que la perturbación del fluido no solo varía continuamente respecto a α_+ , v_w y \bar{F} sino que además la perturbación hidrodinámica es más débil.

3.5.2. Deflagraciones

Correspondiente a las figuras 3.23 y 3.24 se muestra la velocidad para deflagraciones en la figura 3.25 (caso plano). Se obtiene de la ecuación (3.74) (con $\bar{F} = 0$), pero usando las relaciones de T_- con T_+ y v_- con v_+ correspondientes a deflagraciones, donde

además es necesario relacionar T_+ con T_N a través del choque. En esta figura se aprecia que hay multivaluación, un rango del parámetro α_N en el que coexisten detonaciones y deflagraciones (y de hecho también las detonaciones tiene multivaluación donde la curva presenta un pequeño codo).

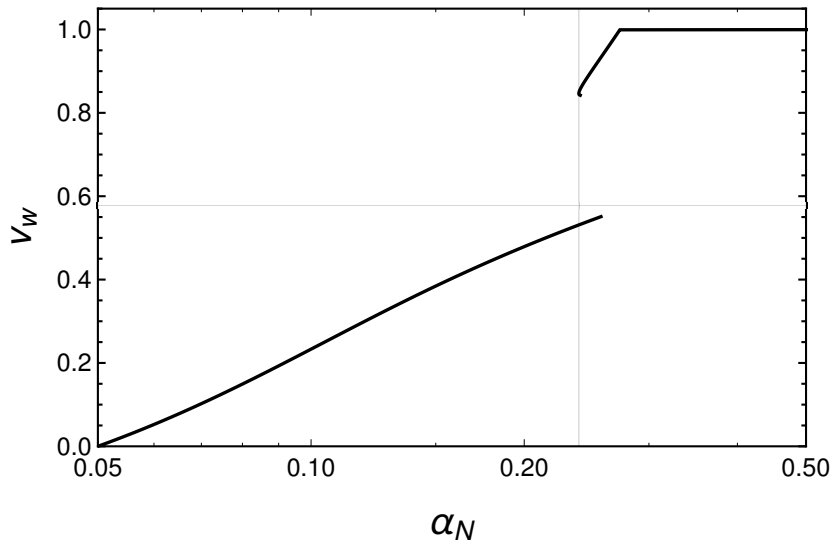


Figura 3.25: La velocidad de la pared para $\alpha_c = 0,05$, $\bar{\eta}_{UR} = 0,2$, y $\eta_{NR} = \eta_{UR}$. Aquí se extiende el rango que se grafica en la figura 3.23 para mostrar el salto al pasar de deflagraciones a detonaciones y la multivaluación de v_w

3.5.3. Selección de soluciones

Una vez estimados los parámetros T_c , T_N , η_{NR} , η_{UR} , el procedimiento sistemático para determinar qué régimen hidrodinámico ocurre se puede resumir del siguiente modo. Primero, suponiendo condiciones de detonación, se busca v_w . Si para ese caso da $v_w > 1$, se considera que en realidad hay *runaway* y se calcula F_{net} . En caso de no haber solución v_w para detonaciones, se plantean las condiciones de deflagraciones débiles y se busca v_w . Y si para deflagraciones débiles da $v_w = |v_-| > c_-$ quiere decir que se tienen que plantear las condiciones de deflagraciones de Jouguet (con $|v_-| = c_-$ y cola de rarefacción) para buscar v_w . A continuación se explica el porqué de estas reglas.

Hay en general una solución v_w para cada conjunto de parámetros T_c , T_N , η_{NR} , η_{UR} . Pero, como se ve en la figura 3.25, también puede haber más de una solución. En tal caso, solo una sucede en la transición. Esta cuestión se discute en la referencia [122], donde las soluciones semianalíticas (del mismo tipo que las que se exponen en la sección 3.3) se comparan con los cálculos numéricos [22]. Como regla general, la detonación débil es más estable que la deflagración de Jouguet, y esta a su vez es más estable que las deflagraciones débiles. Como ejemplo, se muestra en la figura 3.26 las soluciones que quedan como estados estacionarios finales, en función de la fricción (modelo sin saturación), para los valores de los parámetros considerados en la referencia [122]. Para valores grandes de fricción se tiene una deflagración débil. Cuando se alcanza la velocidad del sonido, es decir, en el punto de Jouget, la deflagración débil empalma con la deflagración de Jouget (notar la discontinuidad en la derivada de la curva por el cambio de solución hidrodinámica). Para un valor de fricción bajo, aparece la solución

que es detonación. Como ésta es la solución estable, hay un salto en la velocidad de la pared en función de η . La línea a trazos indica la velocidad del frente de choque. Se tiene $v_{sh} \simeq c_s$ para las deflagraciones subsónicas.

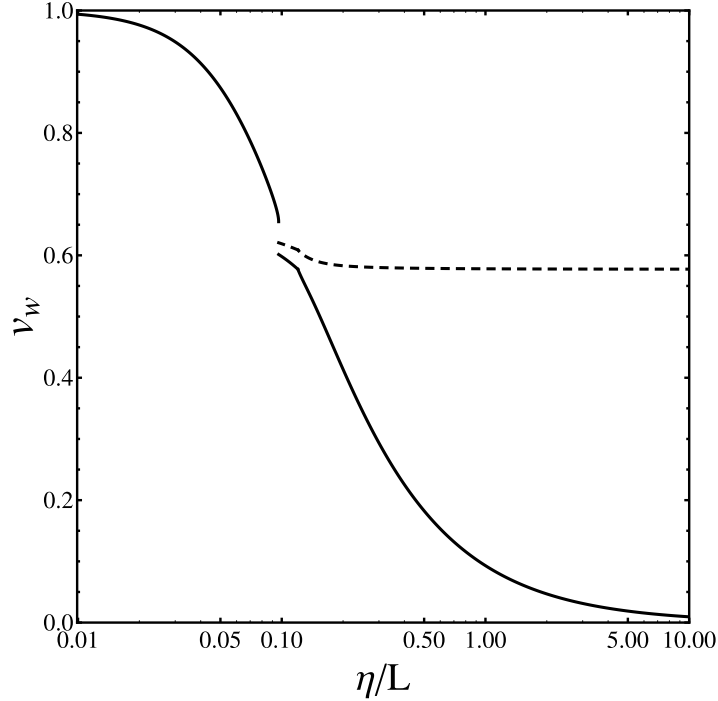


Figura 3.26: La velocidad de la pared (línea sólida) y del frente de choque (línea a trazos) en función de la fricción, para $\alpha_c = 4,45 \times 10^{-3}$ y $\alpha_N = 7,06 \times 10^{-3}$.

3.6. Factor de eficiencia

El contenido de esta sección integra procedimientos y resultados numéricos que publicamos en [1], [3] y [4] abarcando los casos estacionarios y *runaway*.

De acuerdo a la definición (2.98) o (2.107), se tiene

$$\kappa_{fl} = \frac{w_N}{\Delta \varepsilon} \frac{j+1}{v_w^{j+1}} I \quad (3.80)$$

$$\tilde{\kappa}_{fl} = \frac{w_N}{\Delta e_N} \frac{j+1}{v_w^{j+1}} I \quad (3.81)$$

donde

$$I = \int_0^1 \frac{w}{w_N} v^2 \gamma^2 \xi^j d\xi \quad (3.82)$$

La densidad de entalpía se normaliza al valor fijado (como condición de contorno) lejos por delante del frente de transición $w_N = w_+(T_N)$, ya que es proporcional a ese valor. La integral (3.82) en general se resuelve numéricamente, pero para el caso plano ($j = 0$) se puede hacer *analíticamente* como se muestra en la sección 3.6.3. Se considera el régimen *runaway* en la sección 3.6.5.

3.6.1. Dispersión de energía cinética en distintas geometrías

La energía liberada en los frentes de transición se esparce en el plasma. Parte ocasiona recalentamiento y otra parte movimientos masivos de fluido. Algunas de las consecuencias de la transición de fases pueden depender del espesor del *cascarón* de plasma donde la energía está concentrada. Aquí solo se centra interés en los movimientos masivos de fluido, que son importantes para la generación de ondas gravitatorias durante la *colisión* de burbujas. Por ejemplo, el espesor del cascarón se estudia en [112] con esa motivación.

Las paredes de burbuja dejan al fluido moviéndose hacia adelante con velocidades \tilde{v}_+ y \tilde{v}_- . En el panel izquierdo de las figuras 3.11, 3.12, y 3.13 se observa que esas velocidades son muy similares para diferentes geometrías de pared. No obstante, para deflagraciones, lejos de la pared la velocidad decae más rápido para las burbujas más simétricas (esféricas), pues en ese caso hay más espacio para que la energía sea distribuida²⁶. Con fines ilustrativos, se define el cascarón donde la energía cinética está concentrada como la región alrededor de la pared donde la densidad de energía cinética se mantiene mayor que la mitad del valor máximo de cada lado de la pared. Y esos valores máximos, según las figuras 3.11, 3.12, y 3.13, corresponden a los valores justo por delante y por detrás $e_{v\pm} = w_{\pm} \tilde{v}_{\pm}^2 \tilde{\gamma}_{\pm}^2$. Así, ese espesor es dado por $\delta\xi = \xi_+ - \xi_-$, donde ξ_+ y ξ_- están determinados por la condición $e_v(\xi_{\pm}) = e_{v\pm}/2$. Se grafica el valor de $\delta\xi$ en la figura 3.27 para la aproximación del *Bag*. La forma de la

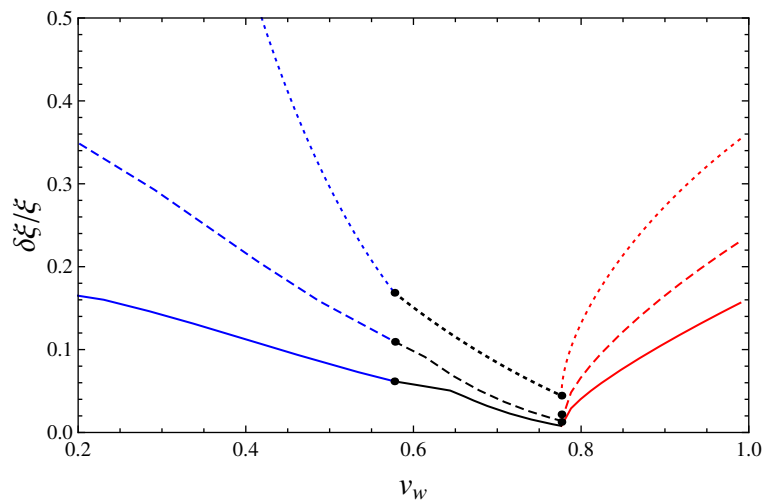


Figura 3.27: El espesor $\delta\xi$ de la región alrededor de la pared donde la densidad de energía cinética se reduce a la mitad de su máximo valor, para el modelo del *Bag* con $\alpha_N = 0,1$ y en función de v_w . Líneas solidas corresponden a burbujas esféricas, discontinuas a burbujas cilíndricas, y punteadas a burbujas planas. Deflagraciones subsónicas en azul, deflagraciones supersónicas en negro, detonaciones en rojo.

curva es diferente a las dadas en la referencia [112] para el caso esférico, ya que aquí se define $\delta\xi$ de forma diferente. A pesar de eso, la estructura general es similar: el espesor es mayor para deflagraciones subsónicas que para detonaciones, y es bastante menor

²⁶Efectivamente, un elemento de fluido en la simetría plana avanza únicamente en una dirección transportando energía de movimiento, mientras que en la simetría esférica se va desparramando en un ángulo sólido que abarca cada vez mayor superficie a medida que avanza.

para soluciones de Jouguet. También se ve que la energía está más distribuida en el caso plano, en especial para deflagraciones.

3.6.2. Factor de eficiencia en distintas geometrías

Algunos de los remanentes comológicos de las transiciones de fase no dependen del espesor de la región de fluido perturbada alrededor de la pared. Ese es el caso, por ejemplo, cuando el mecanismo de generación está basado en la turbulencia producida por la colisión de burbujas. Se forman remolinos en todas las escalas de tamaño hasta el de las burbujas más grandes²⁷. Usualmente se supone que las paredes detonantes causan una mayor perturbación del fluido que las paredes deflagrantes, ya que las detonantes tienen mayores velocidades. Para detonaciones débiles, sin embargo, como se señala en la referencia [19] y en las secciones previas de esta tesis, a partir de cierto punto cuando mayor es la velocidad, menor es la perturbación del fluido. Así, las perturbaciones más fuertes son causadas por detonaciones de Jouguet (que es el caso usualmente considerado en la literatura especializada sobre generación de ondas gravitatorias). No obstante, este es solo un caso límite, detonaciones realistas son en general más débiles. Además, como se señala en la referencia [20], deflagraciones ordinarias pueden causar importantes perturbaciones en el fluido si están cerca del límite de Jouguet $\xi_w = c_s$.

La figura 3.28 presentada en esta sección corresponde a la comparativa entre factores de eficiencia en las diferentes geometrías de burbujas para los posibles regímenes estacionarios en la aproximación del *Bag*, la cual forma parte de nuestro trabajo publicado [1]. El κ_{fl} dado por (3.80) se calcula numéricamente para los casos esférico y cilíndrico, y analíticamente para el caso plano (ver la sección 3.3.3 y luego la sección 3.6.3). Para el caso esférico (línea sólida), los resultados están de acuerdo con los ajustes numéricos provistos en la referencia [112]. Como se esperaba, para un α_N fijo, la eficiencia es mayor para soluciones fuertes (las que están cerca de procesos de Jouguet). Para deflagraciones subsónicas el factor de eficiencia se incrementa con la velocidad de la pared, mientras que para detonaciones κ_{fl} decrece con ξ_w . El pico de eficiencia es para deflagraciones supersónicas, que son procesos de Jouguet. Es interesante notar que incluso las deflagraciones subsónicas pueden dar factores de eficiencia mayores que las detonaciones.

Se ve que diferentes geometrías dan en general valores similares de κ , excepto para el caso de velocidades pequeñas ($\xi_w \lesssim 0,2$). Ese caso no es de interés en general para la generación de ondas gravitatorias, ya que el factor de eficiencia es pequeño. Para paredes más rápidas, las tres curvas están bastante cerca; solo se separan un poco en la deflagración supersónica (en la figura 3.28, la diferencia en el punto más alto de las curvas es menor a un 20%). En cualquier caso es claro por la figura 3.28 que la diferencia entre geometrías será siempre a lo sumo un factor $\mathcal{O}(1)$, excepto para los poco interesantes valores bajos de κ_{fl} . Este resultado es importante por dos motivos: uno es que el caso plano es mucho más simple de calcular, y aquí vemos que en la mayoría de los casos es buena aproximación para el esférico. El otro motivo es que cuando las burbujas comienzan a colisionar y unirse (que es cuando generan ondas gravitatorias) pierden la simetría esférica. Estos resultados muestran que la forma no es tan importante.

²⁷En menor medida también se pueden formar de mayor tamaño

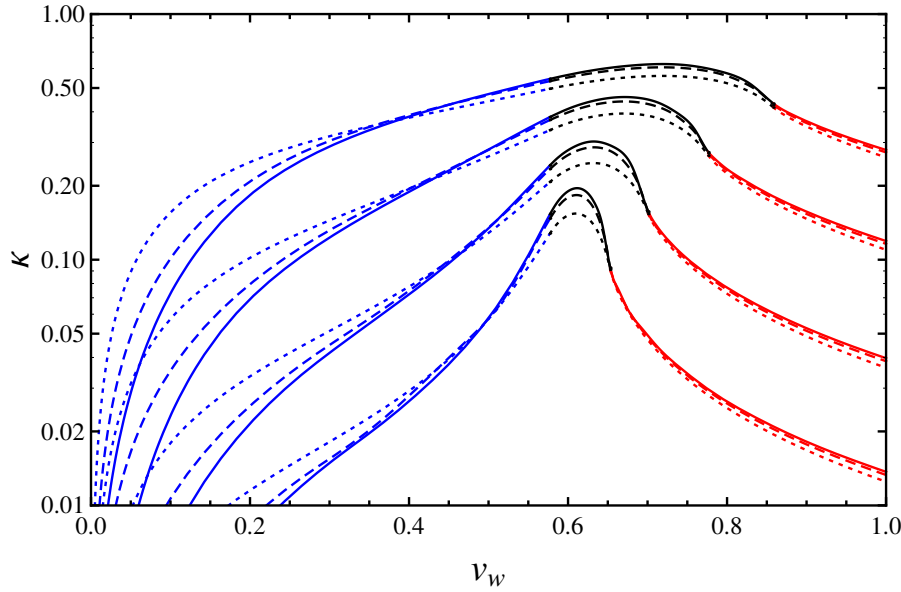


Figura 3.28: El factor de eficiencia κ_{fl} en función de v_w para $\alpha_N = 0,01, 0,03, 0,1, 0,3$. Líneas sólidas corresponden al caso esférico, líneas discontinuas corresponden al caso cilíndrico, y líneas punteadas corresponden al caso plano. Deflagraciones subsónicas en azul, deflagraciones supersónicas en negro, y detonaciones en rojo.

3.6.3. Factor de eficiencia de burbujas planas

Similarmente a la sección 3.3.3, en la presente se exponen los resultados de cálculo analítico del factor de eficiencia en simetría plana, que hemos realizado primeramente en la publicación [1], para el *Bag*, y posteriormente extendido al *Modelo* c_{\pm} en [3].

Como se muestra en la sección 3.6.2, para la ecuación de estado del *Bag*, el factor de eficiencia κ_{fl} para burbujas con paredes lo suficientemente rápidas difiere en menos de un 20% en las diferentes geometrías. Como se señala en la sección 2.7.3.2, para el *Bag* vale la relación $\kappa_{\text{fl}}/\tilde{\kappa}_{\text{fl}} = 1 + 3T_N^4/T_c^4$ que permite asegurar entonces conclusiones similares para $\tilde{\kappa}_{\text{fl}}$. La parte relevante del cálculo analítico del factor de eficiencia para burbujas planas, es indistinta para $\tilde{\kappa}_{\text{fl}}$ o κ_{fl} . En efecto, con $j = 0$ las expresiones (3.80), (3.81) y (3.82) toman la forma

$$\kappa_{\text{fl}} = \frac{w_N}{\Delta \varepsilon} \frac{1}{\xi_w} I^{(0)}, \quad (3.83)$$

$$\tilde{\kappa}_{\text{fl}} = \frac{w_N}{\Delta e_N} \frac{1}{\xi_w} I^{(0)}, \quad (3.84)$$

$$I^{(0)} = \int_0^1 \frac{w}{w_N} v^2 \gamma^2 d\xi. \quad (3.85)$$

En los siguientes apartados se calcula la integral $I^{(0)}$, que depende del perfil de fluido, para el *Modelo* c_{\pm} considerando simetría plana. En este modelo, la densidad de energía liberada $\Delta e_N = e_+(T_N) - e_-(T_N)$ puede expresarse en términos de T_N/T_c , que

caracteriza el sobreenfriamiento, y del parámetro $\bar{L} = L/w_+(T_c)$ como

$$\frac{\Delta e_N}{w_N} = \frac{1}{1 + c_+^2} \left[\alpha_c \left(\frac{T_c}{T_N} \right)^{\nu_+} + 1 - \frac{c_+^2 - \alpha_c}{c_-^2} \left(\frac{T_N}{T_c} \right)^{\nu_- - \nu_+} \right], \quad (3.86)$$

donde $\alpha_c = \alpha(T_c)$ se puede expresar como

$$\alpha_c = c_-^2 \frac{1 + c_+^2}{1 + c_-^2} \bar{L} + \frac{c_+^2 - c_-^2}{1 + c_-^2} \quad (3.87)$$

que en el caso del *Bag* se simplifica a $\alpha_c = \bar{L}/3$.

Onda de choque: Para $v(\xi) = cte$ y $w(\xi) = cte$, la integral (3.85) es inmediata; se tiene

$$I_{\text{sh}}^{(0)} = \frac{w_+}{w_N} \tilde{v}_+^2 \tilde{\gamma}_+^2 (v_{\text{sh}} - v_w), \quad (3.88)$$

donde se usa la notación $\tilde{\gamma}_\pm^2 = 1/(1 - \tilde{v}_\pm^2)$. El cociente $\frac{w_+}{w_N}$ sale de la ecuación (3.60).

Onda de rarefacción: Para el tramo no constante con $v(\xi) = v_{\text{rar}}(\xi)$, se tiene

$$I_{\text{rar}}^{(0)} \equiv \int_{c_-}^{\xi_0} \frac{w_{\text{rar}}}{w_N} \frac{v_{\text{rar}}^2}{1 - v_{\text{rar}}^2} d\xi, \quad (3.89)$$

De acuerdo a las ecuaciones (3.56) y (3.59), se tiene

$$I_{\text{rar}}^{(0)} = \frac{w_-}{w_N} \left[\frac{1}{1 - c_-^2} \left(\frac{1 - c_-}{1 + c_-} \frac{1 - \tilde{v}_-}{1 + \tilde{v}_-} \right)^{\frac{c_- \nu_-}{2}} \bar{I} \right], \quad (3.90)$$

donde

$$\bar{I} = \int_{c_-}^{\xi_0} \left(\frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right)^{\frac{c_- \nu_-}{2}} \frac{(\xi - c_-)^2}{1 - \xi^2} d\xi. \quad (3.91)$$

Luego de un cambio de variable $\Xi = (1 + \xi)/(1 - \xi)$, la integral \bar{I} se vuelve

$$\bar{I} = \int_{\Xi_-}^{\Xi_0} \Xi^{\vartheta-1} \left(\frac{(1 - c_-)^2}{2} - \frac{2}{\Xi + 1} + \frac{2}{(\Xi + 1)^2} \right) d\Xi, \quad (3.92)$$

con $\vartheta = c_- \nu_-$. Así, la integral \bar{I} se descompone en tres integrales. La primera es trivial, y las otras dos pueden ser expresadas en términos de las funciones hipergeométricas²⁸ ${}_2F_1(1, \vartheta; \vartheta + 1; -\Xi)$ y ${}_2F_1(2, \vartheta; \vartheta + 1; -\Xi)$, donde ${}_2F_1 \equiv \mathbb{F}$ está definido como [131]

$$\mathbb{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2; \mathcal{C}_3; z) = 1 + \frac{\mathcal{C}_1 \mathcal{C}_2}{\mathcal{C}_3} z + \frac{\mathcal{C}_1(\mathcal{C}_1 + 1) \mathcal{C}_2(\mathcal{C}_2 + 1)}{\mathcal{C}_3(\mathcal{C}_3 + 1) 1 \cdot 2} z^2 + \dots \quad (3.93)$$

²⁸Ver [131], ecuaciones 3.194-1.

Las funciones hipergeométricas con $\mathcal{C}_1 = 1$ y $\mathcal{C}_1 = 2$ están relacionadas²⁹, y también se tiene una relación³⁰ entre $\mathbb{F}(1, \vartheta; \vartheta + 1; -\Xi)$ y $\mathbb{F}(1, 1; \vartheta + 1; \frac{\Xi}{\Xi+1})$. Así se obtiene

$$\bar{I} = \frac{1 - c_-^2}{1 + c_-^2} [f(\xi_0) - f(c_-)] , \quad (3.94)$$

donde

$$f(\xi) = \left[\frac{1+\xi}{1-\xi} \right]^{\frac{c_- \nu_-}{2}} \left[1 - \frac{1+c_-^2}{1-c_-^2} (\xi - c_-) - (1 - \xi) \mathbb{F} \left(1, 1; \frac{(c_-+1)^2}{2c_-}; \frac{1+\xi}{2} \right) \right] \quad (3.95)$$

Como resultado, se tiene

$$I_{\text{rar}}^{(0)} = \frac{w_-}{w_N} \left[\left(\frac{1 - c_-}{1 + c_-} \frac{1 - \tilde{v}_-}{1 + \tilde{v}_-} \right)^{\frac{c_- \nu_-}{2}} \frac{1}{1 + c_-^2} [f(\xi_0) - f(c_-)] \right] \quad (3.96)$$

En general la integral (3.85) se puede calcular para cualquier solución hidrodinámica posible descomponiéndola en intervalos donde corresponden los resultados $I_{\text{sh}}^{(0)}$, $I_{\text{rar}}^{(0)}$ y el que resulta similar a $I_{\text{sh}}^{(0)}$ para el tramo constante de una detonación débil [en el intervalo (ξ_0, ξ_w) donde $v(\xi) = \tilde{v}_-$ y $w(\xi) = w_-$].

3.6.3.1. Deflagraciones débiles

En este caso simplemente

$$I^{(0)} = I_{\text{sh}}^{(0)} \quad (3.97)$$

Los valores de \tilde{v}_+ y v_{sh} se calculan como función de v_w y α_N del modo que se explica en la sección 3.3.3.2.

3.6.3.2. Detonaciones débiles

Para detonaciones débiles, el integrando en la ecuación (3.85) es una constante entre ξ_0 y $\xi_w = v_w$, mientras que en la región de la rarefacción se obtiene de las ecuaciones (3.56) y (3.59). Entonces, la integral se separa en dos partes

$$I^{(0)} = \frac{w_-}{w_N} \tilde{\gamma}_-^2 \tilde{v}_-^2 (v_w - \xi_0) + I_{\text{rar}}^{(0)} \quad (3.98)$$

El valor de w_- está dado por la ecuación (2.66), y los valores de \tilde{v}_- y ξ_0 se calculan como función de v_w y α_N del modo que se explica en la sección 3.3.3.1.

3.6.3.3. Soluciones de Jouguet

Similarmente a los otros casos (pero con $\xi_0 = v_w$),

$$\begin{aligned} I &= I_{\text{sh}}^{(0)} + I_{\text{rar}}^{(0)} \\ &= \frac{w_+}{w_N} \tilde{v}_+^2 \tilde{\gamma}_+^2 (v_{\text{sh}} - v_w) + \frac{w_-}{w_N} \left(\frac{1 - c_-}{1 + c_-} \frac{1 - \tilde{v}_-}{1 + \tilde{v}_-} \right)^{\frac{c_- \nu_-}{2}} \frac{f(v_w) - f(c_-)}{1 + c_-^2} \end{aligned} \quad (3.99)$$

²⁹Usando las ecuaciones 9.137-2 de la referencia [131] y teniendo en cuenta que $\mathbb{F}(0, \mathcal{C}_2; \mathcal{C}_3; z) = 1$.

³⁰Ver [131], ecuaciones 9.131-1.

con w_+/w_N dado por la ecuación (3.60) en función de v_{sh} y w_-/w_+ dado por la (3.65). Los valores de v_{sh} , v_+ , etc. pueden expresarse como funciones de \tilde{v}_+ , que a su vez se pone en función de α_N y v_w como se explica en la sección 3.3.3.3.

3.6.4. Factor de eficiencia y velocidad del sonido

El contenido de esta sección, referido al estudio del factor de eficiencia para diferentes velocidades del sonido, lo publicamos originalmente en [3].

En la sección 2.7.3.2 se argumenta que el factor de eficiencia κ_{fl} no tiene una interpretación física intuitiva, ya que la cantidad $\Delta\varepsilon$ no es fácil de identificar en modelos generales. Lo mismo le ocurre a la variable térmica $\alpha = \Delta\varepsilon/(a_+T^4)$ que naturalmente surge en la aproximación del *Bag*, y que forzosamente se usa en general. En el *Modelo* c_{\pm} se la adapta con una generalización mínima $\alpha = \Delta\varepsilon/(a_+T^{\nu+})$. A su vez, teniendo en cuenta la discusión de la sección 3.2.2.3, ésta última podría reemplazarse por una variable más física: $\bar{L} = L/w_+(T_c)$. Por lo tanto, aquí se calcula el parámetro $\tilde{\kappa}_{fl}$ en función de aquellos parámetros cuya interpretación es físicamente más clara, aunque el cálculo es esencialmente el mismo para κ_{fl} como se ve en la sección 3.6.3.

En secciones previas de este capítulo se ve que, para una dada configuración de parámetros termodinámicos y una dada cantidad de sobreenfriamiento, hay una solución hidrodinámica para cada valor de velocidad de la pared v_w . No obstante, en un problema concreto v_w no es un parámetro libre. La velocidad de la pared depende esencialmente de la diferencia de presión entre las dos fases y la fuerza de fricción entre la pared y el plasma (ver sección 2.3). En general, v_w puede calcularse en función de los parámetros termodinámicos, la temperatura, y los coeficientes de fricción η_{NR} y η_{UR} , mediante una ecuación como la (2.41) [ver también (3.74) para el *Bag* con $F_{net} = 0$], donde la dependencia en esos parámetros no es trivial. Como resultado, dependiendo de estos, algunos valores de v_w nunca pueden llegar a darse (ver figuras 3.23, 3.25 y 3.26). Además, para algunas configuraciones puede haber múltiples soluciones hidrodinámicas, con diferentes valores de v_w (como también se ve en la figura 3.23). Estas cuestiones han sido extensamente investigadas con la aproximación del *Bag* (ver, por ejemplo, [122]). Como la hidrodinámica depende de la velocidad del sonido, se esperaría que la velocidad de la pared dependa de c_{\pm} también. No se aborda esa cuestión aquí. En lo que sigue, se mantiene v_w como un parámetro libre y se investiga la perturbación en el plasma, ignorando la *backreaction* en la velocidad de la pared.

A continuación, para investigar la dependencia que la hidrodinámica tiene con la velocidad del sonido, se computa el factor de eficiencia para un régimen estacionario en simetría plana $\tilde{\kappa}_{fl}$, que se detalla en la sección anterior en función de los parámetros c_{\pm} , \bar{L} , T_N/T_c y v_w .

Se comienza considerando el *caso C*, del *Modelo* c_{\pm} , que probablemente es el más realista (al menos, de acuerdo a la energía libre a 1-lazo, como se discute en la sección 3.2). En la figura 3.29 se muestra el resultado para dos valores del parámetro \bar{L} , cuando $c_+ = 1/\sqrt{3}$, $c_- = 0,5$. Cualitativamente, los resultados son generalmente similares a los de la aproximación del *Bag*³¹ (comparar con figura 3.28). De hecho, el factor de eficiencia es pequeño para deflagraciones débiles ($v_w < c_-$), se maximiza para las soluciones de Jouguet ($c_- < v_w < v_j^{det}$), y decrece nuevamente para detonaciones débiles ($v_w > v_j^{det}$). Además, un calor latente más grande o un más fuerte sobreenfriamiento da un factor de eficiencia más alto.

³¹Notar que para el *Bag*, los factores de eficiencia están relacionados por $\kappa_{fl} \simeq 4\tilde{\kappa}_{fl}$.

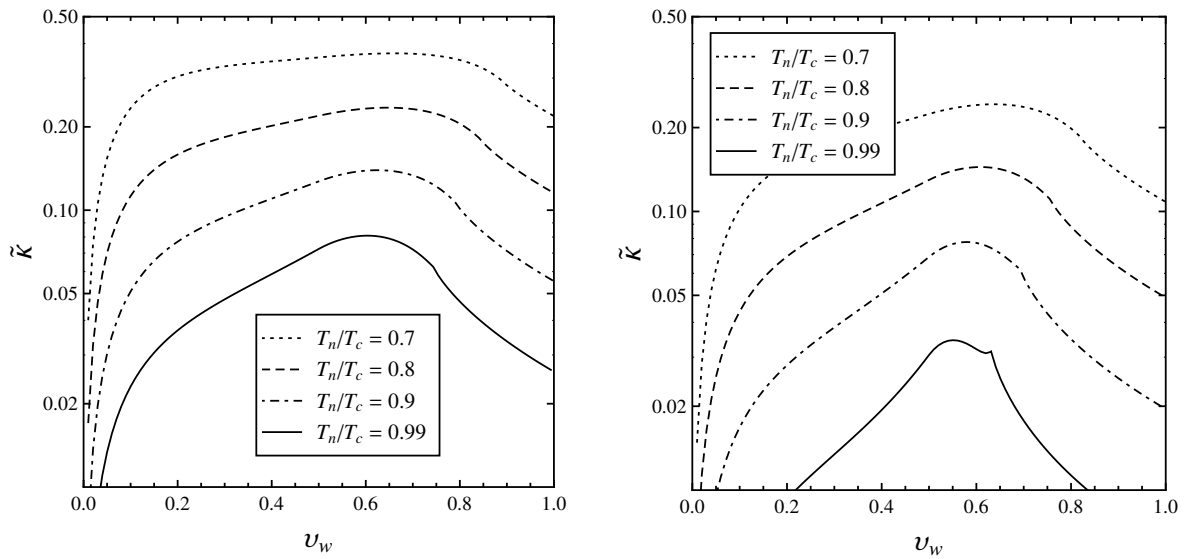


Figura 3.29: El factor de eficiencia $\tilde{\kappa}_{fl}$ en función de la velocidad de la pared cuando $c_+ = 1/\sqrt{3}$, $c_- = 0,5$, con $\bar{L} = 0,5$ (panel izquierdo) y $\bar{L} = 0,1$ (panel derecho).

Como se puede apreciar en el panel derecho de la figura 3.29, para un calor latente pequeño y un leve sobreenfriamiento hay un cambio en el comportamiento de $\tilde{\kappa}_{fl}$ con u_w cerca del máximo. Aparece una región angulosa en el gráfico y se vuelve más pronunciada para T_N/T_c cercano a 1. Esa región angulosa está de hecho presente en todas las curvas (y en todos los casos, incluido en el *Bag*), solo que es menos notable. Este comportamiento es debido a la discontinuidad entre el perfil de la detonación débil (para el cual se tiene $\tilde{v}_+ = 0$, $T_+ = T_N$) y aquellos de las soluciones de Jouguet (para los cuales se tiene $\tilde{v}_+ > 0$, $T_+ > T_N$). La discontinuidad en la densidad de energía cinética ocasiona ese punto anguloso en el gráfico del factor de eficiencia. La región angulosa se vuelve más notable para transiciones de fase débiles debido a la aparición de detonaciones de Jouguet subsónicas. Relativamente, estas soluciones causan menos perturbación del fluido que las deflagraciones supersónicas (ya que se tiene $\tilde{v}_+ < \tilde{v}_-$), y tiende a un valor más bajo de $\tilde{\kappa}_{fl}$.

Las diferencias cualitativas y cuantitativas con la aproximación del *Bag* se incrementan cuando c_- se separa de c_+ . En la figura 3.30 se consideran algunos casos $c_- < c_+$, donde la velocidad del sonido en la fase dominante a alta temperatura es la de radiación, $c_+ = 1/\sqrt{3}$. El caso del *Bag* ($c_- = c_+$) se grafica con una línea negra sólida. Se observa que, para $c_- < 1/\sqrt{3}$, la máxima eficiencia es más pequeña que en el *Bag*. Además, a medida que c_- decrece, el pico de la curva se mueve a la izquierda. Esto pasa porque la eficiencia siempre es máxima entre c_- y v_J^{det} , y esta región se mueve a la izquierda a medida que c_- decrece. Como consecuencia de este efecto, el factor de eficiencia en la región de deflagración débil tiende a agrandarse con respecto al caso del *Bag*. Para c_- pequeño se ve de nuevo el efecto de la aparición de detonaciones subsónicas, con valores más bajos de $\tilde{\kappa}_{fl}$ en la región de Jouguet.

De acuerdo a la discusión de la sección 3.2, los *casos A* y *B* no parecen ser tan probables como el *caso C*, pero no ciertamente imposibles. En el panel izquierdo de la figura 3.31 se consideran diferentes valores de la velocidad del sonido cuando $c_+ = c_-$ (*caso A*). Se observa que la posición del máximo se desplaza, como es de esperarse debido a que está siempre en la región de Jouguet. Además, se ve que la producción

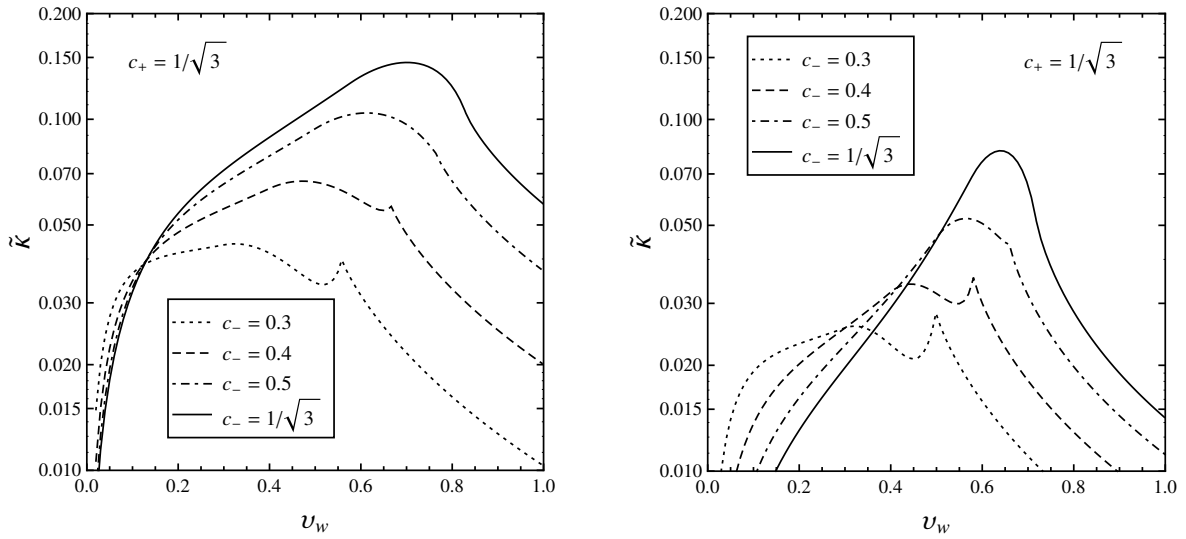


Figura 3.30: El factor de eficiencia $\tilde{\kappa}_{\text{fl}}$ en función de la velocidad de la pared cuando $c_+ = 1/\sqrt{3}$ y para diferentes valores de c_- , con un sobreenfriamiento $T_N/T_c = 0,95$ y para $\bar{L} = 0,5$ (panel izquierdo) y $\bar{L} = 0,1$ (panel derecho).

de la energía cinética es más eficiente para un fluido con mayor velocidad de sonido.

En el panel derecho de la figura 3.31 se consideran algunos ejemplos del *caso B*. Está fijada la velocidad del sonido al valor de radiación en la fase dominante a baja temperatura y se consideran diferentes valores de c_+ , con $c_+ < c_-$. Se observa que en este caso la eficiencia es más grande que en el *Bag* para el rango de velocidades de pared que maximiza el factor de eficiencia. Por otro lado, deflagraciones o detonaciones débiles generalmente dan factores de eficiencia más chicos que en el *Bag*. A pesar de eso, se ve que en este caso los resultados no se apartan significativamente de los del *Bag*, en contraste a lo que pasa en el caso $c_- < c_+$ (comparar con la figura 3.30).

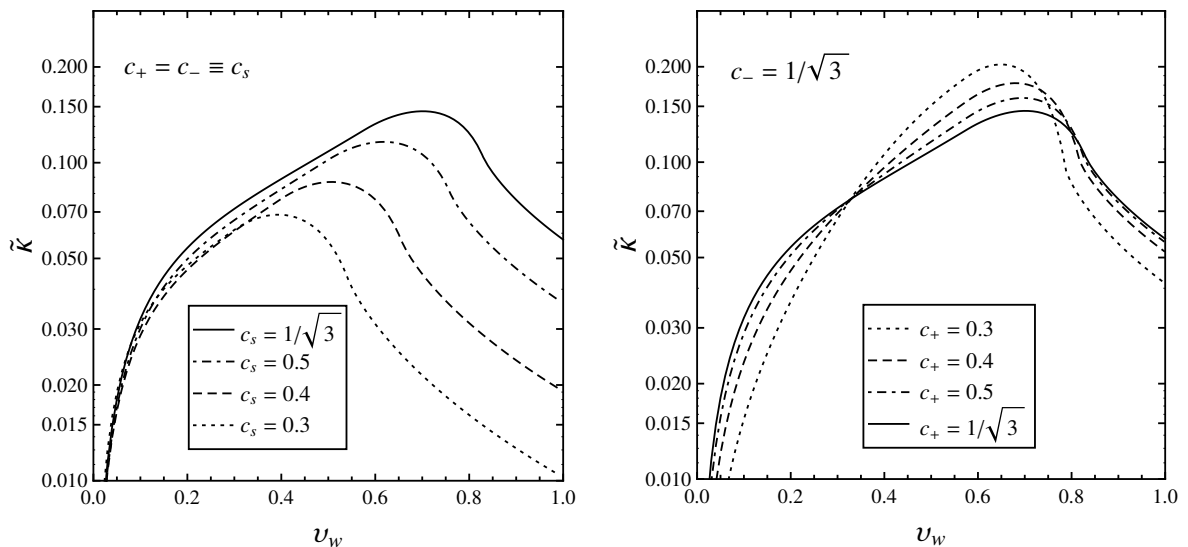


Figura 3.31: El factor de eficiencia $\tilde{\kappa}_{\text{fl}}$ en función de la velocidad de la pared, para $\bar{L} = 0,5$, $T_N/T_c = 0,95$, y varios valores de la velocidad del sonido. El panel izquierdo corresponde al caso A ($c_+ = c_-$), y el panel derecho al caso B ($c_+ < c_-$).

En todos estos ejemplos, se limita la velocidad del sonido en las dos fases a valores $c_s \leq 1/\sqrt{3}$. Considerando valores de c_{\pm} mayores que esta cota da generalmente valores del factor de eficiencia más grandes, y las curvas de $\tilde{\kappa}_{\text{fl}}$ vs. v_w se mueven a la derecha.

3.6.5. Factor de eficiencia en régimen ultra relativista

El contenido de esta sección se basa en los cálculos del factor de eficiencia para el régimen ultra relativista, y demás discusiones sobre distribución de energía liberada en la transición, que hemos publicado en [4]. Por simplicidad, el tratamiento se lleva a cabo con el modelo del *Bag*, considerando tanto paredes planas como cilíndricas y esféricas.

Como se discute en la sección 2.6.1, los perfiles de soluciones runaway corresponden a las mismas ecuaciones de régimen estacionario que dan la velocidad $v(\xi)$ parametrizada respecto a ξ , cuando se toma $\xi_w \approx v_w \approx 1$ como la posición de la pared [más las condiciones (2.83) o (3.70)]. En general, para detonaciones débiles o paredes *runaway*, $v(\xi) = v(\xi; v_w, \tilde{v}_-)$ queda determinado por los parámetros v_w y \tilde{v}_- . Además, para esos regímenes, de la ecuación (2.51) se ve que tomando extremos de integración entre $\xi_w = v_w$ [con $v(\xi_w) = \tilde{v}_-$, justo tras la pared en la fase $-$] y ξ (entre c_- y v_w), el perfil de w/w_- no depende de w_- , sólo de ese $v(\xi; v_w, \tilde{v}_-)$. Como consecuencia, resulta práctico reescribir un poco las expresiones (3.80) y (3.82) para detonaciones UR

$$\kappa_{\text{fl}} = \frac{j+1}{v_w^{j+1}} \frac{4}{3\alpha_+} \frac{w_-}{w_+} I(v_w, \tilde{v}_-), \quad (3.100)$$

con

$$I(v_w, \tilde{v}_-) = \int_{c_-}^{v_w} d\xi \xi^j \frac{w}{w_-} \gamma^2 v^2. \quad (3.101)$$

Donde aquí se normaliza el integrando con w_- en vez de w_N , por el motivo anterior y porque las ecuaciones UR para detonaciones (3.69) y *runaway* (3.70) suministran una expresión simple de w_-/w_+ .

Para detonaciones \tilde{v}_- y w_-/w_+ son funciones de α_+ y v_w , y por lo tanto el factor de eficiencia solo depende de esas cantidades, $\kappa_{\text{fl}} = \kappa_{\text{fl}}^{\text{det}}(\alpha_+, v_w)$. Por otro lado, para paredes *runaway* se tiene $v_w = 1$, mientras que w_-/w_+ y \tilde{v}_- dependen de α_+ y \bar{F} . De las ecuaciones (3.100) y (3.70), para este caso κ_{fl} es de la forma

$$\kappa_{\text{fl}}^{\text{run}}(\alpha_+, \bar{F}) = \frac{j+1}{3} \frac{4(1+3\alpha_+ - 3\bar{F})}{\alpha_+} I_1(\tilde{v}_-) \quad (3.102)$$

donde $I_1(\tilde{v}_-) = I(1, \tilde{v}_-)$.

Para el caso plano la integral (3.101) puede resolverse analíticamente como se muestra en la sección 3.6.3, teniendo en cuenta la leve diferencia en la normalización con respecto a (3.85), mientras que para paredes cilíndricas o esféricas debe ser calculado numéricamente. Notar que aún cuando w_- y \tilde{v}_- sean los mismos para todas las simetrías, los perfiles de rarefacción difieren. En la figura 3.32 se muestra el valor del factor de eficiencia para paredes esféricas y planas. El caso cilíndrico cae entre los otros dos. Para paredes en estado estacionario se grafica κ_{fl} en función de la velocidad de la pared (panel izquierdo), mientras que para paredes *runaway* se grafica en función de la fuerza neta (panel derecho). Para el rango de valores mostrado en la figura, la diferencia entre las dos simetrías de pared es siempre menor al 10%, esta diferencia

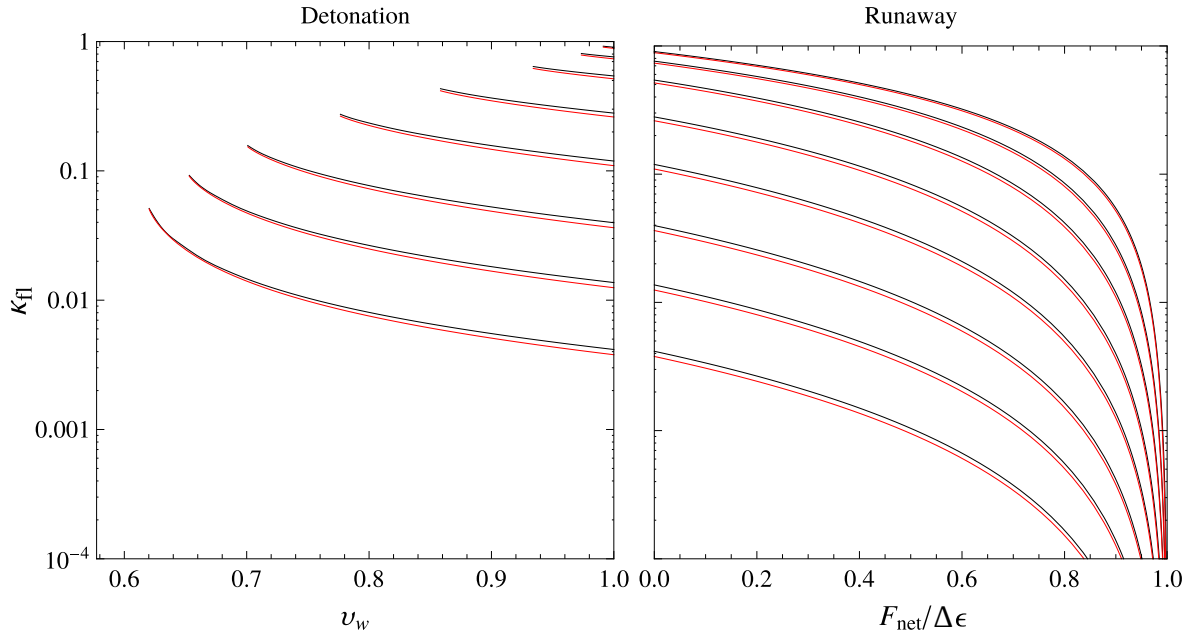


Figura 3.32: El factor de eficiencia para paredes esféricas (negro) y planas (rojo), para varios valores de α_+ . De abajo hacia arriba, $\alpha_+ = 0,003, 0,01, 0,03, 0,1, 0,3, 1, 3, 10$.

relativa es sólo superada para F_{net} muy cerca de $F_{\text{máx}} = \Delta\varepsilon$, donde $\kappa_{\text{fl}} \rightarrow 0$. Como se discute previamente, no es probable que tales valores de F_{net} se alcancen en un modelo físico. Esta diferencia pequeña es interesante, ya que para paredes planas se obtienen resultados analíticos.

Para la ecuación de estado del *Bag*, los valores de \tilde{v}_- y w_- están dados por las ecuaciones (3.66-3.67) para detonaciones y por las ecuaciones (3.70) para paredes *runaway*. Para esos perfiles, en el caso plano, la integral $I(v_w, \tilde{v}_-)$ en (3.100-3.101) es similar a la expresada en (3.98),

$$I = \gamma_-^2 v_-^2 (v_w - \xi_0) + \frac{3(2 - \sqrt{3})^{\frac{2}{\sqrt{3}}}}{4} \left[\frac{1 - \tilde{v}_-}{1 + \tilde{v}_-} \right]^{\frac{2}{\sqrt{3}}} [f(\xi_0) - f(c_-)], \quad (3.103)$$

donde $f(\xi) = \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} \right)^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \left\{ \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 + (1 - \xi) \left[2 - \mathbb{F}\left(1, 1, \frac{2}{\sqrt{3}} + 1, \frac{1+\xi}{2}\right) \right] \right\}$. Los factores de eficiencia $\kappa_{\text{fl pl}}^{\text{det}}$ y $\kappa_{\text{fl pl}}^{\text{run}}$ para el caso plano se obtienen insertando la ecuación (3.103) en la ecuación (3.100) (con $j = 0$) o directamente en la ecuación (3.102) para el caso *runaway*. Ya que los resultados plano y esférico son similares, se puede construir un ajuste para el caso esférico solo aproximando la diferencia entre los dos resultados. De hecho, corrigiendo el resultado plano con un factor $1,03 + 0,1\sqrt{v_w - v_J(\alpha_+)}$ resulta ser una buena aproximación. Así se tiene

$$\kappa_{\text{fl}}^{\text{det}} \approx \kappa_{\text{fl pl}}^{\text{det}}(\alpha_+, v_w) \left(1,03 + 0,1\sqrt{v_w - v_J(\alpha_+)} \right), \quad (3.104)$$

$$\kappa_{\text{fl}}^{\text{run}} \approx \kappa_{\text{fl pl}}^{\text{run}}(\alpha_+, \bar{F}) \left(1,03 + 0,1\sqrt{1 - v_J(\alpha_+)} \right). \quad (3.105)$$

En la figura 3.33 se comparan estos ajustes con los resultados numéricos. En todo el rango de detonación, y para $F_{\text{net}}/\Delta\varepsilon < 0,9$ en el caso *runaway*, el error relativo es menor a un 3%.

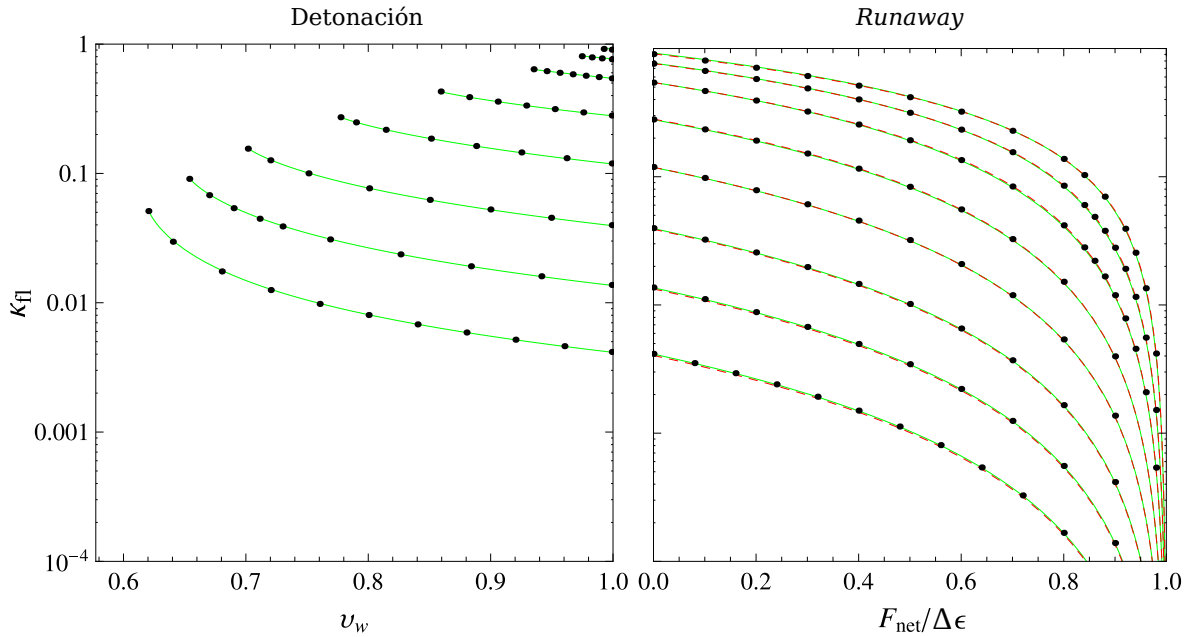


Figura 3.33: Ajuste del factor de eficiencia para paredes esféricas, correspondientes a (de abajo hacia arriba) $\alpha_+ = 0,003, 0,01, 0,03, 0,1, 0,3, 1, 3, 10$. Los puntos negros indican valores del resultado numérico. Las líneas rojas guionadas al ajuste de la ecuación (3.106), y las líneas verdes a los ajustes de las ecuaciones (3.104-3.105).

En el régimen *runaway* es fácil encontrar un ajuste simple (que no se basa en las fórmulas analíticas del caso plano), ya que la integral $I_1(\tilde{v}_-) = I(1, \tilde{v}_-)$ depende solo del parámetro \tilde{v}_- . En todo el rango $0 < \tilde{v}_- < 1$, esta función se aproxima bien por el polinomio $I_1(\tilde{v}_-) \simeq 0,15 \tilde{v}_-^2 - 0,132 \tilde{v}_-^3 + 0,065 \tilde{v}_-^4$, con un error relativo que es menor a un 3% para $\tilde{v}_- > 10^{-3}$. Insertando en la ecuación (3.102), se tiene

$$\kappa_{\text{fl}}^{\text{run}} \simeq (4/\alpha_+)(1 + 3\alpha_+ - 3\bar{F})(0,15 \tilde{v}_-^2 - 0,132 \tilde{v}_-^3 + 0,065 \tilde{v}_-^4), \quad (3.106)$$

con $\tilde{v}_-(\alpha_+, \bar{F})$ dado por la ecuación (3.70). El resultado se muestra en el panel derecho de la figura 3.33.

Por comparación, en la figura 3.34 se muestra el valor de κ_{fl} en todos los regímenes hidrodinámicos, para algunos valores del parámetro α_+ . Los diferentes tipos de soluciones estacionarias están divididos por los puntos $v_w = c_-$ y $v_w = v_J(\alpha_+)$. Como se discute previamente, la hidrodinámica de las detonaciones débiles se vuelve más débil para valores más grandes de la velocidad de la pared, y se vuelve incluso más débil para paredes *runaway*. Esto se refleja en el factor de eficiencia, que decrece monótonamente en ese régimen. Por otro lado, para pequeñas velocidades de la pared (es decir, para deflagraciones débiles) el factor de eficiencia crece con la velocidad de la pared, y es máximo para deflagraciones supersónicas de Jouguet.

Como se expone en la sección 2.7.3.3, cuando el régimen es *runaway* parte de la energía se acumula también en la pared acelerada. Para el factor de eficiencia de la pared, se puede obtener una expresión que dependa de los mismos parámetros que $\kappa_{\text{fl}}^{\text{run}}$ en la ecuación (3.102). Tomando la expresión (2.113), la definición (3.71) y α_+ dado por (2.88), se tiene

$$\kappa_w = \frac{F_{\text{net}}}{\Delta \varepsilon} = \frac{\bar{F}}{\alpha_+}, \quad (3.107)$$

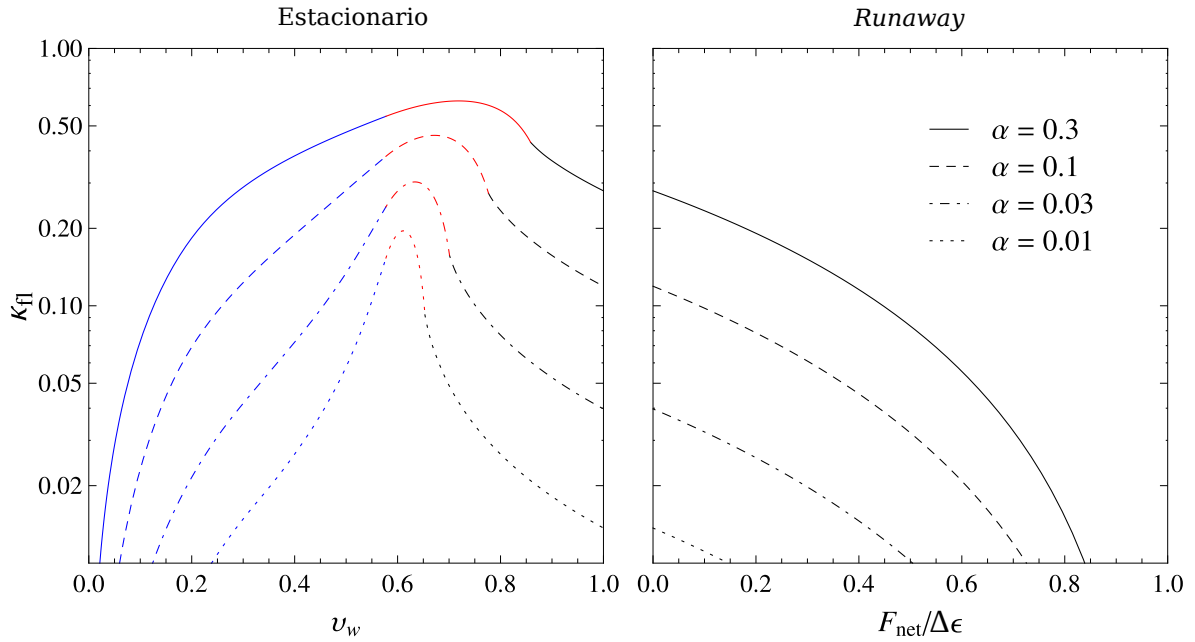


Figura 3.34: El factor de eficiencia κ_{η} para burbujas esféricas. Las curvas azules corresponden a deflagraciones débiles, las curvas rojas a deflagraciones de Jouguet, y las curvas negras a detonaciones débiles o paredes *runaway*.

cuyo cálculo es aún más simple que en (3.102) pues no depende de la integración I_1 .

Así, se calcula la fracción de energía de vacío liberada que va a parar a movimientos masivos de fluido y a la energía transportada en la pared de burbuja, como funciones de las cantidades v_w , $\bar{F} = (4/3)F_{\text{net}}/w_+$, y $\alpha_+ = L/(3w_+)$. Para un dado modelo, la temperatura de nucleación y las cantidades termodinámicas L y w_+ pueden calcularse con el potencial efectivo a temperatura finita (1.39), y la fuerza neta puede fácilmente calcularse de la ecuación (2.34). Esto da los valores de α_+ y \bar{F} .

La velocidad de la pared en estados estacionarios puede obtenerse de la ecuación (3.74), luego de determinar los coeficientes de fricción η_{UR} y η_{NR} . Los valores de η_{UR} pueden obtenerse fácilmente de \bar{F} usando la ecuación (3.73), mientras que η_{NR} sale de resultados microfísicos que se expresan en (2.26) y (2.28). En este capítulo, solo se considera la distribución de energía entre el fluido y la pared para la variación de parámetros de la figura 3.23 y 3.24. Como previamente se discute, esta variación de parámetros se vuelve bastante artificial en el régimen *runaway*. Es útil, no obstante, para una comparación con resultados previos en la bibliografía.

Como indica la expresión (3.107), la fracción de energía acumulada en la interfaz, κ_w , está dada por $F_{\text{net}}/\Delta\varepsilon$, la cual se grafica en la figura 3.24. En la figura 3.35 se considera un rango más amplio de soluciones *runaway*, y se grafica separadamente (en el panel derecho) los resultados obtenidos usando la aproximación $T_- = T_+$ en el cálculo de la fuerza de driving. El valor de κ_w está representado por la altura de la región en gris claro. Así, las curvas delimitando esta región en los paneles izquierdo y derecho de la figura 3.35 corresponden, respectivamente, a las líneas sólida y punteada en la figura 3.24. Siguiendo la referencia [112], se grafican los valores de κ_{η} (para burbujas esféricas) agregados al de κ_w . Esto da las curvas superiores delimitando las regiones en gris oscuro. Entonces, la fracción de $\Delta\varepsilon$ que va a movimientos masivos de fluido (o sea κ_{η}) está representada por el *espesor* de la región gris oscura. En concordancia,

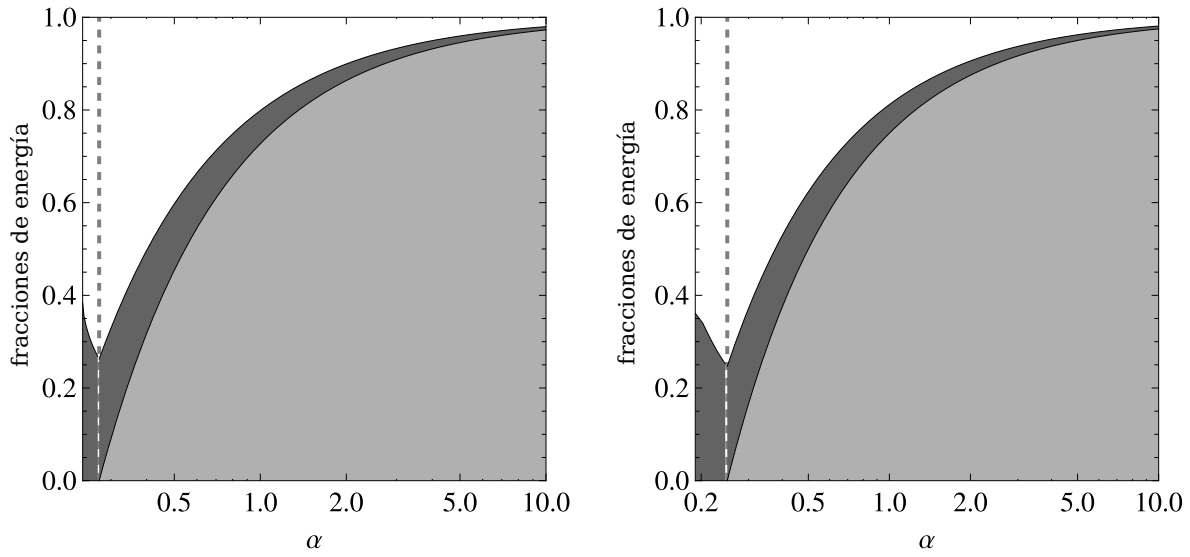


Figura 3.35: La fracción de energía de vacío que va a la pared y al fluido, para el mismo caso de las figuras 3.23 y 3.24. El panel derecho corresponde a despreciar el recalentamiento en el cálculo de la fuerza de driving (tomar $T_- = T_+$).

la región blanca indica la porción de $\Delta\varepsilon$ que va a recalentamiento³². La línea vertical separa los regímenes de detonación y *runaway*. Se incluye todo el rango de detonación (que es diferente en los dos paneles).

El panel derecho de la figura 3.35 concuerda con los resultados de la referencia [112]. Los valores de los parámetros $\eta_{NR} = \eta_{UR} = 0,2$, $a_-/a_+ = 1 - 3\alpha_c = 0,85$, corresponden al caso considerado en ese trabajo en el panel izquierdo de su figura 12. Se observa que los dos paneles de la figura 3.35 son cualitativamente similares, particularmente para el régimen *runaway*, donde la hidrodinámica es más débil. La diferencia es más notoria para detonaciones, donde la hidrodinámica es más fuerte. De hecho, el punto de Jouguet nunca se alcanza en el panel izquierdo. La diferencia cuantitativa entre los dos cálculos es mejor apreciada en las figuras 3.23 y 3.24. Para un dado α_+ , despreciar la hidrodinámica da mayores velocidades y aceleraciones de pared, y entonces, un mayor κ_w y un menor κ_{fl} . Vale la pena hacer énfasis en que la discrepancia se origina en el cálculo de v_w y \bar{F} .

Para el caso *runaway* se pueden obtener expresiones semianalíticas simples para el factor de eficiencia en función de las cantidades α_+ , α_c , y $\bar{\eta}_{UR}$. De las ecuaciones (3.107) y (3.79), se tiene

$$\kappa_w = 1 - \alpha_0/\alpha_+. \quad (3.108)$$

Esto es válido para los dos gráficos de la figura 3.35, con diferente valor de $\alpha_0(\alpha_c, \bar{\eta}_{UR})$. Ya que κ_w da la fracción de $\Delta\varepsilon$ que va a la energía cinética de la pared, la ecuación (3.108) indica que una fracción α_0/α_+ va al fluido (ya sea a movimientos masivos o recalentamiento). Más aún, usando la ecuación (3.79) en las ecuaciones (3.102) y (3.70), se tiene

$$\kappa_{fl}^{run} = \frac{4(1 + 3\alpha_0)I_1(\tilde{v}_-)}{\alpha_+}, \quad \text{con} \quad \tilde{v}_- = \frac{3\alpha_0}{2 + 3\alpha_0}. \quad (3.109)$$

³²De hecho, se libera tanto energía térmica como energía de vacío (por lo cual $L > \Delta\varepsilon$). En consecuencia, la región blanca en la figura 3.35 solo representa una parte de la energía total que va a recalentamiento del plasma, como se discute en la sección 2.7.3.2 o en [3].

Entonces, el factor de eficiencia para el caso *runaway* puede escribirse como

$$\kappa_{\text{fl}}^{\text{run}} = \kappa_{\text{fl}UR}^{\text{det}} \alpha_0 / \alpha_+, \quad (3.110)$$

donde $\kappa_{\text{fl}UR}^{\text{det}} \equiv \kappa_{\text{fl}}^{\text{det}}(\alpha_0, v_w = 1)$ es el factor de eficiencia para detonación UR. La dependencia funcional de las ecuaciones (3.108) y (3.110) respecto a α_+ concuerda con los resultados de la referencia [112]. La diferencia cuantitativa, que se ilustra en los dos paneles de la figura 3.35, se debe a los diferentes valores de α_0 y $\kappa_{\text{fl}UR}^{\text{det}}$ (en la notación de [112], $\alpha_0 = \alpha_\infty$ y $\kappa_{\text{fl}UR}^{\text{det}} = \kappa_\infty$). Como previamente se discute, esta discrepancia se debe esencialmente al diferente tratamiento de la hidrodinámica en la ecuación de la pared.

En la referencia [112] se suministra una expresión para la cantidad α_0 en función de los parámetros microfísicos. Se puede obtener una expresión similiar como sigue. Si se identifica la diferencia $\mathcal{V}_{\text{ef}}(\phi_+) - \mathcal{V}_{\text{ef}}(\phi_-)$ en la ecuación (2.34) con la constante del *Bag* $\Delta\varepsilon$ (notar, no obstante, que los mínimos, particularmente ϕ_- , son dependientes de la temperatura), entonces la fuerza neta UR se anula si

$$\Delta\varepsilon = \sum_i g_i c_i T_+^2 m_i^2(\phi_-) / 24 \equiv \varepsilon_0. \quad (3.111)$$

Para un dado T_+ , este es el valor de $\Delta\varepsilon$ que corresponde a α_0 . Así, se tiene $\alpha_0 = 4\varepsilon_0 / (3w_+)$, que puede ser usado en las ecuaciones (3.108-3.110). Se remarca que este enfoque involucra más aproximaciones que aquel usado en las ecuaciones (3.105) o (3.106), donde se obtiene $\kappa_{\text{fl}}^{\text{run}}$ directamente en función de \bar{F} .

Capítulo 4

Ondas gravitatorias de la transición de fase electrodébil

4.1. Contenido del capítulo

En la sección 4.2, utilizando los resultados del capítulo 3 más algunas estimaciones razonables de la escala electrodébil, se evalúan las fórmulas de generación de OG y se estudia cómo van las señales con la velocidad de la pared (caso estacionario), la fuerza neta (caso *runaway*) y la temperatura. En la sección 4.3 se discute cuál es la mejor forma de estimar los parámetros de generación de OG, como escalas características de agitación del plasma y duración de la transición. En la sección 4.4 se estudian distintos modelos de Física de partículas, que pueden dar una transición electrodébil fuertemente de primer orden, y se contrastan las señales de OG que éstos predicen con las curvas de sensibilidad de los diferentes detectores. Finalmente en la sección 4.5 se estudian los modelos que dan soluciones *runaway* y detonaciones ultra relativistas, y se contrastan las señales de OG para distintas variantes de diseño del detector eLISA (ahora renombrado LISA), cuya construcción es inminente.

4.2. Dependencia paramétrica de las OG

Como se menciona en la sección 2.7.3, la energía liberada en la transición que no va a parar a recalentamiento es la suma de la acumulada en la pared E_w (despreciable en régimen estacionario) más la “cinética” correspondiente a movimientos de fluido $E_{fl} \equiv E_v$. Esa energía se relaciona con los factores de eficiencia mediante $E_w + E_{fl} = (\kappa_w + \kappa_{fl})\Delta\varepsilon V_b$. En general, como se ve en las secciones 1.5.3 y 2.7.3, la intensidad de las ondas gravitatorias depende del cociente

$$\frac{E_w + E_{fl}}{E_{tot}} = \frac{(\kappa_w + \kappa_{fl})\Delta\varepsilon}{e_{tot}} \equiv \frac{\kappa_{tot}\Delta\varepsilon}{e_{tot}}, \quad (4.1)$$

donde κ_w se anula para $F_{net} = 0$ y corresponde a la expresión (2.113) para $F_{net} > 0$, y $E_{tot} = e_{tot}V_b$ es la energía total por burbuja. Si debido a la conservación de la energía se considera que e_{tot} no varía significativamente durante la transición de fase, se puede aproximar por el modelo del *Bag* en la fase “+”, $e_{tot} \approx e_+ = a_+T_+^4 + \varepsilon_+$ (se argumenta algo más luego en la sección 4.3.1.1). En muchos cálculos (de muchas publicaciones), la densidad de energía de vacío se supone que se anula en la fase de simetría rota (lo

cual no es necesariamente el caso en $T \simeq T_c$ y se puede escribir $e_{\text{tot}} = a_+ T_+^4 (1 + \alpha)$, que da

$$\frac{\kappa_{\text{tot}} \Delta \varepsilon}{e_{\text{tot}}} \approx \frac{\kappa_{\text{tot}} \alpha}{1 + \alpha}. \quad (4.2)$$

En lo que respecta a ajustar numéricamente un modelo realista, parece más conveniente utilizar el lado izquierdo de (4.2) para evaluar (4.1). Desde un punto de vista de analizar la dependencia paramétrica quizás el lado derecho de (4.2) resulta más simple. Independientemente de como se lo expresa, ya sea que aparezca el lado izquierdo o el lado derecho, debe entenderse que la magnitud física es siempre $(E_w + E_{\text{fl}})/E_{\text{tot}}$. A continuación, donde se ilustran dependencias paramétricas, conviene más expresar los resultados en función de α , mientras que en las secciones 4.4 y 4.5 (donde se consideran distintos modelos) se ajusta $\Delta \varepsilon$ y se evalúa e_{tot} .

Entonces, antes de evaluar extensiones concretas del SM, se puede estudiar como van las señales de OG en función de v_w (régimen estacionario) y F_{net} (*runaway*) para una transición de fase electrodébil, donde se espera como buena aproximación que $T_c \simeq 100 \text{ GeV}$ y $g_* \simeq 100$ (cantidad aproximada de grados de libertad en el SM). La escala de tiempo de la transición electrodébil $\Delta t \sim \beta^{-1}$ puede variar en el rango dado por la estimación (1.81). El cálculo de los factores de eficiencia definidos en 2.7.3 se realiza como se explica en la sección 3.6.

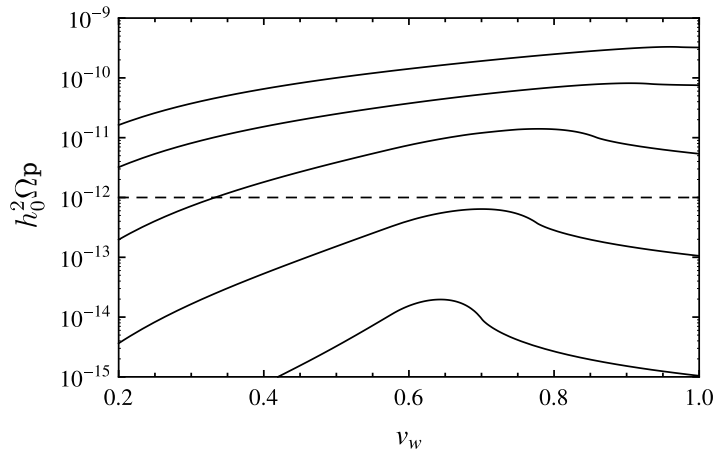


Figura 4.1: La intensidad de la radiación gravitatoria para turbulencia en la transición de fase con $\Delta t H_* = 10^{-2}$ y $T_* = 100 \text{ GeV}$, para $\alpha_N = 0,03$; $0,1$; $0,3$; 1 ; y 3 (de abajo para arriba). La línea a trazos corresponde al pico de sensibilidad del detector LISA.

Primero para ejemplificar soluciones estacionarias, se puede estimar la intensidad pico de las las OG de turbulencia¹ en la expresión (1.119), evaluando el valor de $\kappa \equiv \kappa_{\text{fl}}$ en función de v_w del mismo modo que como se hace en la figura 3.28 y reemplazando $R_b \sim v_w \Delta t$, en función de v_w . En la figura 4.1 se grafica la amplitud Ω_{turb}^p que se genera a la escala electrodébil², para algunos valores de α_N , como función de la velocidad v_w . Se elige $\Delta t H_* = 10^{-2}$, que da una frecuencia pico $f_p \sim 1 \text{ mHz}$ y se toma κ_{fl} de la simetría

¹Hemos chequeado que la intensidad de las OG por colisiones es un orden de magnitud menor y, por otro lado, las perturbaciones acústicas pueden dar señales algo más fuertes que la turbulencia, como puede apreciarse en varias figuras de este capítulo.

²Si bien en lo que resta de este capítulo para turbulencia se consideran las expresiones (1.118) y (1.119) que salen de [68], en la figura 4.1 se considera un resultado anterior [10] del mismo modo que se hace en nuestro trabajo [1]. Respecto a [68] solo implicaría alguna sobreestimación.

plana. Se ve que la transición no necesita ser tan fuerte, es decir con $\alpha_N \gtrsim 0,3$, para obtener intensidad por arriba del pico de sensibilidad del detector LISA (ver la sección 1.5.2.2). Esto es importante, ya que el valor de α_N se sabe que puede ser $\alpha_N \lesssim 1$ para varios modelos de la transición electrodébil [7]. Para $\alpha_N \sim 1$ se tiene $h_0^2 \Omega_{\text{turb}}^p$ tan grande como $\sim 10^{-9}$.

Como históricamente por lo general solo se consideraban las detonaciones de Jouget en la literatura de OG, el factor de eficiencia en principio resultaba sobreestimado con respecto a las detonaciones que realmente se pueden dar. No obstante, como se señala en la referencia [112], el valor del factor de eficiencia de Jouget $\kappa_J(\alpha_N)$ se subestimaba en la literatura, debido a que se perdía un factor v_w^{-3} en el trabajo original [6]. Ese error compensa el que $\kappa_J(\alpha_N)$ sea más grande que el factor de eficiencia $\kappa(\alpha_N, v_w)$ para detonaciones débiles. El efecto de esta compensación en la intensidad de OG se muestra en la figura 4.2, donde se grafica Ω_{turb}^p en función de v_w para $\alpha_N = 0,3$, junto con el valor correcto (línea a trazos superior) y el erróneo (línea a trazos inferior) para el caso de la detonación de Jouget. El factor de eficiencia para las detonaciones débiles cae entre esos valores. Notar, también, que las deflagraciones supersónicas de Jouget dan las amplitudes de OG más grandes, y que incluso las deflagraciones subsónicas pueden dar intensidades comparables a las de las detonaciones.

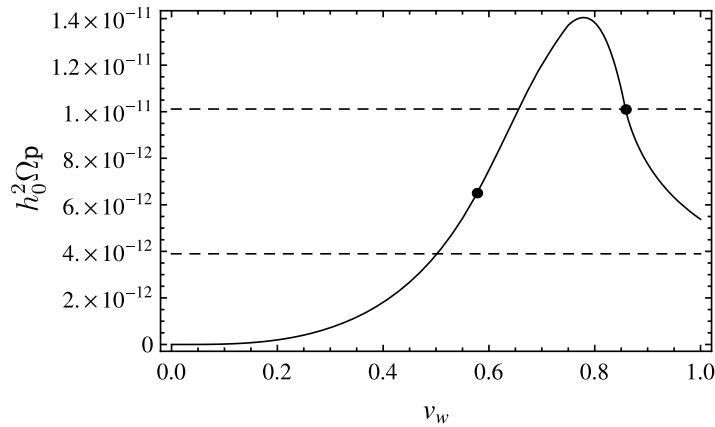


Figura 4.2: Lo mismo que en la figura 4.1, para $\alpha_N = 0,3$ solo. Las líneas a trazos indican el resultado para el valor correcto (superior) e incorrecto (inferior) de $\kappa_J(\alpha_N)$. Los dos puntos indican los casos $v_w = c_s$ y $v_w = v_J^{\text{det}}(\alpha_N)$, que separan deflagraciones subsónicas (débiles), deflagraciones supersónicas (Jouget) y detonaciones débiles.

En el caso ultra relativista, particularmente con las paredes *runaway*, se puede verificar que las colisiones se vuelven más relevantes en lo que se refiere a señal de ondas gravitatorias. Esto es porque aparece el aporte κ_{wall} debido a la energía que se acumula en la pared acelerada. La energía involucrada en la generación por colisiones depende del factor de eficiencia total $\kappa_{\text{tot}} = \kappa_{\text{wall}} + \kappa_{\text{fl}}$, mientras que la generación por movimientos masivos de fluido (como turbulencia u ondas de sonido) solo depende de κ_{fl} . A continuación, para este caso se considera $H \Delta t = 10^{-1}$, correspondientes a una transición de fase fuerte (un poco mayor que la anterior), lo que es consistente con tener detonaciones o paredes *runaway*. Esto da $f_p \sim 0,1\text{mHz}$, que está cerca del pico de sensibilidad del detector eLISA. Teniendo en cuenta las fórmulas para los distintos mecanismos de generación de las secciones previas. Para la transición electrodébil ge-

neralmente se tiene $\alpha_N < 1$, es decir, dominio de radiación³. Entonces, para $g_* \sim 100$, $v_w \sim 1$, y $\Delta t H \sim 10^{-1}$ se tiene $h_0^2 \Omega_{\text{env}}^p \sim 10^{-8} (\kappa_{\text{tot}} \alpha_N)^2$, $h_0^2 \Omega_{\text{turb}}^p \sim 10^{-8} (\kappa_{\text{fl}} \alpha_N)^{3/2}$, y $h_0^2 \Omega_{\text{sonido}}^p \sim 10^{-7} (\kappa_{\text{fl}} \alpha_N)^2$. Se ve que los valores numéricos son similares, y el resultado preciso depende de detalles de la dinámica de la transición de fase. En particular, los valores de α_N y los factores de eficiencia determinan cuál de esas fuentes es dominante.

El factor de eficiencia depende de α_N . Además, depende de la velocidad de la pared (en el caso de detonaciones) o de la fuerza neta (en el caso *runaway*). En la figura 4.3 se grafican las intensidades de OG (1.113, 1.119, 1.122) en función de la velocidad de la pared y la fuerza neta, para algunos valores de α_N (y los κ de simetría esférica). Se ve que las diferentes fuentes dominan en diferentes regiones de parámetros. No obstante, en el caso de paredes estacionarias la señal de OG de colisiones es por lo general más chica, como es de esperarse. Además, en el caso de las detonaciones todas las curvas se comportan similarmente en función de v_w . Esto se debe a la dependencia de la amplitud de las OG respecto a κ_{fl} , el cual decrece con v_w (ver las figuras 3.32 y 3.34). En contraste, para paredes *runaway*, la señal de OG de colisiones crece con la fuerza neta, mientras que las otras señales decrecen. Esto es por la dependencia adicional respecto a $\kappa_{\text{wall}} = F_{\text{net}}/\Delta\varepsilon$, que no aparece en turbulencia ni ondas de sonido. También, como es de esperarse, todas las señales crecen con α_N para un dado valor de v_w o $F_{\text{net}}/\Delta\varepsilon$.

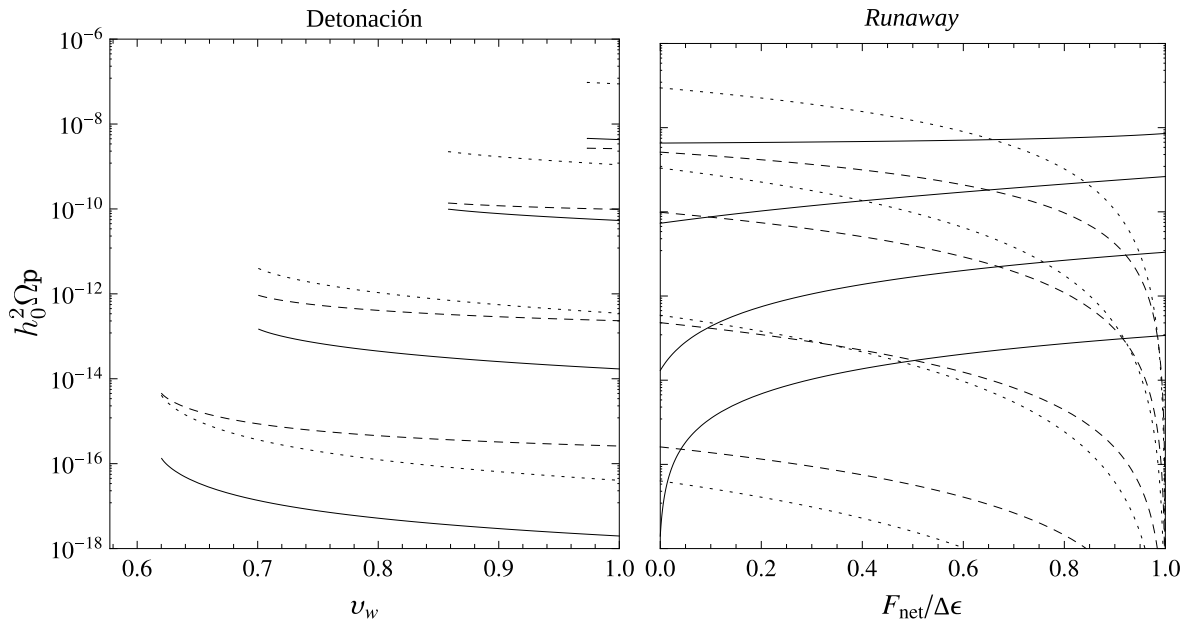


Figura 4.3: El pico de amplitud del espectro de radiación gravitacional para los mecanismos de generación por colisiones (líneas solidas), turbulencia (líneas a trazos), y ondas de sonido (líneas punteadas), para $g_* = 100, \Delta t = 0,1$, y para algunos valores de α_N . De abajo hacia arriba, se tiene $\alpha_N = 0,003; 0,03; 0,3; \text{ y } 3$. Las curvas en el panel izquierdo solo se grafican en los rangos que el régimen hidrodinámico corresponde a detonaciones.

Las cantidades v_w , $F_{\text{net}}/\Delta\varepsilon$ y α_N en realidad no son independientes. Como se ve en la sección 3.5, para valores fijos de los parámetros de fricción, v_w y $F_{\text{net}}/\Delta\varepsilon$ son

³Según (1.44), en la escala electrodébil, en la fase “+”, se tiene un falso vacío $\varepsilon_+ = \lambda/4 v^4 \sim 0,1 v^4$ y un término de radiación $a_+ T^4 = \pi^2/30 g_* T^4 \sim 30 v^4$. Es razonable asumir que $\alpha_N = \Delta\varepsilon/(a_+ T^4) \sim \varepsilon_+/(a_+ T^4) \sim 10^{-3}-10^{-2}$ en la mayoría de los casos.

funciones crecientes de α_N . En tal caso, κ_{fl} realmente decrece con α_N , como se muestra en la figura 3.35, mientras que κ_{wall} se incrementa. En la figura 4.4 se grafica la amplitud de OG correspondiente a esa variación de parámetros. Se ve que la disminución de $\kappa_{\text{fl}}(\alpha_N)$ se refleja en las amplitudes de OG, incluso aun cuando estas dependen del producto $\kappa_{\text{fl}}(\alpha_N)\alpha_N$. De hecho, las señales debidas a movimientos masivos de fluido decrecen con α_N , mientras que la señal por colisión de burbujas crece en el régimen *runaway* debido al incremento de κ_{wall} .

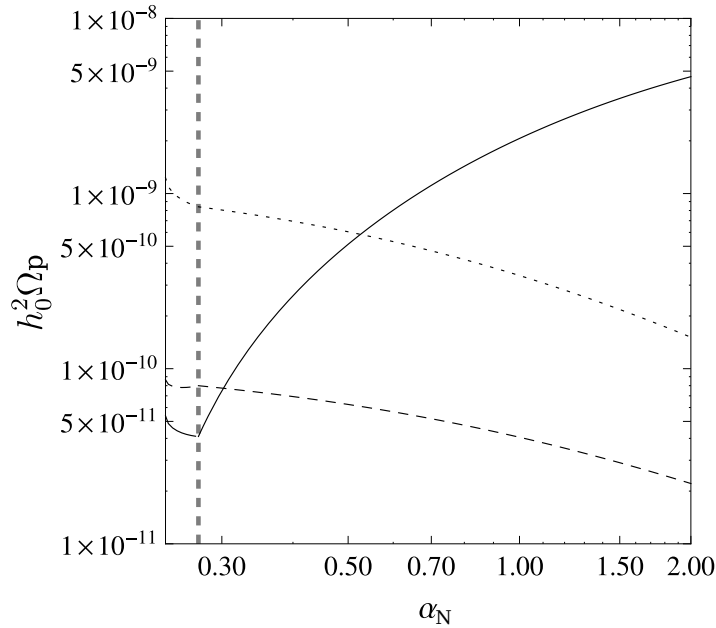


Figura 4.4: El pico de amplitud del espectro de radiación gravitacional para los mecanismos de generación por colisiones (líneas solidas), turbulencia (líneas a trazos), y ondas de sonido (líneas punteadas) como función de α_N , para $g_* = 100$, $\Delta t = 0,1$, y el resto de los parámetros como en las figuras 3.23, 3.24, 3.35. La línea vertical separa las soluciones detonantes de las *runaway*.

Es importante notar que este comportamiento de las señales de OG con la cantidad α_N todavía se obtiene fijando varios parámetros, como los coeficientes de fricción η_{NR}, η_{UR} , el parámetro de la *Bag* $\alpha_c = \Delta\varepsilon/(aT_c^4)$ (que es equivalente a fijar a_-/a_+), así como la escala de tiempo Δt . En un modelo concreto, todas esas cantidades varían juntas con α_N , ya que todas dependen de los parámetros del modelo. Se consideran modelos concretos en las siguientes secciones. En cualquier caso, valores de α_N en el rango $0,3 \lesssim \alpha_N \lesssim 1$ son posibles en una transición de fase electrodébil muy fuerte. Así, la figura 4.4 muestra que las OG generadas por cualquier mecanismo en esa transición de fase puede llegar a ser observable por el detector eLISA (ver más detalle de los detectores en la sección 1.5.2.2).

4.3. Determinación de parámetros de generación

Para calcular todas las cantidades que aparecen en las ecuaciones (1.113-1.123), en esta Tesis se computa la evolución de la transición de fases como se explica en la sección 1.4, con los refinamientos que se explican a continuación en la subsección 4.3.1. Notar que la temperatura y todas las cantidades relevantes v_w, β, n , etc son parámetros

constantes en las ecuaciones de OG (1.113-1.123). Esto es debido al simple modelo de nucleación y crecimiento de burbujas en los correspondientes cálculos. Por lo tanto, para usar estos resultados, se necesita elegir un momento representativo en el desarrollo de la transición de fase.

Como se señala en la referencia [132], determinar cuál tamaño de burbuja es relevante para la turbulencia es una importante fuente de incerteza. Burbujas de diferentes tamaños están presentes al momento en que se desarrollan la mayoría de las colisiones. Además, las burbujas de un dado tamaño agitan el fluido en esa escala de tamaño, por lo tanto producen remolinos de ese tamaño. Burbujas más grandes en principio generan remolinos más grandes y una mayor intensidad pico de OG (y en una longitud de onda mayor), mientras que burbujas más pequeñas en principio generan remolinos más pequeños, pero son más abundantes. En cualquier caso, no es claro cual sería el espectro de la turbulencia para varias escalas de agitación. Aunque las últimas burbujas en nuclearse son más abundantes, éstas actúan durante un tiempo más corto y, además, probablemente son “comidas” por las burbujas más grandes. Notar que, en contraste, no hay ambigüedad de tamaño en el mecanismo de colisión, ya que el ajuste numérico (1.113)-(1.115) se obtiene en función de los parámetros usados en la simulación. Sí hay alguna arbitrariedad en la temperatura a la cual el parámetro β debe ser calculado.

4.3.1. Seguimiento numérico de la transición de fase

En la sección 1.4 se introducen los conceptos básicos para el cálculo de la temperatura de nucleación de las primeras burbujas, el tamaño de las burbujas al momento de generación de ondas gravitatorias (en la percolación) y, en consecuencia, la duración de la transición. A continuación se exponen los refinamientos que se utilizaron en esta Tesis y en nuestras publicaciones [2, 5].

4.3.1.1. Expansión de un universo no homogéneo

Al comienzo de la transición de fase la densidad de energía es $e = e_+(T)$, y se tiene una ecuación simple para $T(t)$. Pero cuando ya hay presentes burbujas de la fase “-”, se tienen regiones con diferentes ecuaciones de estado. Aún si la temperatura T fuese homogénea, de todos modos se tendría $e_-(T) < e_+(T)$. La diferencia de energía entre las dos fases se va a recalentamiento del plasma y a movimientos masivos de fluido. En el caso de frentes de transición detonantes o *runaway*, la energía liberada se distribuye detrás de las paredes, es decir, dentro de las burbujas. Por lo tanto, la temperatura T_+ fuera de las burbujas es homogénea. Como las burbujas se nuclean en la fase “+”, el ritmo Γ depende solo de esta temperatura. A pesar de esto, en la ecuación de Friedmann se debe tener en cuenta también la densidad de energía en la fase “-”. No obstante, la conservación de la energía asegura que la densidad de energía promedio permanece esencialmente inalterada, es decir, la densidad de energía promedio \bar{e}_- dentro de las burbujas debe ser esencialmente la misma que afuera, $\bar{e}_- = e_+(T_+)$. Así, la evolución de la temperatura puede tomarse como la dada en las ecuaciones (1.58) y (1.60) con $e = e_+(T_+)$ [o $\mathcal{F} = \mathcal{F}_+(T_+)$ en (1.62)].

En general, considerando incluso perfiles con frentes de choque recalentando el fluido de la fase “+” en sus inmediaciones, el ritmo de Hubble resulta gobernado por la densidad de energía promedio que no se espera que se aparte significativamente de la densidad de energía externa lejos del frente de transición, $e_+(T_N)$, la cual decrece

debido a la expansión adiabática. Por lo tanto, aún en presencia de burbujas, en lo que sigue se considera la ecuación (1.58) evaluada con $e = e_+(T_N)$, donde $T_N(t)$ es la temperatura de la fase “+” por delante del frente de choque calculada con (1.62). Esta es una buena aproximación para las etapas de la transición de fase que interesan aquí (es decir, hasta el tiempo de percolación). En cualquier caso, el factor de escala no cambia significativamente durante la etapa inhomogénea. Hemos chequeado numéricamente que, tan pronto como las regiones de fase “-” se vuelven apenas apreciables, por decir algo, en un tiempo t cuando la fracción de volumen ocupado por las burbujas alcanza un valor $f_- \sim 10^{-2}$, la transición de fase ya está sucediendo tan rápido (debido al valor extremo del ritmo de nucleación) que la fracción de percolación $f_- \simeq 0,3$ se alcanza en un tiempo $\delta t \ll t - t_c$.

4.3.1.2. Reajuste de la hidrodinámica

La fracción de volumen ocupado por las burbujas $f_- = 1 - f_+$ se calcula mediante la expresión (1.78), que a su vez recurre a los radios de burbujas nucleados a distintos tiempos (1.79). Como la temperatura varía con el tiempo, la velocidad de expansión de las burbujas $v_w(T_N)$ varía. En los cálculos numéricos de esta tesis, tomando saltos de tiempo lo suficientemente pequeños, se hace un seguimiento de la evolución de la transición. Es decir, se recalcula esa velocidad a cada instante suponiendo que, a medida que la temperatura decrece, la hidrodinámica instantáneamente se ajusta a las distintas soluciones discutidas en los capítulos 2 y 3 (deflagraciones, detonaciones y *runaway*). Además, si en el proceso de expansión la solución cambia, por la variación de algún parámetro sensible con la temperatura, se aproxima cualquier variación de velocidad por un salto.

4.3.1.3. Volumen de nucleación efectivo

La ecuación (1.78) supone que la nucleación es homogénea en la fase “+”, con un ritmo $\Gamma(T')$. Pero, de hecho, los perfiles de temperatura de frentes de choque causan inhomogeneidades en el ritmo de nucleación. Considerando las burbujas que aún no han interactuado entre sí, si la solución hidrodinámica no tiene frente de choque, entonces la temperatura en toda la fase “+” es simplemente $T_+ = T_N$, y vale la ecuación (1.78) donde $T_N \equiv T'$. Por otro lado, en el caso contrario hay una zona de recalentamiento enfrente de las paredes de burbuja ($T_+ \geq T_N$). Como el ritmo de nucleación es extremadamente sensible a la temperatura, la nucleación de burbujas se desactiva en esa región. Por lo tanto, se puede asumir que el ritmo de nucleación se anula, no solo en las burbujas, sino también en la región hasta el frente de choque, mientras que vale $\Gamma(T_N)$ más allá de los frentes de choque. La ecuación (1.78) no tiene en cuenta esto, y debe ser modificada para no sobrestimar en el conteo de burbujas.

Es decir, cuando se tienen deflagraciones, en vez de suceder la nucleación en la fracción de volumen f_+ , esta sucede en la fracción ocupada por un volumen efectivo de nucleación f_+^{ef} . A su vez, la fracción de volumen ocupado por las “burbujas de choque” es $f_{\text{sh}} = 1 - f_+^{\text{ef}}$. La fracción f_+^{ef} resulta de **reemplazar en (1.78) los radios de burbuja R_b por los radios de los frentes de choque R_{sh}** , que se calculan reemplazando v_w por v_{sh} en la expresión (1.79). Más aún, en el caso que están presente esos frentes de choque, no suele interesar f_- sino f_{sh} para, por ejemplo, estudiar la generación de ondas gravitatorias por turbulencia del plasma, que comienza ni bien esos frentes empiezan a chocar.

4.3.1.4. Cálculo de la evolución de la transición

En los cálculos numéricos de esta tesis se sigue numéricamente la evolución de la transición de fase hasta el tiempo de percolación t_p . A grandes rasgos, el cálculo completo es el siguiente. A partir de la ecuación de Friedmann (1.58) evaluado en $e = e_+(T)$, reemplazando en (1.59), y usando (1.62) se obtiene $T(t)$. De esas mismas ecuaciones también se obtiene el factor de escala $a(t)$. Se resuelve la ecuación (1.68) iterativamente por el método de *overshoot-undershoot* para obtener ϕ , que a su vez se usa para obtener S_3 integrando numéricamente (1.67), y con este se evalúa (1.70) para obtener el ritmo de nucleación $\Gamma(T)$. Teniendo Γ , y tomando $f_+ = 1$ en (1.75), se puede estimar el inicio de la transición t_i usando la condición (1.74). Se calculan los coeficientes de fricción como se explica en la sección 2.3.2, evaluando en $T = T_N$ a las magnitudes c_1 , b y F_{net} , dadas por (2.27), (2.29) y (2.34) respectivamente. Se calculan las relaciones de T_- con T_+ y v_+ con v_- usando el *Bag* como se hace en el capítulo 3. Con estas y los coeficientes de fricción se obtiene la velocidad de la pared v_w a partir de la ecuación (2.41). La determinación del régimen hidrodinámico se establece como se explica en la sección 3.5.3. En caso de haber deflagraciones se calcula también v_{sh} de la manera que se explica en la sección 3.3.2.2. Teniendo $v_w(T)$ [y $v_{\text{sh}}(T)$] para detonaciones y *runaways* se calcula el radio de las burbujas R_b integrando (1.79), mientras que para deflagraciones se calcula el radio de las burbujas de choque R_{sh} reemplazando v_w por v_{sh} en (1.79). Con Γ y R_b (o R_{sh}) se calcula la fracción de volumen ocupado por la fase “+” sin perturbar, que para detonaciones y *runaways* es f_+ dado por (1.78) y para deflagraciones es f_+^{ef} , también calculado con (1.78) pero reemplazándole R_b por R_{sh} . Con la condición de percolación $f_- = 1 - f_+ = 0, 3$ (o $f_{\text{sh}} = 1 - f_+^{\text{ef}} = 0, 3$) se encuentra el tiempo t_p , que sirve para estimar el fin de la transición.

Las cantidades relevantes, como la temperatura $T(t_p)$ o el tamaño de las burbujas (que a groso modo va como $t_p - t_i$) no son muy sensibles a las definiciones de t_i y t_p . De hecho, estas definiciones involucran la densidad de número de burbujas n y la fracción de volumen f_- o f_{sh} las cuales, debido al comportamiento extremo de Γ con t , cambian varios ordenes de magnitud en un tiempo característico $t_p - t_i$. En consecuencia, cambiar los valores de n o $f_{-/\text{sh}}$ que se utilizan para definir t_i y t_p (incluso a orden de magnitud) introduce muy pequeñas diferencias $\Delta t_{i,p} \ll t_{i,p}$. Hemos verificado esto numéricamente.

4.3.2. Revisión de escalas características de tamaño y tiempo

Para aplicar aquellos resultados de cálculos de OG que recurren a esta magnitud, se debe ajustar β en cada caso al modelo específico de Física de partículas que se desea estudiar. En general β no depende de los detalles de la dinámica de la transición de fase y es relativamente fácil de estimar para un dado modelo. Como se establece en la sección 1.4.8, cuando vale (1.61), este parámetro se calcula como

$$\frac{\beta}{H_*} = T_* \left. \frac{d(S_3/T)}{dT} \right|_{T=T_*} \quad (4.3)$$

Para computar la señal de OG debida a colisión de burbujas, solo se necesita evaluar la velocidad de la pared, la energía cinética del fluido, y el parámetro β calculado a partir de (4.3). Este parámetro se debe computar para alguna temperatura característica. A priori no es claro si esta temperatura debería elegirse cerca de $T_i = T(t_i)$ o bien a la temperatura posterior $T_p = T(t_p)$. En la simulación que da los ajustes (1.113)-(1.115),

β es una constante. Más adelante, en esta sección, se discute cual es la sensibilidad de β con la temperatura.

Se puede obtener una estimación simple de la dispersión de tamaños de burbujas si se supone un ritmo de nucleación de la forma (1.80), una velocidad de pared constante, y despreciando el solapamiento de burbujas. Las burbujas que se nuclean en un tiempo t tienen un radio $R_b(t, t_p) \approx v_w(t_p - t)$ en el tiempo de percolación t_p , y ocupan un volumen $dV \propto \Gamma(t)R_b(t, t_p)^3$. Así, para las burbujas más grandes, las cuales se nuclearon a un tiempo t_i , se tiene

$$R_{\text{máx}} \approx v_w(t_p - t_i). \quad (4.4)$$

Por otro lado, las burbujas que ocupan el volumen más grande vienen dadas por la condición $d(\Gamma R_b^3)/dt = 0$. Se ve que el tamaño R_V correspondiente al máximo de la distribución de volumen está dado por

$$R_V = 3v_w \Gamma / \dot{\Gamma} \approx 3v_w / \beta, \quad (4.5)$$

donde se usa la aproximación (1.80) para obtener el término de la derecha. Por otro lado, la duración de la transición de fase usualmente se supone $\Delta t \sim \beta^{-1}$, lo cual da para las burbujas más grandes

$$R_{\text{máx}} \sim v_w \beta^{-1}. \quad (4.6)$$

Esta aproximación da $R_{\text{máx}} \lesssim R_V$. No obstante, se espera $R_V \ll R_{\text{máx}}$ debido al rápido crecimiento del ritmo de nucleación. Se puede usar el valor β^{-1} calculado a $t_* = t_p$, el cual es mayor que β^{-1} a $t_* = t_i$, en la ecuación (4.6). Sin embargo, esto no resuelve el problema. Como se ve en la siguiente subsección, el parámetro β no tiene una gran variación entre t_i y t_p [esto valida la aproximación (1.80)], excepto para transiciones de fase muy fuertes. En general, la variación de β ni siquiera compensaría el factor 3 entre las ecuaciones (4.5) y (4.6). Para transiciones de fase muy fuertes, por otro lado, β calculado a $t_* = t_p$ puede volverse negativo. Esto indica que la aproximación de uso extendido $\Delta t \sim \beta^{-1}$ para la duración de la transición de fase debería refinarse para esta aplicación.

En la sección 1.4.8 se explica la deducción $\Delta t \sim \text{algo}/\beta$. Ese factor *algo* = $\log(M/m)$ en la estimación del radio de la burbuja puede ser importante. De hecho, la frecuencia pico (1.117) es proporcional a $1/R_b$, mientras que la intensidad (1.119) es aproximadamente⁴ proporcional a R_b^2 . Se puede estimar ese factor como sigue. Teniendo en cuenta la definición del tiempo inicial de nucleación t_i dado en la expresión (1.74) junto con $f_+ \approx 1$ en la densidad de burbujas nucleadas (1.75), y adicionalmente aproximando $a \simeq cte$ y reemplazando $t_c \rightarrow -\infty$, se tiene $H^{-3} \int_{-\infty}^{t_i} \Gamma(t) dt \sim 1$. Si se realiza esa integral, considerando Γ de la forma (1.80), se obtiene la relación⁵

$$\Gamma(T_i) \sim H^3 \beta \quad (4.7)$$

que a su vez puede reemplazarse en (1.82), tomando $t_* = t_i$,

$$f_+(t) \approx \exp \left[-8\pi \left(\frac{v_w H}{\beta} \right)^3 e^{\beta(t-t_i)} \right] \quad (4.8)$$

⁴Para $R_b H \lesssim 1$, la desviación respecto a la ley $\Omega_p^{\text{turb}} \propto R_b^2$ es a lo sumo un 2%.

⁵Se ve que la estimación más grosera $\Gamma(T_N) \sim H^4$, la cual sale de (1.76), es válida solo si $\beta \sim H$.

Como se explica en la sección 1.4, el tiempo de percolación t_p para los cálculos numéricos se toma con la condición $f_- = 0,3$, lo cual implica un $f_+ = 0,6$, y esto a su vez implica que el exponente de la expresión (4.8) es $\approx -1/2$. Es fácil ver que aún si a ese exponente se lo tomara ~ -1 las siguientes conclusiones variarían “poco”⁶. En efecto, tal imposición implica

$$8\pi \left(\frac{v_w H}{\beta} \right)^3 \exp[\beta(t_p - t_i)] \sim 1, \quad (4.9)$$

en donde el factor $1/2$ que se omite del lado derecho de todos modos sería logarítmicamente atenuado al despejarse la cantidad⁷

$$t_p - t_i \sim 3 \log \left(\frac{\beta}{H} \right) \times \beta^{-1}. \quad (4.10)$$

Como se ve más adelante (en la figura 4.5), la ecuación (4.10) es de hecho una buena aproximación (notar que en ésta β se calcula a $t_* = t_i$). Por lo tanto, se ve que $R_{\text{máx}}/R_V \sim \log(\beta/H)$. Si el log es de orden 1, entonces se tiene $t_p - t_i \sim \beta^{-1}$. No obstante, este no es el caso general. En general se tiene $\beta \gg H$. El valor de β/H usualmente se supone⁸ $\beta/H \sim 100$, lo cual da $t_p - t_i \gtrsim 10/\beta$. De hecho, como se ve más adelante (figuras 4.6 y 4.7), en general se tiene $R_{\text{máx}}/R_V \gtrsim 10$. Si las burbujas más grandes son relevantes para la turbulencia en vez de aquellas que ocupan el máximo volumen, entonces la aproximación $R_b \sim v_w \beta^{-1}$ en la ecuación (1.119) lleva a una subestimación de la señal de OG debida a turbulencia en al menos dos ordenes de magnitud.

4.3.3. Colisiones: elección de β

En la figura 4.5 se muestran ambos valores de β a tiempo inicial y al momento de la percolación para uno de los modelos que se consideran en la sección 4.4. Se ve que la diferencia es un factor $\mathcal{O}(1)$ (generalmente menor a 2), excepto para transiciones de fase extremadamente fuertes (que están muy cerca del valor máximo del parámetro h_s en la figura 4.5). Por lo general, esta diferencia es bastante menor que otras fuentes de indeterminación (ver en lo que sigue), y por eso en la sección 4.4 se usa el valor β en $t_* = t_i$. En cambio, en la sección 4.5 hay mayor variación de β y se evalúa a t_p . En la figura 4.5 también se muestra el valor de S_3/T a T_i y T_p . Se ve que $S_3(T_i)/T_i$ toma valores alrededor de la conocida estimación $S_3/T \sim 140$ [ver (1.77)]. También se ve que la aproximación $\Delta t \approx 3 \log(\beta/H)\beta^{-1}$ da una muy buena estimación del tiempo $\Delta t = t_p - t_i$. En contraste, la estimación usando β^{-1} es al menos un orden de magnitud menor que Δt .

⁶Más aún, si de forma completamente “ingenua” se sostuviera la aproximación, válida para $f_- \ll 1$, en la que $-f_-$ es igual al exponente de f_+ en la ecuación (1.78) [y en (4.8)], aquí se estaría tomando $f_- \sim 1$, que se interpreta como el fin de la transición.

⁷Al factor delante de β^{-1} se le omite un sumando $-\log(8\pi v_w^3)$, o más correctamente $-\log(16\pi v_w^3)$, que solo es despreciable en la medida que $\beta^{-1} \ll H^{-1}$.

⁸En lo que sigue se discute que β puede apartarse significativamente de este valor.

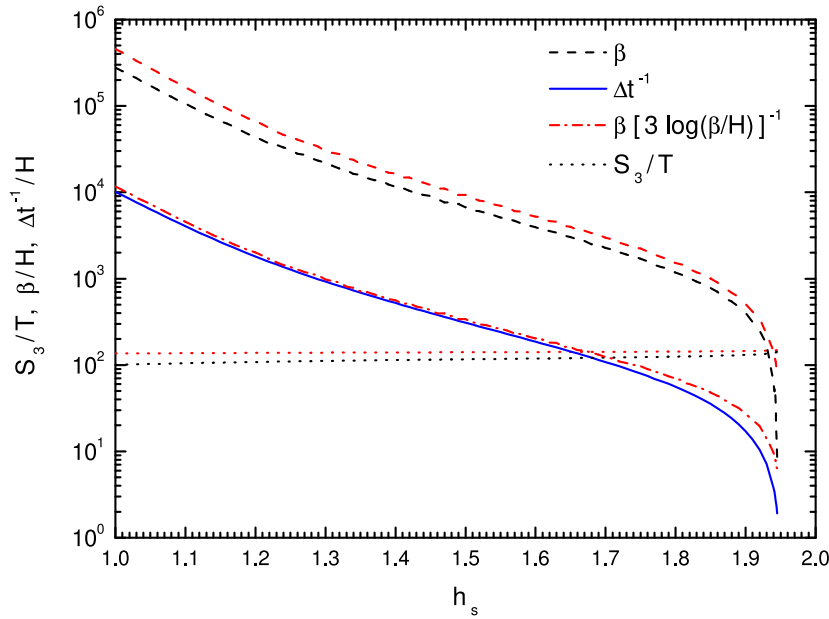


Figura 4.5: La inversa de las escalas de tiempo y la acción de rebote, para una extensión del SM con un singlete escalar complejo con acoplamiento h_s al Higgs y una masa invariante $\mu_s = 0$. Las líneas rojas se calculan a $t = t_i$, las líneas negras a $t = t_p$, y la línea azul corresponde a $\Delta t = t_p - t_i$.

4.3.4. Turbulencia: elección de L_S

Para computar la contribución de la turbulencia a las ondas gravitatorias, se calcula el promedio de la densidad de energía correspondiente a movimientos masivos del plasma en el momento de la percolación. Pero también es necesario elegir y calcular un tamaño característico, de agitación en el plasma, para usar los resultados expresados en la sección 1.5.3.2.

Una importante fuente de incerteza en el caso de las expresiones de cálculo para OG debidas a turbulencia (y también ondas de sonido) es la suposición de una sola escala de agitación. Esto es, ya sea porque en los cálculos que llevan a esas expresiones se supone una sola escala de agitación, o porque resultan de simulaciones donde todas las burbujas se nuclean simultáneamente. En una situación realista hay diferentes escalas de longitud, ya que, debido a la fuerte variación del ritmo de nucleación, las burbujas más pequeñas (que se forman más al final) son mucho más abundantes que las más grandes. A continuación se analizan las diferencias entre varias formas de calcular la escala característica.

Se calculan los radios $R_b(t_i, t_p)$ de las burbujas más grandes en el caso de las detonaciones, o los radios $R_{sh}(t_i, t_p)$ de las más grandes burbujas de choque en el caso de las deflagraciones, integrando la correspondiente velocidad v_w o v_{sh} de t_i a t_p . En cuanto a la aproximación frecuentemente utilizada $R_b \approx v_w \beta^{-1}$ para las burbujas más grandes, como se discute previamente, $R_b \approx v_w 3 \log(\beta/H) \beta^{-1}$ da una mucho mejor aproximación⁹. En la figura 4.6 se muestra el radio de las burbujas más grandes al momento de percolación, junto con las dos estimaciones, para el mismo modelo de la sección 4.4 que se utiliza en la anterior figura 4.5. En este ejemplo particular, la aproximación

⁹No obstante, si bien $v_w \beta^{-1}$ corresponde a (4.6), una mala estimación de las burbujas más grandes, también corresponde a (4.5), una buena estimación de las que ocupan mayor volumen.

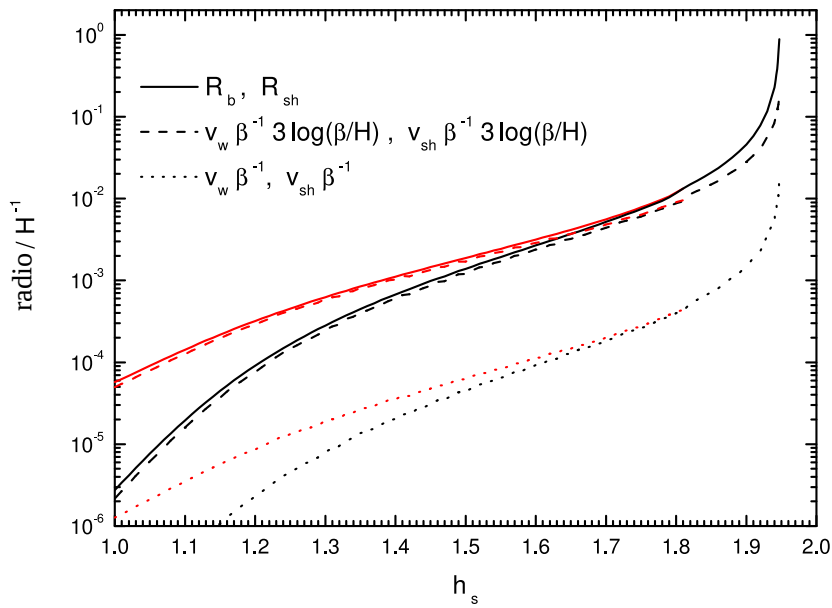


Figura 4.6: El radio de las burbujas más grandes a $t = t_p$ y las diferentes aproximaciones, para el mismo modelo y parámetros de la figura 4.5. las líneas negras corresponden a la pared de burbuja y las líneas rojas a las paredes de las burbujas de choque. El parámetro β se calcula a la temperatura inicial T_i .

$\Delta t \sim \beta^{-1}$ subestima el radio en un factor ≈ 30 para la mayor parte del rango del parámetro que se considera en la figura. Luego, esto implica una subestimación de la amplitud de las ondas en un factor ≈ 900 . La figura 4.6 también muestra que considerar velocidad constante $v_w = v_w(T_i)$ es por lo general una buena aproximación, así como β en $t_* = t_i$. Más adelante en la sección 4.4, para detonaciones y deflagraciones se utiliza $L_S = 2R_b(t_i, t_p)$ y $L_S = 2R_{sh}(t_i, t_p)$ respectivamente.

Similarmente a lo anterior, recurriendo a otro modelo (SM agregando un término cúbico), que se ve en la sección 4.5, se compara en la figura 4.7 tres diferentes escalas. Una de ellas es la distancia promedio entre burbujas d , que se obtiene de la expresión (1.121) recurriendo también al cálculo de n dado por (1.75). Esta es la escala que resulta más adecuada al utilizar los ajustes de simulaciones expresadas en la sección 1.5.3.3 para ondas de sonido. También en esta figura se grafica la estimación $2v_w\beta^{-1}$ para el diámetro de la burbuja, y el diámetro $2R_b(t_i, t_p)$ de las “burbujas más grandes”. Se ve que la separación promedio de burbujas es generalmente un orden de magnitud más bajo que la escala de las burbujas más grandes, y la escala $v_w\beta^{-1}$ es incluso menor. Donde se usa la escala R_b en vez de d , se obtendrían OG de bastante más alta intensidad pero con frecuencias más pequeñas. Por otro lado, para transiciones muy fuertes la distancia d se aproxima a R_b , mientras que $v_w\beta^{-1}$ diverge.

En nuestras publicaciones [2] y [5] usamos distintos criterios para fijar la escala L_S , lo cual se ve reflejado en las siguientes secciones 4.4 y 4.5 respectivamente. En particular, por motivos de comparación en la sección 4.5, se considera para las formulas de generación por turbulencia la misma escala característica $L_S = d$, dada por (1.121), que resulta natural utilizar con los ajustes de generación por onda de sonido.

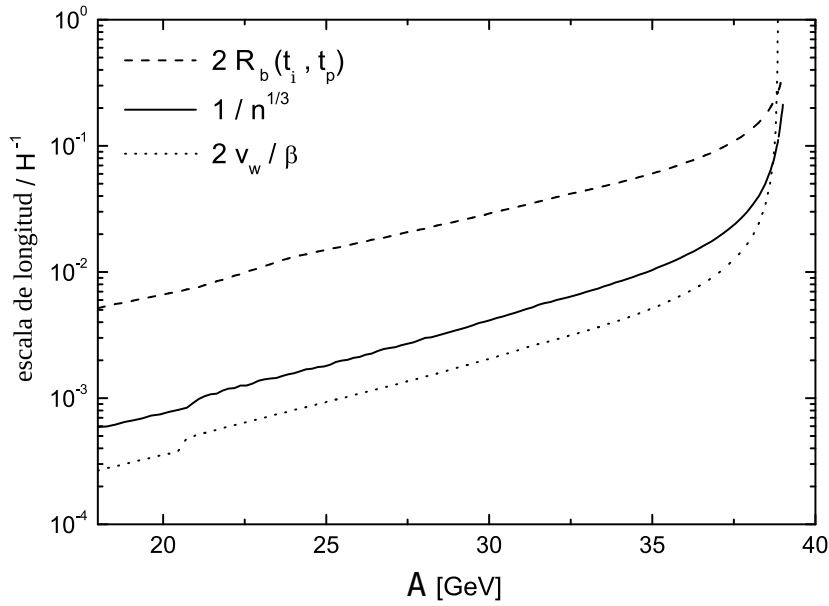


Figura 4.7: Diferentes escalas de longitud presentes en la transición de fase, para la extensión del SM con un término a nivel árbol proporcional a un parámetro A .

4.3.5. Valuación de g_* y e_{tot} para la generación de OG

Como se ve en la sección 1.5.2, las cantidades g_* y T_* que aparecen en los espectros de la sección 1.5.3 surgen de suponer que luego de la transición de fase toda la energía de vacío se convierte en radiación. No es estrictamente cierto, pero es compatible con esa suposición estimar H_* usando (1.58) y aproximando¹⁰ $e_{\text{tot}} \approx (g_* \pi^2/30) T_*^4$.

Para transiciones fuertemente de primer orden puede haber significativo sobreenfriamiento, lo que significa que la temperatura a la cual las burbujas se nuclean puede ser bastante menor que la crítica T_c . Al final de la transición hay también algo de recalentamiento, y la temperatura final T_{rec} luego del mismo es la que debe usarse en las expresiones de generación de ondas gravitatorias¹¹, es decir, tomar $T_* = T_{\text{rec}}$. Por conservación de la energía se espera que la energía total antes y luego de la transición sea aproximadamente la misma. En lo que sigue se estima esta temperatura a partir de $e_{\text{tot}} \approx a_+ T_p^4 + \varepsilon_+ \approx a_- T_{\text{rec}}^4$ (despreciando ε_-), donde T_p es la temperatura de percolación.

Teniendo la ecuación (3.2) para \mathcal{F} y comparando el término de radiación con el del *Bag* (2.85), el número de grados de libertad g_* de la fase dominante a baja temperatura es

$$g_* = (30/\pi^2) a_-, \quad (4.11)$$

que pueden calcularse usando la ecuación (2.87) para a_- .

¹⁰Ver la ecuación (3.2) para \mathcal{F}_- y comparar el término de radiación con $-(a_-/3) T^4$ del *Bag*, luego la de energía es $e_- \approx a_- T^4 = (g \pi^2/30) T^4$.

¹¹Es la temperatura que se alcanza cuando la agitación del plasma se redujo lo suficiente y todo vuelve a estar térmicamente homogéneo.

4.4. OG de transiciones de fase fuertes

Los resultados de esta sección corresponden a los de nuestra publicación [2], donde se calcula la intensidad pico del espectro de ondas gravitatorias generado por turbulencia para distintas extensiones del SM. En ese trabajo no se incorporó la saturación de la fricción para los cálculos de velocidad de la pared, ni la hidrodinámica de una pared *runaway*, que se investigó después. No obstante, para los casos considerados en esta sección eso no afecta significativamente los resultados. Eso se verifica luego en la sección 4.5, donde deliberadamente se busca explorar los casos de transiciones más fuertes, en presencia de detonaciones ultra relativas y paredes *runaway*. Ahí, tal detalle sobre la fricción se considera de la forma más refinada teniendo en cuenta la saturación.

También en [2] se ajusta el *Bag* considerando el parámetro $\Delta\epsilon = \epsilon_+$ igual al potencial efectivo evaluado en $\phi = 0$ y $T = 0$, es decir, la densidad de energía de falso vacío. Esto corresponde al primer ajuste que se sugiere en la sección 2.7.2.1. A su vez la magnitud $\alpha(T)$ se ajusta mediante la expresión (2.90). Demás parámetros de generación como el momento en que comienza la transición, su duración, la escala características de tamaño y demás parámetros de generación de OG se calculan como se discute a lo largo de la sección 4.3. Además, por la simplificación de cálculo que representa (principalmente en deflagraciones), se considera una geometría de burbuja con pared plana.

4.4.1. Modelos que favorecen transiciones fuertes

A lo largo de esta sección se consideran varias extensiones del SM que pueden proveer transiciones fuertemente de primer orden. No obstante, el estudio de las transiciones más fuertes, como para tener soluciones *runaway*, se profundiza más adelante a lo largo de la sección 4.5. Para todos los modelos que se consideran a continuación, se usa una masa de Higgs $m_H = 125$ GeV. La dependencia de las cantidades relevantes en la fuerza de la transición de fase se ilustran en la figura 4.8 (para el primero de los modelos que se ven a continuación). Para más resultados sobre la velocidad de la pared en estos modelos, ver la referencia [19]. Para resultados sobre la temperatura y la duración de las diferentes etapas de la transición, ver la referencia [26]. Aquí solo se centra la atención en la generación de ondas gravitatorias durante la transición de fase.

4.4.1.1. Escalares extra

La extensión más simple del SM consiste en agregar escalares singletes de gauge¹² [25, 133, 134], los cuales pueden variar desde un solo campo¹³ \hat{S} [135–140] a varios campos \hat{S}_i [141]. En general, estos bosones constituyen un sector oculto que se acopla solo con el doblete de Higgs \hat{H} del SM a través de un término $\hat{H}^\dagger \hat{H} \sum h_i^2 \hat{S}_i^\dagger \hat{S}_i$ (suponiendo, por simplicidad, una única constante de acoplamiento para todo el sector $h_i = h_s$). Teniendo en cuenta los posibles términos renormalizables, en principio los escalares pueden tener masas invariantes ante $SU(2) \times U(1)$ de la forma $\mu_s^2 \hat{S}_i^\dagger \hat{S}_i$ y términos cuárticos $\lambda_s (\hat{S}_i^\dagger \hat{S}_i)^2$. Por simplicidad, aquí se fija $\lambda_s = 0$ en los cálculos numéricos. Hemos chequeado que considerar $\lambda_s \neq 0$ no introduce diferencias cualitativas en los resultados. Un valor negativo de μ_s^2 puede aumentar la fuerza de la transición de fase,

¹²Invariantes respecto $SU(2)$.

¹³Aquí se escoge esta notación con “ S ” por *scalar*, *escalar* en inglés.

porque si $|\mu_s^2| \sim \Pi$ la corrección (1.51) no atenúa el término cúbico del potencial efectivo (asociado con la barrera entre fases). Este hecho se explota en el caso del MSSM en el escenario del stop liviano, el cual se considera en la siguiente subsección 4.4.1.2. Además, agregando un singlete real permite términos cúbicos, que respetan la simetría $SU(2) \times U(1)$, de la forma $(\hat{H}^\dagger \hat{H})\hat{S}_R$ o \hat{S}_R^3 , que no pueden construirse solo con dobletes de Higgs. La presencia de términos cúbicos hace más fácil llegar a una transición electrodébil fuertemente de primer orden [135, 136]. Esto puede causar un incremento significativo en la velocidad de la pared [19] e incluso la existencia de soluciones runaway [105]. Como consecuencia, esos términos a nivel árbol pueden conducir a una señal importante de OG debido al mecanismo de colisión de burbujas [67]. Para estudiar tales efectos a nivel árbol, se debería considerar el potencial completo de los dos campos \hat{H} y \hat{S}_R (dos parámetros de orden). Eso está fuera del alcance de este trabajo, ya que los cálculos numéricos se basan en un potencial efectivo de una sola variable $\mathcal{V}_{\text{ef}}(\phi)$. Por lo tanto, se ignora la posibilidad que esos términos cúbicos existan en el potencial a nivel árbol. Entonces, las contribuciones de escalares a la energía libre son de la forma (1.37) y (1.53), con $m_s^2(\phi) = h_s^2\phi^2 + \mu_s^2$ y g_s dado por el número de singletes reales. La masa térmica es $\Pi = h_s^2 T^2/3$ [137].

Si μ_s no es muy grande, la transición de fase es más fuertemente de primer orden para un gran número de bosones g_s y fuertes acoplamientos h_s (ver figura 4.8). Notar que eso no se debe a un término cúbico $\propto -g_s h_s^3 \phi^3 T$ que, como se ve en la sección 1.3.2, es apantallado por la masa térmica Π que crece con h_s . Lo que sucede es que, cuando μ_s^2 es despreciable respecto a $h_s^2\phi^2$, el potencial efectivo tiene un término $\propto \phi^2$ y otros, provenientes de (1.37), que van como $\propto -\phi^4$ y $\phi^4 \log(\phi/v)$ (que es > 0 para $\phi > v$). La competencia de estos términos, cuando h_s es grande, hace aparecer una barrera (a temperatura cero) que permite mayor sobreenfriamiento y, entonces, una transición más fuerte). Por el contrario, para valores altos de μ_s los bosones se desacoplan del plasma térmico, y la transición de fase se vuelve más débilmente de primer orden. En consecuencia, la velocidad de la pared y la energía inyectada a movimientos macroscópicos de fluido generalmente crece con g_s y h_s y decrece con μ_s . De hecho, incrementándose g_s y h_s , la separación entre los mínimos de energía libre se incrementa, y es de esperarse que también la barrera que los separa. En consecuencia, la nucleación efectivamente comienza en temperaturas T_i más bajas [26, 59]. En la figura 4.8 se ve que para este modelo particular, la fuerza de la transición de fase de primer orden [valor de $\phi_-(T_i)/T$ y del sobreenfriamiento $(T_c - T_i)/v$] tiene una fuerte dependencia con el acoplamiento h_s . Para valores lo suficientemente grandes de h_s hay una barrera a temperatura cero, y la temperatura inicial de nucleación T_i es muy pequeña. Como se muestra en la figura 4.8, hay un valor $h_s = h_{\text{máx}}$ para el cual T_i cae a 0 (panel arriba a la izquierda). Más allá de ese valor la transición de fase es demasiado fuerte para superar la etapa de sobreenfriamiento y el Universo entra eventualmente en un período de inflación [26, 59]. Esto se refleja también en las figuras 4.5 y 4.6. El punto final en las curvas corresponde a $h_{\text{máx}}$. Cerca de este punto final, el sistema permanece trabado en la fase simétrica “+” por un largo tiempo $t_i - t_c \gg H^{-1}$ (panel arriba a la derecha de la figura 4.8). A su vez, la temperatura decrece hasta el valor $T_i \ll T_c$. Lo mismo le pasa al tiempo $\Delta t = t_p - t_i$ necesario para alcanzar la percolación, como se puede ver en la figura 4.5.

La generación de ondas gravitatorias depende principalmente de la velocidad de la pared y la energía cinética en movimientos masivos de fluido. Se muestran valores de estas cantidades a $t = t_i$ en los paneles inferiores de la figura 4.8. El comportamiento

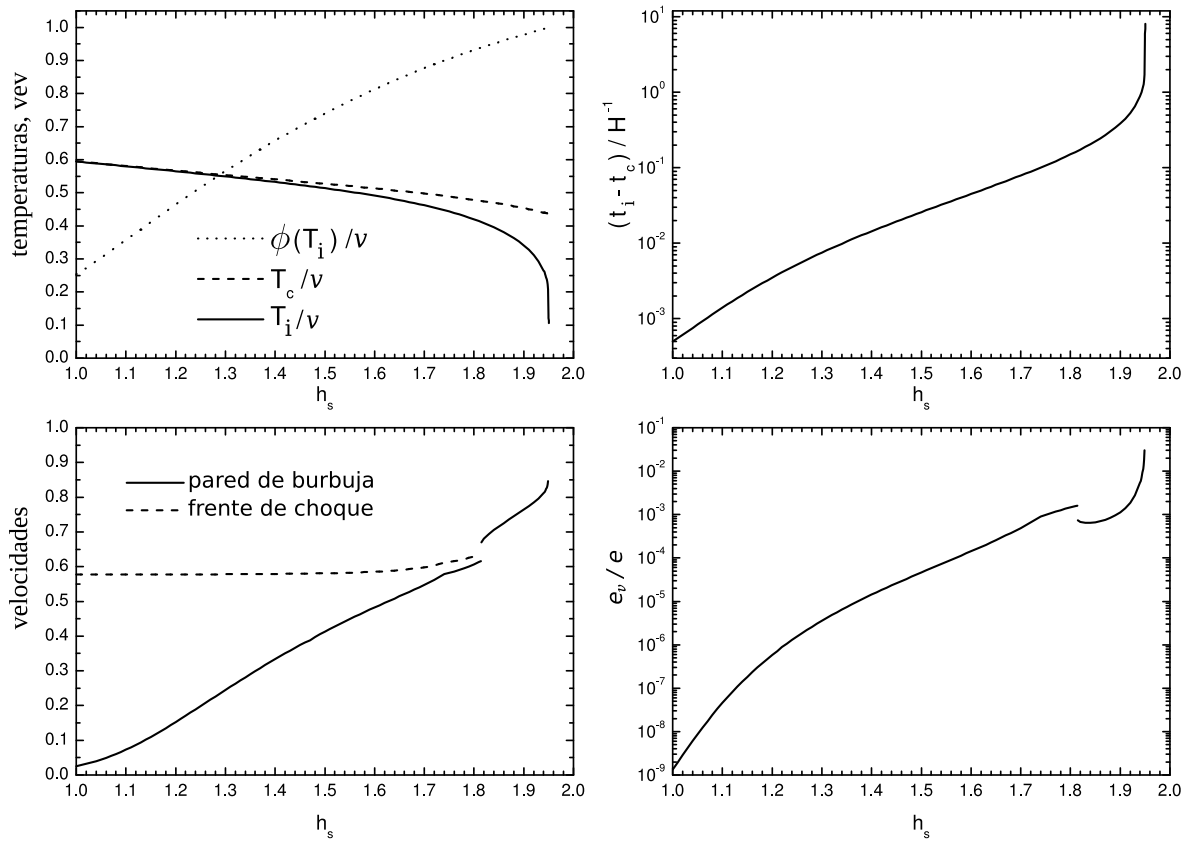


Figura 4.8: Varias cantidades calculadas al principio de la nucleación de burbujas (en la percolación es similar), como función de h_s para $g_s = 2$ y $\mu_s = 0$: la temperatura y el campo medio (arriba a la izquierda), el tiempo de sobreenfriamiento $t_i - t_c$ (arriba a la derecha), las velocidades de pared de burbuja y frente de choque (abajo a la izquierda), y la energía cinética del fluido (abajo a la derecha).

del tiempo de percolación es similar. Se puede distinguir un punto anguloso en estas curvas, que indica el paso de un valor de h_s para el cual las soluciones hidrodinámicas son deflagraciones débiles, hacia el valor de h_s para el cual se tienen deflagraciones de Jouget. Similarmente, hay un salto indicando el paso de deflagraciones de Jouget a detonaciones débiles. Notar que, aunque la velocidad de la pared para detonaciones es mayor en el punto de discontinuidad, la detonación es una solución hidrodinámica más débil que la deflagración supersónica (Jouget) y produce menores perturbaciones en el fluido. Por lo tanto, el salto en la energía inyectada al plasma es negativo. El máximo local en esta discontinuidad se debe a que la energía cinética es máxima para las deflagraciones de Jouget.

Este comportamiento se refleja en la generación de ondas gravitatorias, como puede verse en las figuras 4.9, 4.10 y 4.11. En la figura 4.9 se grafica el pico del espectro de OG debido a turbulencia, como función de h_s para diferentes valores de g_s y μ_s . Al variar los parámetros del modelo, el pico de frecuencia y la intensidad cambian varios órdenes de magnitud. Esta variación incluye frecuencias en la sensibilidad de LISA y eLISA, $f \sim 1$ mHz. No obstante, el pico de sensibilidad de LISA, $h_0^2 \Omega_{OG} \sim 10^{-12}$, y el de eLISA, $h_0^2 \Omega_{OG} \sim 10^{-10}$ (marcados con líneas punteadas horizontales en la figura 4.9), se alcanzan cerca de los valores máximos de h_s . Desafortunadamente, para esas altas intensidades los espectros no alcanzan pico en frecuencia del orden de \sim mHz. Para

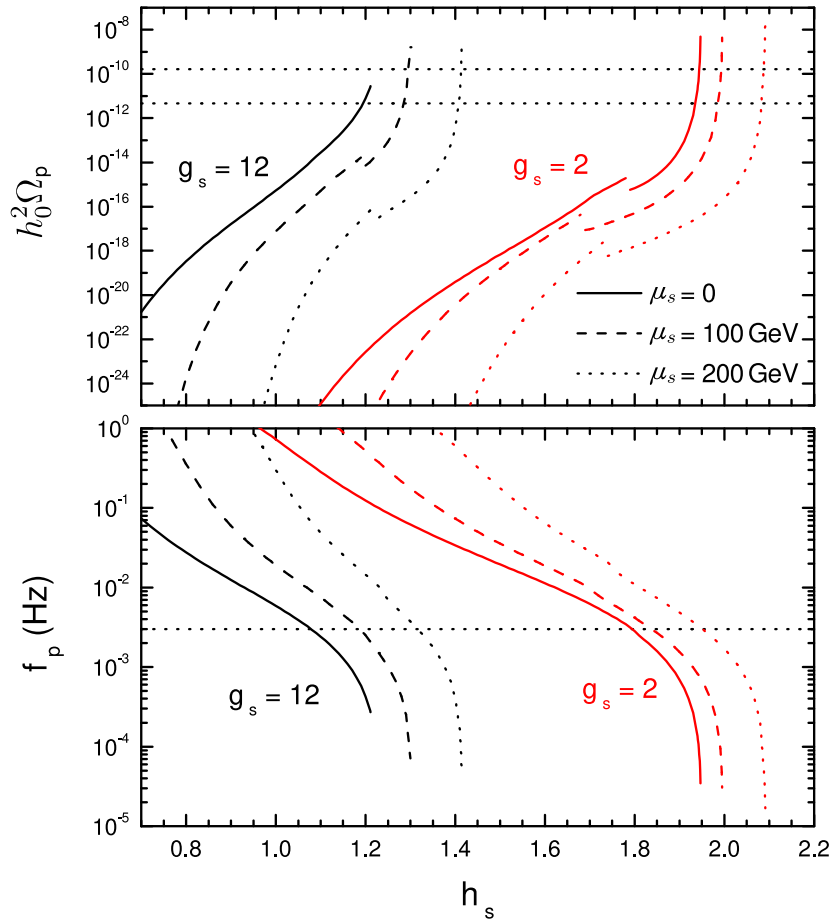


Figura 4.9: La densidad de energía (arriba) y la frecuencia (abajo) en el pico del espectro de OG generado por turbulencia, como función de h_s para $g_s = 2$ (curvas más a la derecha) y $g_s = 12$ (curvas más a la izquierda), con $\mu_s = 0$ (líneas sólidas), 100 GeV (líneas a trazos), y 200 GeV (líneas punteadas). Las líneas punteadas horizontales indican los valores aproximados correspondientes a la sensibilidad de LISA y eLISA, $f \sim 1$ mHz, $h_0^2 \Omega_{OG} \approx 5 \times 10^{-12}$ para LISA, $h_0^2 \Omega_{OG} \approx 2 \times 10^{-10}$ para eLISA.

valores de h_s que dan frecuencias en los mHz, las intensidades están unos pocos órdenes de magnitud por debajo de la sensibilidad de LISA. Esto se ve mejor en la figura 4.10, donde el valor pico Ω_p se muestra como función de la frecuencia pico f_p , junto con las curvas de sensibilidad¹⁴ para LISA y eLISA. Se predice que la señales cruzan la curva de sensibilidad de LISA en $f_p \sim 10^{-4}$ Hz. Esto sucede muy cerca de los puntos finales. Alcanzar la sensibilidad de LISA requiere entonces ajustar los acoplamientos h_s cerca de $h_{\text{máx}}$ en al menos un 1%. La señal de OG no alcanza la curva de sensibilidad de eLISA, incluso para las transiciones de fase más fuertes.

Se encuentra que la señal para generación por colisión de burbujas es mucho más débil que la de generación por turbulencia. Como ejemplo, se grafica el caso $g_s = 2$, $\mu_s = 0$ en la figura 4.11. El espectro debido a colisión de burbujas alcanza el pico a una frecuencia más alta. Por lo tanto, la colisión de las burbujas debería ocasionar un pico secundario en el espectro total de OG. No obstante, este pico no podría observarse por LISA. Con el fin de comparar, se muestra en la figura 4.10 las señales pico

¹⁴Para referencias sobre las curvas de sensibilidad ver la sección 1.5.2.2.

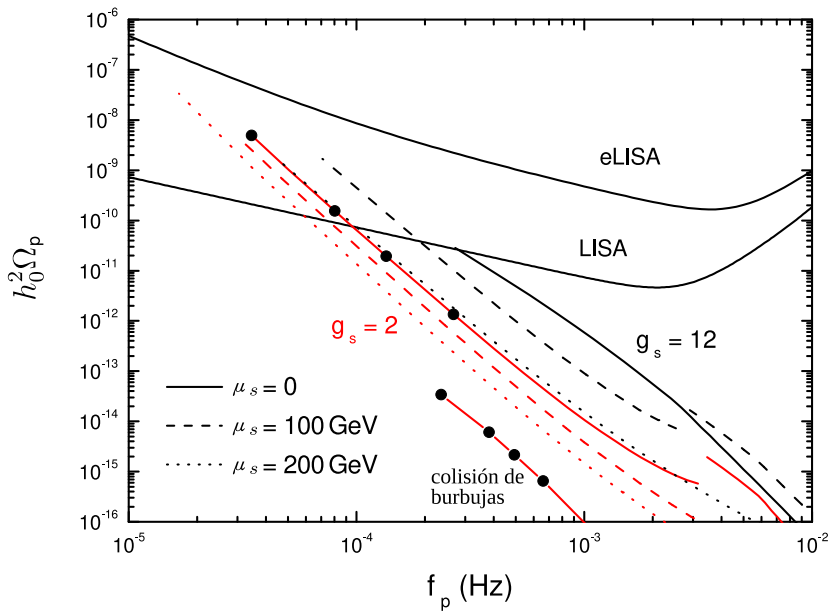


Figura 4.10: El pico de la señal de OG como función de la frecuencia pico para los modelos que se consideran en la figura 4.9, junto con las curvas de sensibilidad de LISA y eLISA. Los puntos en las líneas rojas corresponden (de derecha a izquierda) a $h_s = 1, 94, 1, 943, 1, 945,$ y $1, 947$. La línea sólida roja inferior es la señal generada por el mecanismo de colisión de burbujas.

debidas a turbulencia y colisión de burbujas para algunos valores de h_s que dan una señal apreciable. Este resultado está de acuerdo con el de la referencia [59], donde solo consideran la señal generada por colisiones.

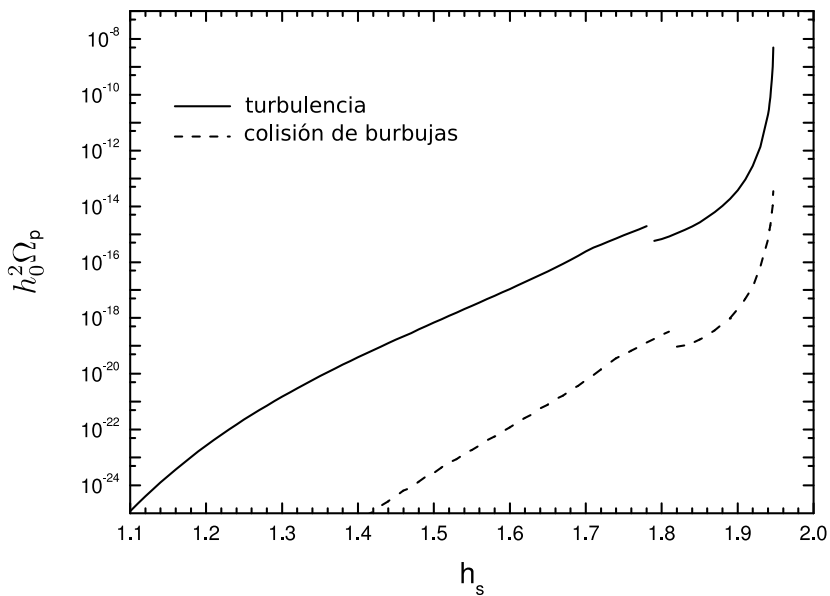


Figura 4.11: El pico de la densidad de energía proveniente de generación por turbulencia (sólido) y por colisión de burbujas (a trazos), para $g_s = 2$ y $\mu_s = 0$.

Las colisiones de burbuja pueden producir una señal más grande si la pared de la burbuja es *runaway*. En este modelo, el potencial efectivo tiene una barrera a tempe-

ratura cero para grandes h_s . De hecho, el máximo $\phi = 0$ se vuelve un mínimo de falso vacío para acoplamientos fuertes. En este contexto, es importante indagar si las paredes de burbuja pueden ser *runaway*. Se usan las ecuaciones (2.31)-(2.33) para chequear esa posibilidad¹⁵. Se muestra el resultado en la figura 4.12 para el caso $g_s = 2$. Para obtener las paredes *runaway*, es necesario alcanzar a estar muy cerca de $h_{\text{máx}}$ (con una fracción $\Delta h_s/h_s \sim 10^{-4}$), y por lo tanto requiere un ajuste fino considerable (además, para h_s tan cercano a $h_{\text{máx}}$ la duración de la transición de fase inmediatamente se vuelve $\Delta t \gg H^{-1}$). En conclusión, este modelo, que es el que da las transiciones más fuertes consideradas en esta sección, no tiene soluciones hidrodinámicas *runaway*.

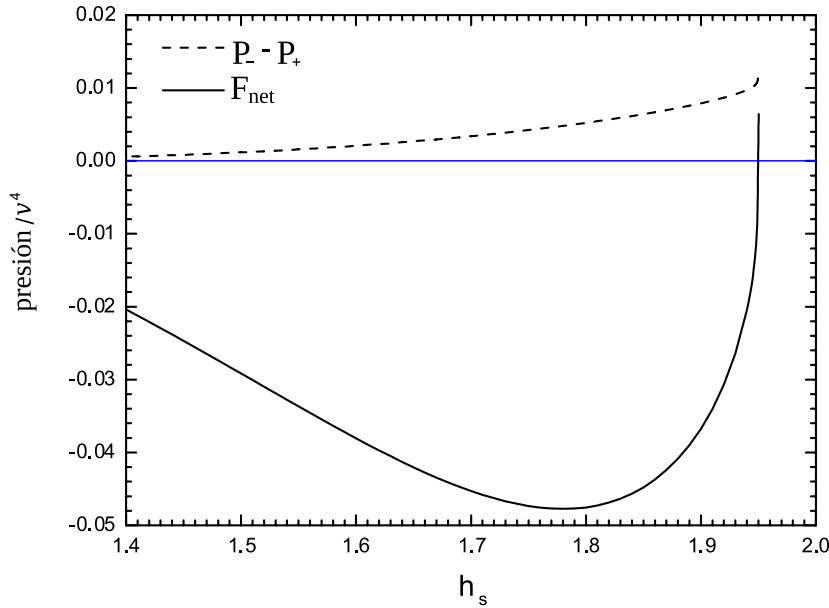


Figura 4.12: La diferencia de presión $P_- - P_+$ (a trazos) y el valor de la fuerza neta por unidad de área F_{net} (sólido), en función de h_s para $g_s = 2$ y $\mu_s = 0$, a temperatura T_i . Las curvas se grafican hasta $h_s = 1,9503$. F_{net} se calcula suponiendo régimen ultra relativista mediante la expresión (2.34). Donde da valores negativos tal hipótesis no se cumple y no son posibles las soluciones *runaway*. Recién a partir de $h_s \approx 1,9497$ se vuelve positiva.

4.4.1.2. El modelo estándar supersimétrico mínimo

Un ejemplo interesante de agregar bosones para incrementar la fuerza de la transición de fase es el modelo estándar supersimétrico mínimo o MSSM por sus siglas en inglés¹⁶. Este modelo ha sido considerado durante varios años, ya sea en el tema de la bariogénesis electrodébil (ver, por ejemplo, [142]) o en el de generación de OG [7]. El modelo es complejo, tiene muchos parámetros libres, y lamentablemente la transición no es suficientemente fuerte como para que se generen OG de intensidad interesante. Aquí se exponen las características más relevantes.

El MSSM contiene dos dobletes de Higgs complejos, con valores de expectación de vacío v_1 y v_2 . Se definen los parámetros $v^2 \equiv v_1^2 + v_2^2$, que es el vev observado ($v = 246$ GeV), y $\tan \beta \equiv v_2/v_1$. Se tienen varios grados de libertad más que en el SM.

¹⁵Aquí solo se considera el caso $\mu = 0$, que da transiciones de fase más fuertemente de primer orden.

¹⁶*Minimal Supersymmetric Standard Model* (MSSM).

De estos bosones, el escalar de menor masa sería similar al del SM (el observado en 2012 en el LHC). Se suele considerar convenientemente masas grandes para los demás, de modo que la teoría a baja energía contiene un solo Higgs ϕ . Por tanto, las masas de las partículas del SM (Z , W , top) son de la forma $m_i(\phi) = h_i\phi$. Sin embargo, las masas físicas de temperatura cero dependen de los dos valores v_1, v_2 , por lo que los parámetros h_i no son como en el SM. En particular, se tiene $h_Z = m_Z/v$, $h_W = m_W/v$, pero $h_t = \sin\beta m_t/v$.

Además de las partículas del SM están sus compañeras supersimétricas. La que es de interés aquí es el *stop* (el compañero supersimétrico del *top*), que es un escalar y tiene un acoplamiento con ϕ similar al *top* (que es acoplamiento más fuerte). Hay un *stop* para el *top* izquierdo y uno para el derecho. En principio deberían tener la misma masa que el *top*, pero como la supersimetría está rota (explícitamente, por los llamados *soft breaking terms*), éstos tienen términos de masa independientes de ϕ (además de los términos $h\phi$). Por simplicidad se trabaja en el límite en el cual el *stop* izquierdo es muy pesado y queda desacoplado de la teoría a la escala v (*right stop scenario*). Por tanto, tenemos un escalar con masa de la forma $m_{st}^2(\phi) \approx \mu_{st}^2 + h_t^2\phi^2$ (donde se aproxima $h_{st} \approx h_t$).

Con estas aproximaciones, el potencial efectivo a un lazo admite la expansión en potencias de $m(\phi)$ [142], por lo que queda una energía libre similar a la de las ecuaciones (1.44-1.45). Teniendo en cuenta el reemplazo (1.51), $m_{st} \rightarrow \mathcal{M}_{st}$ en el término cúbico, se tiene

$$\bar{V}(\phi, T) = D(T^2 - T_0^2)\phi^2 - TE_{SM}\phi^3 + \frac{6T}{12\pi}(\mu_{st}^2 + h_t^2\phi^2 + \Pi_{st}(T))^{\frac{3}{2}} + \frac{\lambda}{4}\phi^4, \quad (4.12)$$

donde D y T_0^2 son similares a los del SM, E_{SM} es el del SM, λ está esencialmente dado por la masa del Higgs [ver las ecuaciones (1.47-1.50)], y lo importante es el nuevo término cúbico. Despreciando contribuciones menos importantes, la masa térmica del *stop* está dada por

$$\Pi_{st}(T) = \left[\frac{4g_s^2}{9} + \frac{h_t^2}{6}(1 + \sin^2\beta) \right] T^2, \quad (4.13)$$

donde g_s es el acoplamiento de gauge fuerte.

Como se explica en la sección 1.3.2.4, la masa térmica en principio impide que el término \mathcal{M}^3 se comporte como ϕ^3 . En este caso, para aumentar la fuerza de la transición se utiliza el truco de dar un valor negativo al parámetro μ_{st}^2 . En particular, para $\mu_{st}^2 \approx -\Pi_{st}(T)$ [143], el término \mathcal{M}_{st}^3 en (4.12) es de la forma $-\Delta E T\phi^3$, con un coeficiente $\Delta E \propto h_{st}^3$ que puede ser un orden de magnitud más grande que E_{SM} . No obstante, esos valores negativos de μ_{st}^2 pueden inducir la presencia de mínimos que implicarían que el *stop* pueda desarrollar un vev. Esto trae el peligro de ruptura de color [i.e., de la simetría $SU(3)$ de QCD] a temperatura cero o temperatura finita [144]. Para evitar eso, solo se consideran valores de μ_{st}^2 para los cuales $\mu_{st}^2 + \Pi_{st}(T_0) > 0$ [7]. Con todo esto, el escenario del *stop* liviano no llega a dar una transición fuertemente de primer orden como se desea, ni siquiera para la bariogénesis electrodébil (que requiere $\phi_-/T \gtrsim 1$).

Sin embargo, las correcciones a 2-lazos pueden hacer la transición de fase fuertemente de primer orden incluso sin $\mu_{st} < 0$ [145]. Las correcciones más importantes a

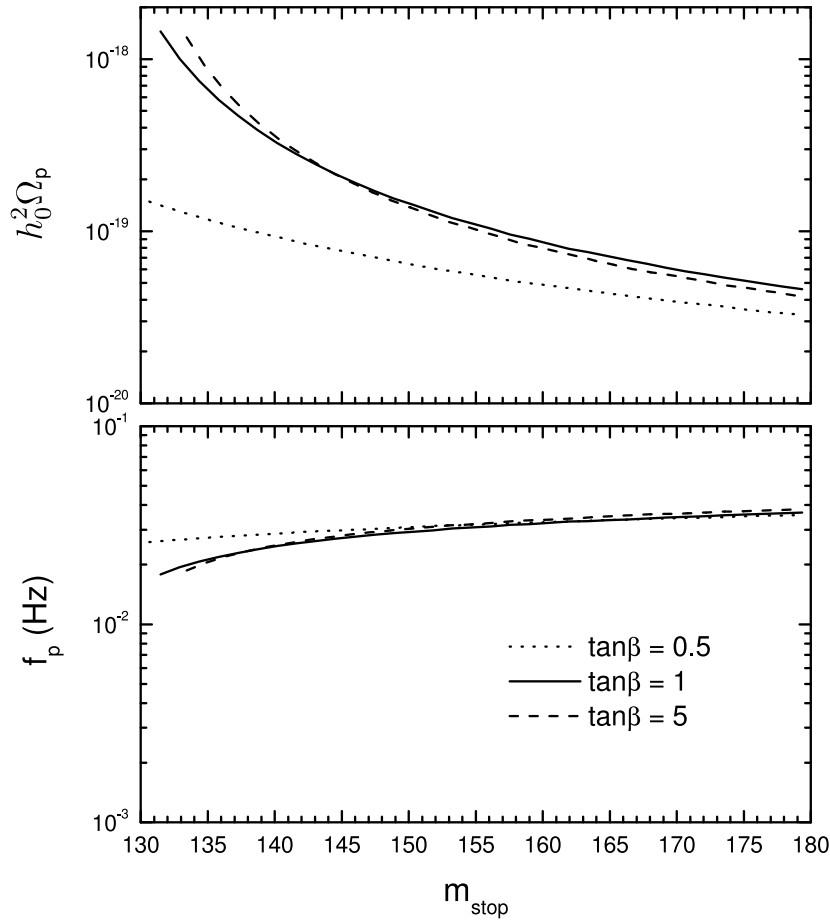


Figura 4.13: El pico del espectro de OG en función de la masa del stop, Para tres valores de $\tan\beta$.

2-lazos son de la forma [142, 145–148]

$$V_2(\phi, T) \approx \frac{AT^2}{32\pi^2} \phi^2 \log\left(\frac{\phi}{B}\right), \quad (4.14)$$

donde $A \approx (6h_t^4 - 8g_s^2h_t^2)$ y $B \approx 100$ GeV.

Aquí se consideran rangos de valores de μ_{st} correspondiente a masas del *stop* en el rango $m_{stop} \sim 130 - 180$ GeV, los cuales permiten la expansión a alta temperatura (4.12) y evitan los mínimos de ruptura de color. Se encuentra que las burbujas crecen como deflagraciones, con velocidades de pared $v_w \sim 0,4 - 0,5$ en el momento de la percolación (ligeramente superior a la del inicio de la nucleación [19]). La velocidad del frente de choque es $v_{sh} \approx 0,58$.

La figura 4.13 muestra la frecuencia e intensidad pico de las OG en función de la masa del stop para algunos valores de $\tan\beta$. Los resultados son bastante insensibles al valor de $\tan\beta$ para $\tan\beta \sim 1$ o superior. Para valores más chicos de $\tan\beta$, la transición de fase es más débil y la intensidad de las OG decrece. Los resultados no cambian significativamente con m_{stop} tampoco. La frecuencia característica es $f_p \approx 20-40$ mHz. La intensidad de las ondas es bastante baja, $h^2\Omega_p \lesssim 10^{-18}$, varios órdenes de magnitud por debajo de la sensibilidad de LISA. Esto principalmente se debe a que el acoplamiento del stop con el Higgs ($h_t \approx 0,7$) es relativamente bajo (comparar

con 4.9). El uso de masas cuadradas negativas y la corrección a 2-lazos no hacen a la transición suficientemente fuerte como para producir una señal de OG significativa.

Los resultados deberían mejorar en la extensión que sigue al mínimo modelo estándar super simétrico o NMSSM por sus siglas en inglés¹⁷, que consiste en agregar un singlete al MSSM [7, 149–151]. Una extensión con un singlete al MSSM (el *casi* mínimo modelo estándar supersimétrico o nMSSM por sus siglas en inglés¹⁸) se considera en la referencia [132], encontrándose que la señal de OG es siempre demasiado baja para observarse por LISA o BBO. Nuestros resultados para extensiones singlete son más optimistas. Se espera en este caso un resultado similar al de agregar un singlete escalar en el SM, el cual se considera en la sección 4.4.1.1. La diferencia principal con la publicación [132] parece ser que es porque aquí se consideran las burbujas más grandes en vez de aquellas que ocupan mayor volumen en la distribución total. Como se ve previamente en 4.3.2, esto da un aumento en un factor $\log(\beta/H)$ para el radio de burbuja. Un radio mayor achica el pico de frecuencia como $\sim 1/R_b$ pero incrementa la intensidad de la OG cuadráticamente¹⁹.

Además, en el NMSSM pueden haber términos cúbicos, que aparecen como términos de ruptura suave de supersimetría. En tal caso, la fuerza de la transición de fase domina el término cúbico en el potencial a nivel árbol, y no es necesario considerar las correcciones a lazos o un stop liviano. Como se ve en la sección 4.5, los efectos a nivel árbol pueden conducir a paredes *runaway* y una señal más grande para el mecanismo de generación por colisión de burbujas.

4.4.1.3. Fermiones extra fuertemente acoplados

Fermiones extra fuertemente acoplados al campo de Higgs también pueden hacer que la transición de fase sea más fuertemente de primer orden [126]. Fermiones fuertemente acoplados, no obstante, hacen el vacío inestable [el término $-m^4 \log(m^2/v^2)$ domina para ϕ grande en (1.37)]. Este problema puede resolverse agregando *bosones estabilizadores* pesados con el mismo acoplamiento pero con un gran término de masa independiente de ϕ , para que se desacoplen de la dinámica en $T \sim 100$ GeV. En el caso más simple, solo g_f grados de libertad se acoplan con el Higgs, con autovalores de masa degenerados de la forma $m_f^2(\phi) = \mu_f^2 + h_f^2 \phi^2$. Para hacer perturbaciones se requiere que h_f no sea grande, puede ser hasta $\sim 3,5$. Los campos bosónicos estabilizadores tienen el mismo número de grados de libertad, y una relación de dispersión $m_s^2(\phi) = \mu_s^2 + h_s^2 \phi^2$, con $h_s = h_f$. Por simplicidad, se supone $\Pi_s = 0$. Siguiendo [126], aquí se ajusta μ_s al valor máximo consistente con la estabilidad [a partir de la ecuación (1.37)],

$$\mu_s^2 = \exp\left(\frac{m_H^2 8\pi^2}{g_f h_f^4 v^2}\right) m_f^2(v) - h_f^2 v^2. \quad (4.15)$$

En la figura 4.14 se grafica la frecuencia y la intensidad pico de las OG en función de h_f , para varios valores de μ_f . Notar que, para valores altos del acoplamiento de Yukawa h_f , este modelo da frecuencia en los mHz y señal de OG $h_0^2 \Omega_p \sim 10^{-15}$, más fuerte que

¹⁷*Next to Minimal Supersymmetric Standard Model* (NMSSM).

¹⁸*nearly Minimal Supersymmetric Standard Model* (nMSSM).

¹⁹Notar también que alcanzar la sensibilidad de LISA en la sección 4.4.1.1 requiere cierto ajuste fino de los parámetros. El análisis de la referencia [132] hace un barrido de valores de parámetros al azar, los cuales puede que no entren en la región de ajuste fino (grafican densidad de puntos en los planos α - T , α - β , etc.).

el MSSM. No obstante, la señal aún permanece por debajo de la sensibilidad de LISA. El problema con los fermiones extras es que, comparado con el caso de los bosones, se necesitan valores más grande del acoplamiento h_f para obtener transiciones de fase fuertemente de primer orden. Valores más grandes de h_f ocasionan un coeficiente de fricción mayor. En consecuencia, la velocidad de la pared es más chica que en los modelos con bosones extra. Se encuentran velocidades $v_w \lesssim 0,2$, y tan chicas como $v_w = 0,05$ para transiciones fuertemente de primer orden. Esto hace a este modelo interesante para bariogénesis²⁰, pero no para la generación de OG.

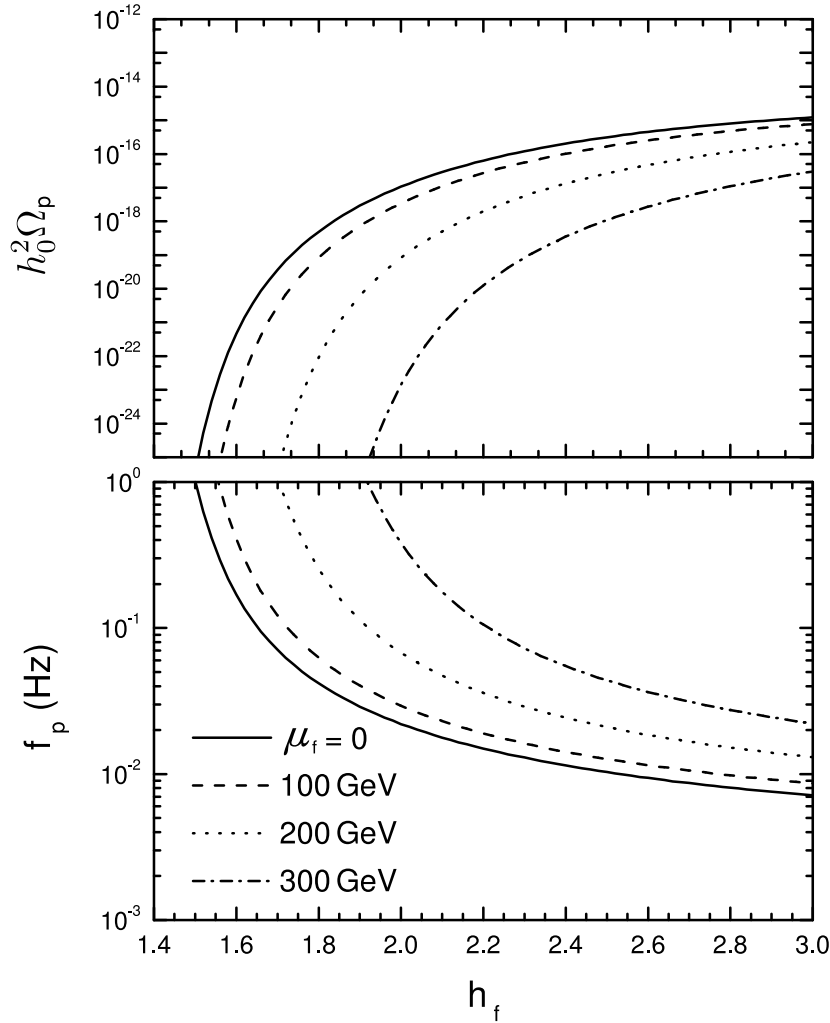


Figura 4.14: El pico del espectro de OG en función de h_f para varios valores de μ_f .

4.4.2. Predicción de OG vs. detectores

En este apartado se comparan los resultados de los modelos que se mencionan previamente para el estudio de la transición electrodébil, y se discute si son detectables las señales de ondas gravitatorias que se predicen a partir de estos. Se muestran en la figura 4.15 algunas curvas representativas para cada modelo, junto con la sensibilidad proyectada para varios detectores. Para comparar, también se muestran otras fuentes

²⁰Ya que la asimetría bariónica máxima se obtiene para $v_w \ll 1$ [152–155].

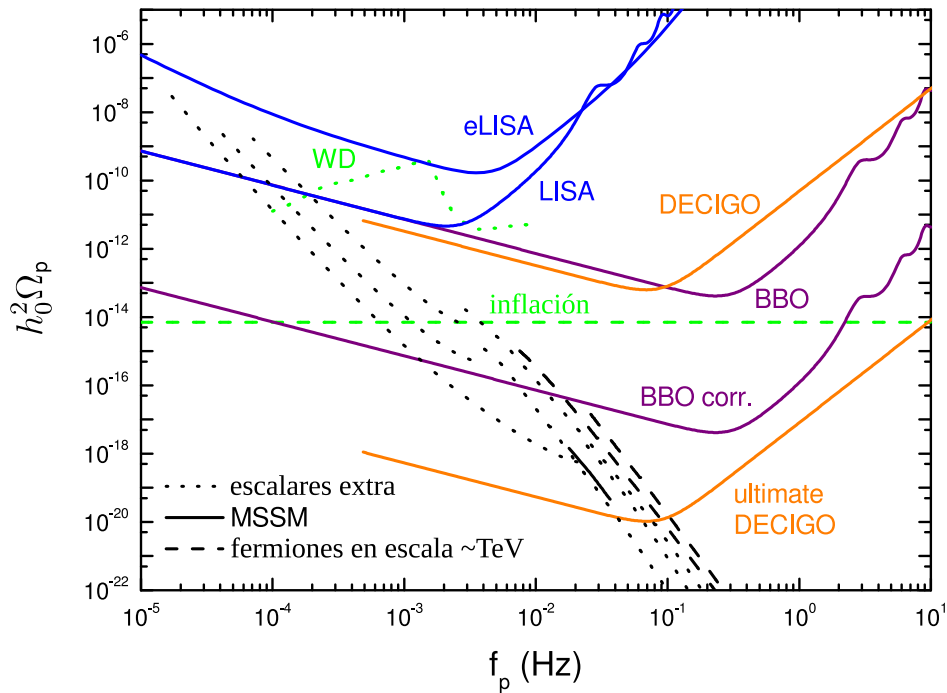


Figura 4.15: Predicciones del valor pico del espectro Ω_{OG} en función de la frecuencia pico, para diferentes modelos, junto con el ruido de otras fuentes estocásticas, y las curvas de sensibilidad correspondientes a varios proyectos de detección espacial de ondas gravitatorias basados en interferometría láser (líneas azul, púrpura y naranja). La línea verde punteada corresponde a la señal para binarias enanas blancas (WD, por *White Dwarf* en inglés), y la línea verde a trazos es la máxima señal esperada de inflación. Las curvas negras punteadas corresponden a extensiones del SM con escalares extra. De izquierda a derecha, se tiene $g_s = 2$ grados de libertad con masa invariante $\mu_s = 200$ GeV y $\mu_s = 0$, y $g_s = 12$ con $\mu_s = 100$ GeV. La intensidad de las OG se incrementa con el acoplamiento al Higgs h_s . La curva negra sólida corresponde al MSSM para $\tan \beta = 1$. La intensidad de las OG es mayor para menores valores de la masa del stop. Las líneas a trazos negro corresponden a extensiones de fermiones fuertemente acoplados con $g_f = 12$ y $\mu_f = 0$ (la curva más a la izquierda) y $\mu_f = 300$ GeV (la curva más a la derecha). En estas curvas, la señal de OG se incrementa con h_f .

que generan un fondo estocástico de OG, tales como binarias galácticas y extragalácticas [156, 157] e inflación [81]. Es interesante que, para los modelos considerados aquí, las señales de OG que son lo suficientemente altas para ser detectadas por LISA, se separan en frecuencia respecto al ruido de binarias enanas blancas.

Las predicciones de señal para los diferentes modelos se muestran en negro en la figura 4.15. Para todos los modelos en consideración, a los parámetros que dan frecuencias en la sensibilidad pico de LISA ($f \sim 1$ mHz) les corresponden intensidades unos pocos órdenes de magnitud por debajo de esa sensibilidad pico $h_0^2 \Omega_{OG} \sim 10^{-12}$. Se ve que la curva de sensibilidad de LISA se alcanza en frecuencias características $f_p \sim 10^{-4}$ Hz, para modelos algo extremos, aquellos con escalares extra con acoplamiento a Higgs bastante fuerte. En algún momento futuro, detectores como BBO o el japonés DECIGO se espera que lleguen a tener una sensibilidad pico cerca de dos órdenes de magnitud por debajo de la de LISA, $h_0^2 \Omega_{OG} \sim 10^{-14}$ - 10^{-13} . No obstante, este pico de sensibilidad sería para una frecuencia $f \sim 0,1$ Hz-1 Hz, lejos de las señales de OG

de la transición electrodébil para esa intensidad. Como se puede ver en la figura, ni BBO ni DECIGO podrá, en principio, mejorar la posibilidad de LISA para detectar señal de OG proveniente de la transición electrodébil. No obstante, luego del análisis de correlación, BBO posiblemente sería capaz de detectar señales de un amplio rango de extensiones del SM, por ejemplo, bosones extra moderadamente acoplados o fermiones extra fuertemente acoplados. La detección se mejoraría más para la última sensibilidad de DECIGO. Esa parece ser la única posibilidad para detectar ondas gravitatorias en el caso de MSSM. Para NMSSM se espera una señal similar a la del SM con un singlete extra.

4.5. OG de transiciones de fase MUY fuertes

Los resultados de esta sección corresponden a nuestra publicación [5], donde solo consideramos variantes de eLISA. Además del pico consideramos el espectro completo de OG, tanto para generación por turbulencia como para generación por colisiones y ondas de sonido. Se ajusta el *Bag* considerando las expresiones (2.86) y (2.87). A diferencia de la sección anterior se toma una fricción que satura, lo cual describe mejor la hidrodinámica en el caso de paredes extremadamente ultra relativistas. Los otros parámetros de generación de OG se calculan según la discusión dada en la sección 4.3, con un seguimiento numérico de la transición similar al que se menciona en la sección anterior. Además, se considera la geometría de burbuja esférica para las detonaciones ultrarelativistas y las *runaway*.

4.5.1. Modelos que favorecen transiciones muy fuertes

Como se muestra en la sección 4.4 un modo de alcanzar una transición de fase electrodébil fuertemente de primer orden es mediante la adición de bosones con gran acoplamiento h_i al Higgs. Además, como también se menciona en esa sección, agregar singletes escalares al SM permite nuevos términos a nivel árbol en el potencial escalar (como los cúbicos), que puede inducir una barrera tanto en temperatura finita o ya en temperatura cero (incluso sin término cúbico) [105, 135, 136]. Estos modelos pueden dar transiciones de fase electrodébil muy fuertes. Alternativamente, un término no renormalizable²¹ como ϕ^6/Λ^2 puede hacer a la transición de fase fuertemente de primer orden si la escala Λ que suprime ese operador está en la vecindad de la escala electrodébil [158].

Se puede pensar que la existencia de paredes *runway* depende directamente de la fuerza de la transición de fase. No obstante, como se discute en la referencia [105], si la fuerza de la transición depende de las correcciones térmicas, entonces la pared no llega a *runaway*, no importa cuán fuerte pueda ser la transición de fase. Principalmente, eso se debe a que la fuerza neta UR (2.31-2.34) se obtiene de una diferencia de “energías libres” entre fases donde las potencias cúbicas o superiores de ϕ se truncan en la expansión de la parte térmica (3.3). Además, como se ve en la sección 4.4.1.1, en el ejemplo del SM extendido con bosones fuertemente acoplados, a pesar de los términos de temperatura cero $\phi^4 \log(\phi/v)$, la existencia de paredes *runaway* requiere un ajuste fino de los parámetros (ver la figura 4.12). En lo que sigue se ve que las soluciones

²¹Aquí el *cutoff* Λ no se tomaría divergente, entonces el término ϕ^6/Λ^2 no se anula y es una dependencia a tener en cuenta.

runaway son más probables en extensiones con términos que fortalecen la transición ya a nivel árbol.

Se desea investigar la generación de OG en esas transiciones de fase fuertes, y en particular comparar modelos con y sin paredes *runaway*. Para analizar estas características generales, sin evaluar un modelo específico (más complicado), aquí se consideran modelos simplificados que, se espera, representan diferentes familias de modelos.

4.5.1.1. El SM con bosones fuertemente acoplados

Ya se considera este ejemplo en la sección 4.4.1.1. La transición de fase es más fuerte para valores más altos de acoplamiento h_s y para mayor número de grados de libertad, mientras que se vuelve más débil para mayores valores de μ_s . En esta sección, se considera solo el caso $\mu_s = 0$. La diferencia principal respecto al tratamiento dado en la sección 4.4.1.1 (basada en nuestra publicación [2]) es que aquí se tiene en cuenta la saturación de la fricción, lo cual conduce a valores algo más grandes en la velocidad de la pared.

Para un h_s lo suficientemente grande, el potencial efectivo tiene barrera ya a $T = 0$, lo cual se refleja en la probabilidad de nucleación. Esto puede apreciarse en la figura 4.16 (panel izquierdo), donde se considera la acción del instantón térmico $S_3(T)$ para unos pocos valores de h_s (con $g_s = 2$). En $T = T_c \sim 100\text{GeV}$, la acción del instantón diverge, lo que significa que el ritmo de nucleación se anula. Al descender T por debajo de T_c , S_3 decrece y el ritmo de nucleación se incrementa. Esto es porque los mínimos ya no son degenerados y la barrera entre ellos es mas pequeña. Para valores bajos de h_s , la barrera entre los mínimos desaparece a una cierta temperatura T_0 (ver la sección 1.3.2.3). En tal caso, S_3 se anula a $T = T_0$ (mirar la línea con puntos y trazos). Por lo tanto, en $T = T_0$ el ritmo de nucleación se vuelve extremadamente alto, $\Gamma \sim T^4$, y la transición de fase termina antes que el sistema alcance esa temperatura. No obstante, para valores de h_s lo suficientemente altos, aún hay una barrera a $T = 0$. Debido a esa barrera, la probabilidad de activación térmica decrece nuevamente para temperaturas pequeñas. De hecho, se ve que, para valores grandes de h_s , S_3/T se incrementa de nuevo por debajo de $T \sim 50\text{GeV}$.

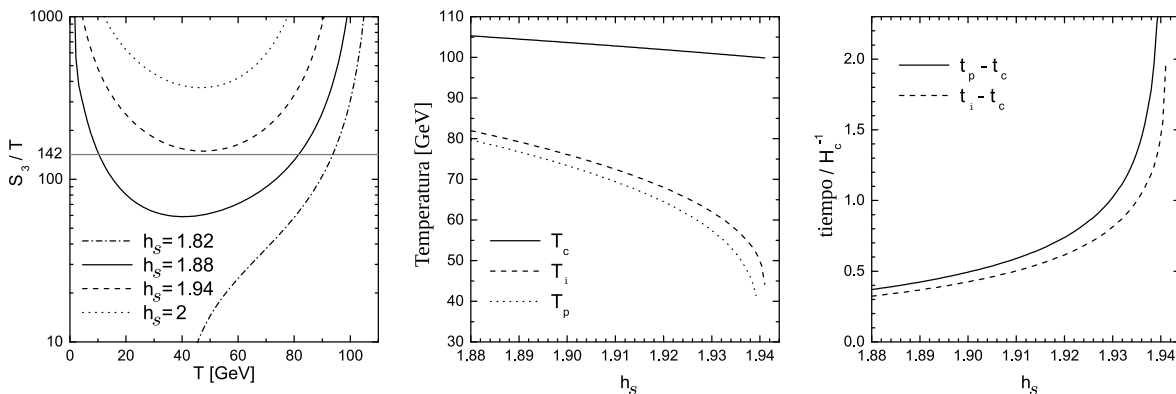


Figura 4.16: Izquierda: el instantón térmico en función de la temperatura, para $g_s = 2$ y varios valores de h_s . Centro: la temperatura crítica T_c , la temperatura T_i al comienzo de la nucleación, y la temperatura T_p en la percolación. Derecha: intervalos de tiempo entre la temperatura T_c y la temperatura T_i (línea a trazos) y entre T_c y T_p (línea sólida).

Como se menciona en la sección 1.4.6, la nucleación se vuelve efectiva para $S_3/T \approx 142$. Se ve, por ejemplo, que para $h_s = 1,82$ la transición de fase ocurriría a $T \approx 90\text{GeV}$ y para $h_s = 1,88$ ocurriría a $T \approx 80\text{GeV}$, mientras que para valores de h_s cercanos a 1,94 puede suceder en el rango $40\text{GeV} \lesssim T \lesssim 60\text{GeV}$ y para valores más grandes de h_s nunca sucedería. La cantidad de sobreenfriamiento en función de h_s se muestra en el panel central de la figura 4.16 (comparar con el panel izquierdo-superior de la figura 4.8). Se ve que, de hecho, para $h_s \simeq 1,94$ la nucleación de burbujas comienza a la temperatura $T \lesssim 50\text{GeV}$. No obstante, en este punto la temperatura decrece abruptamente en función de h_s , y hay un valor crítico $h_{\text{máx}}$ para el cual la transición de fase ocurre en $T = 0$. Más allá de ese valor máximo, el sistema permanece en la fase metaestable y la transición de fase nunca termina.

En el panel derecho de la figura 4.16 se muestra el tiempo que toma, a partir de la temperatura crítica, alcanzar el inicio de la nucleación (ya graficado en la figura 4.8) y luego la percolación. Se ve que para $h_s > h_{\text{máx}}$ el universo permanece trabado en el falso vacío y, entonces, entra en una era inflacionaria [26, 59]. Para generación de OG aquí interesan las transiciones de fase muy fuertes. No obstante, está la condición limitante $h_s < h_{\text{máx}}$. Por lo tanto, considerar un valor alto de g_s no cambia la situación significativamente. De hecho, como se ve en la sección 4.4.1.1, para $g_s = 12$ se encuentra que el valor máximo de h_s es más chico, $h_{\text{máx}} \simeq 1,2$. En consecuencia, la máxima fuerza de la transición no es más grande que para el caso de $g_s = 2$. Además, la fricción es más grande y la velocidad de la pared más chica. Acá solo se considera el caso $g_s = 2$.

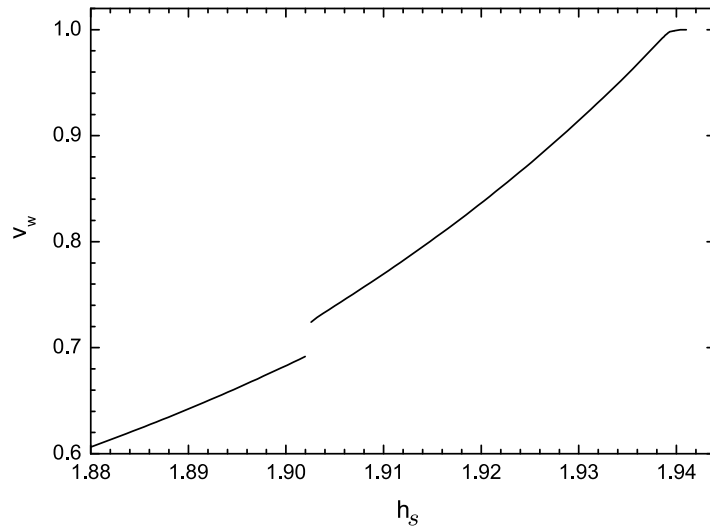


Figura 4.17: La velocidad de la pared para el SM con $g_s = 2$ bosones extra de masa $m_s = h_s \phi$.

En la figura 4.17 se grafica la velocidad de la pared en este modelo, para valores de h_s que dan velocidades supersónicas²². En esta sección interesan los casos con paredes detonantes y *runaway*. No obstante, para comparar se muestra una parte pequeña²³ del

²²La velocidad, también se grafica previamente en la figura 4.8 para este modelo. Sin embargo, además de una fricción que no satura, se considera una aproximación diferente para la fuerza de *driving*, por lo que una comparación precisa no es posible. Sí vale la pena notar que los valores de v_w son similares, y que el efecto de saturación de la fricción se ve recién para $h_s \simeq h_{\text{máx}}$.

²³La transición de fase es fuertemente de primer orden (es decir, con $\phi_-/T \gtrsim 1$) ya para $h_s \sim 1,2$. A pesar de eso, debajo de $h_s = 1,9$ se tienen paredes deflagrantes. Así, en comparación, las soluciones

rango de deflagraciones²⁴. Notar que en este rango las deflagraciones son supersónicas. La velocidad de la pared tiene un salto de soluciones deflagrantes a detonantes en $h_s \simeq 1,9$. Se ve que las soluciones *runaway* aparecen muy cerca del valor límite $h_s = h_{\text{máx}}$. Por lo tanto, en este modelo, obtener paredes *runaway* requiere un ajuste fino de parámetros. Es la misma conclusión que se obtiene de inspeccionar la figura 4.12.

En la figura 4.18 se considera la producción de OG para este modelo. En el panel izquierdo se comparan las amplitudes pico para los diferentes mecanismos de generación²⁵. Notar que para transiciones muy fuertes la señal proveniente del mecanismo de colisión de burbujas sobrepasa la intensidad de las otras dos, y esto sucede en el régimen detonante. No obstante, este resultado debería considerarse con precaución. De hecho, se encuentra que cerca de $h_{\text{máx}}$ el parámetro β (calculado a $t = t_p$) se vuelve *negativo* antes de alcanzar el valor $h_{\text{máx}}$. Así, el crecimiento de la curva correspondiente a colisión de burbujas es debido en parte a la explosión de β^{-1} , mientras que la verdadera duración de la transición es aún finita. Esto sucede porque el sobreenfriamiento es tal que la temperatura alcanza el mínimo S_3/T (es la situación de la línea a trazos en el panel izquierdo de la figura 4.16). Esto indica que el ritmo de nucleación ya no es de la forma $\exp(\beta t)$, con constante β (es decir, S_3/T debería aproximarse por una función cuadrática de t en vez de una función lineal $\sim \beta t$). Por lo tanto, los resultados (1.113-1.115) de simular colisiones de burbuja dejan de tener validez. En consecuencia, usando esos resultados, no se puede computar la señal debida a colisión de burbujas más allá de cierto valor del parámetro h_s .

En el panel derecho de la figura 4.18 se muestra la intensidad pico vs la frecuencia pico para el mismo rango de valores de h_s , junto con las curvas de sensibilidad de las cuatro configuraciones de eLISA que se mencionan en la sección 1.5.3. Se ve que, aunque la intensidad de la señal debida a colisión de burbujas crece para transiciones de fase muy fuertes, su frecuencia decrece significativamente (debido a la divergencia de β^{-1}), alejándose de la sensibilidad de eLISA. Por otro lado, las señales debidas a turbulencia y a ondas de sonido tienen frecuencias similares, pero las de sonido dominan.

Las estrellas en las curvas indican tres puntos de referencia en el rango de parámetros de h_s . Uno de ellos corresponde al comienzo del rango de detonación, otro corresponde a una detonación más rápida, y el tercero corresponde a transiciones de fase muy fuertes pero aún con β positivo. Algunas de las propiedades de la transición de fase para estos puntos de referencia se muestran en la tabla 4.1. En la figura 4.19 se grafican, para esos puntos, los espectros para las diferentes fuentes y el espectro total (suponiendo que las correspondientes contribuciones al fondo estocástico de OG combina linealmente²⁶).

detonantes existen en un rango pequeño. Esto es porque, como se ve en la expresión (2.26), al haber fuerte acoplamiento de las partículas la fricción es grande.

²⁴Por sencillez de cálculo, igual que en la sección 4.4, para el caso de deflagraciones se considera pared de burbuja plana.

²⁵En la sección 4.4.1.1 (figuras 4.9 y 4.10) se obtienen mayores amplitudes y frecuencias más pequeñas para OG de turbulencia, ya que ahí se supone que la longitud característica de agitación la dan las burbujas más grandes, mientras que acá se toma la longitud d definida por (1.121).

²⁶Esto no es muy correcto. En realidad cada cálculo estudia diferentes particularidades y situaciones del tensor de energía-momento total, fuente de OG, las cuales no pueden discriminarse completamente entre sí. Acá se sigue el mismo criterio que en las publicaciones del tema como, por ejemplo, [84].

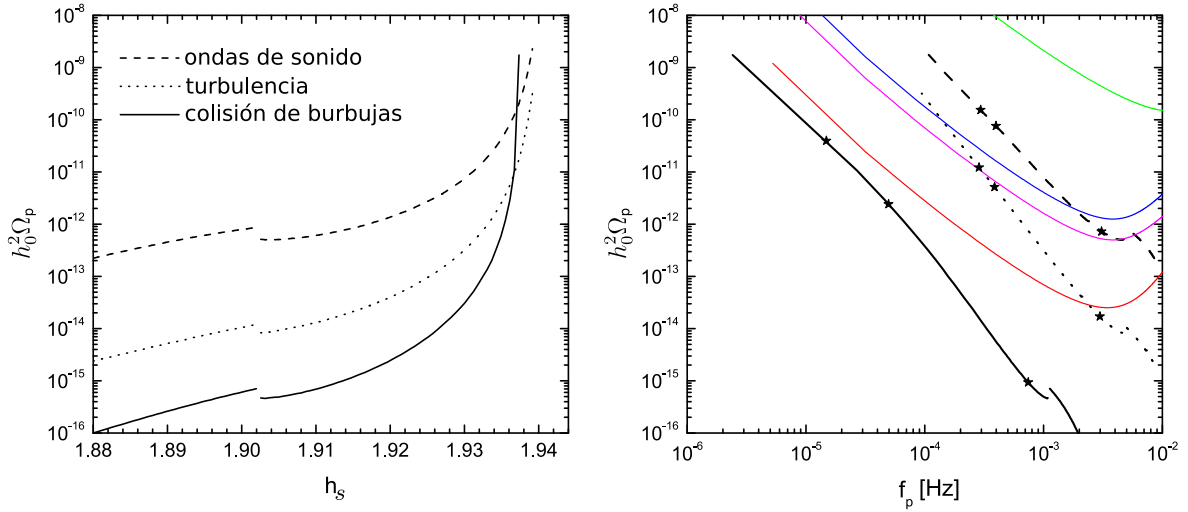


Figura 4.18: Izquierda: amplitud pico de las tres contribuciones al espectro de OG para el SM con $g_s = 2$ grados de libertad extra, en función del acoplamiento h_s . Derecha: amplitud pico vs frecuencia pico. Las estrellas indican los valores de h_s dados en la tabla 4.1. Las líneas coloreadas corresponden a las curvas de sensibilidad de eLISA que se discuten en la sección 1.5.3.

h_s	T_p [GeV]	α	β/H	Hd	v_w	g_*	ϕ_-/T
1.913	68.1	0.057	241.5	0.013	0.789	104	3.6
1.936	50.3	0.187	23.8	0.075	0.967	103	4.85
1.937	48.3	0.219	7.4	0.098	0.977	103	5.05

Tabla 4.1: Algunas características de la transición de fase electrodébil (la temperatura de percolación T_p , los parámetros α y β , la distancia promedio d entre centros de nucleación, la velocidad de la pared, el número de grados de libertad en la fase “—” o de simetría rota al final de la transición de fase g_* dado por (4.11), y el parámetro de orden ϕ_-/T en $T = T_p$) para algunos puntos de referencia del acoplamiento h_s de los bosones extra con el campo de Higgs.

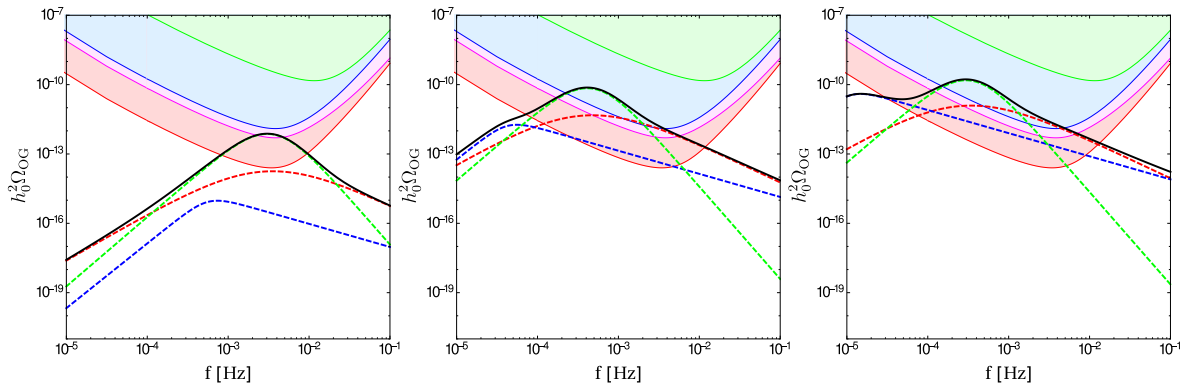


Figura 4.19: Los espectros de OG para los puntos de referencia de la tabla 4.1. La línea azul a tramos denota la contribución del mecanismo de colisión de burbujas, la línea roja a trazos al mecanismo de turbulencia MHD, la línea verde a trazos al mecanismo por oscilaciones del plasma (ondas de sonido), y la línea negra la suma de estas tres señales. Las áreas coloreadas representan regiones de detección para las diferentes configuraciones de eLISA.

4.5.1.2. El SM con términos cúbicos a nivel árbol

Para investigar los efectos posibles de términos a nivel árbol, aquí se agrega un término cúbico $\propto \phi^3$ al potencial a nivel árbol. Esta extensión del SM debe considerarse como un modelo de juguete (o *toy model* en inglés), ya que el término cúbico no puede construirse con el doblete de Higgs²⁷. En este *toy model*, el campo ϕ puede representar una trayectoria en el espacio de dos campos (el ϕ y el S de la sección 4.4) [159]. Agregando el término cúbico solo al potencial (1.32) cambia el valor del mínimo a nivel árbol, la masa del Higgs, y la densidad de energía de vacío *verdadera* (en fase “–” o de simetría rota). Así que se agrega al potencial a nivel árbol

$$\Delta\mathcal{V}_0 = -A\phi^3 + \frac{3}{4}Av\phi^2 + \frac{3A}{8v}\phi^4 - \frac{1}{8}Av^3, \quad (4.16)$$

con lo que $\mathcal{V}_0 + \Delta\mathcal{V}_0$ sigue teniendo el mismo mínimo en $\phi = v$ y “curvatura” m_H que \mathcal{V}_0 , que también son dejados invariantes por las condiciones (1.35) sobre \mathcal{V}_1 . Ya que la fuerza de la transición domina la modificación a nivel árbol, no se necesita considerar partículas extra fuertemente acopladas.

La velocidad de la pared para este modelo se considera previamente en la referencia [19], donde obtienen detonaciones para $A \gtrsim 20\text{GeV}$, con velocidades $v_w \lesssim 0,75$. No obstante, en ese trabajo no se tiene en cuenta la saturación de la fricción. En la figura 4.20 se grafica v_w en función de A (panel izquierdo). Para $A \lesssim 21\text{GeV}$ se tienen deflagraciones subsónicas, para $21\text{GeV} \lesssim A \lesssim 32\text{GeV}$ detonaciones, y si $A \gtrsim 32\text{GeV}$ hay paredes *runaway*. Con $A \simeq 39\text{GeV}$, la transición se vuelve muy fuerte, como en el modelo anterior. El panel derecho de la figura 4.20 muestra la fuerza neta normalizada por la energía de vacío, que también da el factor de eficiencia κ_w .

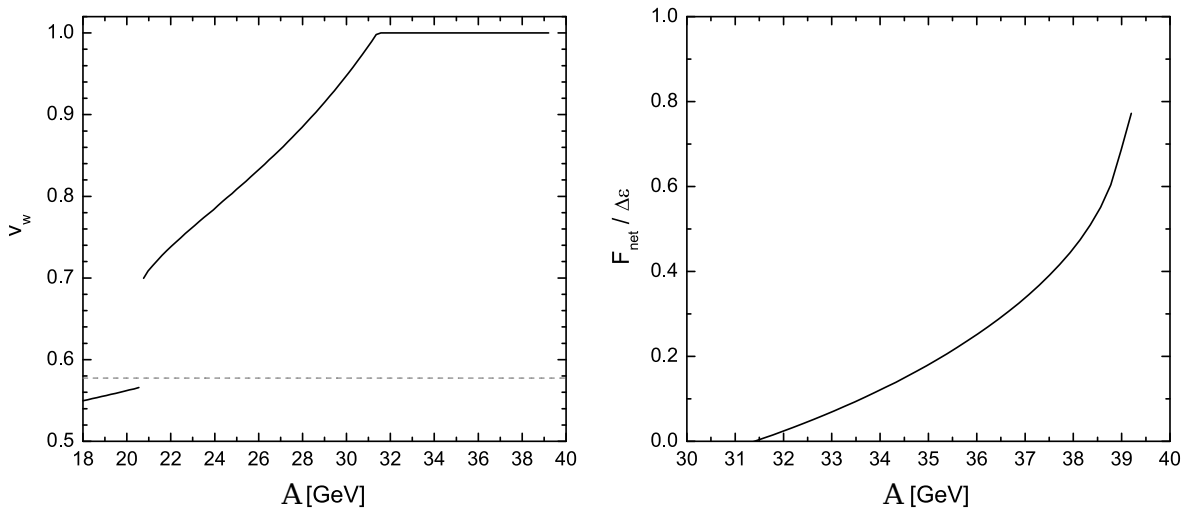


Figura 4.20: La velocidad de la pared (panel izquierda) y la fuerza neta (panel derecho) para el modelo con un término cúbico, en función del parámetro A .

En el panel izquierdo de la figura 4.21 se grafica la amplitud pico del espectro en función del parámetro A . Se ve que para detonaciones la señal de colisiones es más chica que la de turbulencia y ondas de sonido, pero comienza a crecer tan pronto como aparecen las soluciones *runaway*, y gradualmente la intensidad se aproxima a la de las otras dos señales. En el panel derecho de la figura 4.21 se grafican la amplitud pico

²⁷Es decir, no se puede armar un término $\propto \phi^3$ con contracciones de $\begin{pmatrix} \hat{H}_+ \\ \hat{H}_0 \end{pmatrix}$, donde $\phi \equiv \langle \sqrt{2}\hat{H}^0 \rangle$.

vs la frecuencia pico para las tres señales. Aunque la amplitud Ω_{env} explota cuando la transición de fase se hace muy fuerte, la frecuencia f_{env} decrece debido al repentino incremento de β^{-1} , alejándose de la sensibilidad pico de eLISA. Lo mismo sucede en el modelo previo. No obstante, en este caso la señal proveniente del mecanismo de colisión de burbujas es más fuerte y tiene posibilidad de ser observada por la configuración de eLISA más sensible. Esto es por la aparición de soluciones *runaway*. Por la misma razón, las señales de turbulencia y ondas de sonido no alcanzan la intensidad que logran en el modelo anterior, ya que va menos energía al fluido y más a la pared. Se consideran de nuevo algunos puntos de referencia para esas curvas; uno de ellos en el rango de detonaciones y los otros dos en el de *runaway*. Para esos puntos se muestran algunas características de la transición de fase en la tabla 4.2, y en la figura 4.22 se grafica el espectro correspondiente.

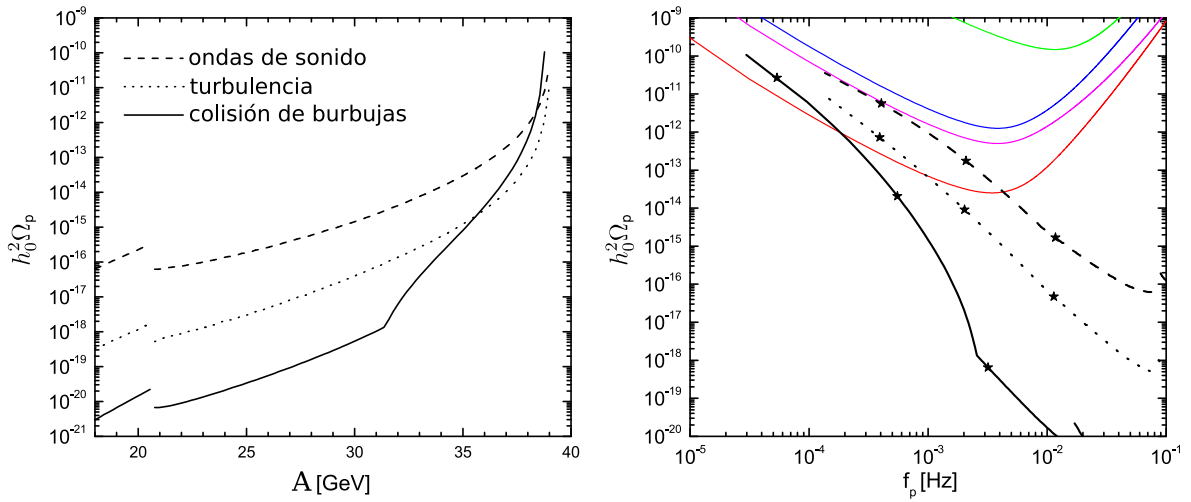


Figura 4.21: Como en la figura 4.18, pero para el modelo con término cúbico $-A\phi^3$. Las estrellas indican los puntos de referencia de la tabla 4.2.

A [GeV]	T_p [GeV]	α	β/H	Hd	v_w	g_*	ϕ_-/T
30.3	90.3	0.021	886.6	0.004	0.958	103	2.5
36.9	65.3	0.079	214.9	0.018	1	100	3.6
38.7	49.8	0.237	26.4	0.074	1	96.5	4.9

Tabla 4.2: Algunas características de la transición electrodébil (como en la tabla 4.1) para tres puntos de referencia en el SM con un término adicional $-A\phi^3$.

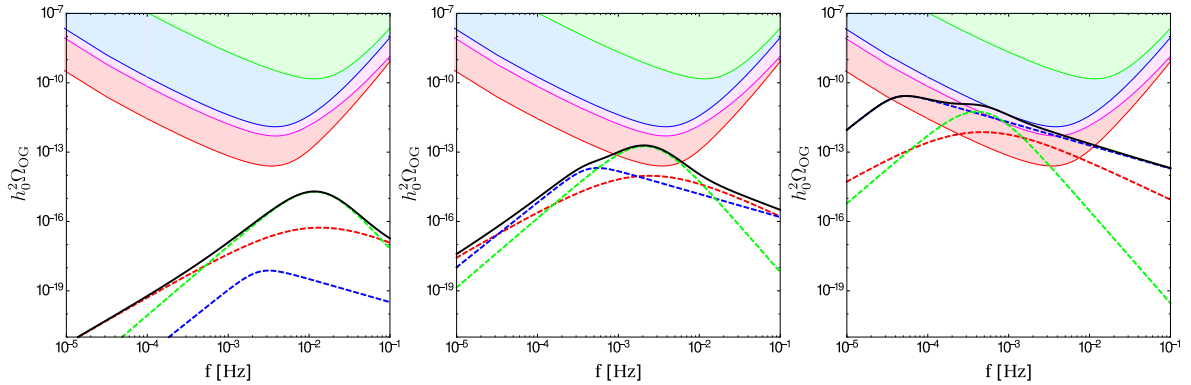


Figura 4.22: Como en la figura 4.19, pero con los puntos de referencia de la tabla 4.2 para el modelo con un término cúbico a nivel árbol.

4.5.1.3. El SM con operadores de dimensiones superiores

Finalmente se considera una teoría efectiva con un término séxtico²⁸ de la forma

$$\frac{(\phi^2 - v^2)^3}{8\Lambda^2}, \quad (4.17)$$

el cual no cambia los valores del mínimo en el potencial a nivel árbol, la masa de Higgs, y la densidad de energía de vacío. Para $\Lambda \lesssim 840\text{GeV}$ el término cuártico del potencial se vuelve negativo, lo cual se permite por la presencia del término séxtico. Para $\Lambda \lesssim 600\text{GeV}$ el término cuadrático del potencial a temperatura cero se vuelve positivo y se tiene una barrera a temperatura cero. Aquí no se discute el contraste experimental (con, por ejemplo, mediciones del LHC), solo se restringe el valor del *cutoff* Λ requiriendo que la transición de fase se complete en unos pocos tiempos de Hubble, como en los casos previos. Esto permite valores del *cutoff* tan bajos como $\Lambda \simeq 550\text{GeV}$.

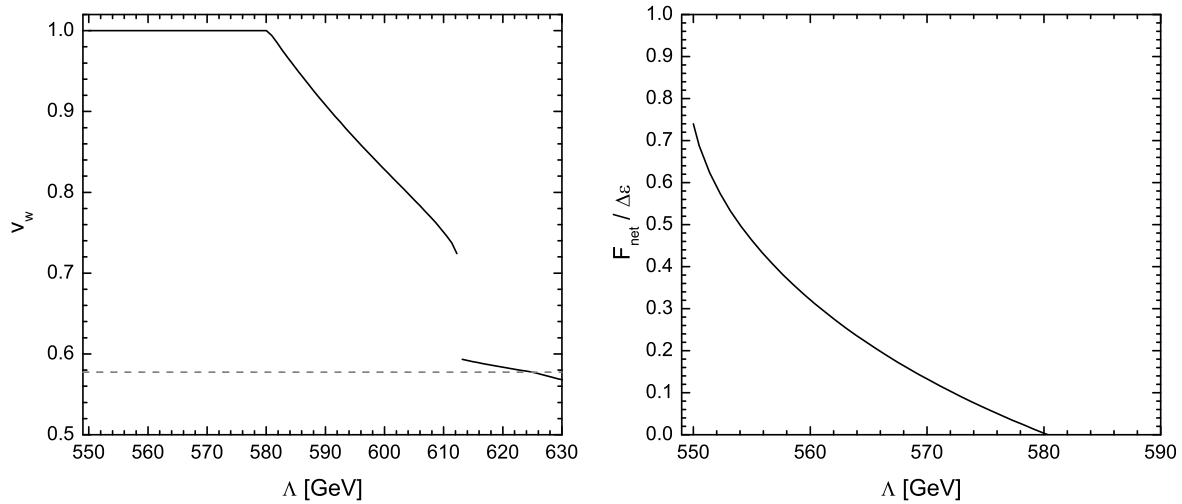


Figura 4.23: La velocidad de la pared (panel izquierdo) y la fuerza neta (panel derecho) para el SM con un operador séxtico, en función del *cutoff* Λ .

Se muestra la velocidad de la pared en el panel izquierdo de la figura 4.23 y la fuerza neta en el panel derecho. Hay un rango de detonación²⁹ para $580\text{GeV} \lesssim \Lambda \lesssim 610\text{GeV}$, mientras que abajo de $\Lambda \approx 580\text{GeV}$ se tienen paredes *runaway*. En la figura 4.24 se muestran las señales de OG. Como en el caso previo, la existencia de soluciones *runaway* mejora la señal proveniente del mecanismo de colisión de burbujas, la cual se acerca a las otras señales para transiciones de fase muy fuertes. Por otro lado, todas las intensidades son mayores que las del modelo anterior. Se elijen los puntos de referencia en la región de *runaway*. Los valores correspondientes de Λ y las propiedades de la transición de fase se dan en la tabla 4.3, y los espectros se grafican en la figura 4.25.

²⁸Si la palabra *séxtica* no se encuentra incorporada en el diccionario, debería.

²⁹Este rango es relativamente pequeño en comparación con el de deflagraciones. De hecho, para $\Lambda \lesssim 840\text{GeV}$ ya se tiene $\phi_-/T > 1$, y se tiene deflagraciones hasta 610GeV .

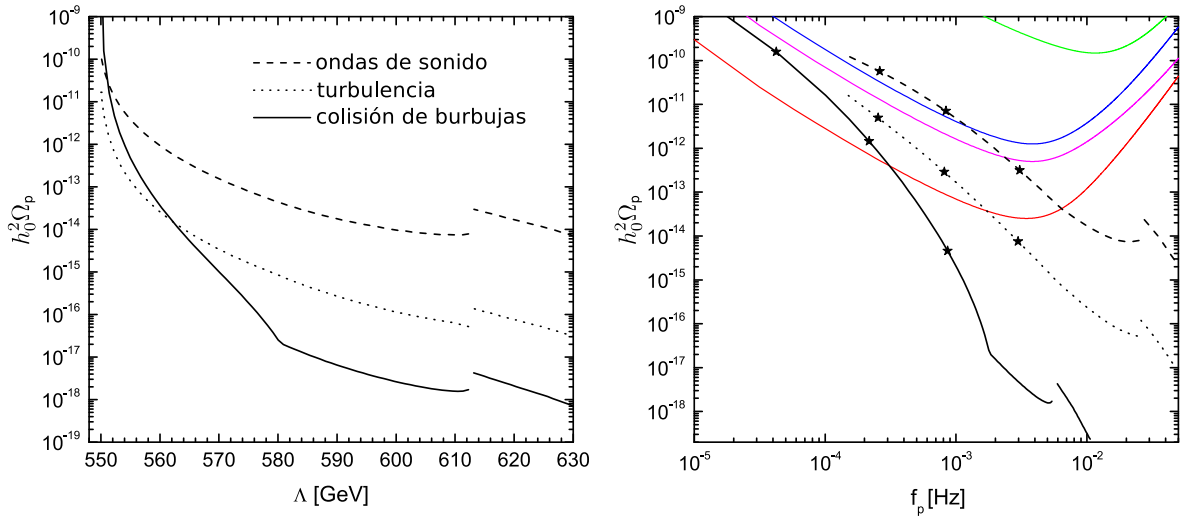


Figura 4.24: Como en la figura 4.18, solo que para el modelo con término séxtico ϕ^6/Λ . Las estrellas indican los puntos de referencia de la tabla 4.3.

Λ [GeV]	T_p [GeV]	α	β/H	Hd	v_w	g_*	ϕ_-/T
565.5	57.5	0.09	379	0.01	1	98.5	4.2
553.5	43	0.28	122	0.03	1	94.5	5.7
550.5	34.5	0.68	27.6	0.086	1	91	7.1

Tabla 4.3: Algunas características de la transición de fase (como en la tabla 4.1) para tres puntos de referencia en el modelo con un operador séxtico con bajo *cutoff* Λ .

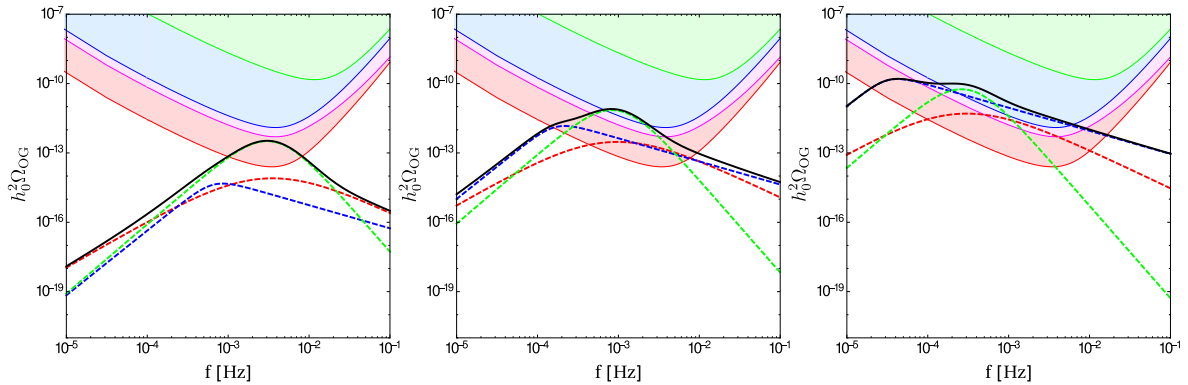


Figura 4.25: Como en la figura 4.19, pero con los puntos de referencia de la tabla 4.3 para el modelo con un término séxtico.

4.5.2. Comparación de la señal de OG entre distintos modelos

Para todas las extensiones del SM que se consideran a lo largo de la sección 4.5.1, hay un rango de parámetros de *nueva física* h_s , A , y Λ para los que la transición de fase tiene paredes detonantes o *runaway*. Se observa que los modelos con ambos tipos de soluciones pueden dar una señal fuerte de ondas gravitatorias. Como era de esperarse, la existencia de soluciones *runaway* favorece la señal proveniente del mecanismo por colisión de burbujas, mientras que la existencia de paredes estacionarias favorece la señal proveniente de turbulencia y ondas de sonido. No obstante, incluso en el rango

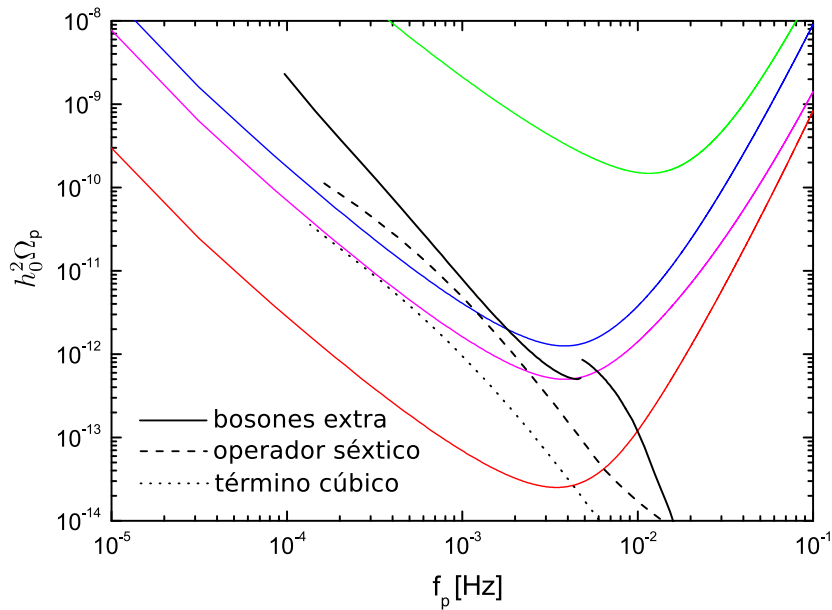


Figura 4.26: La amplitud pico vs la frecuencia pico correspondiente al mecanismo de generación por ondas de sonido, para las tres extensiones del SM que se consideran a lo largo de la sección 4.5.

de soluciones *runaway*, la intensidad de las señales provenientes de movimientos del fluido crece con la fuerza de la transición. En particular, la señal proveniente de ondas de sonido generalmente domina en el rango de sensibilidad de eLISA. Además, parece que solo para las transiciones de fase con paredes *runaway* la señal de colisiones tiene alguna chance de observarse.

Dado que la señal de los mecanismos de turbulencia y sonido se suprimen al incrementarse la de colisiones en presencia de paredes *runaway*, el principal efecto de estas últimas es debilitar la señal de OG. Es por esto que en la extensión del SM con bosones extra, donde prácticamente no hay *runaway*, la señal da más fuerte. En la figura 4.26 se comparan los resultados debidos al mecanismo de ondas de sonido para los distintos modelos.

El caso de bosones extra fuertemente acoplados claramente merece investigarse más. Aquí, solo se considera una masa con la forma simple $m(\phi) = h\phi$ y el caso particular $g = 2$ grados de libertad. Para una masa más general de la forma $m^2 = h^2\phi^2 + \mu^2$, la transición de fase es generalmente más débil. Por otro lado, para un número más grande de grados de libertad, la transición es más fuerte pero la fricción también, lo cual impide que la pared alcance mayor velocidad. En particular, para $g = 12$ se obtienen deflagraciones en todo el rango de h_s (hasta $h_{m\acute{a}x}$). No obstante, como puede verse en la figura Fig. 4.26, para este tipo de modelo las deflagraciones pueden generar una señal de OG importante.

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis se realizaron las siguientes tareas:

- Se avanzó en el entendimiento de la hidrodinámica involucrada en una transición de fase cosmológica (es decir, el caso de *hidrodinámica relativista*). En particular:
 - Se obtuvieron resultados analíticos para los perfiles de la geometría plana (incluyendo las deflagraciones de Jouget) y para los factores de eficiencia. Estos resultados fueron contrastados con los de geometrías esféricas y cilíndricas, verificando que cualitativa y cuantitativamente son muy parecidos. En consecuencia, para eficiencia y comodidad de cálculos que involucren a la hidrodinámica, se puede optar por usar los resultados, más simples, de geometría plana.
 - Se estudió una generalización al ampliamente utilizado modelo del *Bag* para su uso como ecuación de estado en consideraciones hidrodinámicas, el *Modelo* c_{\pm} . Aquí se señaló que puede llegar a darse una solución hidrodinámica “nueva”, detonaciones subsónicas con frente de choque, que con el *Bag* no se predice.
 - Se adaptó el tratamiento utilizado en regímenes estacionarios para estudiar y realizar cálculos en el caso de pared acelerada *runaway*. En particular se calculó la energía acumulada en la pared (el factor de eficiencia κ_w). También se estudió cómo estas soluciones empalman con las detonaciones ultra relativistas y las similitudes entre ambas soluciones en dicho límite.
- Se avanzó en el cálculo de ondas gravitatorias generadas durante distintos escenarios de transición electrodébil fuertemente de primer orden. En particular:
 - Se evaluaron las más actuales expresiones para el cálculo de espectros de ondas gravitatorias generadas por diferentes posibles fuentes: colisión de burbujas, turbulencia y ondas de sonido en el plasma.
 - Se estudió la posibilidad de detección, contrastando las predicciones de ondas gravitatorias con curvas de sensibilidad de diferentes diseños de detectores, proyectados o en vía de construcción.
 - Se comparó el efecto de paredes estacionarias y *runaway* en la señal de OG. Se observó que las paredes *runaway* dan menor señal (se incrementa la señal de colisiones a costa de disminuir las de turbulencia y sonido). Por tanto,

los modelos con bosones fuertemente acoplados son los que nos dieron una predicción de señal más fuerte.

Por supuesto que en ambos temas hay mucho por hacer (y son de actualidad). Por ejemplo, se podría continuar en esta línea con las siguientes tareas:

- Aplicar el *Modelo* c_{\pm} a casos realistas, o directamente (motivado por lo resultados expuestos) calcular la hidrodinámica para un modelo realista que tenga notablemente $c_+ \neq c_-$. Sin embargo, el caso más general es, como se vió, $c_- < c_+$, que da menor perturbación del fluido. En particular, si $c_- < c_+$ se podrían estudiar las detonaciones subsónicas con frente de choque (aunque probablemente no sean interesantes para la generación de OG porque se dan cerca del “límite débil”).
- Desde que (recientemente) comenzaron a publicarse resultados de simulaciones para ondas gravitatorias generadas por ondas de sonido, con parámetros no del todo realistas debido a las limitaciones numéricas de tales simulaciones, se abre la discusión de si finalmente hay o no turbulencia u ondas de sonido. Ambos cálculos requieren bastante refinamiento. En particular, como ya se remarcó, la turbulencia se calcula suponiendo una única escala de agitación. Si bien no ha constituido parte de esta tesis, hemos comenzado a estudiar el problema. Puesto que los resultados que existen actualmente se basan (salvo algún refinamiento) en el simple modelo de turbulencia propuesto por Kolmogórov (trabajo fundacional del tema), sería deseable seguir esa línea manteniendo un enfoque con razonamientos similares pero con el fin de extender el tratamiento a múltiples escalas y a determinar el espectro no solo en el rango “inercial” de escalas por debajo de la de agitación, sino también por encima de ésta. Lo cierto es que la complejidad del tema (abierto desde hace setenta años) repercute en el avance con el que se mejoran los cálculos de onda gravitatorias debidas a turbulencia.
- Más en general, tanto para turbulencia como para ondas de sonido y colisiones, se debería incorporar el cálculo de OG dentro de la evolución de la transición de fase, para eliminar las ambigüedades de las escalas características (L_s, d, β , etc).
- Yendo a las expresiones más fundamentales, también los cálculos de la ecuación de estado realista (es decir, la energía libre \mathcal{F} de un sistema constituido por campos) deberían mejorarse para obtener una correcta dependencia respecto al parámetro de orden a todo rango.

Agradecimientos

Agradezco a las instituciones que han facilitado la realización de Tesis con las becas otorgadas:

- **Beca de Estudio 2011** de la Comisión de Investigaciones Científicas (C.I.C), Provincia de Buenos Aires, para iniciarse en la investigación científica y tecnológica. Abril 2011 - Marzo 2013.
- **Beca de postgrado Tipo II** del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina. Abril 2013 - Marzo 2015.

También agradezco al Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Mar del Plata, por la infraestructura y recursos suministrados. A mi director y demás docentes de la Universidad Nacional de Mar del Plata, por sus aportes a mi formación. Y a mi familia, por ser un punto de apoyo a lo largo de estos años.

Bibliografía

- [1] L. Leitaο and A. Megevand, “Spherical and non-spherical bubbles in cosmological phase transitions”, *Nucl. Phys.*, 2011, **B844**, 450–470.
- [2] L. Leitaο, A. Megevand and A. D. Sanchez, “Gravitational waves from the electroweak phase transition”, *JCAP*, 2012, **1210**, 024.
- [3] L. Leitaο and A. Megevand, “Hydrodynamics of phase transition fronts and the speed of sound in the plasma”, *Nucl. Phys.*, 2015, **B891**, 159–199.
- [4] L. Leitaο and A. Megevand, “Hydrodynamics of ultra-relativistic bubble walls”, *Nucl. Phys.*, 2016, **B905**, 45–72.
- [5] L. Leitaο and A. Megevand, “Gravitational waves from a very strong electroweak phase transition”, *JCAP*, 2016, **1605**, 037.
- [6] M. Kamionkowski, A. Kosowsky and M. S. Turner, “Gravitational radiation from first order phase transitions”, *Phys. Rev.*, 1994, **D49**, 2837–2851.
- [7] R. Apreda, M. Maggiore, A. Nicolis and A. Riotto, “Gravitational waves from electroweak phase transitions”, *Nucl. Phys.*, 2002, **B631**, 342–368.
- [8] A. Nicolis, “Relic gravitational waves from colliding bubbles and cosmic turbulence”, *Class. Quant. Grav.*, 2004, **21**, L27.
- [9] C. Grojean and G. Servant, “Gravitational Waves from Phase Transitions at the Electroweak Scale and Beyond”, *Phys. Rev.*, 2007, **D75**, 043507.
- [10] C. Caprini and R. Durrer, “Gravitational waves from stochastic relativistic sources: Primordial turbulence and magnetic fields”, *Phys. Rev.*, 2006, **D74**, 063521.
- [11] C. Caprini, R. Durrer and G. Servant, “Gravitational wave generation from bubble collisions in first-order phase transitions: An analytic approach”, *Phys. Rev.*, 2008, **D77**, 124015.
- [12] G. Gogoberidze, T. Kahniashvili and A. Kosowsky, “The Spectrum of Gravitational Radiation from Primordial Turbulence”, *Phys. Rev.*, 2007, **D76**, 083002.
- [13] T. Kahniashvili, A. Kosowsky, G. Gogoberidze and Y. Maravin, “Detectability of Gravitational Waves from Phase Transitions”, *Phys. Rev.*, 2008, **D78**, 043003.
- [14] *LISA Gravitational Wave Observatory*, <https://www.elisascience.org/>.
- [15] M. Maggiore, “Gravitational wave experiments and early universe cosmology”, *Phys. Rept.*, 2000, **331**, 283–367.

- [16] P. John and M. G. Schmidt, “Do stops slow down electroweak bubble walls?”, *Nucl. Phys.*, 2001, **B598**, 291–305.
- [17] G. D. Moore, “Electroweak bubble wall friction: Analytic results”, *JHEP*, 2000, **03**, 006.
- [18] A. Megevand and A. D. Sanchez, “Detonations and deflagrations in cosmological phase transitions”, *Nucl. Phys.*, 2009, **B820**, 47–74.
- [19] A. Megevand and A. D. Sanchez, “Velocity of electroweak bubble walls”, *Nucl. Phys.*, 2010, **B825**, 151–176.
- [20] A. Megevand, “Gravitational waves from deflagration bubbles in first-order phase transitions”, *Phys. Rev.*, 2008, **D78**, 084003.
- [21] M. Laine, “Bubble growth as a detonation”, *Phys. Rev.*, 1994, **D49**, 3847–3853.
- [22] J. Ignatius, K. Kajantie, H. Kurki-Suonio and M. Laine, “The growth of bubbles in cosmological phase transitions”, *Phys. Rev.*, 1994, **D49**, 3854–3868.
- [23] H. B. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, Wiley, 1985.
- [24] M. Dine, R. G. Leigh, P. Y. Huet, A. D. Linde and D. A. Linde, “Towards the theory of the electroweak phase transition”, *Phys. Rev.*, 1992, **D46**, 550–571.
- [25] G. W. Anderson and L. J. Hall, “The Electroweak phase transition and baryogenesis”, *Phys. Rev.*, 1992, **D45**, 2685–2698.
- [26] A. Megevand and A. D. Sanchez, “Supercooling and phase coexistence in cosmological phase transitions”, *Phys. Rev.*, 2008, **D77**, 063519.
- [27] E. W. Kolb and M. S. Turner, “The Early Universe”, *Front. Phys.*, 1990, **69**, 1–547.
- [28] M. Quiros, “Field theory at finite temperature and phase transitions”, *Helv. Phys. Acta*, 1994, **67**, 451–583.
- [29] M. Quiros, “Proceedings, Summer School in High-energy physics and cosmology: Trieste, Italy, June 29-July 17, 1998”, 1999, pp. 187–259.
- [30] M. Quiros, “Field Theory at Finite Temperature and Phase Transitions”, *Acta Physica Polonica B*, 2007, **38**, 3661.
- [31] W. Heisenberg and H. Euler, “Consequences of Dirac’s theory of positrons”, *Z. Phys.*, 1936, **98**, 714–732.
- [32] J. S. Schwinger, “On gauge invariance and vacuum polarization”, *Phys. Rev.*, 1951, **82**, 664–679.
- [33] J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, “Broken Symmetries”, *Phys. Rev.*, 1962, **127**, 965–970.

-
- [34] G. Jona-Lasinio, “Relativistic field theories with symmetry breaking solutions”, *Nuovo Cim.*, 1964, **34**, 1790–1795.
- [35] S. R. Coleman and E. J. Weinberg, “Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking”, *Phys. Rev.*, 1973, **D7**, 1888–1910.
- [36] R. Jackiw, “Functional evaluation of the effective potential”, *Phys. Rev.*, 1974, **D9**, 1686.
- [37] J. Iliopoulos, C. Itzykson and A. Martin, “Functional Methods and Perturbation Theory”, *Rev. Mod. Phys.*, 1975, **47**, 165.
- [38] L. Dolan and R. Jackiw, “Symmetry Behavior at Finite Temperature”, *Phys. Rev.*, 1974, **D9**, 3320–3341.
- [39] S. Weinberg, “Gauge and Global Symmetries at High Temperature”, *Phys. Rev.*, 1974, **D9**, 3357–3378.
- [40] R. H. Brandenberger, “Quantum Field Theory Methods and Inflationary Universe Models”, *Rev. Mod. Phys.*, 1985, **57**, 1.
- [41] N. P. Landsman and C. G. van Weert, “Real and Imaginary Time Field Theory at Finite Temperature and Density”, *Phys. Rept.*, 1987, **145**, 141.
- [42] J. I. Kapusta, “*Finite Temperature Field Theory*”, Cambridge University Press, Cambridge, 1989, vol. 360.
- [43] M. L. Bellac, “*Thermal Field Theory*”, Cambridge University Press, 2011.
- [44] K. Huang, *Statistical Mechanics. (Second Edition)*, John Wiley & Sons, 1987.
- [45] K. Huang, *Introduction To Statistical Physics, 2Nd Edition*, T&F/Crc, 2013.
- [46] C. Patrignani *et al.*, “Review of Particle Physics”, *Chin. Phys.*, 2016, **C40**, 100001.
- [47] A. Megevand, “First order cosmological phase transitions in the radiation dominated era”, *Phys. Rev.*, 2004, **D69**, 103521.
- [48] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, “*Gravitation*”, W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [49] R. M. Wald, “*General Relativity*”, 1984.
- [50] S. Weinberg, “*Gravitation and Cosmology*”, John Wiley and Sons, New York, 1972.
- [51] S. Weinberg, “*Cosmology*”, 2008.
- [52] V. Shante and S. Kirkpatrick, “An Introduction to Percolation Theory”, *Adv. Phys.*, 1971, **20**, 325.
- [53] F. K. T. Çelik and H. Satz, “A Percolation Approach to Strongly Interacting Matter”, *Phys. Lett. B*, 1980, **B 97**, 128.

- [54] S. R. Coleman, “The Fate of the False Vacuum. 1. Semiclassical Theory”, *Phys. Rev.*, 1977, **D15**, 2929–2936.
- [55] C. G. Callan, Jr. and S. R. Coleman, “The Fate of the False Vacuum. 2. First Quantum Corrections”, *Phys. Rev.*, 1977, **D16**, 1762–1768.
- [56] I. Affleck, “Quantum-Statistical Metastability”, *Phys. Rev. Lett.*, 1981, **46**, 388–391.
- [57] A. D. Linde, “Decay of the False Vacuum at Finite Temperature”, *Nucl. Phys.*, 1983, **B216**, 421.
- [58] A. D. Linde, “Fate of the False Vacuum at Finite Temperature: Theory and Applications”, *Phys. Lett.*, 1981, **B100**, 37–40.
- [59] J. R. Espinosa, T. Konstandin, J. M. No and M. Quiros, “Some Cosmological Implications of Hidden Sectors”, *Phys. Rev.*, 2008, **D78**, 123528.
- [60] A. H. Guth and E. J. Weinberg, “Cosmological Consequences of a First Order Phase Transition in the SU(5) Grand Unified Model”, *Phys. Rev.*, 1981, **D23**, 876.
- [61] A. Kosowsky, M. S. Turner and R. Watkins, “Gravitational radiation from colliding vacuum bubbles”, *Phys. Rev.*, 1992, **D45**, 4514–4535.
- [62] A. Kosowsky and M. S. Turner, “Gravitational radiation from colliding vacuum bubbles: envelope approximation to many bubble collisions”, *Phys. Rev.*, 1993, **D47**, 4372–4391.
- [63] A. D. Unánue, “Revisión de la teoría de perturbaciones en Relatividad General”, *Revista mexicana de física*, 2011, **57**, 276 – 303.
- [64] R. A. Isaacson, “Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. I. The Linear Approximation and Geometrical Optics”, *Phys. Rev.*, 1967, **166**, 1263–1271.
- [65] R. A. Isaacson, “Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. II. Nonlinear Terms and the Effective Stress Tensor”, *Phys. Rev.*, 1968, **166**, 1272–1279.
- [66] M. Maggiore, “*Gravitational Waves. Vol. 1: Theory and Experiments*”, Oxford University Press, 2007.
- [67] P. Binetruy, A. Bohe, C. Caprini and J.-F. Dufaux, “Cosmological Backgrounds of Gravitational Waves and eLISA/NGO: Phase Transitions, Cosmic Strings and Other Sources”, *JCAP*, 2012, **1206**, 027.
- [68] C. Caprini, R. Durrer and G. Servant, “The stochastic gravitational wave background from turbulence and magnetic fields generated by a first-order phase transition”, *JCAP*, 2009, **0912**, 024.
- [69] K. Nakamura *et al.*, “Review of particle physics”, *J. Phys.*, 2010 and 2011 partial update for the 2012 edition, **G37**, 075021.

- [70] P. Amaro-Seoane *et al.*, “Low-frequency gravitational-wave science with eLISA/NGO”, *Class. Quant. Grav.*, 2012, **29**, 124016.
- [71] P. Amaro-Seoane *et al.*, “eLISA/NGO: Astrophysics and cosmology in the gravitational-wave millihertz regime”, *GW Notes*, 2013, **6**, 4–110.
- [72] P. A. Seoane *et al.*, “The Gravitational Universe”, 2013.
- [73] S. L. Larson, W. A. Hiscock and R. W. Hellings, “Sensitivity curves for spaceborne gravitational wave interferometers”, *Phys. Rev.*, 2000, **D62**, 062001.
- [74] K. Danzmann and A. Rudiger, “LISA technology - Concept, status, prospects”, *Class. Quant. Grav.*, 2003, **20**, S1–S9.
- [75] V. Corbin and N. J. Cornish, “Detecting the cosmic gravitational wave background with the big bang observer”, *Class. Quant. Grav.*, 2006, **23**, 2435–2446.
- [76] C. Ungarelli, P. Corasaniti, R. A. Mercer and A. Vecchio, “Gravitational waves, inflation and the cosmic microwave background: Towards testing the slow-roll paradigm”, *Class. Quant. Grav.*, 2005, **22**, S955–S964.
- [77] C. Cutler and J. Harms, “BBO and the neutron-star-binary subtraction problem”, *Phys. Rev.*, 2006, **D73**, 042001.
- [78] G. M. Harry, P. Fritschel, D. A. Shaddock, W. Folkner and E. S. Phinney, “Laser interferometry for the big bang observer”, *Class. Quant. Grav.*, 2006, **23**, 4887–4894.
- [79] N. Seto, S. Kawamura and T. Nakamura, “Possibility of direct measurement of the acceleration of the universe using 0.1-Hz band laser interferometer gravitational wave antenna in space”, *Phys. Rev. Lett.*, 2001, **87**, 221103.
- [80] S. Kawamura *et al.*, “The Japanese space gravitational wave antenna DECIGO”, *Class. Quant. Grav.*, 2006, **23**, S125–S132.
- [81] T. L. Smith, M. Kamionkowski and A. Cooray, “Direct detection of the inflationary gravitational wave background”, *Phys. Rev.*, 2006, **D73**, 023504.
- [82] A. Buonanno, G. Sigl, G. G. Raffelt, H.-T. Janka and E. Muller, “Stochastic gravitational wave background from cosmological supernovae”, *Phys. Rev.*, 2005, **D72**, 084001.
- [83] A. Cooray, “Primordial gravitational waves and inflation: CMB and direct detection with space-based laser interferometers”, *Mod. Phys. Lett.*, 2005, **A20**, 2503–2519.
- [84] C. Caprini *et al.*, “Science with the space-based interferometer eLISA. II: Gravitational waves from cosmological phase transitions”, *JCAP*, 2016, **1604**, 001.
- [85] A. Petiteau, *Data sheet by A. Petiteau*, “<http://www.apc.univ-paris7.fr/Downloads/lisa/eLISA/Sensitivity/Cfgv1/StochBkgd/>”, 2015–2016.
- [86] A. Klein *et al.*, “Science with the space-based interferometer eLISA: Supermassive black hole binaries”, *Phys. Rev.*, 2016, **D93**, 024003.

-
- [87] A. Kosowsky, M. S. Turner and R. Watkins, “Gravitational waves from first order cosmological phase transitions”, *Phys. Rev. Lett.*, 1992, **69**, 2026–2029.
- [88] S. J. Huber and T. Konstandin, “Gravitational Wave Production by Collisions: More Bubbles”, *JCAP*, 2008, **0809**, 022.
- [89] C. Caprini, R. Durrer and X. Siemens, “Detection of gravitational waves from the QCD phase transition with pulsar timing arrays”, *Phys. Rev.*, 2010, **D82**, 063511.
- [90] M. Hindmarsh, S. J. Huber, K. Rummukainen and D. J. Weir, “Gravitational waves from the sound of a first order phase transition”, *Phys. Rev. Lett.*, 2014, **112**, 041301.
- [91] M. Hindmarsh, S. J. Huber, K. Rummukainen and D. J. Weir, “Numerical simulations of acoustically generated gravitational waves at a first order phase transition”, *Phys. Rev.*, 2015, **D92**, 123009.
- [92] L. Landau and E. Lifshitz, “*Fluid Dynamics*”, Pergamon Press, New York, 1989.
- [93] R. Courant and K. Friedrichs, “*Supersonic Flow and Shock Waves*”, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [94] G. D. Moore and T. Prokopec, “How fast can the wall move? A Study of the electroweak phase transition dynamics”, *Phys. Rev.*, 1995, **D52**, 7182–7204.
- [95] G. D. Moore and T. Prokopec, “Bubble wall velocity in a first order electroweak phase transition”, *Phys. Rev. Lett.*, 1995, **75**, 777–780.
- [96] A. Megevand and F. A. Membiela, “Stability of cosmological detonation fronts”, *Phys. Rev.*, 2014, **D89**, 103503.
- [97] T. Konstandin and J. M. No, “Hydrodynamic obstruction to bubble expansion”, *JCAP*, 2011, **1102**, 008.
- [98] A. Megevand, “Effect of reheating on electroweak baryogenesis”, *Phys. Rev.*, 2001, **D64**, 027303.
- [99] B. Link, “Deflagration instability in the quark - hadron phase transition”, *Phys. Rev. Lett.*, 1992, **68**, 2425–2428.
- [100] P. Y. Huet, K. Kajantie, R. G. Leigh, B.-H. Liu and L. D. McLerran, “Hydrodynamic stability analysis of burning bubbles in electroweak theory and in QCD”, *Phys. Rev.*, 1993, **D48**, 2477–2492.
- [101] M. Abney, “Hydrodynamic detonation instability in electroweak and QCD phase transitions”, *Phys. Rev.*, 1994, **D49**, 1777–1782.
- [102] L. Rezzolla, “Stability of cosmological detonation front”, *Phys. Rev.*, 1996, **D54**, 1345–1358.
- [103] A. Megevand, F. A. Membiela and A. D. Sanchez, “Lower bound on the electroweak wall velocity from hydrodynamic instability”, *JCAP*, 2015, **1503**, 051.

- [104] A. Megevand and F. A. Membiela, “Stability of cosmological deflagration fronts”, *Phys. Rev.*, 2014, **D89**, 103507.
- [105] D. Bodeker and G. D. Moore, “Can electroweak bubble walls run away?”, *JCAP*, 2009, **0905**, 009.
- [106] B.-H. Liu, L. D. McLerran and N. Turok, “Bubble nucleation and growth at a baryon number producing electroweak phase transition”, *Phys. Rev.*, 1992, **D46**, 2668–2688.
- [107] N. Turok, “Electroweak bubbles: Nucleation and growth”, *Phys. Rev. Lett.*, 1992, **68**, 1803–1806.
- [108] S. Yu. Khlebnikov, “Fluctuation - dissipation formula for bubble wall velocity”, *Phys. Rev.*, 1992, **D46**, R3223–R3226.
- [109] P. B. Arnold, “One loop fluctuation - dissipation formula for bubble wall velocity”, *Phys. Rev.*, 1993, **D48**, 1539–1545.
- [110] G. D. Moore and N. Turok, “Classical field dynamics of the electroweak phase transition”, *Phys. Rev.*, 1997, **D55**, 6538–6560.
- [111] T. Konstandin, G. Nardini and I. Rues, “From Boltzmann equations to steady wall velocities”, *JCAP*, 2014, **1409**, 028.
- [112] J. R. Espinosa, T. Konstandin, J. M. No and G. Servant, “Energy Budget of Cosmological First-order Phase Transitions”, *JCAP*, 2010, **1006**, 028.
- [113] A. Mégevand, “Friction forces on phase transition fronts”, *JCAP*, 2013, **1307**, 045.
- [114] H. Kurki-Suonio, “Deflagration Bubbles in the Quark - Hadron Phase Transition”, *Nucl. Phys.*, 1985, **B255**, 231–252.
- [115] K. Kajantie and H. Kurki-Suonio, “Bubble Growth and Droplet Decay in the Quark Hadron Phase Transition in the Early Universe”, *Phys. Rev.*, 1986, **D34**, 1719–1738.
- [116] M. Gyulassy, K. Kajantie, H. Kurki-Suonio and L. D. McLerran, “Deflagrations and Detonations as a Mechanism of Hadron Bubble Growth in Supercooled Quark Gluon Plasma”, *Nucl. Phys.*, 1984, **B237**, 477–501.
- [117] T. A. DeGrand and K. Kajantie, “Supercooling, Entropy Production and Bubble Kinetics in the Quark - Hadron Phase Transition in the Early Universe”, *Phys. Lett.*, 1984, **B147**, 273–278.
- [118] P. J. Steinhardt, “Relativistic Detonation Waves and Bubble Growth in False Vacuum Decay”, *Phys. Rev.*, 1982, **D25**, 2074.
- [119] H. Kurki-Suonio and M. Laine, “Supersonic deflagrations in cosmological phase transitions”, *Phys. Rev.*, 1995, **D51**, 5431–5437.
- [120] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn and V. F. Weisskopf, “A New Extended Model of Hadrons”, *Phys. Rev.*, 1974, **D9**, 3471–3495.

- [121] Y. Aoki, G. Endrodi, Z. Fodor, S. D. Katz and K. K. Szabo, “The Order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics”, *Nature*, 2006, **443**, 675–678.
- [122] A. Megevand and A. D. Sanchez, “Analytic approach to the motion of cosmological phase transition fronts”, *Nucl. Phys.*, 2012, **B865**, 217–237.
- [123] A. Kosowsky, A. Mack and T. Kahniashvili, “Gravitational radiation from cosmological turbulence”, *Phys. Rev.*, 2002, **D66**, 024030.
- [124] A. F. Heckler, “The Effects of electroweak phase transition dynamics on baryogenesis and primordial nucleosynthesis”, *Phys. Rev.*, 1995, **D51**, 405–428.
- [125] A. Megevand, “Development of the electroweak phase transition and baryogenesis”, *Int. J. Mod. Phys.*, 2000, **D9**, 733–756.
- [126] M. Carena, A. Megevand, M. Quiros and C. E. M. Wagner, “Electroweak baryogenesis and new TeV fermions”, *Nucl. Phys.*, 2005, **B716**, 319–351.
- [127] P. M. Hohler and M. A. Stephanov, “Holography and the speed of sound at high temperatures”, *Phys. Rev.*, 2009, **D80**, 066002.
- [128] A. Cherman, T. D. Cohen and A. Nellore, “A Bound on the speed of sound from holography”, *Phys. Rev.*, 2009, **D80**, 066003.
- [129] P. Bedaque and A. W. Steiner, “Sound velocity bound and neutron stars”, *Phys. Rev. Lett.*, 2015, **114**, 031103.
- [130] J. Kozaczuk, S. Profumo, L. S. Haskins and C. L. Wainwright, “Cosmological Phase Transitions and their Properties in the NMSSM”, *JHEP*, 2015, **01**, 144.
- [131] I. Gradshteyn and I. Ryzhik, “*Table of Integrals, Series and Products, Corrected and Enlarged Edition*”, Academic Press, 2000.
- [132] S. J. Huber and T. Konstandin, “Production of gravitational waves in the nMSSM”, *JCAP*, 2008, **0805**, 017.
- [133] M. Dine, P. Huet, R. L. Singleton, Jr and L. Susskind, “Creating the baryon asymmetry at the electroweak phase transition”, *Phys. Lett.*, 1991, **B257**, 351–356.
- [134] M. Dine, P. Huet and R. L. Singleton, Jr., “Baryogenesis at the electroweak scale”, *Nucl. Phys.*, 1992, **B375**, 625–648.
- [135] J. Choi and R. R. Volkas, “Real Higgs singlet and the electroweak phase transition in the Standard Model”, *Phys. Lett.*, 1993, **B317**, 385–391.
- [136] S. W. Ham, Y. S. Jeong and S. K. Oh, “Electroweak phase transition in an extension of the standard model with a real Higgs singlet”, *J. Phys.*, 2005, **G31**, 857–871.
- [137] J. R. Espinosa and M. Quiros, “The Electroweak phase transition with a singlet”, *Phys. Lett.*, 1993, **B305**, 98–105.

- [138] A. Ahriche, “What is the criterion for a strong first order electroweak phase transition in singlet models?”, *Phys. Rev.*, 2007, **D75**, 083522.
- [139] S. Profumo, M. J. Ramsey-Musolf and G. Shaughnessy, “Singlet Higgs phenomenology and the electroweak phase transition”, *JHEP*, 2007, **08**, 010.
- [140] A. Ashoorioon and T. Konstandin, “Strong electroweak phase transitions without collider traces”, *JHEP*, 2009, **07**, 086.
- [141] J. R. Espinosa and M. Quiros, “Novel Effects in Electroweak Breaking from a Hidden Sector”, *Phys. Rev.*, 2007, **D76**, 076004.
- [142] M. Carena, M. Quiros and C. E. M. Wagner, “Electroweak baryogenesis and Higgs and stop searches at LEP and the Tevatron”, *Nucl. Phys.*, 1998, **B524**, 3–22.
- [143] M. Carena, M. Quiros and C. E. M. Wagner, Opening the window for electroweak baryogenesis, *Phys. Lett.*, 1996, **B380**, 81–91.
- [144] M. Carena and C. E. M. Wagner, “Higgs and supersymmetric particle signals at the infrared fixed point of the top quark mass”, *Nucl. Phys.*, 1995, **B452**, 45–79.
- [145] J. R. Espinosa, “Dominant two loop corrections to the MSSM finite temperature effective potential”, *Nucl. Phys.*, 1996, **B475**, 273–292.
- [146] J. E. Bagnasco and M. Dine, “Some two loop corrections to the finite temperature effective potential in the electroweak theory”, *Phys. Lett.*, 1993, **B303**, 308–314.
- [147] P. B. Arnold and O. Espinosa, “The Effective potential and first order phase transitions: Beyond leading-order”, *Phys. Rev.*, 1993, **D47**, 3546.
- [148] Z. Fodor and A. Hebecker, “Finite temperature effective potential to order g^{*4} , λ^{*2} and the electroweak phase transition”, *Nucl. Phys.*, 1994, **B432**, 127–146.
- [149] M. Pietroni, “The Electroweak phase transition in a nonminimal supersymmetric model”, *Nucl. Phys.*, 1993, **B402**, 27–45.
- [150] A. T. Davies, C. D. Froggatt and R. G. Moorhouse, “Electroweak baryogenesis in the next-to-minimal supersymmetric model”, *Phys. Lett.*, 1996, **B372**, 88–94.
- [151] S. J. Huber and M. G. Schmidt, “Electroweak baryogenesis: Concrete in a SUSY model with a gauge singlet”, *Nucl. Phys.*, 2001, **B606**, 183–230.
- [152] A. E. Nelson, D. B. Kaplan and A. G. Cohen, “Why there is something rather than nothing: Matter from weak interactions”, *Nucl. Phys.*, 1992, **B373**, 453–478.
- [153] J. M. Cline and K. Kainulainen, “A New source for electroweak baryogenesis in the MSSM”, *Phys. Rev. Lett.*, 2000, **85**, 5519–5522.
- [154] J. M. Cline, M. Joyce and K. Kainulainen, “Supersymmetric electroweak baryogenesis”, *JHEP*, 2000, **07**, 018.

-
- [155] M. Carena, J. M. Moreno, M. Quiros, M. Seco and C. E. M. Wagner, “Supersymmetric CP violating currents and electroweak baryogenesis”, *Nucl. Phys.*, 2001, **B599**, 158–184.
- [156] P. L. Bender and D. Hils, “Confusion noise level due to galactic and extragalactic binaries”, *Class. Quant. Grav.*, 1997, **14**, 1439–1444.
- [157] W. A. Hiscock, S. L. Larson, J. R. Routzahn and B. Kulick, “Low frequency gravitational waves from white dwarf MACHO binaries”, *Astrophys. J.*, 2000, **540**, L5–L8.
- [158] C. Delaunay, C. Grojean and J. D. Wells, “Dynamics of Non-renormalizable Electroweak Symmetry Breaking”, *JHEP*, 2008, **04**, 029.
- [159] D. J. H. Chung, A. J. Long and L.-T. Wang, “125 GeV Higgs boson and electroweak phase transition model classes”, *Phys. Rev.*, 2013, **D87**, 023509.