



FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO  
MATEMÁTICAS Y NATURALES

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN LUIS  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS Y NATURALES  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

TESIS DE DOCTORADO

MÉTODOS CATEGÓRICOS Y COMBINATORIOS EN TEORÍA  
DE HOMOTOPÍA DE ESPACIOS TOPOLÓGICOS FINITOS

NICOLÁS EMANUEL CIANCI  
2021

DR. ENZO MIGUEL OTTINA  
DIRECTOR

DR. JUAN CARLOS CESCO  
CODIRECTOR





MÉTODOS CATEGÓRICOS Y COMBINATORIOS EN TEORÍA  
DE HOMOTOPÍA DE ESPACIOS TOPOLÓGICOS FINITOS

NICOLÁS EMANUEL CIANCI



*A Abi y Kiara*



# Índice

<b>Resumen</b>	<b>ix</b>
<b>Introducción</b>	<b>xi</b>
Objetivos y desarrollo del trabajo . . . . .	xiii
Organización de la Tesis y resultados principales . . . . .	xv
<b>1 Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 Categorías y métodos simpliciales . . . . .	1
1.1.1 Categorías . . . . .	1
1.1.2 Las categorías <b>Top</b> y <b>Top/B</b> . . . . .	5
1.1.3 Nervio, realización geométrica y espacio clasificante . . . . .	8
1.1.4 Fibraciones de Grothendieck . . . . .	13
1.1.5 Propiedades de levantamiento . . . . .	18
1.2 Espacios Topológicos Finitos . . . . .	22
1.2.1 Espacios de Alexandroff y conjuntos preordenados . . . . .	23
1.2.2 Algunas construcciones asociadas a espacios finitos . . . . .	26
1.2.3 Conexión y arcoconexión de $A$ -espacios . . . . .	27
1.2.4 Espacios de funciones entre espacios topológicos finitos . . . . .	28
1.2.5 Tipos de homotopía de espacios topológicos finitos . . . . .	30
1.2.6 Tipos de homotopía débil de espacios topológicos finitos . . . . .	34
1.2.7 Homología de $A$ -espacios . . . . .	45
1.3 Nociones clásicas de teoría de homotopía . . . . .	46
1.3.1 Cofibraciones . . . . .	47
1.3.2 Fibraciones de Hurewicz . . . . .	51
1.3.3 Fibrados . . . . .	56
1.3.4 Revestimientos . . . . .	59
<b>2 Problemas de minimalidad</b>	<b>65</b>
2.1 Introducción . . . . .	65
2.2 Resultados básicos . . . . .	67
2.3 Revestimientos y grupo fundamental de $A$ -espacios . . . . .	68
2.3.1 Localización y grupoides . . . . .	68
2.3.2 Grupo fundamental de categorías pequeñas . . . . .	71
2.3.3 Aplicaciones a revestimientos de $A$ -espacios . . . . .	76
2.4 Splitting de posets . . . . .	82



## Índice

---

2.4.1	Tríadas split . . . . .	82
2.4.2	Propiedades (S1) y (S2) . . . . .	88
2.4.3	Notación y definiciones preliminares . . . . .	92
2.5	Modelos minimales del plano proyectivo . . . . .	93
2.6	Modelos minimales del toro y de la botella de Klein . . . . .	100
2.7	Otros problemas de minimalidad . . . . .	112
2.7.1	Espacios con torsión en homología de cardinalidad mínima . . . . .	112
2.7.2	Espacios minimales débilmente contráctiles no contráctiles . . . . .	114
<b>3</b>	<b>Cofibraciones entre espacios finitos</b>	<b>123</b>
3.1	Introducción . . . . .	123
3.2	Bp-retractos de espacios topológicos finitos $T_0$ . . . . .	123
3.3	Caracterización de cofibraciones entre espacios finitos . . . . .	128
<b>4</b>	<b>Fibrados sobre espacios de Alexandroff</b>	<b>135</b>
4.1	Introducción . . . . .	135
4.2	Construcción de Grothendieck topológica . . . . .	135
4.3	Caracterización de fibrados . . . . .	138
4.4	Otras propiedades . . . . .	145
4.5	Los fibrados sobre A-espacios con fibra $T_0$ son fibraciones . . . . .	148
<b>5</b>	<b>Fibraciones entre espacios finitos</b>	<b>157</b>
5.1	Introducción . . . . .	157
5.2	Resultados preliminares . . . . .	157
5.3	Beat points y bp-retractos en $\mathbf{FinTop}_0/B$ . . . . .	159
5.4	Fibraciones y beat points . . . . .	164
5.5	Fibraciones de Hurewicz y fibraciones de Grothendieck . . . . .	170
5.6	Ejemplos . . . . .	183
5.6.1	Fibración de Hurewicz que no es cerrada . . . . .	183
5.6.2	Fibración de Serre que no es fibración de Hurewicz . . . . .	184
5.6.3	Bifibración de Grothendieck que no es retracto de un fibrado . . . . .	185
	<b>Bibliografía</b>	<b>193</b>

# Métodos categóricos y combinatorios en teoría de homotopía de espacios topológicos finitos

## Resumen

El propósito principal de esta tesis es el de profundizar el estudio de la teoría de homotopía en el contexto de los espacios topológicos finitos utilizando tanto resultados clásicos de la teoría de categorías como resultados combinatorios existentes o creados específicamente para tal fin.

Es sabido que los tipos homotópicos débiles de los espacios topológicos finitos coinciden con los de los CW-complejos compactos. Así, para todo espacio  $X$  que tenga estructura de CW-complejo compacto existen espacios topológicos finitos débilmente equivalentes a  $X$  llamados *modelos finitos*. Un problema natural que surge de este hecho es el denominado *problema de minimalidad de modelos finitos* que consiste en determinar los modelos finitos *minimales* de un CW-complejo compacto dado, esto es, los modelos finitos del complejo que tienen la menor cardinalidad posible. En este trabajo, estudiamos los modelos finitos minimales del plano proyectivo, del toro y de la botella de Klein. En particular, probamos la minimalidad de modelos finitos conocidos de estos espacios y caracterizamos explícitamente todos los modelos finitos minimales de los mismos, respondiendo preguntas abiertas de J. P. May y J. Barmak. Más aún, caracterizamos los espacios topológicos débilmente contráctiles no contráctiles de menor cardinalidad y probamos una conjetura de K. A. Hardie, J. J. C. Vermeulen y P. J. Witbooi sobre la minimalidad de un espacio con elementos de torsión en alguno de sus grupos de homología con coeficientes enteros.

Dada la naturaleza combinatoria de los espacios topológicos finitos y su relación con los tipos de homotopía débil de CW-complejos, resulta esperable y deseable obtener caracterizaciones combinatorias de nociones clásicas de teoría de homotopía en el contexto finito.

En este trabajo, damos una caracterización de las *cofibraciones de Hurewicz* entre espacios topológicos finitos y desarrollamos, utilizando dicha caracterización, un algoritmo capaz de determinar de manera eficiente si una función dada entre espacios topológicos finitos es o no una cofibración.

Por otro lado, definimos y estudiamos una construcción topológica análoga a la denominada *construcción de Grothendieck* en teoría de categorías, y utilizamos esta construcción para clasificar los fibrados sobre espacios de Alexandroff con fibra  $T_0$ . Adicionalmente, utilizamos la clasificación obtenida para probar que tales fibrados son fibraciones de Hurewicz.

Finalmente, estudiamos *fibraciones de Hurewicz* entre espacios topológicos finitos  $T_0$ , obteniendo numerosos resultados combinatorios sobre la estructura de las mismas. Uno de estos resultados establece una fuerte relación entre fibraciones de Hurewicz en la categoría de espacios topológicos finitos  $T_0$  y *bifibraciones de Grothendieck* en la categoría de posets finitos. Esta relación caracteriza, bajo ciertas condiciones del espacio base, a las fibraciones de Hurewicz entre espacios finitos  $T_0$  sobre dicho espacio.

## Resumen

---

**Palabras clave:** Espacio topológico finito, Categoría, Modelo finito minimal, Construcción de Grothendieck, Fibrado, Fibración de Hurewicz, Cofibración de Hurewicz.

# Introducción

Desde que se origina el concepto actual de *espacio topológico*<sup>1</sup> como generalización de otras nociones de *espacio* más cercanas a la geometría, se hace evidente que se pueden estudiar conceptos geométricos como los de *proximidad*, *límite* y *frontera* en estructuras finitas, algo que, en el contexto clásico, había carecido en gran medida de interés.

El estudio de propiedades topológicas en espacios finitos, sin embargo, no surgió de forma inmediata. El que puede considerarse como el primer trabajo sobre espacios topológicos finitos fue el artículo [3] de P. S. Alexandroff, en que se establece una correspondencia biunívoca entre *espacios de Alexandroff* y *conjuntos preordenados*. Dado que los espacios topológicos finitos son trivialmente espacios de Alexandroff, esta correspondencia permite estudiar a los espacios topológicos finitos como conjuntos finitos preordenados, estructuras de gran interés en el área de la combinatoria.

En el año 1966 se publicaron dos artículos que hoy se consideran fundacionales en la teoría de homotopía de espacios finitos. En [68], R. Stong clasifica los tipos de homotopía de espacios finitos, construyendo una forma canónica denominada *core* para el tipo de homotopía de un espacio finito y demostrando que la misma está bien definida salvo homeomorfismo. El trabajo de Stong goza de una doble naturaleza topológico - combinatoria: el core de un espacio topológico finito se obtiene algorítmicamente mediante aplicaciones sucesivas de un tipo de movimiento que preserva el tipo homotópico del espacio reduciendo la cantidad de puntos del mismo. Este es un primer –importante– ejemplo en que se hace evidente la posibilidad de explotar los aspectos combinatorios de los espacios finitos para el estudio de las propiedades topológicas de los mismos.

Por su parte, M. McCord demuestra en [51] que todo espacio topológico finito tiene el tipo de homotopía débil de un poliedro finito y que todo poliedro finito tiene el tipo de homotopía débil de un espacio topológico finito. Se deduce del trabajo de McCord que todo CW-complejo compacto admite lo que se denomina un *modelo finito*, es decir, un espacio topológico finito que es débilmente equivalente a dicho CW-complejo. En particular, el problema de determinar los grupos de homotopía y de homología de un espacio finito es al menos tan interesante como el de determinar los grupos de homotopía y homología de un CW-complejo compacto.

En el año 2003, J. P. May recopila en [48, 49, 47] los resultados conocidos de la teoría de espacios topológicos finitos con la intención de dictar un curso sobre un tema “genuinamente fascinante, genuinamente profundo, y genuinamente accesible, con muchos problemas abiertos” [50] en la REU de la Universidad de Chicago.

---

<sup>1</sup>La definición actual de *espacio topológico* es atribuida a C. Kuratowski, quien axiomatiza en su artículo [44] de 1922 lo que se conoce hoy como *operador de clausura*.

El trabajo de May inspiró a otros investigadores y alumnos a realizar sus propios aportes a la teoría de espacios finitos. Los trabajos de G. Minian, J. Barmak y otros investigadores de la Universidad de Buenos Aires pusieron de manifiesto que existe una fructífera interacción entre la teoría de homotopía de espacios finitos y distintas ramas de la topología algebraica y combinatoria, que había sido ya notada y mencionada por May en [47]. En particular, se logran aplicaciones de la teoría de espacios finitos a la teoría de homotopía simple de poliedros [9], al estudio de propiedades de punto fijo en tipos de homotopía débil [6], a la conjetura de asfericidad de Whitehead [18], a la conjetura de Andrews-Curtis [5], a la conjetura de Quillen sobre el poset de  $p$ -subgrupos de un grupo [5, 54], a una generalización de la conjetura de Webb [57], a la teoría de colímites homotópicos [29, 30] y al desarrollo de diversas teorías como la teoría de homotopía fuerte de complejos simpliciales [10], la teoría de Morse discreta para posets [53, 20] y la teoría de CW-complejos  $h$ -regulares [8].

Paralelamente, y como es natural, el estudio de la teoría de espacios topológicos finitos dio lugar al surgimiento de problemas y desarrollos propios de este campo, como el estudio de modelos finitos [7, 38, 39], de métodos de reducción de espacios finitos [5, 56], y el cálculo de homología [53, 20], de *categoría de Lusternik-Schnirelmann* [32] y de *complejidad topológica* de espacios finitos [72, 31].

Una alternativa al estudio teórico de propiedades homotópicas de los espacios finitos es el estudio de sus propiedades combinatorias por el método de fuerza bruta, posible gracias a la implementación del uso de computadoras en el análisis de la estructura de conjuntos parcialmente ordenados de cardinalidad baja [14, 1]. Tal alternativa pone en evidencia la carencia de herramientas topológicas y combinatorias capaces de dar cuenta de la estructura de los espacios topológicos finitos por medios analíticos.

A pesar de los avances mencionados, y de otros trabajos específicos en teoría de homotopía de espacios finitos, localmente finitos y de Alexandroff [77, 61], esta disciplina aún se encuentra relativamente inexplorada, al menos en comparación con otras ramas de la topología algebraica más relacionadas a la geometría y al álgebra. Esto hace de la misma un terreno extremadamente fértil a la hora de estudiar de manera sistemática las nociones clásicas que han ocupado a la topología algebraica desde sus comienzos hasta la actualidad. Sin embargo, este hecho no impide, como hemos mencionado, que surjan problemas y resultados interesantes dentro de la misma teoría de espacios finitos, dignos de ser resueltos y, posiblemente, relacionados con problemas y resultados de otras especialidades.

En este trabajo, hemos estudiado dos grandes problemas propios de la teoría de espacios topológicos finitos, que a primera vista no parecen estar más relacionados entre sí que por el hecho de pertenecer a la misma disciplina: la minimalidad de *modelos finitos* y la caracterización combinatoria de nociones clásicas de teoría de homotopía en el contexto de los espacios finitos. Como el título de esta Tesis sugiere, sin embargo, la perspectiva categórica y combinatoria desde la cual hemos abordado estos problemas nos permite ubicar ambos desarrollos bajo un mismo marco unificador. Así, este trabajo no debe ser considerado como una mera compilación de problemas dispares dentro de una misma disciplina, sino como una apología, tanto del desarrollo de herramientas combinatorias *ad hoc* como del uso de resultados propios de la teoría de categorías, como método general de abordaje de los mismos, y quizás, de muchos otros.

---

## Objetivos y desarrollo del trabajo

El propósito original de este trabajo consistió en estudiar la posibilidad de desarrollar herramientas que permitieran aprovechar la fuerte estructura combinatoria de los espacios topológicos finitos para obtener información sobre sus invariantes homotópicos débiles a partir de otros espacios, en especial de sus subespacios y cocientes. Desde luego, pueden aplicarse teoremas clásicos en teoría de homotopía a espacios finitos, como el Teorema de Van Kampen, la sucesión de Mayer-Vietoris para homología singular, o el Teorema de Escisión Homotópica. El inconveniente principal de este acercamiento es que un espacio finito podría no tener subespacios adecuados para obtener información de interés a partir de estos resultados.

Hemos seguido principalmente dos líneas de trabajo. La primera consistió en estudiar lo que E. G. Minian y J. A. Barmak denominaron *G-colorings admisibles* de posets, que son funtores desde un poset  $X$  en un grupo  $G$ , ambos considerados como categorías de la manera usual. En [11], los autores utilizan *G-colorings* para estudiar el grupo fundamental y los revestimientos de un espacio finito  $T_0$ , entre otros temas, obteniendo caracterizaciones combinatorias de los revestimientos regulares de dicho espacio, y aplican estos resultados al cálculo del segundo grupo de homotopía de algunos espacios finitos.

Si bien los espacios finitos alcanzan a modelar, a través de equivalencias débiles, a los CW-complejos compactos, no es cierto en general que las funciones continuas entre dos modelos finitos fijos de CW-complejos compactos alcancen a inducir, entre sus grupos de homotopía, todos los posibles morfismos de grupos que pueden inducir las funciones continuas entre dichos complejos. La situación mejora cuando se consideran *modelos categóricos* y se incorpora el estudio del funtor *espacio clasificante*. Dado que los modelos finitos pueden considerarse, en particular, modelos categóricos, estaríamos ampliando nuestra colección de modelos con el fin de estudiar un conjunto más amplio de morfismos inducidos entre grupos de homotopía.

Nuestros resultados muestran que si  $X$  es un espacio finito, o más generalmente, un espacio de Alexandroff, los morfismos de grupos entre el grupo fundamental de  $X$  (para cualquier punto base) y un grupo  $G$  pueden realizarse, a través del funtor espacio clasificante, como funtores de  $X$  en  $G$ . Más aún, las *fibras homotópicas* de estos funtores son precisamente los revestimientos regulares de  $X$  que corresponden al núcleo del morfismo inducido entre los grupos fundamentales. Este resultado nos permitió estudiar los revestimientos regulares, así como el grupoide fundamental, de espacios de Alexandroff a través de métodos combinatorios.

Cabe destacar que un grupo  $G$ , considerado como un grupoide con un único objeto, es un modelo categórico del espacio de Eilenberg-MacLane de tipo  $(G, 1)$ . Se sigue que los funtores de  $X$  en  $G$  inducen morfismos triviales en los grupos de homotopía de orden mayor o igual a dos. En particular, no puede obtenerse información sobre los grupos de homotopía altos de un espacio de Alexandroff  $X$  a partir de estos funtores, salvo que puedan realizarse cálculos explícitos de los grupos de homotopía de sus revestimientos por métodos alternativos. Esto sugiere fuertemente que para generalizar los resultados de *G-colorings* a grupos de homotopía altos, sería necesario considerar modelos categóricos adecuados, con propiedades combinatorias excepcionales, de espacios con grupos de homotopía conocidos. Desconocemos si existen modelos categóricos que permitan esta generali-

zación. La opinión del autor es que el contexto más adecuado para una tal generalización es la *teoría de categorías superiores*; se advierte, sin embargo, que los posets y espacios de Alexandroff podrían no ser relevantes en este contexto.

Utilizando resultados combinatorios de la teoría de espacios finitos en conjunción con los resultados sobre revestimientos y grupo fundamental mencionados anteriormente, hemos desarrollado una técnica denominada *splitting de posets*. La misma nos permitió obtener distintos teoremas capaces de determinar información de un espacio finito  $T_0$   $X$  a partir de dos subespacios  $C$  y  $D$  que cubren a  $X$ , bajo ciertas condiciones. Cabe destacar que estas condiciones sobre los espacios  $C$  y  $D$  suelen encontrarse con frecuencia en espacios con pocos elementos y pueden, en muchos casos, ser verificadas a partir del diagrama de Hasse de  $X$ . Estas características nos permitieron utilizar estos teoremas para estudiar *problemas de minimalidad de modelos finitos* logrando resolver varios problemas que se encontraban abiertos así como otros que habían sido resueltos con asistencia de ordenadores.

La segunda línea de trabajo consistió en estudiar, en el contexto de los espacios topológicos finitos, algunas nociones importantes de teoría de homotopía que en el contexto clásico permiten cálculos explícitos de grupos de homotopía de espacios topológicos a partir de otros espacios como subespacios y cocientes. Estas son las fibraciones y cofibraciones de Hurewicz.

Un ejercicio clásico en la teoría de las cofibraciones consiste en demostrar que la inclusión del único abierto no trivial en el espacio de Sierpinski es una cofibración [75, Ejercicio 4, Sección 5.4]. En cambio, la inclusión del único cerrado no trivial en el mismo espacio no lo es. Esta situación sugiere que la teoría de cofibraciones entre espacios finitos no es en absoluto trivial y merece ser estudiada con detenimiento. Por otro lado, dada una función  $f: X \rightarrow Y$  entre espacios finitos  $T_0$ , existe un espacio finito  $\mathbb{B}(f)$  denominado *cilindro mapeante no Hausdorff de  $f$* , también  $T_0$ , que es una versión combinatoria del cilindro mapeante usual. Sin embargo, desconocíamos si la inclusión canónica de  $X$  en  $\mathbb{B}(f)$  resulta una cofibración como en el caso del cilindro mapeante clásico. Dado que  $Y$  es un retracto por deformación fuerte de  $\mathbb{B}(f)$  [5, Lema 2.8.2], una respuesta afirmativa a esta pregunta permitiría “reemplazar” cualquier función entre espacios finitos  $T_0$  por una cofibración a través de una equivalencia homotópica como en el caso clásico con la ventaja de mantener la situación de estudio en el contexto combinatorio de los espacios finitos.

En este trabajo hemos desarrollado la teoría de *bp-retractos* y la hemos utilizado para obtener una caracterización combinatoria de las cofibraciones entre espacios finitos  $T_0$  que muestra, en particular, que las mismas son equivalencias homotópicas. Damos además un algoritmo simple que permite determinar si una función entre espacios finitos es o no una cofibración. Además mostramos que si  $f: X \rightarrow Y$  es una función continua entre espacios finitos  $T_0$ , la inclusión canónica de  $X$  en  $\mathbb{B}(f)$  será una cofibración sólo bajo condiciones muy particulares.

El estudio de las fibraciones entre espacios finitos ha resultado un problema considerablemente más difícil. En primer lugar, notamos que los espacios finitos tienen revestimientos, lo que permite obtener numerosos ejemplos de fibraciones no triviales entre los mismos. Por otro lado, desconocíamos si los fibrados entre espacios finitos son fibraciones en general. Así, en primer lugar hemos estudiado fibrados sobre espacios de Alexandroff, probando un teorema de clasificación que muestra que los fibrados con fibra

---

$T_0 F$  sobre un espacio de Alexandroff  $B$  están en correspondencia con los funtores de  $B$  en el grupo  $\text{Aut}(F)$  de automorfismos de  $F$  en la categoría **Top**. Este resultado nos permitió probar que los fibrados de este mismo tipo son fibraciones, proveyéndonos además de una fuente importante de fibraciones (en general, no triviales) entre espacios finitos  $T_0$ .

Finalmente, hemos estudiado las fibraciones de Hurewicz entre espacios finitos  $T_0$  intentando obtener una caracterización combinatoria de las mismas. Si bien no hemos tenido éxito en dar una caracterización completa, hemos hallado fuertes propiedades combinatorias de estas fibraciones y, en particular, de las relaciones entre los espacios total, base y fibras. La teoría desarrollada resulta estar fuertemente relacionada con la teoría de tipos de homotopía de espacio finitos  $T_0$  y beat points de Stong y con nuestra propia teoría de bp-retractos. En particular, hemos probado que las fibraciones entre espacios finitos  $T_0$  pueden reducirse a otras equivalentes, que son además bifibraciones de Grothendieck, mediante un algoritmo combinatorio simple, que resulta dual al que damos para el caso de las cofibraciones.

## Organización de la tesis y resultados principales

Esta tesis cuenta con cinco capítulos. En el primer capítulo exponemos gran parte de la teoría necesaria para el desarrollo de los capítulos posteriores. La mayor parte de los resultados, si no todos, son conocidos y pueden encontrarse, ampliarse y profundizarse en la bibliografía clásica. Hemos decidido separar este capítulo en tres grandes secciones: una primera sección dedicada a la teoría de categorías y métodos simpliciales que, además de proveer un lenguaje adecuado para muchos de los resultados que desarrollaremos, aporta herramientas combinatorias para el estudio del tipo de homotopía débil de espacios topológicos finitos por medio del estudio del tipo de homotopía de los espacios clasificantes de los conjuntos preordenados asociados a los mismos; una segunda sección dedicada a la teoría de espacios topológicos finitos, con especial atención a la teoría de tipos de homotopía de espacios finitos desarrollada por R. Stong y a la teoría de tipos de homotopía débil de espacios finitos desarrollada por M. McCord; y una tercera sección dedicada al desarrollo de nociones clásicas en teoría de homotopía que serán estudiadas en los capítulos subsiguientes en el contexto de los espacios topológicos finitos, como ser, fibrados, fibraciones y cofibraciones de Hurewicz.

Los resultados de los capítulos subsiguientes son, en su gran mayoría, originales. Algunos se encuentran publicados y pueden encontrarse en [21, 23, 26]. El resto de los resultados originales de este trabajo se encuentran distribuidos en tres artículos [19, 22, 24] disponibles en el repositorio virtual arXiv. Se encuentra disponible además una segunda versión [25] de [22], donde desarrollamos algunos resultados importantes que no hemos incluido en esta tesis.

En el segundo capítulo estudiamos *problemas de minimalidad de modelos finitos*. Dado que, como hemos mencionado anteriormente, para todo CW-complejo compacto existen modelos finitos del mismo, es un problema topológico-combinatorio de interés el de determinar cuál es la menor cardinalidad posible de estos modelos. Para abordar este problema, hemos desarrollado una herramienta que hemos denominado *splitting de posets*, que consiste en cubrir un poset finito  $X$  (o equivalentemente, un espacio topológico finito



$T_0$ ), con dos subespacios  $A$  y  $B$  a fin de determinar información homotópica de  $X$  a partir de información homotópica de  $A$  y de  $B$ , y en especial, de los morfismos inducidos en los grupos de homología y de homotopía por las inclusiones de  $A$  y de  $B$  en  $X$ . Cabe mencionar que, si bien requerimos que las inclusiones de  $A$  y/o de  $B$  en  $X$  induzcan ciertos morfismos entre los grupos de homología y/o de homotopía para poder utilizar nuestros resultados, no requerimos que los espacios  $A$  y  $B$  en cuestión sean disjuntos ni que sean, en general, abiertos, cerrados o conexos. Esta característica del splitting le confiere versatilidad a la técnica, que resulta así una herramienta adecuada para el estudio de tipos de homotopía débiles de espacios topológicos finitos por medio de herramientas combinatorias.

A continuación mencionamos los resultados más importantes obtenidos mediante la técnica de splitting.

**Teorema 2.4.5.** Sea  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 2$  y sea  $(X; C, Y)$  una triada split tal que

- $\pi_r(C, c_0) \cong H_r(C) = 0$  para todo  $2 \leq r \leq n$  y para todo  $c_0 \in C$ ,
- $\pi_1(C, c_0)$  es un grupo abeliano para todo  $c_0 \in C$ , y
- la inclusión  $C \rightarrow X$  induce un monomorfismo  $H_1(C) \rightarrow H_1(X)$ .

Si  $l \in \mathbb{N}$  es tal que  $2 \leq l \leq n$  y  $H_j(X) = 0$  para todo  $2 \leq j \leq l - 1$  entonces  $\pi_j(X, x_0) = 0$  para todo  $2 \leq j \leq l - 1$  y  $\pi_l(X, x_0) \cong H_l(X) \otimes \mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$  para cualquier  $x_0 \in X$ . En particular,  $\pi_2(X, x_0) \cong H_2(X) \otimes \mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$ .

**Teorema 2.4.7.** Sea  $X$  un espacio de Alexandroff  $T_0$  conexo. Supongamos que existen subespacios no vacíos  $C, D \subseteq X$  tales que  $X = C \cup D$  y tales que las inclusiones de  $C$  y  $D$  en  $X$  inducen morfismos triviales entre los grupos fundamentales para cualquier elección de punto base. Entonces  $\pi_1(X, x_0)$  es un grupo libre para cualquier  $x_0 \in X$ .

**Proposición 2.4.13.** Sea  $G$  un grupo y sea  $X$  un modelo finito de un espacio de Eilenberg-MacLane de tipo  $(G, 1)$  que satisface (S2). Entonces  $H_1(X)$  es un grupo abeliano libre y  $H_n(X) = 0$  para todo  $n \geq 2$ .

**Proposición 2.4.15.** Sea  $X$  un poset finito y conexo que satisface (S2) y sea  $x_0 \in X$ . Supongamos que  $\pi_2(X, x_0) = 0$ . Si existe  $n \geq 3$  tal que  $H_l(X) = 0$  para todo  $3 \leq l \leq n - 1$  entonces  $\pi_l(X, x_0) = 0$  para todo  $3 \leq l \leq n - 1$  y  $\pi_n(X, x_0) \cong H_n(X) \otimes \mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$ . En particular,  $\pi_3(X, x_0) \cong H_3(X) \otimes \mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$ .

El siguiente teorema es uno de los resultados más importantes de este capítulo.

**Teorema 2.5.7.** Sea  $X$  un espacio topológico finito  $T_0$  tal que  $\#X \leq 12$ . Entonces  $\pi_1(X, x_0)$  es un grupo libre para cualquier  $x_0 \in X$ . En particular,  $H_1(X)$  es libre de torsión.

Del mismo, se deduce el siguiente corolario.

**Corolario 2.5.8** ([1, Teorema 1.2]). Sea  $X$  un modelo finito del plano proyectivo real. Entonces  $\#X \geq 13$ .

---

Así, el modelo finito de 13 puntos del plano proyectivo real dado en el Ejemplo 7.1.1 de [5], un espacio que hemos denominado  $\mathbb{P}_1^2$ , resulta un modelo minimal del mismo.

Cabe mencionar que el Corolario 2.5.8 fue demostrado por M. Adamaszek en [1] mediante una prueba parcialmente asistida por ordenador. En este trabajo ofrecemos una demostración que no requiere asistencia de ordenadores.

Siguiendo el estudio de este problema, probamos que el espacio  $\mathbb{P}_1^2$  y su opuesto, que hemos denominado  $\mathbb{P}_2^2$ , son los únicos modelos finitos minimales del plano proyectivo.

**Teorema 2.5.10.** Sea  $X$  un modelo finito del plano proyectivo real tal que  $\#X = 13$ . Entonces  $X$  es isomorfo a  $\mathbb{P}_1^2$  o a  $\mathbb{P}_2^2$ .

Nuestro estudio de los problemas de minimalidad de modelos finitos continúa con la caracterización de los modelos finitos minimales del toro y de la botella de Klein. Los resultados más importantes son los siguientes.

**Corolario 2.6.4.** Sea  $X$  un modelo finito del toro. Entonces  $\#X \geq 16$ .

**Corolario 2.6.5.** Sea  $X$  un modelo finito de la botella de Klein. Entonces  $\#X \geq 16$ .

En las figuras 2.4(b), 2.6(b), 2.7(b) y 2.5(b) hemos representado espacios topológicos finitos de 16 puntos que hemos denominado respectivamente por  $\mathbb{T}_{0,0}^2$ ,  $\mathbb{T}_{1,1}^2$ ,  $\mathbb{K}_{1,0}$  y  $\mathbb{K}_{0,1}$ . Los espacios  $\mathbb{T}_{0,0}^2$  y  $\mathbb{T}_{1,1}^2$  son los modelos finitos minimales del toro mientras que los espacios  $\mathbb{K}_{0,1}$  y  $\mathbb{K}_{1,0}$  son los modelos finitos minimales de la botella de Klein, como muestra el siguiente teorema.

**Teorema 2.6.11.** Sea  $X$  un poset finito tal que  $\#X = 16$ .

1. Si  $X$  es un modelo finito del toro entonces  $X$  es isomorfo a  $\mathbb{T}_{0,0}^2$  o a  $\mathbb{T}_{1,1}^2$ .
2. Si  $X$  es un modelo finito de la botella de Klein entonces  $X$  es isomorfo a  $\mathbb{K}_{1,0}$  o a  $\mathbb{K}_{0,1}$ .

El siguiente teorema fue conjeturado por Hardie, Vermeulen y Witbooi en [39].

**Teorema 2.7.1.** Sea  $X$  un espacio topológico finito tal que  $H_k(X)$  tiene torsión para algún  $k \in \mathbb{N}$ . Entonces  $\#X \geq 13$ .

En la figura 2.8 hemos representado un espacio débilmente contráctil no contráctil de nueve puntos. Este espacio es exhibido en [62] y en el ejemplo 4.3.3 de [5]. Terminamos el capítulo mostrando que este espacio y su opuesto resultan los únicos espacios débilmente contráctiles no contráctiles de cardinal mínimo.

**Teorema 2.7.7.** Sea  $X$  un espacio topológico débilmente contráctil no contráctil. Entonces  $\#X \geq 9$ .

**Teorema 2.7.8.** Sea  $X$  un espacio topológico débilmente contráctil no contráctil tal que  $\#X = 9$ . Entonces  $X$  es homeomorfo al espacio de la figura 2.8 o a su opuesto.

En el tercer capítulo estudiamos las cofibraciones entre espacios topológicos finitos. El resultado principal es una caracterización combinatoria de las cofibraciones entre espacios finitos.

**Teorema 3.3.6.** Sea  $X$  un espacio topológico finito conexo y sea  $A$  un subespacio no vacío de  $X$ . Entonces, la inclusión  $i: A \hookrightarrow X$  es una cofibración si y sólo si existe una retracción  $r: X \rightarrow A$  de  $i$  tal que  $ir \leq \text{Id}_X$ .

Probamos además que si  $X$  es un espacio topológico finito  $T_0$ , entonces las condiciones del teorema anterior son equivalentes a que  $A$  sea lo que hemos denominado un *dbp-retracto de  $X$* , esto es, que  $A$  se pueda obtener a partir de  $X$  eliminando sucesivamente down beat points.

Los dbp-retractos resultan objetos combinatorios interesantes en sí mismos. Hemos mostrado, por ejemplo, que dado un espacio finito  $T_0$   $X$  y un subespacio  $A$  de  $X$ , existe un dbp-retracto mínimo  $X_A$  de  $X$  que contiene a  $A$ , y que se obtiene eliminando sucesivamente los down beat points de  $X$  que no están en  $A$ . Es fácil ver entonces que disponemos de un algoritmo capaz de determinar si el subespacio  $A$  es o no un dbp-retracto de  $X$ .

Por otro lado, probamos que una función subespacio entre espacios finitos es una cofibración si y sólo si su *cociente de Kolmogorov* lo es. Esto permite utilizar el algoritmo antedicho aún en el caso en que  $X$  y  $A$  no sean espacios  $T_0$ . Se deduce de resultados clásicos de la teoría de cofibraciones que este algoritmo se puede aplicar a las distintas componentes conexas de  $X$  si este no fuera conexo. Así, podemos determinar si una función entre espacios topológicos finitos es o no una cofibración.

En el cuarto capítulo definimos una construcción que hemos denominado *construcción de Grothendieck topológica* que es una construcción sobre un funtor covariante de un espacio de Alexandroff en **Top**, análoga a la construcción de Grothendieck clásica para funtores covariantes de una categoría pequeña en **Cat**. Esta construcción induce, para cada espacio de Alexandroff  $B$ , un funtor

$$\int: \mathbf{Top}^B \rightarrow \mathbf{Top}/B$$

desde la categoría  $\mathbf{Top}^B$  de funtores covariantes de  $B$  en **Top** a la categoría  $\mathbf{Top}/B$  de espacios topológicos sobre  $B$ .

Si  $B$  es un espacio de Alexandroff, la construcción de Grothendieck topológica sobre un funtor  $F: B \rightarrow \mathbf{Top}$  da lugar a un espacio topológico  $\int F$  y a una *proyección* continua  $\pi_B: \int F \rightarrow B$ . La siguiente proposición muestra que el funtor  $\int$  permite construir fibrados sobre espacios de Alexandroff.

**Proposición 4.3.1.** Sea  $B$  un espacio de Alexandroff conexo y sea  $D: B \rightarrow \mathbf{Top}$  un funtor que invierte morfismos. Entonces  $\pi_B: \int D \rightarrow B$  es un fibrado sobre  $B$  con fibra  $D(b_0)$  para cualquier  $b_0 \in B$ .

Recíprocamente, todo fibrado sobre un espacio de Alexandroff  $B$  con fibra  $T_0$  es esencialmente, la proyección asociada a la construcción de Grothendieck topológica de un funtor  $F: B \rightarrow \mathbf{Top}$  que invierte morfismos.

**Teorema 4.3.4.** Sea  $B$  un espacio de Alexandroff conexo y sea  $F$  cualquier espacio  $T_0$ . Sea  $p: E \rightarrow B$  un fibrado con fibra  $F$ . Entonces existe un funtor  $\mathcal{D}_p: B \rightarrow \mathbf{Top}_0$  que invierte morfismos tal que  $\pi_B: \int \mathcal{D}_p \rightarrow B$  es un fibrado isomorfo a  $p$ .

---

La construcción de Grothendieck topológica induce, para cada espacio de Alexandroff  $B$ , una correspondencia biunívoca canónica entre funtores de  $B$  en  $\mathbf{Top}_0$  que invierten morfismos y fibrados sobre  $B$  con fibra  $T_0$ . Se obtiene así el siguiente teorema de clasificación de fibrados sobre  $B$  con fibra  $T_0$ .

**Teorema 4.3.11.** Sea  $B$  un espacio de Alexandroff conexo y sea  $F$  cualquier espacio  $T_0$ . Entonces existe una biyección canónica entre clases de isomorfismo de fibrados sobre  $B$  con fibra  $F$  y clases de isomorfismo de funtores de  $B$  en  $\mathbf{Aut}(F)$ .

La clasificación obtenida nos permite utilizar el funtor asociado a un fibrado sobre un espacio de Alexandroff con fibra  $T_0$  para construir una función levantadora de caminos canónica para dicho fibrado. Obtenemos así el siguiente teorema.

**Teorema 4.5.5.** Sea  $B$  un espacio de Alexandroff conexo, sea  $F$  cualquier espacio  $T_0$  y sea  $p$  un fibrado sobre  $B$  con fibra  $F$ . Entonces  $p$  es una fibración de Hurewicz.

En el quinto y último capítulo estudiamos las fibraciones de Hurewicz entre espacios topológicos finitos  $T_0$ . Por un lado, extendemos las definiciones de la teoría de Stong a la categoría de espacios finitos  $T_0$  sobre  $B$ , para  $B$  un espacio finito  $T_0$ , y probamos que muchos de los resultados de la teoría de Stong, así como nuestros resultados sobre  $\text{bp}$ -retractos, se extienden a la categoría  $\mathbf{FinTop}_0/B$  con estas definiciones. Luego, estudiamos las relaciones entre fibraciones de Hurewicz entre espacios topológicos finitos  $T_0$  y beat points, obteniendo numerosos resultados de espíritu combinatorio. En particular, obtenemos la siguiente generalización del inciso (3) del Teorema 1.2.30, un importante resultado de Stong:

**Teorema 5.4.4.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$ , sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración y sea  $q: E \rightarrow B$  una función continua homotópica a  $p$ . Si  $E$  es minimal, entonces  $q = p$ .

Por otro lado, obtenemos resultados acerca de la regularidad de funciones levantadoras de caminos para fibraciones de Hurewicz entre espacios topológicos finitos  $T_0$ .

**Teorema 5.5.12.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración. Entonces:

- (1) Si  $p$  es minimal, toda función levantadora de caminos para  $p$  es regular.
- (2) Si  $p$  no tiene down beat points, existe una función levantadora de caminos regular para  $p$ .

El siguiente corolario es el resultado principal del capítulo. Muestra que el  $\text{dbp}$ -retracto mínimo de una fibración de Hurewicz entre espacios finitos  $T_0$  es una bifibración de Grothendieck, una condición de índole combinatoria muy fuerte que puede ser verificada algorítmicamente de manera muy eficiente.

**Corolario 5.5.22.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración de Hurewicz. Entonces, el  $\text{dbp}$ -retracto mínimo de  $p$  es una bifibración de Grothendieck.

## Introducción

---

El resultado recíproco vale bajo ciertas condiciones, bastante restrictivas, sobre el espacio base. En particular, una función continua de un espacio topológico finito  $T_0$  sobre el espacio de Sierpinski es una fibración de Hurewicz si y sólo si su  $\text{dbp}$ -retracto mínimo es una bifibración de Grothendieck. Desconocemos si esta caracterización vale sin las restricciones mencionadas.

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo exponemos nociones preliminares de diversas subáreas de la topología algebraica que necesitaremos para los desarrollos de los capítulos subsiguientes.

En la primera sección, desarrollaremos resultados de teoría de categorías que se utilizarán a lo largo de todo el trabajo, como las nociones de conjunto simplicial, nervio y espacio clasificante de categorías pequeñas, grupos de homología y de homotopía, localización, fibraciones de Grothendieck y propiedades de levantamiento.

En la segunda sección haremos un repaso de la teoría general de espacios topológicos de Alexandroff y espacios topológicos finitos. En particular, desarrollaremos herramientas que nos permitirán aplicar métodos combinatorios al estudio de espacios topológicos finitos, así como los resultados de R. Stong sobre tipos de homotopía de espacios topológicos finitos y de M. McCord sobre tipos de homotopía débil de espacios de Alexandroff.

En la tercera sección, haremos una superficial introducción a importantes nociones de la teoría de homotopía clásica, como fibraciones y cofibraciones de Hurewicz, fibrados y revestimientos, que nos servirá como punto de partida para el estudio de dichas nociones en el contexto de los espacios topológicos finitos.

### 1.1 Categorías y métodos simpliciales

En esta sección, realizaremos un sucinto desarrollo de algunos resultados de la teoría de categorías que necesitaremos en los capítulos subsiguientes, siendo el propósito principal de esta presentación, el de introducir la terminología y notación que se utilizarán en el resto del trabajo. No es nuestro objetivo el de desarrollar conceptos básicos de la teoría como definiciones y propiedades básicas de categorías, funtores, transformaciones naturales, equivalencias, adjunción, límites y colímites. Estas nociones pueden encontrarse en la bibliografía estándar [45, 55].

Las nociones aquí desarrolladas pueden profundizarse y ampliarse en [45, 55, 4, 35, 2, 58, 41, 52, 65].

#### 1.1.1 Categorías

Por *categoría*, entenderemos *categoría localmente pequeña*, es decir, una categoría en que las clases de morfismos entre dos objetos cualesquiera son conjuntos. Dado que

## 1 Preliminares

---

las categorías con las cuales trabajaremos serán en general concretas o pequeñas, esta definición no provocará pérdida de generalidad en los resultados.

*Notación.* Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Notaremos por  $\text{Obj}(\mathcal{C})$  o  $\mathcal{C}_0$  a la clase de objetos de  $\mathcal{C}$  y notaremos por  $\text{Mor}(\mathcal{C})$  o  $\mathcal{C}_1$  a la clase de flechas de  $\mathcal{C}$ .

Si  $A \in \mathcal{C}_0$ , notaremos por  $\text{Id}_A$  al morfismo identidad de  $A$ .

Si  $A, B \in \mathcal{C}_0$ , el conjunto de flechas en  $\mathcal{C}$  de  $A$  a  $B$  será denotado por  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ,  $\text{Hom}(A, B)$  o  $\mathcal{C}(A, B)$ . En ocasiones escribiremos  $f: A \rightarrow B$  para indicar que  $f \in \mathcal{C}(A, B)$ . Denotaremos por  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(A)$  al grupo de automorfismos del objeto  $A$  en  $\mathcal{C}$ . Este será considerado, por un lado, como una subcategoría de  $\mathcal{C}$  con un único objeto  $A$ , y por otro, como un grupo en el sentido usual (algebraico) del término.

Denotaremos por  $s$  y  $t$  a las funciones (de clases)  $s, t: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_0$  usualmente denominadas *source* y *target*, definidas respectivamente como  $s(f) = A$  y  $t(f) = B$  para  $f \in \mathcal{C}(A, B)$  y para  $A, B \in \mathcal{C}_0$ .

*Notación.* Denotaremos por:

- **Cat** a la categoría de categorías pequeñas y funtores.
- $*$  al objeto terminal de **Cat**, es decir, a la categoría que tiene un único objeto, también denotado por  $*$  y un único morfismo,  $\text{Id}_*$ .
- **Cat** $_*$  a la categoría de categorías pequeñas punteadas y funtores que respetan puntos base.
- **Set** a la categoría de conjuntos y funciones.
- **Set** $_*$  a la categoría de conjuntos punteados y funciones que respetan puntos base.
- **Top** a la categoría de espacio topológicos y funciones continuas.
- **Top** $_0$  a la categoría de espacio topológicos  $T_0$  y funciones continuas.
- **Top** $_*$  a la categoría de espacios topológicos punteados y funciones continuas que respetan puntos base.
- **ATop** a la categoría de espacios topológicos de Alexandroff y funciones continuas.
- **ATop** $_0$  a la categoría de espacios topológicos de Alexandroff  $T_0$  y funciones continuas.
- **FinTop** a la categoría de espacio topológicos finitos y funciones continuas.
- **FinTop** $_0$  a la categoría de espacio topológicos finitos  $T_0$  y funciones continuas.
- **Grp** a la categoría de grupos y morfismos de grupos.
- **Grpd** a la categoría de grupoides y morfismos de grupoides.
- **Ab** a la categoría de grupos abelianos y morfismos de grupos.
- **Ord** a la categoría de conjuntos preordenados y morfismos de preórdenes.

- **Pos** a la categoría de conjuntos parcialmente ordenados, o posets, y morfismos de órdenes.
- $[n]$  al ordinal finito  $\{0, 1, \dots, n\}$  con el orden usual, considerado como una categoría con una única flecha de  $i$  a  $j$  si y sólo si  $i \leq j$ , para  $n \in \mathbb{N}_0$ .
- $\mathcal{S}$  al ordinal finito  $[1] = \{0, 1\}$ .
- $\Delta$  a la categoría de ordinales finitos y funtores, o equivalentemente, morfismos de órdenes.
- $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  a la categoría de funtores de  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{D}$  y transformaciones naturales, para dos categorías dadas  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$ .

Muchos tipos de estructuras pueden ser canónicamente consideradas como categorías pequeñas. Un conjunto preordenado  $(X, \leq)$  puede ser considerado como una categoría  $\mathcal{C}$  con  $\text{Obj}(\mathcal{C}) = X$  y

$$\text{hom}_{\mathcal{C}}(x, y) = \begin{cases} x \leq y & \text{si } x \leq y, \\ \emptyset & \text{si } x \not\leq y, \end{cases}$$

para elementos cualesquiera  $x, y$  en  $X$ . En otras palabras, dados  $x, y \in X$ , existe una única flecha

$$x \xrightarrow{x \leq y} y$$

en  $\mathcal{C}$  si y sólo si  $x \leq y$ . No es difícil ver que podemos considerar a la categoría **Ord** como una subcategoría plena de **Cat**. La categoría **Pos** es una subcategoría plena de **Ord** y por lo tanto puede también considerarse una subcategoría plena de **Cat**.

Por otro lado, un grupo  $(G, \cdot)$  puede ser considerado como una categoría pequeña de dos maneras distintas. En ambos casos, se considera que  $G$  tiene un único objeto, generalmente denotado por  $*$ , y que  $\text{hom}_G(*, *) = \text{Mor}(G) = G$ . La diferencia entre las dos categorías está en la definición de la composición. Si denotamos por yuxtaposición a la composición de flechas en  $G$ , tiene sentido definir

$$gh = g \cdot h$$

para todo  $g, h \in G$ , o bien

$$gh = h \cdot g$$

para todo  $g, h \in G$ .

Independientemente de cual sea la definición adoptada para la composición en  $G$ , la categoría  $G$  resulta isomorfa a la categoría  $G^{\text{op}}$  vía el isomorfismo (natural) que mapea a la flecha  $g$  de  $G$  en la flecha  $g^{-1}$  de  $G^{\text{op}}$ . Por consiguiente, la definición de composición que se adopte suele ser irrelevante en la mayoría de los casos.

Como en el caso de **Ord**, es fácil ver que la categoría **Grp** resulta una subcategoría plena de **Cat**.

**Definición 1.1.1.** Sean  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$  tres categorías y sean  $\sigma: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  y  $\tau: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  dos funtores. Se define la categoría *coma*  $\sigma \downarrow \tau$  como la categoría que tiene



## 1 Preliminares

---

- por objetos a las ternas  $(B, C, f) \in \mathcal{B}_0 \times \mathcal{C}_0 \times \mathcal{A}_1$  tales que  $f: \sigma(B) \rightarrow \tau(C)$ .
- por flechas del objeto  $(B, C, f)$  al objeto  $(B', C', f')$  a los pares  $(\beta, \gamma) \in \mathcal{B}(B, B') \times \mathcal{C}(C, C')$  tales que

$$\tau(\gamma)f = f'\sigma(\beta),$$

es decir, tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \sigma(B) & \xrightarrow{\sigma(\beta)} & \sigma(B') \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ \tau(C) & \xrightarrow{\tau(\gamma)} & \tau(C') \end{array}$$

- por composición a la composición coordenada a coordenada.

Cuando se trabaja con categorías coma, dada una categoría  $\mathcal{D}$ , es usual denotar por  $\mathcal{D}$  al functor  $\text{Id}_{\mathcal{D}}$ . Si  $D \in \text{Obj}(\mathcal{D})$ , es común denotar por  $D$  al functor  $* \rightarrow \mathcal{D}$  que mapea a  $*$  en  $D$  y denotar por  $F/D$  y  $D \setminus F$  a las categorías  $F \downarrow D$  y  $D \downarrow F$ , respectivamente, para cualquier functor  $F$  que caiga en  $\mathcal{D}$ .

En particular, si  $\mathcal{C}$  es una categoría y  $C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , las categorías  $\mathcal{C}/C$  y  $C \setminus \mathcal{C}$  son las categorías  $\text{Id}_{\mathcal{C}} \downarrow F_C$  y  $F_C \downarrow \text{Id}_{\mathcal{C}}$ , respectivamente, donde  $F_C: * \rightarrow \mathcal{C}$  es el functor que mapea  $*$  en  $C$ . La categoría  $\mathcal{C}/C$  se denomina *categoría de objetos sobre  $C$* . La categoría  $C \setminus \mathcal{C}$  se denomina *categoría de objetos bajo  $C$* .

La categoría  $\mathcal{C} \downarrow \mathcal{C}$  se denomina *categoría de flechas de  $\mathcal{C}$*  y suele denotarse por  $\mathcal{C}^2$ .

*Observación 1.1.2.* Sean  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$  categorías, sea  $\sigma: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor y sea  $A \in \mathcal{C}_0$ . Los objetos de la categoría  $\sigma/A$  son ternas  $(B, *, f)$  donde  $B \in \mathcal{B}_0$ ,  $*$  es el único objeto de la categoría  $*$  y  $f$  es una flecha en  $\mathcal{C}$  de  $\sigma(B)$  a  $A$ . Es usual entonces considerar que esta categoría tiene por objetos a los pares  $(B, f)$  donde  $B \in \text{Obj}(\mathcal{B})$  y  $f: \sigma(B) \rightarrow A$ . Bajo esta identificación, las flechas en  $\sigma/A$  de  $(B, f)$  a  $(B', f')$  son flechas  $g: B \rightarrow B'$  tales que  $f'\sigma(g) = f$ .

Del mismo modo, se considera que los objetos de la categoría  $A \setminus \sigma$  son pares  $(B, f)$  donde  $B \in \text{Obj}(\mathcal{B})$  y  $f: A \rightarrow \sigma(B)$ , y que las flechas en  $A \setminus \sigma$  de  $(B, f)$  a  $(B', f')$  son flechas  $g: B \rightarrow B'$  tales que  $\sigma(g)f = f'$ .

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y sea  $A \in \mathcal{C}_0$ . Por lo expuesto en la observación anterior, y del hecho de que un objeto  $(B, f)$  de  $\mathcal{C} \downarrow A$  está determinado por  $f$ , es usual considerar que los objetos de  $\mathcal{C}/A$  son las flechas en  $\mathcal{C}$  con codominio  $A$ . Las flechas en  $\mathcal{C}$  con codominio  $A$  suelen entonces llamarse *objetos sobre  $A$* . Notemos que, bajo esta identificación, una flecha en  $\mathcal{C}/A$  de  $f$  a  $g$  no es otra cosa que una flecha  $h$  en  $\mathcal{C}$  de  $s(f)$  a  $s(g)$  tal que  $gh = f$ . Las flechas entre objetos sobre  $A$  se denominan *flechas sobre  $A$* .

Del mismo modo, los objetos de la categoría  $A \setminus \mathcal{C}$  pueden considerarse como flechas en  $\mathcal{C}$  con dominio  $A$  denominadas *objetos bajo  $A$*  y las flechas entre los objetos  $f$  y  $g$  bajo  $A$  son flechas  $h$  en  $\mathcal{C}$  de  $t(f)$  a  $t(g)$  tales que  $hf = g$  denominadas *flechas bajo  $A$* .

*Observación 1.1.3.* Un espacio topológico punteado  $(X, x)$  se puede interpretar como una función (continua) del singleton  $*$  en  $X$  que mapea  $*$  en  $x$ , o equivalentemente, como un objeto en **Top** bajo  $*$ . Bajo esta interpretación, una función continua que preserva puntos base no es otra cosa que una flecha en **Top** bajo  $*$ . Esta observación nos permite identificar canónicamente a la categoría **Top** $_*$  con la categoría  $*\backslash\mathbf{Top}$ .

Más aún, si  $\mathcal{C}$  es una categoría con objeto terminal  $*$ , los objetos de  $\mathcal{C}$  bajo  $*$  se pueden interpretar como objetos punteados de  $\mathcal{C}$  y las flechas en  $\mathcal{C}$  bajo  $*$  se pueden interpretar como flechas en  $\mathcal{C}$  que respetan puntos base. Esto permite generalizar la noción de objeto punteado a categorías no necesariamente concretas.

Por otro lado, los objetos de  $\mathcal{C}^2$  pueden ser considerados como flechas de  $\mathcal{C}$ , y las flechas en  $\mathcal{C}^2$  de  $f$  a  $g$  resultan pares de flechas  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}(s(f), s(g)) \times \mathcal{C}(t(f), t(g))$  tales que  $\beta f = g\alpha$ .

### 1.1.2 Las categorías **Top** y **Top**/ $B$

Comenzamos esta subsección introduciendo la notación que será utilizada en el resto de este trabajo.

*Notación.* Denotaremos por  $I$  al intervalo  $[0, 1]$  con la topología usual.

*Notación.* Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos y sea  $y \in Y$ . Denotaremos por  $C_y$  a la función constante igual a  $y$  de  $X$  en  $Y$ . El dominio y el codominio de las funciones constantes notadas de esta manera se indicará explícitamente en cada caso si no pudiera deducirse a partir del contexto.

*Notación.* Sean  $X, Y$  y  $Z$  conjuntos. Para cada función  $f: X \times Y \rightarrow Z$  notaremos por  $f^\sharp$  a cualquiera de las funciones inducidas por  $f$  por la ley exponencial. Estas son

$$f^\sharp: Y \rightarrow \mathbf{Set}(X, Z)$$

definida por  $f^\sharp(y)(x) = f(x, y)$  para todo  $x \in X$ , para todo  $y \in Y$ , y

$$f^\sharp: X \rightarrow \mathbf{Set}(Y, Z)$$

definida por  $f^\sharp(x)(y) = f(x, y)$  para todo  $x \in X$ , para todo  $y \in Y$ .

Para cada función  $g: Y \rightarrow \mathbf{Set}(X, Z)$  notaremos por  $g^\flat$  a cualquiera de las funciones inducidas por  $g$  por la ley exponencial. Estas son

$$g^\flat: X \times Y \rightarrow Z$$

definida por  $g^\flat(x, y) = g(y)(x)$  para todo  $x \in X$  y para todo  $y \in Y$ , y

$$g^\flat: Y \times X \rightarrow Z$$

definida por  $g^\flat(y, x) = g(y)(x)$  para todo  $x \in X$  y para todo  $y \in Y$ .

Quedará claro a partir del contexto a cuál de las funciones se hace referencia en cada caso.

## 1 Preliminares

---

*Notación.* Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos. Denotaremos por  $Y^X$  al espacio de funciones continuas de  $X$  en  $Y$  con la *topología compacto-abierta*, es decir, la topología generada por la subbase

$$\mathcal{B} = \{W(K, U) : K \subseteq X \text{ compacto y } U \subseteq Y \text{ abierto}\},$$

donde el conjunto  $W(K, U)$  es el conjunto de funciones continuas de  $X$  en  $Y$  que mapean elementos de  $K$  en elementos de  $U$ , para cada  $K \subseteq X$  y  $U \subseteq Y$ .

Dado que, para espacios topológicos  $X$  e  $Y$ , la topología compacto-abierta en  $Y^X$  es más fina que la topología de convergencia puntual en  $\text{hom}(X, Y)$ , se sigue que  $Y^X$  es  $T_0$ ,  $T_1$  o  $T_2$ , respectivamente, si  $Y$  lo es.

*Notación.* Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos y sea  $x \in X$ . Denotaremos por  $i_x^Y$  a cualquiera de las composiciones

$$Y \xrightarrow{\cong} \{x\} \times Y \hookrightarrow X \times Y$$

o

$$Y \xrightarrow{\cong} Y \times \{x\} \hookrightarrow Y \times X$$

donde las flechas  $Y \xrightarrow{\cong} \{x\} \times Y$  y  $Y \xrightarrow{\cong} Y \times \{x\}$  son los homeomorfismos obvios y las flechas  $\{x\} \times Y \hookrightarrow X \times Y$  y  $Y \times \{x\} \hookrightarrow X \times Y$  son las inclusiones.

Cuando no haya lugar a confusión, la función  $i_x^Y$  será simplemente denotada por  $i_x$ .

Definimos la función “evaluación”

$$\text{ev}^Y : Y^X \times X \rightarrow Y$$

como  $\text{ev}^Y = (\text{Id}_{Y^X})^\flat$ , es decir, como la función definida por  $\text{ev}^Y(f, x) = f(x)$  para todo  $f \in Y^X$  y todo  $x \in X$ . Definimos además

$$\text{ev}_x^Y : Y^X \rightarrow Y$$

como la composición

$$Y^X \xrightarrow{i_x} Y^X \times X \xrightarrow{\text{ev}^Y} Y.$$

Nuevamente, notaremos  $\text{ev}^Y$  y  $\text{ev}_x^Y$  por  $\text{ev}$  y  $\text{ev}_x$  cuando no haya lugar a confusión.

Tenemos un funtor

$$X \times -: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$$

que mapea a todo espacio topológico  $Z$  en el espacio  $X \times Z$ , y a toda función continua  $f: W \rightarrow Z$  en la función continua  $\text{Id}_X \times f: X \times W \rightarrow X \times Z$  inducida entre los productos por  $f$  y  $\text{Id}_X$ . Desde luego, el funtor

$$- \times X: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$$

se define de manera similar y resulta naturalmente isomorfo a  $X \times -$ . Tenemos, por otro lado, un funtor

$$-^X: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$$

que mapea a todo espacio topológico  $Z$  en el espacio  $Z^X$  y a toda función continua  $f: W \rightarrow Z$  en la función continua  $f^X = (f \circ \text{ev}^X)^\sharp$ . Así,  $f^X$  queda definida por  $f^X(g) = fg$  para toda  $g \in W^X$ .

Un espacio topológico  $X$  se dice *exponenciable* si las funciones  $-^\sharp$  y  $-^b$  definen biyecciones naturales entre los funtores

$$\mathbf{Set}(X \times -, -)$$

y

$$\mathbf{Set}(-, -^X).$$

Esto es equivalente a que para cualquier par de espacios topológicos  $Y$  y  $Z$ ,  $f^\sharp$  sea una función continua para cualquier función continua  $f: X \times Y \rightarrow Z$ , y  $g^b$  sea una función continua para cualquier función continua  $g: Y \rightarrow Z^X$ .

El siguiente resultado puede deducirse de la demostración de [33, Teorema 1].

**Proposición 1.1.4** (Ley exponencial para espacios topológicos). *Sea  $X$  un espacio topológico tal que para cada  $x \in X$  y para cada entorno abierto  $U$  de  $x$  existe un entorno compacto de  $x$  contenido en  $U$ . Entonces  $X$  es exponenciable.*

Dado un espacio topológico  $B$ , resulta muchas veces conveniente estudiar las funciones continuas con codominio  $B$  como objetos de la categoría  $\mathbf{Top}/B$ , es decir, como objetos sobre  $B$ . Dado que  $*$  es el objeto terminal en  $\mathbf{Top}$ , entonces la categoría  $\mathbf{Top}$  es canónicamente isomorfa a la categoría  $\mathbf{Top}/*$ . Esto muestra que las nociones que desarrollaremos en esta subsección para la categoría  $\mathbf{Top}/B$ , para un espacio topológico fijo  $B$ , generalizan nociones particulares de la categoría  $\mathbf{Top}$ .

**Definición 1.1.5.** Sean  $E, E'$  y  $B$  espacios topológicos y sean  $p: E \rightarrow B$  y  $p': E' \rightarrow B$  dos funciones continuas. Decimos que una función continua  $\phi: E \rightarrow E'$  respeta fibras si  $p'\phi = p$ , o equivalentemente, si para todo  $b \in B$  se tiene que  $\phi(p^{-1}(b)) \subseteq (p')^{-1}(b)$ .

*Observación 1.1.6.* Para un espacio topológico  $B$ , la categoría  $\mathbf{Top}/B$  tiene por objetos las funciones continuas sobre  $B$  y, para dos objetos  $p: E \rightarrow B$  y  $p': E' \rightarrow B$  de  $\mathbf{Top}/B$ , las flechas de  $p$  a  $p'$  son precisamente las funciones de  $E$  a  $E'$  que respetan fibras.

Dado un objeto  $p: E \rightarrow B$  sobre  $B$ , la identidad de  $p$  no es otra que la identidad de  $E$  considerada como flecha sobre  $B$  de  $p$  a  $p$ . Así, cuando se considera a  $\text{Id}_E$  como una flecha sobre  $B$  tiene sentido denotarla por  $\text{Id}_p$ .

**Definición 1.1.7.** Sea  $B$  un espacio topológico y sean  $p: E \rightarrow B$  y  $p': E' \rightarrow B$  dos funciones continuas consideradas como objetos de  $\mathbf{Top}/B$ . Sean  $\phi_0, \phi_1: p \rightarrow p'$  flechas sobre  $B$  de  $p$  a  $p'$ . Una *homotopía (sobre  $B$ )* de  $\phi_0$  a  $\phi_1$  es una función continua  $H: E \times I \rightarrow E'$  tal que

- $p'H_t = p$  para todo  $t \in I$ ,
- $H_{i_0} = \phi_0$ , y
- $H_{i_1} = \phi_1$ .

Si  $A \subseteq E$ , una *homotopía sobre  $B$  relativa a  $A$*  de  $\phi_0$  a  $\phi_1$  es una homotopía  $H$  sobre  $B$  que se mantiene constante sobre  $A$ , esto es, tal que  $H(a, t) = \phi_0(a)$  para todo  $t \in I$  y todo  $a \in A$ . En otras palabras,  $H$  es una homotopía relativa a  $A$  si  $H_{i_t}j = \phi_0j$  para todo  $t \in I$ , donde  $j: A \rightarrow E$  es la inclusión.

## 1 Preliminares

---

Observemos que las homotopías sobre  $B$  relativas a  $\emptyset$  son precisamente las homotopías sobre  $B$ .

Notaremos  $H: \phi_0 \simeq \phi_1$  si  $H$  es una homotopía sobre  $B$  de  $\phi_0$  a  $\phi_1$  y  $H: \phi_0 \simeq \phi_1$  (rel  $A$ ) si  $H$  es una homotopía sobre  $B$  de  $\phi_0$  a  $\phi_1$  relativa a  $A$ .

Diremos que dos flechas  $\phi_0, \phi_1$  sobre  $B$  de  $p$  a  $p'$  son *homotópicas (sobre  $B$ )* u *homotópicas por fibras*, y lo notaremos por  $\phi_0 \simeq \phi_1$ , si existe una homotopía  $H: \phi_0 \simeq \phi_1$  sobre  $B$ . Del mismo modo, diremos que  $\phi_0$  y  $\phi_1$  son *homotópicas (sobre  $B$ ) relativas a  $A$*  u *homotópicas por fibras relativas a  $A$* , y lo notaremos  $\phi_0 \simeq \phi_1$  (rel  $A$ ) si existe una homotopía  $H: \phi_0 \simeq \phi_1$  (rel  $A$ ) sobre  $B$ .

Para un espacio topológico  $A$ , es posible definir homotopías en la categoría  $A \setminus \mathbf{Top}$  de manera dual a cómo hemos definido homotopías en la categoría  $\mathbf{Top}/B$ . De hecho, si  $f, g: X \rightarrow Y$  son dos funciones continuas y  $A \subseteq X$ , las homotopías de  $f$  a  $g$  relativas a  $A$  no son otra cosa que *homotopías bajo  $A$* , donde las funciones  $f$  y  $g$  son consideradas como flechas bajo  $A$  de la inclusión  $A \hookrightarrow X$  a la restricción  $f|_A$ .

Esta generalidad no será necesaria y por lo tanto no desarrollaremos estas nociones.

**Definición 1.1.8.** Sea  $B$  un espacio topológico y sean  $p: E \rightarrow B$  y  $p': E' \rightarrow B$  dos funciones continuas consideradas como objetos de  $\mathbf{Top}/B$ . Sea  $f: p \rightarrow p'$  una flecha sobre  $B$ . Decimos que  $f$  es una *equivalencia homotópica (sobre  $B$ )* si existe una flecha  $g: p' \rightarrow p$  sobre  $B$ , llamada *inversa homotópica de  $f$  (sobre  $B$ )* tal que  $gf \simeq \text{Id}_p$  y  $fg \simeq \text{Id}_{p'}$ . En ese caso, decimos que  $p$  y  $p'$  son *homotópicamente equivalentes sobre  $B$*  u *homotópicamente equivalentes por fibras*. Notemos que la equivalencia homotópica por fibras es una relación de equivalencia.

Sea  $A \subseteq E$  un subespacio y sea  $i: A \rightarrow E$  la inclusión. Consideremos la función continua  $p|_A = pi: A \rightarrow B$  como un objeto sobre  $B$ .

Diremos que  $p|_A$  es un *retracto por deformación fuerte* de  $p$  si existe una retracción  $r: p \rightarrow p|_A$ , tal que  $\text{Id}_p \simeq ir$  (rel  $A$ ).

Notemos que si  $p|_A$  es un retracto por deformación fuerte de  $p$  en  $\mathbf{Top}/B$ , entonces  $A$  es un retracto por deformación fuerte de  $E$  en  $\mathbf{Top}$ .

### 1.1.3 Nervio, realización geométrica y espacio clasificante

Existen dos tipos importantes de morfismos en la categoría  $\Delta$  llamados *inyecciones elementales* y *suryecciones elementales*. Una inyección elemental es un morfismo de órdenes inyectivo de  $[n]$  a  $[n+1]$  para  $n \in \mathbb{N}_0$ , mientras que una suryección elemental es un morfismo de órdenes sobreyectivo de  $[n+1]$  en  $[n]$ . Es fácil ver que existen exactamente  $n+1$  inyecciones elementales de  $[n-1]$  a  $[n]$ : para  $i = 0, \dots, n$ , la inyección elemental  $\delta_i^n$  es el único morfismo de órdenes inyectivo de  $[n-1]$  a  $[n]$  cuya imagen no contiene al elemento  $i$ . Por otro lado, existen exactamente  $n+1$  suryecciones elementales de  $[n+1]$  en  $[n]$ : para  $i = 0, \dots, n$ , la suryección elemental  $\sigma_i^n$  es el único morfismo de órdenes sobreyectivo que mapea dos elementos distintos,  $i$  e  $i+1$ , en  $i$ .

Es sabido que las inyecciones y suryecciones elementales satisfacen una serie de identidades, llamadas *identidades simpliciales*, y que toda flecha en  $\Delta$  se factoriza de manera única como composición de suryecciones e inyecciones elementales satisfaciendo ciertas

condiciones (ver, por ejemplo, [35]). Así, podemos considerar que las flechas en  $\Delta$  están *canónicamente generadas* por las inyecciones y suryecciones elementales.

**Definición 1.1.9.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Un *objeto simplicial en la categoría  $\mathcal{C}$*  es un funtor contravariante de  $\Delta$  en  $\mathcal{C}$ , es decir, un objeto de la categoría  $\mathcal{C}^{\Delta^{\text{op}}}$ .

Un objeto simplicial  $K$  en una categoría  $\mathcal{C}$  puede asimismo describirse como una colección de objetos de  $\mathcal{C}$

$$K_n = K([n]), \text{ para } n \in \mathbb{N}_0,$$

junto con una colección de flechas

$$d_i^n = K(\delta_i^n): K_n \rightarrow K_{n-1}, \text{ para } n \in \mathbb{N} \text{ y para } i = 0, \dots, n, \text{ y}$$

$$s_i^n = K(\sigma_i^n): K_n \rightarrow K_{n+1}, \text{ para } n \in \mathbb{N}_0 \text{ y para } i = 0, \dots, n,$$

que satisfacen relaciones duales a las identidades simpliciales mencionadas anteriormente.

Las flechas  $d_i^n$  se llaman *operadores de cara*, o simplemente *caras*, mientras que las funciones  $s_i^n$  se llaman *operadores de degeneración* de  $K$ , o simplemente *degeneraciones*. Para  $n \in \mathbb{N}_0$ , un  $(n+1)$ -simplex de  $K$  se denomina *degenerado* si está en la imagen de  $s_i: K_n \rightarrow K_{n+1}$  para algún  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

Se llama *conjunto simplicial* a un objeto simplicial en la categoría **Set**, es decir, a un objeto de  $\mathbf{Set}^{\Delta^{\text{op}}}$  y se llama *morfismo simplicial* a una transformación natural entre conjuntos simpliciales. La categoría  $\mathbf{Set}^{\Delta^{\text{op}}}$  de conjuntos simpliciales y morfismos simpliciales se suele denotar por **sSet**.

Dada una categoría pequeña  $\mathcal{C}$ , podemos considerar el funtor

$$h_{\mathcal{C}} = \mathbf{Cat}(-, \mathcal{C}): \mathbf{Cat}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$$

que asocia a cada categoría pequeña  $\mathcal{D}$  el conjunto de funtores de  $\mathcal{D}$  a  $\mathcal{C}$ . Esta asignación permite a su vez definir un funtor

$$h_-: \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{Cat}^{\text{op}}}$$

por  $h_-(\mathcal{C}) = h_{\mathcal{C}}$  para toda  $\mathcal{C} \in \mathbf{Cat}$ .

**Definición 1.1.10.** Se define el funtor *nervio (simplicial)  $N: \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{sSet}$*  como la composición

$$\mathbf{Cat} \xrightarrow{h_-} \mathbf{Set}^{\mathbf{Cat}^{\text{op}}} \rightarrow \mathbf{Set}^{\Delta^{\text{op}}} = \mathbf{sSet}$$

donde la segunda flecha es la flecha inducida por la inclusión  $\Delta^{\text{op}} \hookrightarrow \mathbf{Cat}^{\text{op}}$ .

Así, a cada categoría pequeña  $\mathcal{C}$  se le asocia el conjunto simplicial  $N(\mathcal{C})$  que está definido por  $N(\mathcal{C})_n = \mathcal{C}^{[n]}$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Si  $n \geq 1$ , un  $n$ -simplex de  $N(\mathcal{C})$  puede interpretarse como una cadena de  $n$  flechas componibles en  $\mathcal{C}$ :

$$c_0 \xrightarrow{f_1} c_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} c_n.$$

## 1 Preliminares

---

Bajo esta interpretación, podemos describir las caras y degeneraciones de  $N(\mathcal{C})$  como sigue. Para  $n \in \mathbb{N}$ , la función  $d_i^n: \mathcal{C}^{[n]} \rightarrow \mathcal{C}^{[n-1]}$  es la función que mapea al  $n$ -símplex

$$c_0 \xrightarrow{f_1} c_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} c_n$$

en el  $(n-1)$ -símplex

$$c_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{i-1}} c_{i-1} \xrightarrow{f_{i+1}f_i} c_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} \cdots \xrightarrow{f_n} c_n,$$

si  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , en el  $(n-1)$ -símplex

$$c_1 \xrightarrow{f_2} c_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} c_n$$

si  $i = 0$  y en el  $(n-1)$ -símplex

$$c_0 \xrightarrow{f_1} c_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} c_{n-1}$$

si  $i = n$ . Por otro lado, para  $n \in \mathbb{N}_0$  e  $i \in \{0, \dots, n\}$ , la función  $s_i^n: \mathcal{C}^{[n]} \rightarrow \mathcal{C}^{[n+1]}$  es la función que mapea al  $n$ -símplex

$$c_0 \xrightarrow{f_1} c_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} c_n$$

en el  $(n+1)$ -símplex

$$c_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_i} c_i \xrightarrow{\text{Id}_{c_i}} c_i \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots \xrightarrow{f_n} c_n.$$

Los  $n$ -símplices degenerados de  $N(\mathcal{C})$  son entonces los funtores de  $[n]$  en  $\mathcal{C}$  que mapean alguna flecha no trivial de  $[n]$  en una flecha trivial (identidad) de  $\mathcal{C}$ .

Es claro que el conjunto  $N(\mathcal{C})_0$  está en biyección canónica con  $\text{Obj}(\mathcal{C})$  y que el conjunto  $N(\mathcal{C})_1$  está en biyección canónica con  $\text{Mor}(\mathcal{C})$ . Para  $n \geq 2$ , el conjunto  $N(\mathcal{C})_n$  está en biyección canónica con el conjunto de  $n$ -uplas  $(f_1, \dots, f_n)$  de  $\text{Mor}(\mathcal{C})^n$  tales que  $t(f_i) = s(f_{i+1})$  para todo  $i = 1, \dots, n-1$ .

En [52], J. Milnor asocia a cada conjunto simplicial<sup>1</sup>  $K$  un espacio topológico  $|K|$  que denomina *realización geométrica* de  $K$ . El espacio  $|K|$  se construye como sigue. Primero se considera el coproducto

$$\overline{K} = \coprod_{n=0}^{\infty} K_n \times \Delta^n$$

donde, para  $n \in \mathbb{N}_0$ , el conjunto  $K_n$  es considerado como un espacio topológico discreto y  $\Delta^n$  es el  $n$ -símplex estándar

$$\Delta^n = \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in I^{n+1} : \sum_{k=0}^n t_k = 1\}$$

---

<sup>1</sup>En la época de la publicación de Milnor, los conjuntos simpliciales eran denominados *complejos semi-simpliciales completos*.

con la topología de subespacio de  $I^{n+1}$ . Esta representación del  $n$ -simplex estándar permite definir de manera muy simple la  $i$ -ésima cara del  $n$ -simplex

$$\delta_i: \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$$

por

$$\delta_i(t_0, \dots, t_{n-1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1})$$

para todo  $(t_0, \dots, t_{n-1}) \in \Delta^{n-1}$  para  $i = 0, \dots, n$  y para  $n \in \mathbb{N}$ , y la  $i$ -ésima degeneración del  $n$ -simplex

$$\sigma_i: \Delta^{n+1} \rightarrow \Delta^n$$

por

$$\sigma_i(t_0, \dots, t_{n+1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_{n+1})$$

para todo  $(t_0, \dots, t_{n+1}) \in \Delta^{n+1}$  para  $i = 0, \dots, n$  y para  $n \in \mathbb{N}_0$ .<sup>2</sup>

A continuación, se considera la relación de equivalencia  $\sim$  en  $\overline{K}$  generada por las relaciones

$$(d_i k, x) \sim (k, \delta_i x), \text{ para } k \in K_n \text{ y } x \in \Delta^{n-1}, \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ y } i \in \{0, \dots, n\}, \text{ y}$$

$$(s_i k, x) \sim (k, \sigma_i x), \text{ para } k \in K_n \text{ y } x \in \Delta^{n+1}, \text{ con } n \in \mathbb{N}_0 \text{ y } i \in \{0, \dots, n\}.$$

Se define el espacio  $|K|$  como el espacio cociente  $\overline{K}/\sim$ . Este espacio resulta un CW-complejo que tiene, para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ , una  $n$ -celda por cada  $n$ -simplex no degenerado de  $K$  [52, Teorema 1]. Más aún, un morfismo simplicial  $\varphi: K \rightarrow K'$  induce, de manera funtorial, una función continua  $|\varphi|: |K| \rightarrow |K'|$  definida por  $|\varphi|([k, x]) = [\varphi(k), x]$ . Así, podemos definir un functor *realización geométrica*

$$|\cdot|: \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Top}$$

que a cada conjunto simplicial  $K$  le asigna el espacio  $|K|$  y a cada morfismo simplicial  $\varphi: K \rightarrow K'$  le asocia la función continua  $|\varphi|: |K| \rightarrow |K'|$ .

**Definición 1.1.11** ([65]). Definimos el functor *espacio clasificante*  $B: \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Top}$  como la composición

$$\mathbf{Cat} \xrightarrow{N} \mathbf{sSet} \xrightarrow{|\cdot|} \mathbf{Top}.$$

---

<sup>2</sup>En el artículo original, Milnor define el  $n$ -simplex estándar por

$$\Delta^n = \{(t_0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2} : 0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t_{n+1} = 1\},$$

con lo cual las caras y degeneraciones quedan definidas, respectivamente, por

$$\delta_i(t_0, \dots, t_n) = (t_0, \dots, t_i, t_i, \dots, t_n)$$

y

$$\sigma_i(t_0, \dots, t_{n+2}) = (t_0, \dots, t_i, t_{i+2}, \dots, t_{n+2}).$$



## 1 Preliminares

---

G. Segal demuestra en [65] que si  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son categorías pequeñas y  $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  son funtores, una transformación natural  $\alpha: F \Rightarrow G$  induce una homotopía  $\alpha_*: BF \simeq BG$ , de donde se deduce que el espacio clasificante de una equivalencia de categorías entre categorías pequeñas es una equivalencia homotópica entre los espacios clasificantes de las mismas.

En [58], D. Quillen establece a través del functor espacio clasificante, el uso de terminología topológica para nociones categóricas. Por ejemplo, un functor entre categorías pequeñas se denomina *equivalencia homotópica* si su espacio clasificante lo es, y una categoría pequeña se denomina *contráctil* si lo es su espacio clasificante. En el contexto de este trabajo, esta terminología resultaría ambigua y por lo tanto no será utilizada.

El functor espacio clasificante permite el estudio de categorías pequeñas mediante herramientas topológicas. Veremos en la subsección 1.2.1, que todo espacio de Alexandroff (cf. definición 1.2.1) se puede interpretar como un conjunto preordenado, y por lo tanto, como una categoría pequeña. Tiene sentido, entonces, estudiar la relación entre los invariantes homotópicos (débiles) del espacio original y los de su espacio clasificante. Para esto, necesitamos definir de manera precisa los grupos de homología y de homotopía de una categoría pequeña.

La definición de los grupos de homología de una categoría pequeña es sencilla.

**Definición 1.1.12** ([58]). Sea  $A$  un grupo abeliano. Definimos el functor

$$H_n(-; A): \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

como la composición

$$\mathbf{Cat} \xrightarrow{B} \mathbf{Top} \xrightarrow{H_n(-; A)} \mathbf{Ab}.$$

Para  $n \in \mathbb{N}_0$ , el functor  $H_n(-; A)$  se denomina *n-ésimo grupo de homología con coeficientes en  $A$* .

D. Quillen observa que los grupos de homología de una categoría pequeña  $\mathcal{C}$  con coeficientes en un grupo abeliano  $A$  se pueden definir algebraicamente como la homología de un complejo de cadenas que se define en términos de cadenas de flechas componibles de  $\mathcal{C}$  [58, 59]. En el caso en que  $\mathcal{C}$  es un espacio de Alexandroff  $T_0$  considerado como un poset, la homología de  $\mathcal{C}$  definida por Quillen coincide con la  $\mathcal{P}$ -homología de  $\mathcal{C}$  definida en [20] y, en virtud del teorema de McCord (teorema 1.2.52), con la homología singular de  $\mathcal{C}$  con coeficientes en  $A$ .

Para definir los grupos de homotopía de una categoría pequeña, antes debemos tener en cuenta las siguientes consideraciones. Notemos que el objeto terminal  $*$  en  $\mathbf{Set}$  induce un objeto terminal, que denotaremos también por  $*$ , en  $\mathbf{sSet}$ . Este es, desde luego, el functor constante  $*$  de  $\Delta^{\text{op}}$  en  $\mathbf{Set}$ . Se sigue de la observación 1.1.3, que podemos considerar la categoría  $\mathbf{sSet}_* = * \backslash \mathbf{Set}$  como la versión punteada de la categoría  $\mathbf{sSet}$ . Como  $N(*)$  es el functor constante  $*$ , el functor  $N$  se extiende de manera natural a un functor  $N: \mathbf{Cat}_* \rightarrow \mathbf{sSet}_*$  y permite extender el functor  $B$  a un functor  $B: \mathbf{Cat}_* \rightarrow \mathbf{Top}_*$ . Explícitamente, dada una categoría pequeña  $\mathcal{C}$  y un objeto  $C$  de  $\mathcal{C}$ , el espacio topológico punteado  $B(\mathcal{C}, C)$  es el par  $(B\mathcal{C}, C)$  donde  $C$  es considerado en este caso, como la 0-celda correspondiente al 0-símplex (no degenerado)  $C$  de  $N(\mathcal{C})$ .

**Definición 1.1.13** ([58]). Definimos el funtor  $\pi_0: \mathbf{Cat}_* \rightarrow \mathbf{Set}_*$  como la composición

$$\mathbf{Cat}_* \xrightarrow{B} \mathbf{Top}_* \xrightarrow{\pi_0} \mathbf{Set}_*,$$

y, para  $n \in \mathbb{N}$ , definimos el funtor  $\pi_n: \mathbf{Cat}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$  como la composición

$$\mathbf{Cat}_* \xrightarrow{B} \mathbf{Top}_* \xrightarrow{\pi_n} \mathbf{Grp}.$$

Para  $n \in \mathbb{N}_0$ , el funtor  $\pi_n$  se denomina *n-ésimo grupo de homotopía*, aunque es claro que  $\pi_0(\mathcal{C}, C)$  es en general un conjunto punteado, y no un grupo, para  $\mathcal{C} \in \mathbf{Cat}$  y  $C \in \mathcal{C}_0$ .

Desde luego, el funtor  $\pi_0$  se puede considerar como es usual como un funtor de  $\mathbf{Cat}_*$  a  $\mathbf{Set}$  de manera canónica, componiendo con el funtor olvido canónico de  $\mathbf{Set}_*$  a  $\mathbf{Set}$ .

Como en el caso de los espacios topológicos punteados, si  $\mathcal{C}$  es una categoría pequeña y  $C \in \mathcal{C}_0$ , el grupo  $\pi_1(\mathcal{C}, C)$  se llama *grupo fundamental de  $\mathcal{C}$  en  $C$* .

Los siguientes resultados proveen importantes herramientas para el estudio de los grupos de homotopía de categorías pequeñas.

**Teorema 1.1.14** (Teorema A, [58]). Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  dos categorías pequeñas y sea  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un funtor. Si  $B(D \setminus F)$  es contráctil para todo  $D \in \text{Obj}(\mathcal{D})$  entonces  $BF$  es equivalencia homotópica.

Dualmente, si  $B(F/D)$  es contráctil para todo  $D \in \text{Obj}(\mathcal{D})$ , entonces  $BF$  es equivalencia homotópica.

**Teorema 1.1.15** (Teorema B, [58]). Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  dos categorías pequeñas y sea  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un funtor.

Si  $B(u^*): B(D' \setminus F) \rightarrow B(D \setminus F)$  es equivalencia homotópica para todo  $u: D \rightarrow D'$  para cualesquiera  $D, D' \in \text{Obj}(\mathcal{D})$ , donde  $u^*: D' \setminus F \rightarrow D \setminus F$  es el funtor inducido por  $u$ , entonces  $F$  induce una sucesión exacta larga

$$\cdots \rightarrow \pi_{n+1}(\mathcal{D}, D) \rightarrow \pi_n(D \setminus F, (C, \text{Id}_D)) \xrightarrow{j_*} \pi_n(\mathcal{C}, C) \xrightarrow{F_*} \pi_n(\mathcal{D}, D) \rightarrow \cdots$$

para cualquier  $D \in \text{Obj}(\mathcal{D})$  y cualquier  $C \in F^{-1}(D)$ , donde  $F_*$  es el morfismo inducido por  $F$  y  $j_*$  es el morfismo inducido por la proyección canónica  $j: D \setminus F \rightarrow \mathcal{C}$ .

Dualmente, si  $B(u_*): B(F/D) \rightarrow B(F/D')$  es equivalencia homotópica para todo  $u: D \rightarrow D'$  para cualesquiera  $D, D' \in \text{Obj}(\mathcal{D})$ , donde  $u_*: F/D \rightarrow F/D'$  es el funtor inducido por  $u$ , entonces  $F$  induce una sucesión exacta larga

$$\cdots \rightarrow \pi_{n+1}(\mathcal{D}, D) \rightarrow \pi_n(F/D, (C, \text{Id}_D)) \xrightarrow{k_*} \pi_n(\mathcal{C}, C) \xrightarrow{F_*} \pi_n(\mathcal{D}, D) \rightarrow \cdots$$

para cualquier  $D \in \text{Obj}(\mathcal{D})$  y cualquier  $C \in F^{-1}(D)$ , donde  $F_*$  es el morfismo inducido por  $F$  y  $k_*$  es el morfismo inducido por la proyección canónica  $k: F/D \rightarrow \mathcal{C}$ .

### 1.1.4 Fibraciones de Grothendieck

Sean  $E$  y  $B$  dos categorías pequeñas y sea  $p: E \rightarrow B$  un funtor. Para cada  $b \in B_0$ , la fibra  $E_b = p^{-1}(b)$  es, en principio, un conjunto de objetos de  $E$  que se mapean sobre  $b$  por  $p$  y un conjunto de flechas de  $E$  que se mapean en  $\text{Id}_B$  por  $p$ . Es fácil ver que  $p^{-1}(b)$

## 1 Preliminares

---

es una subcategoría de  $E$ , posiblemente vacía, para cada  $b \in B_0$ . Surge naturalmente preguntarse bajo qué condiciones se puede extender la asignación  $b \mapsto E_b$  a un functor (covariante o contravariante) de  $B$  en  $\mathbf{Cat}$ , que permita recuperar al functor original  $p$ . Esto requiere, por ejemplo, que los morfismos en  $B$  induzcan funtores entre las fibras correspondientes de alguna manera más o menos natural. Sería también razonable requerir condiciones adicionales, como ser, que las construcciones involucradas sean “universales” o “funtoriales” en algún sentido.

La teoría de *fibraciones de Grothendieck* da una posible respuesta a este problema. El lector interesado puede encontrar el desarrollo de esta teoría en [37, 36, 43].

No es nuestro objetivo presentar un desarrollo profundo del tema, para lo cual haría falta introducir conceptos y resultados de la teoría de *2-categorías*. Dado que estos resultados no son necesarios para el desarrollo del presente trabajo, nos limitaremos a exponer brevemente algunas definiciones y resultados que, por su naturaleza combinatoria, serán de utilidad en los capítulos 4 y 5.

**Definición 1.1.16.** Sean  $E$  y  $B$  dos categorías pequeñas y sea  $p: E \rightarrow B$  un functor. Una flecha en  $f: e' \rightarrow e$  en  $E$  se dice *cartesiana* (respecto de  $p$ ) si para cualquier flecha  $g: e'' \rightarrow e$  en  $E$  y cualquier flecha  $h: p(e'') \rightarrow p(e')$  en  $B$  tales que  $p(g) = p(f)h$  existe una única flecha  $\tilde{h}: e'' \rightarrow e'$  tal que  $f\tilde{h} = g$  y  $p(\tilde{h}) = h$ .

En términos informales,  $f$  es cartesiana si cualquier flecha  $h$  que haga conmutativo el diagrama que a continuación mostramos a la derecha se puede levantar de manera única por  $p$  a una flecha  $\tilde{h}$  que haga conmutativo el diagrama de la izquierda.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc} e' & \xrightarrow{f} & e \\ \uparrow \tilde{h} & & \nearrow g \\ e'' & & \end{array} & \xrightarrow{p} & \begin{array}{ccc} p(e') & \xrightarrow{p(f)} & p(e) \\ \uparrow h & & \nearrow p(g) \\ p(e'') & & \end{array}
 \end{array}$$

De manera dual, una flecha  $f: e \rightarrow e'$  en  $E$  se dice *cocartesiana* u *opcartesiana* si es cartesiana respecto de  $p^{\text{op}}$ , esto es, si para cualquier flecha  $g: e \rightarrow e''$  en  $E$  y cualquier flecha  $h: p(e') \rightarrow p(e'')$  en  $B$  tales que  $p(g) = hp(f)$  existe una única flecha  $\tilde{h}: e' \rightarrow e''$  tal que  $\tilde{h}f = g$  y  $p(\tilde{h}) = h$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc} e & \xrightarrow{f} & e' \\ \searrow g & & \downarrow \tilde{h} \\ & & e'' \end{array} & \xrightarrow{p} & \begin{array}{ccc} p(e) & \xrightarrow{p(f)} & p(e') \\ \searrow p(g) & & \downarrow h \\ & & p(e'') \end{array}
 \end{array}$$

**Definición 1.1.17.** Sean  $E$  y  $B$  dos categorías pequeñas y sea  $p: E \rightarrow B$  un functor. Decimos que  $p$  es una *fibración de Grothendieck* si para todo  $e \in E$ , todo  $b \in B$  y toda flecha  $f: b \rightarrow p(e)$ , existe  $e' \in p^{-1}(b)$  y una flecha cartesiana  $\tilde{f}: e' \rightarrow e$  tal que  $p(\tilde{f}) = f$ . La flecha  $\tilde{f}$  se denomina *levantado cartesiano de  $f$  a  $e$* .

De manera dual, decimos que  $p$  es una *opfibración de Grothendieck* si  $p^{\text{op}}$  es fibración de Grothendieck. En otras palabras,  $p$  es opfibración de Grothendieck si para todo  $e \in E$ , todo  $b \in B$  y toda flecha  $f: p(e) \rightarrow b$ , existe  $e' \in p^{-1}(b)$  y una flecha cocartesiana  $\tilde{f}: e \rightarrow e'$  tal que  $p(\tilde{f}) = f$ . La flecha  $\tilde{f}$  se denomina *levantado cocartesiano de  $f$  desde  $e$* .

Algunas propiedades importantes de las fibraciones de Grothendieck son las siguientes [13]:

- La composición de fibraciones de Grothendieck es fibración de Grothendieck.
- Las fibraciones de Grothendieck son estables por pullbacks.
- Si  $B$  y  $F$  son categorías pequeñas, la proyección canónica  $\pi_B: B \times F \rightarrow B$  es fibración de Grothendieck.
- Si  $p_0: E_0 \rightarrow B_0$  y  $p_1: E_1 \rightarrow B_1$  son fibraciones de Grothendieck, entonces el producto

$$p_0 \times p_1: E_0 \times E_1 \rightarrow B_0 \times B_1$$

es una fibración de Grothendieck.

- Si  $C$  es una categoría pequeña y  $p: E \rightarrow B$  es fibración de Grothendieck, entonces  $p^C: E^C \rightarrow B^C$  es fibración de Grothendieck.

**Definición 1.1.18.** Sean  $E$  y  $B$  categorías pequeñas y sea  $p: E \rightarrow B$  un functor. Un *clivaje (para  $p$ )* es una función  $\phi$  que a cada  $e \in E_0$  y a cada flecha  $f: b \rightarrow p(e)$  en  $B$  le asigna un levantado cartesiano  $\phi_e^f$  de  $f$  a  $e$ . El clivaje  $\phi$  se denomina *cerrado* si respeta identidades y composiciones, es decir, si  $\phi_e^{\text{Id}_{p(e)}} = \text{Id}_e$  para todo  $e \in E$  y  $\phi_e^{fg} = \phi_e^f \phi_{e'}^g$  para todo  $e \in E_0$ , toda flecha  $f: b' \rightarrow p(e)$  y toda flecha  $g: b'' \rightarrow b'$  en  $B$ , donde  $e' = s(\phi_e^f)$ .

Un *opclivaje (para  $p$ )* es una función  $\phi$  que a cada  $e \in E_0$  y a cada flecha  $f: p(e) \rightarrow b$  en  $B$  le asigna un levantado cocartesiano  $\phi_e^f$  de  $f$  desde  $e$ . El opclivaje  $\phi$  se denomina *cerrado* si respeta identidades y composiciones, es decir, si  $\phi_e^{\text{Id}_{p(e)}} = \text{Id}_e$  para todo  $e \in E$  y  $\phi_e^{gf} = \phi_{e'}^g \phi_e^f$  para todo  $e \in E_0$ , toda flecha  $f: b \rightarrow b'$  y toda flecha  $g: b' \rightarrow b''$  en  $B$ , donde  $e' = t(\phi_e^f)$ .

*Observación 1.1.19.* Por el axioma de elección, un functor entre categorías pequeñas es fibración de Grothendieck si y sólo si admite un clivaje, y es opfibración de Grothendieck si y sólo si admite un opclivaje.

**Definición 1.1.20.** Una fibración (resp. opfibración) de Grothendieck se denomina *escindida* si admite un clivaje (resp. opclivaje) cerrado.

Aclaremos que el término *fibración escindida* puede encontrarse en la bibliografía con un significado diferente pero muy relacionado con el que damos aquí. Una *fibración clivada* se define como un par  $(p, \phi)$  donde  $p$  es una fibración de Grothendieck y  $\phi$  es un clivaje para  $p$ . En este contexto, se suele denominar *fibración escindida* a una fibración clivada  $(p, \phi)$  en que  $\phi$  es un clivaje cerrado. Desde luego, si  $(p, \phi)$  es una fibración (clivada) escindida, entonces la fibración  $p$  es escindida según la definición adoptada en este trabajo.

## 1 Preliminares

---

Se observa en [37] que el conjunto de clivajes de un morfismo de grupos  $\varphi: G \rightarrow H$  (considerado como un functor entre categorías con un único objeto) está en correspondencia biunívoca con el conjunto de secciones de  $\varphi$  en **Set**, y que un clivaje es cerrado si y sólo si la sección de  $\varphi$  correspondiente resulta un morfismo de grupos (es decir, si es una sección de  $\varphi$  en **Grp**). Se sigue, por un lado, que todo epimorfismo de grupos es una fibración de Grothendieck, y por otro, que existen fibraciones de Grothendieck que no son escindidas.

**Ejemplo 1.1.21** ([69]). Consideremos a los grupos  $\mathbb{Z}$  y a  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{[0], [1]\}$  como categorías con un único objeto. Consideremos además el cociente canónico  $p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  como un functor.

Supongamos que  $\phi$  es un clivaje cerrado para  $p$ . Sea  $k = \phi_*^{[1]}$ . Es claro que  $k$  es un entero impar. Ahora bien,

$$0 = \text{Id}_* = \phi_*^{\text{Id}_*} = \phi_*^{[0]} = \phi_*^{[1]+[1]} = \phi_*^{[1]} + \phi_*^{[1]} = 2k \neq 0.$$

Este absurdo muestra que  $p$  no admite clivajes cerrados.

**Definición 1.1.22** ([37]). Sea  $B$  una categoría pequeña y sea  $F: B \rightarrow \mathbf{Cat}$  un functor (covariante). La *construcción de Grothendieck de (o sobre)  $F$*  es la categoría  $\int F$  junto con el functor  $\pi_B: \int F \rightarrow B$  definidos a continuación.

La categoría  $\int F$  tiene por objetos a los pares  $(b, x)$  tales que  $b \in B_0$  y  $x \in F(b)_0$ . Las flechas en  $\int F$  de  $(b, x)$  a  $(b', x')$  son los pares  $(f, g)$  donde  $f: b \rightarrow b'$  es una flecha en  $B$  y  $g: F(f)(x) \rightarrow x'$  es una flecha en  $F(b')$ . La composición en  $\int F$  está definida por

$$(f', g')(f, g) = (f'f, g'F(f')(g))$$

para flechas  $(f, g): (b, x) \rightarrow (b', x')$  y  $(f', g'): (b', x') \rightarrow (b'', x'')$  en  $\int F$ .

El functor  $\pi_B: \int F \rightarrow B$  es la proyección canónica a  $B$ , es decir,  $\pi_B(b, x) = b$  para todo objeto  $(b, x)$  de  $\int F$  y  $\pi_B(f, g) = f$  para toda flecha  $(f, g)$  de  $\int F$ .

**Definición 1.1.23.** Sea  $B$  una categoría pequeña y sea  $F: B \rightarrow \mathbf{Cat}$  un functor contravariante. La *construcción de Grothendieck de (o sobre)  $F$*  es la categoría  $\int F$  junto con el functor  $\pi_B: \int F \rightarrow B$  definidos a continuación.

Como en el caso covariante, la categoría  $\int F$  tiene por objetos a los pares  $(b, x)$  tales que  $b \in B_0$  y  $x \in F(b)_0$ . Las flechas en  $\int F$  de  $(b, x)$  a  $(b', x')$  son, en este caso, los pares  $(f, g)$  donde  $f: b \rightarrow b'$  es una flecha en  $B$  y  $g: x \rightarrow F(f)(x')$  es una flecha en  $F(b)$ . La composición en  $\int F$  está definida por

$$(f', g')(f, g) = (f'f, F(f)(g')g)$$

para flechas  $(f, g): (b, x) \rightarrow (b', x')$  y  $(f', g'): (b', x') \rightarrow (b'', x'')$  en  $\int F$ .

El functor  $\pi_B: \int F \rightarrow B$  es nuevamente la proyección canónica a  $B$ .

*Observación 1.1.24.* La construcción de Grothendieck sobre un functor contravariante de  $B$  a **Cat** se proyecta (de manera covariante) sobre  $B$ , mientras que la construcción de Grothendieck sobre un functor covariante de  $B^{\text{op}}$  a **Cat** se proyecta (de manera también covariante) sobre  $B^{\text{op}}$ . Esto muestra que las dos construcciones de Grothendieck que acabamos de definir son esencialmente distintas y no pueden interpretarse una en términos de la otra identificando funtores contravariantes de  $B$  en **Cat** con funtores covariantes de  $B^{\text{op}}$  en **Cat**.

Uno de los resultados principales de la teoría de fibraciones de Grothendieck se enuncia en términos de *pseudofuntores* y *2-categorías*. Establece que, para toda categoría pequeña  $B$ , la construcción de Grothendieck define una *equivalencia de 2-categorías* entre la *2-categoría de pseudofuntores contravariantes de  $B$  en  $\mathbf{Cat}$*  y la *2-categoría de fibraciones de Grothendieck sobre  $B$*  (Ver [13, Teorema 8.3.1] y [43, 1.3.6 de sección B1.3]).

En la sección VI.9 de [37] se observa que la construcción de Grothendieck se restringe a una equivalencia de categorías entre la categoría  $\mathbf{Cat}^{B^{\text{op}}}$  de funtores contravariantes de  $B$  en  $\mathbf{Cat}$  y transformaciones naturales y la categoría de *fibraciones de Grothendieck (clivadas) escindidas y morfismos clivados*. En particular, la construcción de Grothendieck para funtores contravariantes induce una biyección canónica entre (clases de isomorfismos de) funtores contravariantes de  $C$  en  $\mathbf{Cat}$  y (clases de isomorfismo de) fibraciones de Grothendieck escindidas sobre  $C$ .

A continuación damos algunos detalles de las construcciones involucradas en las equivalencias anteriormente mencionadas.

**Proposición 1.1.25.** *Sea  $B$  una categoría pequeña y sea  $F: B \rightarrow \mathbf{Cat}$  un funtor contravariante. Entonces  $\pi_B: \int F \rightarrow B$  es una fibración de Grothendieck escindida.*

*Demostración.* Observemos primero que si  $(b, x)$  es un objeto de  $\int F$  y  $f: b' \rightarrow b$  es una flecha en  $B$ , la flecha

$$(f, \text{Id}_{F(f)(x)}): (b', F(f)(x)) \rightarrow (b, x)$$

es un levantado de  $f$  a  $(b, x)$ .

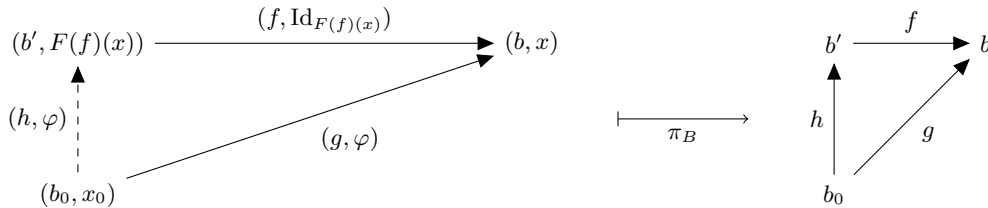
Ahora bien, si  $(b_0, x_0)$  es un objeto de  $\int F$ ,  $(g, \varphi): (b_0, x_0) \rightarrow (b, x)$  es una flecha en  $\int F$  y  $h: b_0 \rightarrow b'$  es una flecha en  $B$  tal que  $g = fh$ , entonces

$$(f, \text{Id}_{F(f)(x)})(h, \varphi) = (fh, F(h)(\text{Id}_{F(f)(x)}\varphi) = (g, \varphi).$$

Más aún, si  $(h', \varphi')$  es una flecha en  $\int F$  de  $(b_0, x_0)$  a  $(b', F(f)(x))$  tal que  $\pi_B(h', \varphi') = h$  y  $(f, \text{Id}_{F(f)(x)})(h', \varphi') = (g, \varphi)$ , se sigue que  $h' = h$  y que

$$(g, \varphi) = (f, \text{Id}_{F(f)(x)})(h', \varphi') = (fh, F(h)(\text{Id}_{F(f)(x)}\varphi') = (g, \varphi')$$

de donde es claro que  $\varphi = \varphi'$ . Así,  $(h, \varphi)$  es la única flecha de  $(b_0, x_0)$  a  $(b', F(f)(x))$  que hace conmutar el diagrama de la izquierda



Por lo tanto,  $(f, \text{Id}_{F(f)(x)})$  es un levantado cartesiano de  $f$  a  $(b, x)$ . Es fácil ver que la función  $\phi$  que a cada objeto  $(b, x)$  de  $\int F$  y a cada flecha  $f: b' \rightarrow b$  le asigna el levantado cartesiano  $(f, \text{Id}_{F(f)(x)})$  es un clivaje cerrado para  $\pi_B$ .  $\square$

Mostraremos ahora como construir, a partir de una fibración de Grothendieck escindida  $p: E \rightarrow B$ , un funtor contravariante de  $B$  en  $\mathbf{Cat}$  cuya construcción de Grothendieck es isomorfa a  $p$ .

## 1 Preliminares

---

**Teorema 1.1.26.** *Sean  $E$  y  $B$  categorías pequeñas y sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración de Grothendieck escindida. Entonces existe un funtor contravariante  $F_p: B \rightarrow \mathbf{Cat}$  tal que la proyección canónica  $\pi_B^{F_p}: \int F_p \rightarrow B$  es un objeto sobre  $B$  isomorfo a  $p$ .*

*Demostración.* Como hemos mencionado al principio de esta subsección, para cada objeto  $b$  de  $B$  tenemos una subcategoría  $p^{-1}(b)$  de  $E$  cuyos objetos son los objetos de  $E$  que se mapean sobre  $b$  por  $p$  y cuyas flechas son las flechas de  $E$  que se mapean sobre  $\text{Id}_b$  por  $p$ .

Sea  $\phi$  un clivaje cerrado para  $p$ . Veamos como construir, para cualquier flecha  $\phi: b' \rightarrow b$  en  $B$ , un funtor  $f^*: p^{-1}(b) \rightarrow p^{-1}(b')$ .

Sea  $f: b' \rightarrow b$  una flecha en  $B$ . Para todo  $e \in p^{-1}(b)$ , se tiene que  $f: b' \rightarrow p(e)$  y por lo tanto existe un levantado cartesiano  $\phi_e^f: e' \rightarrow e$  de  $f$  a  $e$ . Definimos entonces la función  $f^*: p^{-1}(b)_0 \rightarrow p^{-1}(b')_0$  por  $f^*(e) = s(\phi_e^f)$  para todo  $e \in p^{-1}(b)_0$ .

Necesitamos ahora definir  $f^*(\alpha)$  para toda flecha  $\alpha$  en  $p^{-1}(b)$ . Sea entonces  $\alpha: e_0 \rightarrow e_1$  una flecha en  $p^{-1}(b)$ . Dado que  $\phi_{e_1}^f$  es cartesiana, se sigue que existe una única flecha  $\tilde{\alpha}: s(\phi_{e_0}^f) \rightarrow s(\phi_{e_1}^f)$  tal que  $\phi_{e_1}^f \tilde{\alpha} = \alpha \phi_{e_0}^f$  y  $p(\tilde{\alpha}) = \text{Id}_{b'}$ . Podemos entonces definir  $f^*(\alpha) = \tilde{\alpha}$ . Es fácil verificar que  $f^*$  es un funtor.

Definimos la asignación  $F_p: B \rightarrow \mathbf{Cat}$  por  $F_p(b) = p^{-1}(b)$  para todo  $b \in B_0$  y por  $F_p(f) = f^*$  para toda  $f \in B_1$ . Es fácil también verificar que  $F_p$  es un funtor contravariante.

Ahora bien, existe un funtor canónico  $\gamma: \int F_p \rightarrow E$  definido por  $\gamma(b, e) = e$  para todo  $(b, e) \in \int F_p$  y por  $\gamma(f, g) = \phi_{e'}^f g$  para toda flecha  $(f, g): (b, e) \rightarrow (b', e')$  en  $\int F_p$ . Por otro lado, existe un funtor  $\delta: E \rightarrow \int F_p$  definido por  $\delta(e) = (p(e), e)$  para todo  $e \in E_0$  y por  $\delta(f) = (p(f), \tilde{f})$  para toda flecha  $f: e \rightarrow e'$  en  $E$ , donde  $\tilde{f}$  es la única flecha de  $e$  a  $s(\phi_{e'}^{p(f)})$  tal que  $\phi_{e'}^{p(f)} \tilde{f} = f$  y  $p(\tilde{f}) = \text{Id}_{p(e)}$ . No es difícil ver que  $\gamma$  y  $\delta$  son isomorfismos mutuamente inversos sobre  $B$  entre  $\pi_B^{F_p}$  y  $p$ . Así,  $\pi_B^{F_p}$  y  $p$  son objetos isomorfos sobre  $B$ .  $\square$

Resultados análogos a los aquí expuestos valen para funtores covariantes y opfibraciones de Grothendieck, utilizando desde luego, la construcción de Grothendieck para funtores covariantes correspondiente.

En el capítulo 4 daremos una definición de una construcción análoga que hemos denominado *construcción de Grothendieck topológica* que será de suma importancia en los capítulos 4 y 5.

### 1.1.5 Propiedades de levantamiento

Las propiedades de levantamiento ocupan un importante rol en la teoría de categorías de modelos desarrollada por D. Quillen [60], permitiendo el desarrollo de una “teoría de homotopía abstracta” en el contexto de la teoría de categorías.

Si bien las propiedades de levantamiento no resultan esenciales para este trabajo, haremos un breve desarrollo de algunos resultados que resultará conveniente tener a mano a la hora de desarrollar las nociones de levantamiento y extensión de homotopías.

Los resultados de esta subsección se demuestran mediante argumentos estándar. El lector interesado puede profundizar el desarrollo aquí expuesto así como su relación con el estudio de teoría de homotopía abstracta en [41].

**Definición 1.1.27.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y sean  $i: A \rightarrow B$  y  $p: X \rightarrow Y$  dos morfismos en  $\mathcal{C}$ . Decimos que  $i$  tiene la *propiedad de levantamiento a izquierda respecto de  $p$*  y que  $p$  tiene la *propiedad de levantamiento a derecha respecto de  $i$*  si para cualesquiera morfismos  $f: A \rightarrow X$  y  $g: B \rightarrow Y$  tales que  $pf = gi$  existe un morfismo  $h: B \rightarrow X$ , llamado *levantado de  $g$  por  $p$  (a partir de  $f$  a través de  $i$ )*, tal que  $hi = f$  y  $ph = g$ .

Esta situación puede ser representada en términos de diagramas conmutativos. En efecto,  $i$  tiene la propiedad de levantamiento a izquierda respecto de  $p$ , si cualquier diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

se puede completar, mediante un morfismo  $h: B \rightarrow X$ , a un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

**Ejemplo 1.1.28.** Si  $p: E \rightarrow B$  es un isomorfismo en una categoría  $\mathcal{C}$ , entonces para cualquier flecha  $i: A \rightarrow X$  en  $\mathcal{C}$  y cualquier par de flechas  $f: A \rightarrow E$  y  $g: X \rightarrow B$  en  $\mathcal{C}$  tales que  $pf = gi$ , tenemos que  $pp^{-1}g = g$  y  $p^{-1}gi = p^{-1}pf = f$ . Luego,  $p^{-1}g$  es un levantado de  $g$  por  $p$  a partir de  $f$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ i \downarrow & \nearrow p^{-1}g & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Así, todo isomorfismo en  $\mathcal{C}$  tiene la propiedad de levantamiento a derecha respecto de cualquier flecha.

De manera similar, todo isomorfismo en  $\mathcal{C}$  tiene la propiedad de levantamiento a izquierda respecto de cualquier flecha.

*Observación 1.1.29.* Es fácil ver que si una flecha  $p: E \rightarrow B$  en una categoría  $\mathcal{C}$  tiene la propiedad de levantamiento a derecha (o equivalentemente, a izquierda) respecto de sí misma, entonces es un isomorfismo. En efecto, dado que  $p\text{Id}_E = p = \text{Id}_B p$ , si  $p$  tuviera la propiedad de levantamiento a derecha respecto de sí misma, entonces existiría  $h: B \rightarrow E$  tal que  $ph = \text{Id}_B$  y  $hp = \text{Id}_E$ .



## 1 Preliminares

---

**Ejemplo 1.1.30.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría con objeto terminal  $*$ , sea  $E$  un objeto de  $\mathcal{C}$  y sea  $p: E \rightarrow *$  la única flecha posible. Entonces  $p$  tiene la propiedad de levantamiento a derecha respecto de las secciones.

En efecto, si  $i: A \rightarrow X$  es una sección y  $r: X \rightarrow A$  es tal que  $ri = \text{Id}_A$ , entonces para cualquier flecha  $f: A \rightarrow E$  se tiene que  $fri = f$  y por lo tanto  $fr$  es un levantado de la única flecha  $X \rightarrow *$  por  $p$  desde  $f$ .

De manera dual, si  $\mathcal{C}$  tiene objeto inicial  $\emptyset$  y  $X$  es un objeto de  $\mathcal{C}$ , entonces la única flecha de  $\emptyset$  a  $X$  tiene la propiedad de levantamiento a izquierda respecto de las retracciones.

**Proposición 1.1.31.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría, sea  $p: E \rightarrow B$  una flecha y sean  $i: X \rightarrow Y$  y  $j: Y \rightarrow Z$  flechas en  $\mathcal{C}$  que tienen la propiedad de levantamiento a izquierda respecto de  $p$ . Entonces  $ji$  tiene la propiedad de levantamiento a izquierda respecto de  $p$ .

*Demostración.* Sean  $f: X \rightarrow E$  y  $g: Z \rightarrow B$  flechas en  $\mathcal{C}$  tales que  $pf = gji$ . Dado que  $i$  tiene la propiedad de levantamiento a izquierda respecto de  $p$ , existe una flecha  $h: Y \rightarrow E$  tal que  $hi = f$  y  $ph = gj$ . Por otro lado, como  $j$  tiene la propiedad de levantamiento a izquierda respecto de  $p$ , existe una flecha  $k: Z \rightarrow E$  tal que  $kj = h$  y  $pk = g$ . Dado que  $kji = hi = f$ , se sigue que  $k$  es el levantado de  $g$  por  $p$  desde  $f$ . Luego,  $ji$  tiene la propiedad de levantamiento a izquierda respecto de  $p$ .  $\square$

Dualmente, se demuestra la siguiente proposición.

**Proposición 1.1.32.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría, sea  $i: A \rightarrow X$  una flecha y sean  $p: X \rightarrow Y$  y  $q: Y \rightarrow Z$  flechas en  $\mathcal{C}$  que tienen la propiedad de levantamiento a derecha respecto de  $i$ . Entonces  $qp$  tiene la propiedad de levantamiento a derecha respecto de  $i$ .

**Proposición 1.1.33.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría, sea  $i: A \rightarrow X$  una flecha en  $\mathcal{C}$  y sea  $\{p_j: E_j \rightarrow B_j\}_{j \in J}$  una colección, indexada por un conjunto  $J$ , de flechas en  $\mathcal{C}$  que tienen la propiedad de levantamiento a derecha respecto de  $i$ . El producto  $\prod_{j \in J} p_j$ , si existe, tiene la propiedad de levantamiento a derecha respecto de  $i$ .

*Demostración.* Supongamos que el producto

$$\prod_{j \in J} p_j: \prod_{j \in J} E_j \rightarrow \prod_{j \in J} B_j$$

existe. Para cada  $j \in J$  denotamos por  $\pi_{E_j}$  y por  $\pi_{B_j}$  a las proyecciones canónicas de  $\prod_{j \in J} E_j$  en  $E_j$  y de  $\prod_{j \in J} B_j$  en  $B_j$ , respectivamente. Entonces  $p_j \pi_{E_j} = \pi_{B_j} \prod_{j \in J} p_j$  para todo  $j \in J$ .

Sean ahora  $f: A \rightarrow \prod_{j \in J} E_j$  y  $g: X \rightarrow \prod_{j \in J} B_j$  flechas en  $\mathcal{C}$  tales que  $\left( \prod_{j \in J} p_j \right) f = gi$ . Entonces,  $p_j \pi_{E_j} f = \pi_{B_j} gi$  para todo  $j \in J$  y por lo tanto, para cada  $j \in J$  existe  $h_j: X \rightarrow E_j$  tal que  $p_j h_j = \pi_{B_j} g$  y  $h_j i = \pi_{E_j} f$ . Sea  $h: X \rightarrow \prod_{j \in J} E_j$  la flecha inducida por la colección de flechas  $\{h_j\}_{j \in J}$ .

Tenemos, por un lado, que

$$\pi_{B_j} \left( \prod_{j \in J} p_j \right) h = p_j \pi_{E_j} h = p_j h_j = \pi_{B_j} g$$

para todo  $j \in J$  de donde se sigue que  $\left( \prod_{j \in J} p_j \right) h = g$ .

Por otro lado, tenemos que

$$\pi_{E_j} h i = h_j i = \pi_{E_j} f$$

para todo  $j \in J$  de donde se sigue que  $h i = f$ . Así,  $h$  es el levantado de  $g$  por  $\prod_{j \in J} p_j$  a partir de  $f$ .  $\square$

Tenemos además el siguiente resultado, dual de 1.1.33.

**Proposición 1.1.34.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría, sea  $p: E \rightarrow B$  una flecha en  $\mathcal{C}$  y sea  $\{i_j: A_j \rightarrow X_j\}_{j \in J}$  una colección, indexada por un conjunto  $J$ , de flechas en  $\mathcal{C}$  que tienen la propiedad de levantamiento a izquierda respecto de  $p$ . El coproducto  $\coprod_{j \in J} i_j$ , si existe, tiene la propiedad de levantamiento a izquierda respecto de  $p$ .*

Como probamos a continuación, la propiedad de levantamiento a izquierda es preservada por retracciones y pushouts, mientras que la propiedad de levantamiento a derecha es preservada por retracciones y pullbacks.

**Proposición 1.1.35.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría, sean  $i: A \rightarrow B$  y  $p: X \rightarrow Y$  morfismos en  $\mathcal{C}$  y sea  $i': A' \rightarrow B'$  un retracto de  $i$ . Si  $i$  tiene la propiedad de levantamiento a izquierda respecto de  $p$ , entonces  $i'$  también la tiene. Equivalentemente, si  $p$  tiene la propiedad de levantamiento a derecha respecto de  $i$  entonces tiene la propiedad de levantamiento a derecha respecto de  $i'$ .*

*Demostración.* Sean  $f: A' \rightarrow X$  y  $g: B' \rightarrow Y$  flechas en  $\mathcal{C}$  tales que  $pf = gi'$ . Dado que  $i'$  es retracto de  $i$ , existen morfismos  $(s, s'): i' \rightarrow i$  y  $(r, r'): i \rightarrow i'$  en la categoría de flechas de  $\mathcal{C}$  tales que  $(r, r')(s, s') = \text{Id}_{i'}$ . En particular,  $i'r = r'i$ . Tenemos entonces que  $pf r = gr'i$  y dado que  $i$  tiene la propiedad de levantamiento a izquierda respecto de  $p$ , se sigue que existe un morfismo  $\tilde{h}: B \rightarrow X$  en  $\mathcal{C}$  tal que  $\tilde{h}i = fr$  y  $p\tilde{h} = gr'$ . Sea  $h = \tilde{h}s'$ . Entonces  $hi' = \tilde{h}s'i' = \tilde{h}is = frs = f$  y  $ph = p\tilde{h}s' = gr's' = g$ . El resultado se sigue.  $\square$

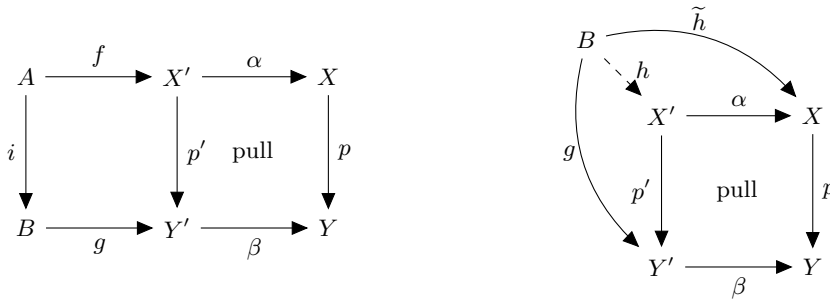
Dualmente se demuestra la siguiente proposición.

**Proposición 1.1.36.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría, sean  $i: A \rightarrow B$  y  $p: X \rightarrow Y$  morfismos en  $\mathcal{C}$  y sea  $p': X' \rightarrow Y'$  un retracto de  $p$ . Si  $p$  tiene la propiedad de levantamiento a derecha respecto de  $i$ , entonces  $p'$  también la tiene. Equivalentemente, si  $i$  tiene la propiedad de levantamiento a izquierda respecto de  $p$  entonces tiene la propiedad de levantamiento a izquierda respecto de  $p'$ .*

## 1 Preliminares

**Proposición 1.1.37.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría, sean  $i: A \rightarrow B$ ,  $p: X \rightarrow Y$  y  $\beta: Y' \rightarrow Y$  morfismos en  $\mathcal{C}$  y sea  $p': X' \rightarrow Y'$  un pullback de  $p$  a lo largo de  $\beta$ . Si  $p$  tiene la propiedad de levantamiento a derecha respecto de  $i$ , entonces  $p'$  también la tiene.*

*Demostración.* Sean  $f: A \rightarrow X'$  y  $g: B \rightarrow Y'$  morfismos en  $\mathcal{C}$  tales que  $p'f = gi$ . Sea  $\alpha: X' \rightarrow X$  el pullback de  $\beta$  a lo largo de  $p$  tal que  $p\alpha = \beta p'$ . Tenemos entonces que  $\beta gi = \beta p'f = p\alpha f$ , y puesto que  $p$  tiene la propiedad de levantamiento a derecha respecto de  $i$ , entonces existe  $h: B \rightarrow X$  tal que  $hi = \alpha f$  y  $ph = \beta g$ . Existe entonces un único  $\tilde{h}: B \rightarrow X'$  tal que  $\alpha\tilde{h} = h$  y  $p'\tilde{h} = g$ .



Para ver que  $p'$  tiene la propiedad de levantamiento a derecha respecto de  $i$ , falta probar que  $hi = f$ . Ahora bien,  $\alpha\tilde{h}i = \tilde{h}i = \alpha f$  y  $p'\tilde{h}i = gi = p'f$ . Por propiedad universal del pullback,  $hi = f$ . Se sigue que  $p'$  tiene la propiedad de levantamiento a derecha respecto de  $i$ .  $\square$

Se tiene asimismo el resultado dual siguiente.

**Proposición 1.1.38.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría, sean  $i: A \rightarrow B$ ,  $p: X \rightarrow Y$  y  $\alpha: A \rightarrow A'$  morfismos en  $\mathcal{C}$  y sea  $i': A' \rightarrow B'$  el pushout de  $i$  a lo largo de  $\alpha$ . Si  $i$  tiene la propiedad de levantamiento a izquierda respecto de  $p$ , entonces  $i'$  también la tiene.*

## 1.2 Espacios Topológicos Finitos

En esta sección expondremos la teoría básica de *espacios topológicos finitos*, es decir, de espacios topológicos con una cantidad finita de elementos.

El desarrollo de la teoría de espacios topológicos finitos fue iniciado por Pavel Alexandroff en [3] al establecer una correspondencia biunívoca entre los conjuntos preordenados y los espacios topológicos que hoy llevan su nombre, la cual se restringe a una correspondencia biunívoca entre los conjuntos preordenados finitos y los espacios topológicos finitos. Este desarrollo fue posteriormente enriquecido por los aportes de Robert Stong [68], quien estudió tipos de homotopía de espacios topológicos finitos mediante herramientas combinatorias, y Michael McCord [51], quien utilizó complejos simpliciales y poliedros para estudiar invariantes homotópicos débiles de espacios topológicos finitos.

Hasta principios de la década del 2000, la teoría de espacios topológicos finitos continuó lentamente su desarrollo en trabajos como [77, 56, 39, 38]. En el año 2003, los resultados más importantes de esta teoría conocidos hasta el momento fueron recopilados por J. P.

May en [49], trabajo que inspiró a otros investigadores y alumnos a continuar con el estudio y el posterior desarrollo de la misma.

Los principales avances en el estudio de los espacios topológicos finitos surgidos a continuación del trabajo de May pueden encontrarse en [7, 9, 8, 61, 5, 10, 53, 18, 6, 29, 50, 20, 72]. Las referencias principales para esta sección son [5] y [50].

### 1.2.1 Espacios de Alexandroff y conjuntos preordenados

Comenzamos esta sección recordando la definición de *espacio de Alexandroff* y mostrando, a continuación, una conocida equivalencia entre espacios de Alexandroff y conjuntos preordenados que utilizaremos a lo largo de todo este trabajo.

**Definición 1.2.1.** Sea  $X$  un espacio topológico. Decimos que  $X$  es un *espacio (topológico) de Alexandroff* o *A-espacio* si la intersección arbitraria de abiertos de  $X$  es un conjunto abierto.

**Ejemplo 1.2.2.** Todo espacio topológico finito es de Alexandroff.

En un espacio de Alexandroff tiene sentido la noción de *abierto minimal*.

**Definición 1.2.3.** Sea  $X$  un espacio de Alexandroff. Para todo  $x \in X$ , definimos el *abierto minimal de  $x$  en  $X$*  como la intersección de todos los abiertos de  $X$  que contienen a  $x$ . Este conjunto, que es claramente abierto, será denotado por  $U_x^X$ , o simplemente por  $U_x$  si el espacio  $X$  está sobreentendido.

Definimos la *base minimal* de  $X$  como el conjunto

$$\mathcal{B} = \{U_x : x \in X\}.$$

Es fácil ver que  $\mathcal{B}$  es una base para la topología de  $X$  y que cualquier otra base para  $X$  contiene a  $\mathcal{B}$ , de donde es claro que  $\mathcal{B}$  es base minimal en el sentido de la inclusión.

*Observación 1.2.4.* Sea  $X$  un espacio de Alexandroff y sea  $Y$  un espacio topológico cualquiera. Si  $(x, y) \in X \times Y$  y  $U$  es un entorno abierto de  $(x, y)$ , entonces  $U_x \times \{y\} \subseteq U$ .

*Observación 1.2.5.* Si  $X$  es un espacio de Alexandroff, es evidente que  $U_x$  es compacto para todo  $x \in X$ . De la proposición 1.1.4 se sigue que los espacios de Alexandroff son exponenciabiles.

Existe una correspondencia biunívoca entre espacios topológicos de Alexandroff y conjuntos preordenados dada por las siguientes construcciones, mutuamente inversas.

**Definición 1.2.6.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio de Alexandroff. Definimos en  $X$  la relación  $\leq_\tau$  por

$$x \leq_\tau y \Leftrightarrow U_x \subseteq U_y$$

para  $x, y \in X$ .

Es claro que  $\leq_\tau$  es reflexiva y transitiva. Así,  $(X, \leq_\tau)$  es un conjunto preordenado.

Además, no es difícil ver que  $\leq_\tau$  es antisimétrica si y sólo si  $X$  es un espacio  $T_0$ , en cuyo caso, se sigue que  $(X, \leq_\tau)$  es un conjunto parcialmente ordenado, o poset.

## 1 Preliminares

---

**Definición 1.2.7.** Sea  $(X, \leq)$  un conjunto preordenado. Decimos que un subconjunto  $S$  de  $X$  es una *sección inicial* (resp. *final*) de  $X$  si para cualquier  $x \in S$  y cualquier  $y \leq x$  (resp.  $y \geq x$ ), se cumple que  $y \in S$ .

Definimos el conjunto

$$\tau_{\leq} = \{S \subseteq X : S \text{ es sección inicial de } X\}.$$

No es difícil ver que el conjunto  $\tau_{\leq}$  es una topología en  $X$ . Dado que la intersección arbitraria de secciones iniciales es una sección inicial, se sigue que el espacio  $(X, \tau_{\leq})$  es un espacio topológico de Alexandroff. Más aún, es fácil ver que  $(X, \tau_{\leq})$  es  $T_0$  si y sólo si  $\leq$  es un orden parcial.

Las construcciones que acabamos de definir son mutuamente inversas, esto es, para todo espacio topológico de Alexandroff  $(X, T)$ , se tiene que

$$T = \tau_{\leq_T}$$

y para todo conjunto preordenado  $(X, \preceq)$  se tiene que

$$\preceq = \leq_{\tau_{\preceq}}.$$

Estas establecen, para cada conjunto  $X$ , una correspondencia biunívoca entre topologías de Alexandroff en  $X$  y preórdenes en  $X$ , que se restringe a su vez a una correspondencia biunívoca entre topologías de Alexandroff  $T_0$  en  $X$  y órdenes parciales en  $X$ .

Por otro lado, es también fácil ver que las funciones continuas entre espacios de Alexandroff son precisamente los morfismos de preórdenes entre los conjuntos preordenados correspondientes. Así, la categoría **ATop** que es la subcategoría plena de **Top** cuyos objetos son los espacios de Alexandroff es isomorfa a la categoría **Ord** de conjuntos preordenados y morfismos de preórdenes, que a su vez puede ser considerada una subcategoría plena de **Cat**. Del mismo modo, la categoría **ATop**<sub>0</sub>, que es la subcategoría plena de **Top** cuyos objetos son los espacios de Alexandroff  $T_0$  es isomorfa a la categoría **Pos** de conjuntos parcialmente ordenados y morfismos de órdenes.

Así, a lo largo de este trabajo, identificaremos a las categorías **ATop** y **Ord** y las consideraremos subcategorías plenas de **Top** y de **Cat** sin volver a mencionarlo explícitamente. De manera similar, identificaremos a las categorías **ATop**<sub>0</sub> y **Pos** y las consideraremos como subcategorías plenas de las anteriores.

*Observación 1.2.8.* El espacio de Sierpinski es el espacio  $\{0, 1\}$  cuyo único abierto no trivial es el conjunto  $\{0\}$ . El poset asociado a este espacio es el ordinal  $\mathcal{S} = [1] = \{0, 1\}$  con el orden usual. En adelante, por lo tanto, el espacio de Sierpinski será denotado por  $\mathcal{S}$ .

Notemos que, bajo la identificación antedicha, los subconjuntos abiertos de un espacio de Alexandroff corresponden a las secciones iniciales del mismo, mientras que los subconjuntos cerrados corresponden a las secciones finales.

Cuando no haya lugar a confusión, el orden en un espacio de Alexandroff será denotado simplemente por  $\leq$ . Como es usual, notaremos por  $\geq$  al orden opuesto a  $\leq$ , y por  $<$  y  $>$  a los órdenes parciales estrictos asociados a  $\leq$  y a  $\geq$ , respectivamente.

**Definición 1.2.9.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio de Alexandroff. Definimos el espacio  $X^{\text{op}}$ , denominado *espacio opuesto de  $X$*  como el espacio (de Alexandroff) sobre el conjunto  $X$  que tiene por abiertos a los cerrados de  $(X, \tau)$ .

Equivalentemente, si denotamos por  $\leq$  el orden en  $X$  y por  $\geq$  al orden inverso a este, el espacio  $X^{\text{op}}$  es el espacio de Alexandroff asociado a  $\geq$ .

Observemos que si  $f: X \rightarrow Y$  es una función continua entre espacios de Alexandroff, o equivalentemente, un morfismo de órdenes, entonces puede ser considerada como un morfismo de órdenes, y por lo tanto como una función continua,

$$f^{\text{op}}: X^{\text{op}} \rightarrow Y^{\text{op}}.$$

Es claro que  $(\text{Id}_X)^{\text{op}} = \text{Id}_{X^{\text{op}}}$  para todo espacio de Alexandroff  $X$  y que  $(gf)^{\text{op}} = g^{\text{op}}f^{\text{op}}$  para funciones continuas  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  entre espacios de Alexandroff  $X, Y$  y  $Z$ . Así, podemos considerar a  $-^{\text{op}}$  como un endofunctor de la categoría de espacios de Alexandroff que se restringe a un endofunctor de la categoría de espacios de Alexandroff  $\mathbf{T}_0$ .

**Definición 1.2.10.** Sea  $X$  un espacio de Alexandroff y sea  $x \in X$ . Definimos

- $F_x^X = \{y \in X : y \geq x\}$ , o equivalentemente,  $F_x^X = \overline{\{x\}} = U_x^{X^{\text{op}}}$ .
- $C_x^X = U_x^X \cup F_x^X$ .
- $\widehat{U}_x^X = U_x^X - \{x\}$ .
- $\widehat{F}_x^X = F_x^X - \{x\}$ .
- $\widehat{C}_x^X = C_x^X - \{x\}$ .

Cuando no haya riesgo de confusión, notaremos  $F_x^X, C_x^X, \widehat{U}_x^X, \widehat{F}_x^X$  y  $\widehat{C}_x^X$  respectivamente por  $F_x, C_x, \widehat{U}_x, \widehat{F}_x$  y  $\widehat{C}_x$ .

Conviene tener presente que si  $X$  es un poset y  $x \in X$ , entonces los elementos menores o iguales a  $x$  corresponden a objetos *sobre  $x$* , de modo que la categoría  $X/x$  es precisamente  $U_x$ . Del mismo modo, los elementos mayores o iguales a  $x$  corresponden a objetos *bajo  $x$*  y por lo tanto  $x \setminus X$  es la categoría  $F_x$ .

*Notación.* Sea  $X$  un poset.

- Denotaremos por  $\text{mnl}(X)$  al conjunto de elementos minimales de  $X$ .
- Denotaremos por  $\text{mxl}(X)$  al conjunto de elementos maximales de  $X$ .
- Si el conjunto  $X$  tiene mínimo, este será denotado por  $\min(X)$ .
- Si el conjunto  $X$  tiene máximo, este será denotado por  $\max(X)$ .

### 1.2.2 Algunas construcciones asociadas a espacios finitos

Las siguientes dos construcciones fueron definidas en [51] y son de especial interés en el estudio de espacios topológicos finitos.

**Definición 1.2.11.** Sea  $X$  un espacio topológico. El *cono no Hausdorff* de  $X$  es el espacio  $\mathbb{C}X$  sobre el conjunto  $X \sqcup \{+\}$  cuyos abiertos son los abiertos de  $X$  y el propio  $X \sqcup \{+\}$ .

No es difícil ver que el espacio  $\mathbb{C}X$  es contráctil para todo espacio topológico  $X$ .

**Definición 1.2.12.** Sea  $X$  un espacio topológico. La *suspensión no Hausdorff* de  $X$  es el espacio  $\mathbb{S}X$  sobre el conjunto  $X \sqcup \{+, -\}$  cuyos abiertos son los abiertos de  $X$  y los conjuntos  $X \cup \{+\}$ ,  $X \cup \{-\}$  y el propio  $X \sqcup \{+, -\}$ .

McCord muestra en [51] que, para todo espacio topológico  $X$ , el espacio  $\mathbb{S}X$  es débilmente equivalente al espacio  $\Sigma X$ , la suspensión clásica de  $X$ . En particular, el espacio  $\mathbb{S}^n \mathbb{S}^0$  es débilmente equivalente a  $\Sigma^n \mathbb{S}^0 \cong S^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

La siguiente definición de [9] puede interpretarse como un análogo discreto del cilindro mapeante para funciones continuas entre espacios topológicos finitos  $T_0$  (ver también [5]).

**Definición 1.2.13.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos finitos  $T_0$  y sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua. El *cilindro mapeante no Hausdorff* de  $f$  es el espacio  $\mathbb{B}(f)$  cuyo conjunto subyacente es  $X \sqcup Y$  y cuya topología es la inducida por el siguiente orden en  $\mathbb{B}(f)$ :

$$z \leq z' \text{ en } \mathbb{B}(f) \text{ si y sólo si } \begin{cases} z \leq z' \text{ en } X & \text{si } z, z' \in X, \\ f(z) \leq z' \text{ en } Y & \text{si } z \in X \text{ y } z' \in Y, \text{ o} \\ z \leq z' \text{ en } Y & \text{si } z, z' \in Y. \end{cases}$$

Las inclusiones canónicas de  $X$  e  $Y$  en  $\mathbb{B}(f)$  serán denotadas por  $j_X$  y  $j_Y$ , respectivamente.

En particular, el cono no Hausdorff de un espacio topológico finito  $T_0$  coincide con el cilindro mapeante no Hausdorff de la única función de dicho espacio al singleton.

En el artículo [29], se define el *colímite homotópico no Hausdorff de posets finitos* como la construcción de Grothendieck sobre un diagrama de posets finitos indexado por un poset finito. Es claro que esta definición se puede extender a conjuntos preordenados, o espacios de Alexandroff.

**Definición 1.2.14.** Sea  $B$  un espacio de Alexandroff y sea  $F: B \rightarrow \mathbf{Ord}$  un funtor. Sea  $\iota: \mathbf{Ord} \rightarrow \mathbf{Cat}$  el funtor inclusión. Se define el *colímite homotópico no Hausdorff de  $F$*  como la construcción de Grothendieck sobre el funtor  $\iota F$ .

Explícitamente, el colímite homotópico no Hausdorff de un diagrama  $F: B \rightarrow \mathbf{Ord}$  es el conjunto preordenado

$$\text{Obj} \left( \int \iota F \right) = \{(b, x) : b \in B \text{ y } x \in F(b)\} = \bigcup_{b \in B} \{b\} \times F(b)$$

con el preorden  $\leq$  definido por

$$(b, x) \leq (b', x') \Leftrightarrow b \leq b' \text{ y } F(b \leq b')(x) \leq x'$$

para  $(b, x), (b', x') \in \text{Obj}(\int \iota F)$ .

Se observa además en [29] que si un diagrama  $D$  de posets finitos está indexado por el espacio de Sierpinski (es decir,  $D$  es un funtor de  $\mathcal{S}$  en  $\mathbf{FinTop}_0$ ), entonces el colímite homotópico no Hausdorff de  $D$  no es otra cosa que el cilindro mapeante no Hausdorff de la función  $D(0 \leq 1)$ . Se sigue, en particular, que el cono no Hausdorff de un espacio finito  $T_0 X$  es el colímite homotópico no Hausdorff del diagrama

$$X \rightarrow *$$

No es difícil ver que la suspensión no Hausdorff de un espacio de Alexandroff  $X$  se puede asimismo modelar como el colímite homotópico no Hausdorff del diagrama

$$* \leftarrow X \rightarrow *$$

### 1.2.3 Conexión y arcoconexión de A-espacios

**Lema 1.2.15.** *Sea  $X$  un espacio topológico de Alexandroff y sean  $x, y \in X$  tales que  $x \leq y$ . Entonces existe un camino en  $\{x, y\}$  de  $x$  a  $y$ .*

*Demostración.* No es difícil ver que la función  $\eta(x \leq y): I \rightarrow X$  definida por

$$\eta(x \leq y)(t) = \begin{cases} x & \text{si } t < 1, \\ y & \text{si } t = 1, \end{cases}$$

resulta continua y es, por lo tanto, un camino en  $\{x, y\}$  de  $x$  a  $y$ . □

Dado que el camino definido en la prueba anterior es, de alguna manera, una elección canónica para los caminos en  $X$  de  $x$  a  $y$ , adoptaremos la siguiente definición.

**Definición 1.2.16.** *Sea  $X$  un espacio de Alexandroff y sean  $x, y \in B$  tales que  $x \leq y$ . Definimos el camino  $\eta(x \leq y): I \rightarrow B$  por*

$$\eta(x \leq y)(t) = \begin{cases} x & \text{si } t < 1, \\ y & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Definimos, por otro lado, el camino  $\eta(y \geq x): I \rightarrow B$  por

$$\eta(y \geq x)(t) = \begin{cases} y & \text{si } t = 0, \\ x & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Así, el camino  $\eta(y \geq x)$  es el camino inverso de  $\eta(x \leq y)$ .

Se deduce fácilmente del lema anterior, que si  $X$  es un espacio de Alexandroff, entonces  $U_x$  es arcoconexo para todo  $x \in X$ . Se sigue que los espacios de Alexandroff son localmente conexos y localmente arcoconexos. Veremos más adelante que los espacios de Alexandroff son localmente contráctiles.

Siguiendo la terminología clásica, diremos que dos objetos  $x$  e  $y$  de una categoría pequeña  $\mathcal{C}$  están *conectados (por caminos)* si existen una colección finita de objetos  $\{x_i\}_{i=0}^n$



## 1 Preliminares

---

de  $\mathcal{C}$  tales que  $x_0 = x$  y  $x_n = y$ , y una colección finita de flechas  $\{f_i\}_{i=0}^{n-1}$  de  $\mathcal{C}$  tales que  $f_i: x_i \rightarrow x_{i+1}$  o  $f_i: x_{i+1} \rightarrow x_i$  para todo  $i = 0, \dots, n-1$ . La categoría  $\mathcal{C}$  se denomina *conexa* si para cualesquiera  $x, y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ ,  $x$  e  $y$  están conectados.

La relación “estar conectados por caminos” es una relación de equivalencia en  $\text{Obj}(\mathcal{C})$  cuyas clases de equivalencia se denominan *componentes conexas*. Haciendo abuso de lenguaje, diremos que una subcategoría plena  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{C}$  es una componente conexa de  $\mathcal{C}$  si  $\text{Obj}(\mathcal{D})$  lo es. Es sabido que toda categoría pequeña es isomorfa al coproducto de sus componentes conexas [45, Ejercicio 7 de Sección IV.2].

No es difícil ver entonces que un conjunto preordenado  $X$  es conexo como categoría si y sólo si para cualquier par de objetos  $x$  e  $y$  en  $X$ , existe una colección finita  $\{x_i\}_{i=0}^n$  de puntos de  $X$  tal que  $x = x_0$ ,  $y = x_n$  y  $x_i$  es comparable con  $x_{i+1}$  para todo  $i = 0, \dots, n-1$ . Esta es, de hecho, una de las definiciones usuales de conexión de conjuntos preordenados. Así, un espacio de Alexandroff es conexo como categoría si y sólo si lo es como conjunto preordenado.

**Proposición 1.2.17.** *Sea  $X$  un espacio topológico de Alexandroff. Son equivalentes:*

- (1)  $X$  es arcoconexo.
- (2)  $X$  es conexo.
- (3)  $X$  es un conjunto preordenado conexo.
- (4)  $X$  es una categoría conexa.

*Demostración.* Es claro que (1) implica (2). Por otro lado, (3) implica (1) en virtud del lema anterior y, como hemos observado, es trivialmente equivalente a (4).

Falta ver que (2) implica (3). Supongamos entonces que  $X$  es conexo y tomemos  $x \in X$ . Queremos probar que para todo  $y \in X$ , existe una colección finita  $\{x_i\}_{i=0}^n$  de elementos de  $X$  tal que  $x = x_0$ ,  $y = x_n$  y  $x_i$  es comparable con  $x_{i+1}$  para todo  $i = 0, \dots, n-1$ . Sea entonces  $A$  el conjunto de los puntos  $y$  de  $X$  para los cuales existe una tal colección. Es fácil ver que  $A$  es sección inicial y sección final, de donde obtenemos que  $A$  es abierto y cerrado en  $X$ . Dado que  $x \in A$  y  $X$  es conexo, se concluye que  $A = X$  y el resultado se sigue.  $\square$

**Corolario 1.2.18.** *Sea  $X$  un espacio de Alexandroff y sean  $x, y \in X$ . Si existe un camino en  $X$  de  $x$  a  $y$ , entonces existen elementos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  en  $X$  tales que*

$$x = x_0 \leq x_1 \geq x_2 \leq \dots \leq x_n = y.$$

### 1.2.4 Espacios de funciones entre espacios topológicos finitos

Si  $X$  e  $Y$  son espacios topológicos finitos, el espacio  $Y^X$  también lo es. El siguiente teorema nos dará una descripción explícita del preorden en  $Y^X$ .

**Proposición 1.2.19.** *Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos finitos y sean  $f, g \in Y^X$ . Entonces  $f \leq g$  si y sólo si  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in X$ . En otras palabras, el preorden correspondiente al espacio topológico  $Y^X$  no es otro que el preorden puntual.*

*Demostración.* Supongamos que  $f \leq g$  y sea  $x \in X$ . Dado que  $g(x) \in U_{g(x)}$ , tenemos entonces que  $W(\{x\}, U_{g(x)})$  es un entorno abierto de  $g$  en  $Y^X$ . Se sigue que  $f \in U_g \subseteq W(\{x\}, U_{g(x)})$  y por lo tanto, que  $f(x) \leq g(x)$ .

Supongamos ahora que  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in X$ . Para todo  $K \subseteq X$  compacto y todo  $U \subseteq Y$  abierto tales que  $g \in W(K, U)$ , tenemos que  $f(x) \leq g(x) \in U$  para todo  $x \in K$ , de donde es claro que  $f \in W(K, U)$ . Así,  $f$  pertenece a todo abierto de subbase que contenga a  $g$ . No es difícil concluir que  $f \in U_g$  y por lo tanto, que  $f \leq g$ .  $\square$

Observemos que si  $X$  es un espacio topológico finito entonces satisface trivialmente las condiciones de la proposición 1.1.4. En particular, si  $X$  e  $Y$  son espacios topológicos finitos y  $f, g: X \rightarrow Y$  son funciones continuas tales que  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in X$ , entonces  $f \leq g$  en  $Y^X$  de donde se sigue que existe un camino en  $Y^X$  de  $f$  a  $g$ , y por lo tanto, que  $f$  es homotópica a  $g$ .

El siguiente resultado es una generalización de [5, Corolario 1.2.6] que incluye a [71, Lema 3.4]. La prueba es, esencialmente, la de las pruebas dadas en estas referencias.

**Proposición 1.2.20.** *Sean  $X, Y$  y  $B$  espacios topológicos finitos, sea  $A \subseteq X$  y sean  $p: X \rightarrow B$  y  $q: Y \rightarrow B$  funciones continuas, consideradas como objetos sobre  $B$ . Sean  $f, g: X \rightarrow Y$  funciones continuas tales que  $f|_A = g|_A$  y  $qf = qg = p$ , consideradas como flechas sobre  $B$  de  $p$  a  $q$ .*

- (1) *Si  $f \leq g$ , entonces  $f$  es homotópica por fibras a  $g$  relativa a  $A$ .*
- (2) *Si  $f$  y  $g$  son homotópicas por fibras relativas a  $A$ , entonces existen funciones continuas  $f_0, f_1, \dots, f_n$  sobre  $B$  de  $p$  a  $q$  cuyas restricciones a  $A$  coinciden con la de  $f$ , tales que  $f = f_0 \leq f_1 \geq \dots \leq f_n = g$ .*

*Demostración.* Sea  $i: A \hookrightarrow X$  la inclusión y consideremos las funciones

$$Y^i: Y^X \rightarrow Y^A$$

y

$$q^X: Y^X \rightarrow B^X.$$

Sea  $\Omega = (Y^i)^{-1}(f|_A) \cap (q^X)^{-1}(p)$ . Notemos que  $f$  y  $g$  pertenecen a  $\Omega$ .

Veamos (1). Supongamos que  $f \leq g$ . Entonces  $f$  y  $g$  son elementos comparables de  $\Omega$  y por lo tanto existe un camino  $\eta(f \leq g)$  contenido en  $\Omega$  de  $f$  a  $g$ . Es fácil verificar que la homotopía  $\eta(f \leq g)^b$  inducida por  $\eta(f \leq g)$  por la ley exponencial es una homotopía por fibras de  $f$  a  $g$  relativa a  $A$ .

La proposición (2) se demuestra de manera similar. Supongamos que  $f$  y  $g$  son homotópicas por fibras relativas a  $A$  y sea  $H: X \times I \rightarrow Y$  una homotopía sobre  $B$  relativa a  $A$  de  $f$  a  $g$ .

Consideremos el camino  $H^\sharp: I \rightarrow Y^X$  inducido por  $H$  por la ley exponencial. Es claro que  $Y^i H^\sharp$  es el camino (en  $Y^A$ ) constante igual a  $f|_A$  y que  $q^X H^\sharp$  es el camino (en  $B^X$ ) constante igual a  $p$ . Se sigue que  $H^\sharp$  es un camino en  $Y^X$  de  $f$  a  $g$  contenido en  $\Omega$ .

Por el corolario 1.2.18, existen  $f_0, f_1, \dots, f_n$  en  $\Omega$  tales que  $f = f_0, g = f_n$  y

$$f_0 \leq f_1 \geq \dots \leq f_n.$$

Es claro que  $f_j|_A = Y^i(f_j) = f|_A$  y que  $qf_j = q^X(f_j) = p$  para todo  $j = 0, \dots, n$ .  $\square$

## 1 Preliminares

---

Desde luego, tomando  $B = *$  en la proposición anterior obtenemos [5, Corolario 1.2.6] mientras que tomando  $A = \emptyset$  obtenemos [71, Lema 3.4].

Si bien los espacios de Alexandroff son exponenciabiles, no es cierto en general que el espacio  $Y^X$  tenga la topología del orden puntual. De hecho, tomando  $X = \mathbb{N}$  con la topología discreta es fácil ver que  $\mathcal{S}^X$  no es siquiera un espacio de Alexandroff.

Sin embargo, el siguiente resultado permite ver que las funciones continuas a espacios de Alexandroff que son comparables punto a punto (en un mismo sentido) son homotópicas.

**Proposición 1.2.21.** *Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos con  $Y$  espacio de Alexandroff y sean  $f, g: X \rightarrow Y$  funciones continuas tales que  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in X$ . Sea  $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ . Entonces  $f \simeq g$  (rel  $A$ ).*

*Demostración.* Definimos la función  $H: X \times I \rightarrow Y$  por

$$H(x, t) = \begin{cases} f(x) & \text{si } t < 1, \\ g(x) & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Es claro que  $Hi_0 = f$ , que  $Hi_1 = g$  y que  $H(a, t) = f(a) = g(a)$  para todo  $a \in A$ .

Notemos que si  $U$  es un abierto de  $Y$ , entonces  $f(x) \leq g(x) \in U$  para todo  $x \in g^{-1}(U)$ . Se sigue que  $g^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(U)$ . Luego

$$H^{-1}(U) = g^{-1}(U) \times \{1\} \cup f^{-1}(U) \times [0, 1) = g^{-1}(U) \times I \cup f^{-1}(U) \times [0, 1)$$

para todo abierto  $U$  de  $Y$ . Es claro entonces que  $H$  es continua.  $\square$

**Corolario 1.2.22.** *Para todo espacio de Alexandroff  $X$  y todo  $x \in X$ , el subespacio  $\{x\}$  es retracto por deformación fuerte de  $U_x$ . En particular, todo espacio de Alexandroff es localmente contráctil.*

*Demostración.* Sea  $X$  un espacio de Alexandroff y sea  $x \in X$ . Consideremos las funciones  $\text{Id}_{U_x}, C_x: U_x \rightarrow U_x$ . Dado que  $\text{Id}_{U_x}(y) = y \leq x = C_x(y)$  para todo  $y \in U_x$ , tenemos que  $\text{Id}_{U_x} \simeq C_x$  (rel  $\{x\}$ ) por 1.2.21. El resultado se sigue.  $\square$

### 1.2.5 Tipos de homotopía de espacios topológicos finitos

En esta subsección exponemos algunos resultados de R. Stong sobre clasificación de espacios topológicos finitos por tipo de homotopía. La referencia original de estos resultados es [68], aunque aquí hemos adoptado la terminología de [49] y hemos seguido la presentación que se hace del tema en [5].

Dado un espacio topológico  $X$ , puede definirse en  $X$  una relación de equivalencia  $\sim$  por

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{para todo } U \text{ abierto en } X, x \in U \text{ si y sólo si } y \in U$$

para todo  $x, y \in X$ . En otras palabras, dos elementos en  $X$  son equivalentes si no existen abiertos que los distingan. Equivalentemente, dos elementos  $x$  e  $y$  en  $X$  serán equivalentes si y sólo si  $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ .

El cociente  $X/\sim$  es un espacio  $T_0$  denominado *cociente de Kolmogorov* de  $X$  y será denotado por  $\mathbf{K}(X)$ . Denotaremos por  $q_X$  a la función cociente canónica de  $X$  en  $\mathbf{K}(X)$ .

Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos y sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua. Dados dos elementos  $x, x'$  de  $X$  cualesquiera, la preimagen por  $f$  de cualquier abierto en  $Y$  que distinga a  $f(x)$  de  $f(x')$  será un abierto en  $X$  que distinga a  $x$  de  $x'$ . Se sigue que  $f(x) \sim f(x')$  siempre que  $x \sim x'$  y por lo tanto, que  $f$  induce una función continua  $\mathbf{K}(f): \mathbf{K}(X) \rightarrow \mathbf{K}(Y)$  definida por  $\mathbf{K}(f)(q_X(x)) = q_Y(f(x))$ .

Es fácil probar que la asignación de  $\mathbf{Top}$  en  $\mathbf{Top}_0$  definida por  $X \mapsto \mathbf{K}(X)$  para todo espacio topológico  $X$  y  $f \mapsto \mathbf{K}(f)$  para toda función continua  $f$  es un funtor. La clase de flechas  $\{q_X\}_{X \in \text{Obj}(\mathbf{Top})}$  define una transformación natural  $q: \text{Id}_{\mathbf{Top}} \Rightarrow \text{inc} \circ \mathbf{K}$  donde  $\text{inc}$  es el funtor inclusión de  $\mathbf{Top}_0$  en  $\mathbf{Top}$ .

Notemos que si  $Y$  es un espacio  $T_0$ , la relación  $\sim$  en  $Y$  es trivial y por lo tanto la función cociente  $q_Y: Y \rightarrow Y/\sim$  es un homeomorfismo. En ese caso, toda función continua  $f: X \rightarrow Y$  se factoriza de manera única a través de  $q_X$ , para cualquier espacio topológico  $X$ . Esta factorización induce una biyección natural entre  $\mathbf{Top}_0(\mathbf{K}(X), Y)$  y  $\mathbf{Top}(X, Y)$ , de donde obtenemos que  $\mathbf{K}$  es adjunto a izquierda de  $\text{inc}$ . En otras palabras,  $\mathbf{Top}_0$  es una subcategoría *reflexiva* de  $\mathbf{Top}$  [34, 2].

No es difícil ver que si  $X$  es un espacio topológico de Alexandroff, la relación  $\sim$  definida anteriormente está equivalentemente definida por

$$x \sim x' \Leftrightarrow x \leq x' \text{ y } x' \leq x.$$

Puede probarse fácilmente que, en ese caso,  $\mathbf{K}(X)$  es un espacio de Alexandroff y que el orden en  $\mathbf{K}(X)$  viene dado por

$$q_X(x) \leq q_X(x') \Leftrightarrow x \leq x'.$$

En particular, el funtor  $\mathbf{K}$  se puede restringir a un funtor de  $\mathbf{ATop}$  en  $\mathbf{ATop}_0$  y a un funtor de  $\mathbf{FinTop}$  en  $\mathbf{FinTop}_0$ .

*Observación 1.2.23.* Sea  $X$  un espacio topológico de Alexandroff.

1. El conjunto de componentes conexas de  $\mathbf{K}(X)$  es

$$\{q_X(C) : C \text{ es una componente conexa de } X\}.$$

Esto puede probarse a partir de 1.2.17 considerando el orden en  $\mathbf{K}(X)$  y los cocientes canónicos  $X \rightarrow \pi_0(X)$  y  $\mathbf{K}(X) \rightarrow \pi_0(\mathbf{K}(X))$ .

2. Sea  $A$  un subespacio de  $X$  y sea  $i: A \rightarrow X$  la función inclusión. Los órdenes de  $\mathbf{K}(A)$  y  $\mathbf{K}(X)$  permiten ver fácilmente que la función  $\mathbf{K}(i): \mathbf{K}(A) \rightarrow \mathbf{K}(X)$  es subespacio y por lo tanto  $\mathbf{K}(A)$  es canónicamente homeomorfo a  $q_X(A)$ . Además,  $q_X(A \cap C) = q_X(A) \cap q_X(C)$  para cada componente conexa  $C$  de  $X$ .

**Proposición 1.2.24.** *Sea  $X$  un espacio topológico de Alexandroff. Entonces  $X$  es homotópicamente equivalente a  $\mathbf{K}(X)$ . Más aún, existe una función subespacio  $i: \mathbf{K}(X) \rightarrow X$  tal que  $i(\mathbf{K}(X))$  es retracto por deformación fuerte de  $X$ .*

*Demostración.* Sea  $q = q_X: X \rightarrow \mathbf{K}(X)$  la función cociente canónica y sea  $i: \mathbf{K}(X) \rightarrow X$  una sección de  $q$ . Notemos que  $i(q(x)) \sim x$  para todo  $x \in X$ . Así, si  $x, x'$  son elementos de  $X$  tales que  $q(x) \leq q(x')$ , entonces  $i(q(x)) \leq x \leq x' \leq i(q(x'))$ . Se sigue que  $i$  es morfismo

## 1 Preliminares

---

de órdenes y por lo tanto una función continua. En particular,  $i$  es una sección en **Top** y por lo tanto es subespacio.

Por otro lado,  $iq \leq \text{Id}_X$  y  $qi = \text{Id}_{\mathbf{K}(X)}$  de donde obtenemos que  $iq \simeq \text{Id}_X$  (rel  $i(\mathbf{K}(X))$ ). Se sigue que  $i(\mathbf{K}(X))$  es retracto por deformación fuerte de  $X$ .  $\square$

En particular, todo espacio finito tiene un retracto por deformación fuerte que es un espacio  $T_0$ .

**Definición 1.2.25.** Sea  $X$  un espacio topológico finito  $T_0$ . Sea  $x \in X$ .

- Decimos que  $x$  es un *down beat point* de  $X$  si el subespacio  $\widehat{U}_x^X$  tiene máximo.
- Decimos que  $x$  es un *up beat point* de  $X$  si el subespacio  $\widehat{F}_x^X$  tiene mínimo.
- Decimos que  $x$  es un *beat point* de  $X$  si es un down beat point de  $X$  o un up beat point de  $X$ .

**Proposición 1.2.26.** Sea  $X$  un espacio topológico finito  $T_0$  y sea  $x$  un beat point de  $X$ . Entonces  $X - \{x\}$  es un retracto por deformación fuerte de  $X$ .

*Demostración.* Supongamos que  $x$  es down beat point de  $X$ . Sea  $x' = \max(\widehat{U}_x^X)$  y definamos la función  $r: X \rightarrow X - \{x\}$  por

$$r(z) = \begin{cases} z & \text{si } z \neq x, \\ x' & \text{si } z = x. \end{cases}$$

Es fácil ver que  $r$  es continua. Sea  $i: X - \{x\} \rightarrow X$  la inclusión. Es claro que  $ri = \text{Id}_{X - \{x\}}$ . Por otro lado  $ir \leq \text{Id}_X$  y  $ir|_{X - \{x\}} = iri = i = \text{Id}_{X - \{x\}}$ . De la proposición 1.2.21 obtenemos que  $ir \simeq \text{Id}_X$  (rel  $X - \{x\}$ ). Así,  $X - \{x\}$  es retracto por deformación fuerte de  $X$ .

Si  $x$  es up beat point, la demostración es análoga. El resultado se sigue.  $\square$

**Definición 1.2.27.** Un espacio topológico finito  $T_0$  se dice *minimal* si no tiene beat points.

**Definición 1.2.28.** Sea  $X$  un espacio topológico finito. Un *core* de  $X$  es un espacio finito minimal  $X_C$  que es retracto por deformación fuerte de  $X$ .

Notemos que el core de un espacio finito es, por definición, un espacio  $T_0$ .

**Teorema 1.2.29.** Todo espacio topológico finito tiene un core.

*Demostración.* Por la proposición 1.2.24, basta probar que todo espacio topológico finito  $T_0$  tiene un core. Sea entonces  $X$  un espacio topológico finito  $T_0$ . Dada la finitud de  $X$ , es claro que podemos eliminar sucesivamente beat points de  $X$  hasta obtener un espacio  $X_C$  minimal. Por 1.2.26, es claro que  $X_C$  es retracto por deformación fuerte de  $X$ . Se sigue que  $X_C$  es un core de  $X$  como queríamos probar.  $\square$

**Teorema 1.2.30.** Sea  $X$  un espacio topológico finito  $T_0$  y sea  $f: X \rightarrow X$  una función continua.

1. Si  $X$  no tiene down beat points y  $f \leq \text{Id}_X$ , entonces  $f = \text{Id}_X$ .
2. Si  $X$  no tiene up beat points y  $f \geq \text{Id}_X$ , entonces  $f = \text{Id}_X$ .
3.  $X$  no tiene beat points y  $f \simeq \text{Id}_X$ , entonces  $f = \text{Id}_X$ .

*Demostración.* Veamos (1). Supongamos que  $f \leq \text{Id}_X$  y definamos  $A = \{x \in X : f(x) < x\}$ . Si  $A = \emptyset$ , entonces  $f = \text{Id}_X$  como queríamos. Supongamos, por lo tanto, que  $A \neq \emptyset$  y tomemos  $x \in \text{mnl}(A)$ . Dado que  $x$  es un elemento minimal de  $A$  y que  $f(x) < x$ , es claro que  $f(x) \notin A$ , y por lo tanto que  $f(f(x)) = f(x)$ .

Desde luego,  $f(x) \in \widehat{U}_x$ . Veamos que  $f(x) = \max \widehat{U}_x$ . En efecto, si  $y < x$ , entonces  $y \notin A$  y por lo tanto  $y = f(y) \leq f(x)$ . Así,  $f(x) = \max \widehat{U}_x$  como queríamos y se sigue que  $x$  es un down beat point de  $X$ . Este absurdo muestra que  $A = \emptyset$  y por consiguiente, que  $f = \text{Id}_X$ .

La proposición (2) se demuestra de manera análoga.

La proposición (3) se sigue de (1) y (2), y del ítem (2) de la proposición 1.2.20.  $\square$

**Corolario 1.2.31.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos finitos  $T_0$  minimales y sea  $h: X \rightarrow Y$  una equivalencia homotópica. Entonces  $h$  es un homeomorfismo.

*Demostración.* Sea  $g$  una inversa homotópica de  $h$ . Entonces  $gh \simeq \text{Id}_X$ . Dado que  $X$  es minimal, se sigue del teorema 1.2.30 que  $gh = \text{Id}_X$ . Del mismo modo,  $hg = \text{Id}_Y$ . Así,  $h$  es un homeomorfismo con inverso  $g$ .  $\square$

**Corolario 1.2.32.** Sea  $X$  un espacio topológico finito y sean  $X_1$  y  $X_2$  dos cores de  $X$ . Entonces  $X_1$  y  $X_2$  son homeomorfos.

*Demostración.* Los espacios  $X_1$  y  $X_2$  son homotópicamente equivalentes a  $X$  y por lo tanto son homotópicamente equivalentes entre sí. Se sigue que existe una equivalencia homotópica  $h$  de  $X_1$  a  $X_2$ . Dado que  $X_1$  y  $X_2$  son espacios topológicos finitos  $T_0$  minimales, se sigue que  $h$  es un homeomorfismo.  $\square$

**Teorema 1.2.33.** Dos espacios topológicos finitos son homotópicamente equivalentes si y sólo si tienen cores homeomorfos.

*Demostración.* Dado que un core de un espacio topológico finito es homotópicamente equivalente al mismo, es claro que si dos espacios finitos tienen cores homeomorfos entonces son homotópicamente equivalentes entre sí.

Supongamos, por otro lado, que  $X$  e  $Y$  son espacios topológicos finitos homotópicamente equivalentes y sea  $h: X \rightarrow Y$  una equivalencia homotópica. Sean  $X_C$  e  $Y_C$  cores de  $X$  e  $Y$ , respectivamente, sea  $i: X_C \rightarrow X$  la inclusión y sea  $r: Y \rightarrow Y_C$  una retracción por deformación fuerte. Dado que  $i$  y  $r$  son equivalencias homotópicas, se sigue que  $rhi$  también lo es. Por 1.2.31,  $rhi$  es un homeomorfismo. Así,  $X_C$  e  $Y_C$  son espacios homeomorfos.  $\square$

### 1.2.6 Tipos de homotopía débil de espacios topológicos finitos

El trabajo de Michael McCord [51] muestra que los tipos homotópicos débiles de espacios topológicos finitos son precisamente los de los poliedros compactos. Este hecho da lugar a una fructífera interacción entre poliedros y espacios finitos: por un lado, pueden utilizarse modelos poliédricos para calcular invariantes homotópicos débiles (grupos de homología u homotopía, por ejemplo) de espacios topológicos finitos mediante herramientas clásicas; por otro, pueden utilizarse espacios finitos para estudiar propiedades estructurales de poliedros y CW-complejos compactos mediante herramientas combinatorias.

Comenzamos esta subsección recordando algunos resultados de la teoría de complejos simpliciales que serán esenciales para el desarrollo del trabajo de McCord. La bibliografía estándar es [66].

**Definición 1.2.34.** Un *complejo simplicial* es un par ordenado  $K = (V_K, S_K)$  donde  $V_K$  es un conjunto no vacío, llamado *conjunto de vértices de  $K$*  y donde  $S_K$  es una colección de subconjuntos finitos no vacíos de  $V_K$  llamados *símplices de  $K$*  que satisfacen las siguientes dos condiciones:

- Para todo  $a \in V_K$ , el conjunto  $\{a\}$  es un símplex de  $K$ .
- Si  $s$  es un símplex de  $K$  y  $t$  es un subconjunto no vacío de  $s$ , entonces  $t$  es un símplex de  $K$ .

Dado un símplex  $s$  de  $K$ , un símplex  $t$  de  $K$  contenido en  $s$  se denomina *cara de  $s$* . Una cara de  $s$  se denomina *cara propia de  $s$*  si no es igual a  $s$ .

Definimos la *dimensión* de un símplex  $s$  de  $K$  como  $\dim s = \#s - 1$ . Diremos que  $s$  es un  *$n$ -símplex de  $K$*  si  $s$  es un símplex de  $K$  de dimensión  $n$ . Definimos la *dimensión de  $K$*  como

$$\dim K = \sup_{s \in S_K} \dim(s).$$

Diremos que  $K$  es *finito* si el conjunto  $V_K$  es finito (o equivalentemente, si el conjunto  $S_K$  lo es).

*Notación.* En adelante, si  $K$  es un complejo simplicial, denotaremos por  $V_K$  al conjunto de vértices de  $K$  y denotaremos por  $S_K$  al conjunto de símplices de  $K$ .

**Ejemplo 1.2.35.** Sea  $V$  un conjunto no vacío y sea  $S$  el conjunto de partes finitas no vacías de  $V$ . El par  $K = (V, S)$  es claramente un complejo simplicial.

**Definición 1.2.36.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Un *subcomplejo* de  $K$  es un complejo simplicial  $L$  tal que  $V_L \subseteq V_K$  y  $S_L \subseteq S_K$ . El complejo simplicial  $L$  se dirá *subcomplejo pleno* de  $K$  si todo símplex de  $S_K$  que está incluido en  $V_L$ , es un símplex de  $S_L$ .

**Definición 1.2.37.** Sean  $K$  y  $L$  complejos simpliciales. Un *morfismo simplicial*

$$\varphi: K \rightarrow L$$

es una función  $\varphi: V_K \rightarrow V_L$  tal que  $\varphi(s) \in S_L$  para todo  $s \in S_K$ .

No es difícil ver que la composición de morfismos simpliciales es nuevamente un morfismo simplicial, que la composición de morfismos simpliciales resulta asociativa y que la función identidad  $\text{Id}_{V_K}$  induce un morfismo simplicial

$$\text{Id}_K: K \rightarrow K$$

que resulta neutro a izquierda y a derecha para la composición. Definimos entonces la categoría **SCpx** de complejos simpliciales y morfismos simpliciales.

**Definición 1.2.38.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Para cada función  $\alpha: V_K \rightarrow I$ , definimos el *soporte* de  $\alpha$  como el conjunto

$$\text{sop } \alpha = \{v \in V_K : \alpha(v) \neq 0\}.$$

Definimos  $|K|$  como el conjunto de funciones

$$\alpha: V_K \longrightarrow I$$

tales que:

- (1)  $\text{sop } \alpha \in S_K$ .
- (2)  $\sum_{v \in V_K} \alpha(v) = 1$ .

Definimos una métrica  $d: |K| \times |K| \longrightarrow \mathbb{R}$  en  $|K|$  por  $d(\alpha, \beta) = \sqrt{\sum_{v \in V_K} (\alpha(v) - \beta(v))^2}$ .

Notamos por  $|K|_d$  al espacio topológico cuyo conjunto subyacente es  $|K|$  y cuya topología es la inducida por  $d$ .

**Definición 1.2.39.** Sea  $K$  un complejo simplicial y sea  $s \in S_K$ . Definimos el *símplex cerrado*  $|s|$  como el subespacio de  $|K|_d$  formado por las funciones de  $|K|$  cuyo soporte está incluido en  $s$ , es decir,

$$|s| = \{\alpha \in |K| : \text{sop } \alpha \subseteq s\}.$$

Definimos el *símplex abierto*  $\langle s \rangle$  como el subespacio de  $|K|_d$  formado por las funciones de  $|K|$  cuyo soporte es exactamente  $s$ , es decir,

$$\langle s \rangle = \{\alpha \in |K| : \text{sop } \alpha = s\}.$$

Para  $n \in \mathbb{N}_0$ , consideramos el  $n$ -símplex estándar  $\Delta^n$  como el conjunto

$$\Delta^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in I^{n+1} : \sum_{i=0}^n x_i = 1\}$$

con la topología de subespacio de  $I^{n+1}$ .



## 1 Preliminares

---

**Definición 1.2.40.** Sea  $K$  un complejo simplicial y sea  $s = \{v_0, \dots, v_n\}$  un  $n$ -simplex de  $K$ . Para  $v \in V_K$ , denotaremos por  $\chi_v$  a la función característica de  $v$

$$\chi_v: V_K \longrightarrow I$$

definida por  $\chi_v(w) = \delta_{v,w}$  para todo  $w \in V_K$ , donde  $\delta$  es la función *delta* de Kronecker. Observemos que  $|\{v\}| = \{\chi_v\}$ .

La *función característica de  $s$*  será la función

$$\sigma_s: \Delta^n \longrightarrow |K|$$

definida por  $\sigma_s(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n x_i \chi_{v_i}$  para todo  $(x_0, \dots, x_n) \in \Delta^n$ .

Es fácil probar que  $\sigma_s$  está bien definida y que mapea homeomórficamente al  $n$ -simplex estándar  $\Delta^n$  en el simplex cerrado  $|s|$ . Más aún, si  $n \geq 1$ ,  $\sigma_s$  mapea el interior  $(\Delta^n)^\circ$  del  $n$ -simplex estándar homeomórficamente en el simplex abierto  $\langle s \rangle$ .

**Definición 1.2.41.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Para cada  $s \in S_K$ , sea  $i_s: |s| \longrightarrow |K|$  la inclusión.

Le damos al conjunto  $|K|$  la topología final respecto de la familia  $\{i_s : s \in S_K\}$ . Este espacio, que también denotaremos por  $|K|$ , se denomina *realización geométrica de  $K$* .

No es difícil ver que un subconjunto  $F$  de  $|K|$  será cerrado en  $|K|$  si y sólo si  $|s| \cap F$  es cerrado en  $|s|$  para todo  $s \in S_K$ . Se deduce de este hecho que  $|K| = |K|_d$  si  $K$  es finito.

Notemos además que si  $L$  es un subcomplejo de  $K$ , entonces  $|L|$  es un subespacio cerrado de  $|K|$ .

Similarmente, una función  $f: |K| \longrightarrow Y$  será continua si y sólo si la restricción

$$f|_{|s|}: |s| \longrightarrow Y$$

de  $f$  es continua para todo  $s \in S_K$ .

**Definición 1.2.42.** Sean  $K$  y  $L$  complejos simpliciales y sea  $\varphi: K \longrightarrow L$  un morfismo simplicial. Definimos la *realización geométrica de  $\varphi$*  como la función

$$|\varphi|: |K| \longrightarrow |L|$$

definida para  $\alpha \in |K|$  por

$$|\varphi|(\alpha)(w) = \sum_{\varphi(v)=w} \alpha(v)$$

para todo  $w \in V_L$ .

Es fácil probar que  $|\varphi|$  está bien definida. Dado que las restricciones  $|\varphi||_{|s|}$  de  $|\varphi|$  son funciones lineales para  $s \in S_K$  se sigue del lema de pegado que  $|\varphi|$  es una función continua. Se tiene además que  $|\text{Id}_K| = \text{Id}_{|K|}$  para todo complejo simplicial  $K$  y que  $|\varphi\phi| = |\varphi||\phi|$  para morfismos simpliciales  $\phi: K_1 \rightarrow K_2$  y  $\varphi: K_2 \rightarrow K_3$ . Así, la realización geométrica se extiende a un funtor covariante

$$|\cdot|: \mathbf{SCpx} \rightarrow \mathbf{Top}.$$

**Definición 1.2.43.** Sea  $K$  un complejo simplicial y sea  $v \in V_K$ . Definimos la *estrella abierta* de  $v$  como el conjunto

$$\text{st}(v) = \{\alpha \in |K| : \alpha(v) \neq 0\}.$$

Un resultado estándar establece que si  $K$  es un complejo simplicial, entonces  $\text{st}(v)$  es abierto en  $|K|$  para todo  $v \in V_K$ . En efecto, no es difícil ver que, para todo  $s \in S_K$  y toda  $\alpha \in \text{st}(v) \cap |s|$ , la bola en  $|s|$  de centro  $\alpha$  y radio  $\alpha(v)$  está contenida en  $\text{st}(v) \cap |s|$ .

La prueba del siguiente lema tiene detalles técnicos que no resultan relevantes para el presente trabajo y por lo tanto será omitida. Para una demostración del mismo, referimos al lector a la demostración del corolario 11 de la sección 3.3 de [66].

**Lema 1.2.44.** Sea  $K$  un complejo simplicial finito y sea  $L$  un subcomplejo pleno de  $K$ . Entonces  $|L|$  es retracto por deformación fuerte de  $\bigcup_{x \in V_L} \text{st}(x)$ .

**Definición 1.2.45.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Definimos la *subdivisión baricéntrica* de  $K$  como el complejo simplicial  $K'$  que tiene por vértices a los símlices de  $K$  y por símlices a las cadenas no vacías de símlices de  $K$  ordenados por la inclusión.

Explícitamente,  $V_{K'} = S_K$  y

$$S_{K'} = \{\{s_0, \dots, s_n\} : s_i \in S_K \forall i \in \{0, \dots, n\} \wedge s_0 \subseteq \dots \subseteq s_n\}.$$

Dados dos complejos simpliciales  $K$  y  $L$ , un morfismo simplicial  $\varphi: K \rightarrow L$  induce un morfismo simplicial  $\varphi': K' \rightarrow L'$  denominado *subdivisión baricéntrica de  $\varphi$* , definido obviamente por  $\varphi'(s) = \varphi(s)$  para todo  $s \in V_{K'} = S_K$ . Es fácil probar que la asignación  $\text{sd}: \mathbf{SCpx} \rightarrow \mathbf{SCpx}$  definida por  $\text{sd} K = K'$  para todo complejo simplicial  $K$  y por  $\text{sd} \varphi = \varphi'$  para todo morfismo simplicial  $\varphi$  resulta un functor covariante, denominado *subdivisión baricéntrica*.

Es un resultado estándar que para todo complejo simplicial  $K$ , la única función lineal a trozos  $j_K: |K'| \rightarrow |K|$  tal que  $j_K(\chi_s) = \frac{1}{\#s} \sum_{v \in s} \chi_v$  para todo  $s \in V_{K'}$ , es un homeomorfismo. En particular,  $|K'|$  es canónicamente isomorfo a  $|K|$ .

Exponemos a continuación algunos resultados de la teoría de McCord que serán esenciales en el capítulo 2, en el que desarrollaremos herramientas que nos permitirán estudiar la *minimalidad de modelos finitos*, un problema natural que surge del modelado de poliedros mediante espacios finitos. La referencia principal para esta parte es [51].

**Definición 1.2.46.** Sea  $X$  un espacio topológico de Alexandroff  $T_0$ , considerado como un poset. Definimos el complejo simplicial  $\mathcal{K}(X)$  como el complejo simplicial que tiene por vértices a los elementos de  $X$  y por símlices a las cadenas no vacías de  $X$ .

Es claro que una función continua  $f: X \rightarrow Y$  entre espacios de Alexandroff  $T_0$ , o equivalentemente, un morfismo de órdenes entre posets, induce un morfismo simplicial  $\mathcal{K}(f): \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(Y)$ . Es fácil ver entonces que se tiene un functor

$$\mathcal{K}: \mathbf{ATop}_0 \rightarrow \mathbf{SCpx}$$

y equivalentemente, un functor

$$\mathcal{K}: \mathbf{Pos} \rightarrow \mathbf{SCpx}.$$

## 1 Preliminares

---

**Definición 1.2.47.** Sea  $X$  un espacio de Alexandroff  $T_0$ . Definimos la función

$$\varphi_X: |\mathcal{K}(X)| \longrightarrow X$$

por

$$\varphi_X(\alpha) = \min(\text{sop } \alpha)$$

para todo  $\alpha \in |\mathcal{K}(X)|$ .

Es claro que  $\varphi_X$  está bien definida.

No es difícil probar que

$$\varphi_X^{-1}(U) = \bigcup_{x \in U} \text{st}(x)$$

para todo  $U$  abierto en  $X$ . Dado que  $\text{st}(x)$  es abierto en  $|\mathcal{K}(X)|$  para todo  $x \in X$ , se sigue que  $\varphi_X$  es continua.

**Lema 1.2.48.** Sea  $X$  un espacio topológico de Alexandroff  $T_0$  y sea  $x \in X$ . Entonces  $|\mathcal{K}(U_x)|$  es contráctil.

*Demostración.* Sea  $H: |\mathcal{K}(U_x)| \times I \longrightarrow |\mathcal{K}(U_x)|$  definida por

$$H(\alpha, t) = (1 - t)\chi_x + t\alpha$$

Es fácil ver que  $H$  está bien definida y puede probarse que es continua. Omitimos estos detalles.

Se sigue que  $H$  es una homotopía entre  $\text{Id}_{|\mathcal{K}(U_x)|}$  y la función constante  $C_{\chi_x}$ . Así,  $|\mathcal{K}(U_x)|$  es contráctil.

Alternativamente, puede probarse que  $|\mathcal{K}(U_x)|$  es homeomorfo al cono de  $|\mathcal{K}(\hat{U}_x)|$ .  $\square$

**Proposición 1.2.49.** Sea  $X$  un espacio topológico de Alexandroff  $T_0$  y sea  $x \in X$ . Entonces  $\varphi_X^{-1}(U_x)$  es contráctil.

*Demostración.* Es fácil ver que  $\mathcal{K}(U_x)$  es un subcomplejo pleno de  $\mathcal{K}(X)$ . Se sigue por 1.2.44 que  $|\mathcal{K}(U_x)|$  es retracto por deformación fuerte de  $\varphi_X^{-1}(U_x)$ . El resultado se sigue por el lema 1.2.48.  $\square$

Para probar el teorema 1.2.53 necesitamos el teorema 1.2.52, un resultado profundo de la teoría de equivalencias débiles demostrado por McCord en [51]. Antes, debemos recordar las siguientes definiciones.

**Definición 1.2.50.** Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $\mathcal{U}$  un cubrimiento por abiertos de  $X$ . Decimos que  $\mathcal{U}$  es un *cubrimiento tipo base* si para cualesquiera  $U$  y  $V$  de  $\mathcal{U}$  y cualquier  $x \in U \cap V$ , existe  $W \in \mathcal{U}$  tal que  $x \in W \subseteq U \cap V$ .

En otras palabras,  $\mathcal{U}$  es un cubrimiento tipo base si es base para una topología en  $X$  menos fina que la de  $X$ .

**Definición 1.2.51.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos y sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua. Decimos que  $f$  es una *equivalencia débil* si  $f$  induce isomorfismos en todos los

grupos de homotopía para cualquier punto base considerado. Esto es, para todo  $x \in X$ , la función

$$f_*: \pi_0(X, x) \rightarrow \pi_0(Y, f(x))$$

inducida por  $f$  es una biyección (que claramente respeta punto base) y para todo  $n \in \mathbb{N}$ , la función

$$f_*: \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, f(x))$$

inducida por  $f$  es un isomorfismo de grupos.

Puede probarse que si  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  son funciones continuas entre espacios topológicos y dos de las tres funciones  $f, g, gf$  son equivalencias débiles, entonces la tercera también lo es.

Por otro lado, es sabido que las equivalencias débiles inducen isomorfismos en todos los grupos de homología y de cohomología con cualquier grupo de coeficientes [40, Proposición 4.21].

**Teorema 1.2.52** (McCord, [51]). *Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos y sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua. Supongamos que existe un cubrimiento tipo base  $\mathcal{U}$  de  $Y$  tal que para todo  $U \in \mathcal{U}$ , la restricción*

$$f|_{f^{-1}(U)}^U: f^{-1}(U) \rightarrow U$$

*de  $f$  es una equivalencia débil. Entonces  $f$  es una equivalencia débil.*

**Teorema 1.2.53.** *Sea  $X$  un espacio topológico de Alexandroff  $T_0$ . Entonces  $\varphi_X$  es una equivalencia débil.*

*Adicionalmente, si  $Y$  es otro espacio topológico de Alexandroff  $T_0$  y  $f: X \rightarrow Y$  es una función continua, entonces  $f\varphi_X = \varphi_Y|\mathcal{K}(f)|$ .*

*Demostración.* Es claro que la base minimal de  $X$  es un cubrimiento tipo base de  $X$ . Para todo  $x \in X$ , los espacios  $U_x$  y  $\varphi_X^{-1}(U_x)$  son contráctiles y por lo tanto,

$$\varphi_X|_{\varphi_X^{-1}(U_x)}: \varphi_X^{-1}(U_x) \rightarrow U_x$$

es una equivalencia débil. Por el teorema 1.2.52 tenemos que  $\varphi_X$  es una equivalencia débil.

Para la segunda parte, sea  $Y$  un espacio topológico de Alexandroff  $T_0$  y sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua. Entonces, para todo  $\alpha \in |\mathcal{K}(X)|$ ,

$$\begin{aligned} \text{sop } |\mathcal{K}(f)|(\alpha) &= \left\{ w \in Y : \sum_{f(v)=w} \alpha(v) \neq 0 \right\} = \\ &= \{w \in Y : \exists v \in X / f(v) = w \wedge \alpha(v) \neq 0\} = \\ &= \{f(v) : v \in \text{sop } \alpha\} = f(\text{sop } \alpha) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$f\varphi_X(\alpha) = f(\min(\text{sop } \alpha)) = \min f(\text{sop } \alpha) = \min(\text{sop } |\mathcal{K}(f)|(\alpha)) = \varphi_Y|\mathcal{K}(f)|(\alpha). \quad \square$$

**Corolario 1.2.54.** *Sea  $X$  un espacio topológico de Alexandroff. Entonces existe un complejo simplicial  $K$ , que resulta finito si  $X$  lo es, y una equivalencia débil  $\varphi: |K| \rightarrow X$ .*

## 1 Preliminares

---

*Demostración.* Por la proposición 1.2.24 existe una equivalencia homotópica  $i: \mathbf{K}(X) \rightarrow X$  (es evidente además que  $\mathbf{K}(X)$  es finito si  $X$  lo es). Tenemos, por otro lado, una equivalencia débil  $\varphi_{\mathbf{K}(X)}: |\mathcal{K}(\mathbf{K}(X))| \rightarrow \mathbf{K}(X)$ . El resultado se sigue tomando  $K = \mathcal{K}(\mathbf{K}(X))$  y

$$\varphi = i\varphi_{\mathbf{K}(X)}: |K| \rightarrow X. \quad \square$$

**Definición 1.2.55.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Definimos el espacio  $\mathcal{X}(K)$  como el espacio topológico de Alexandroff  $T_0$  asociado al poset  $(S_K, \subseteq)$ .

Un morfismo simplicial  $\varphi: K \rightarrow L$  induce una función continua  $\mathcal{X}(\varphi): \mathcal{X}(K) \rightarrow \mathcal{X}(L)$  definida por  $\mathcal{X}(\varphi)(s) = \varphi(s)$  para todo  $s \in S_K$ .

No es difícil ver que las construcciones anteriores permiten definir un funtor

$$\mathcal{X}: \mathbf{SCpx} \rightarrow \mathbf{ATop}_0$$

y equivalentemente, un funtor

$$\mathcal{X}: \mathbf{SCpx} \rightarrow \mathbf{Pos}.$$

*Observación 1.2.56.* Es fácil probar que  $\text{sd} = \mathcal{K}\mathcal{X}$ .

**Definición 1.2.57.** Sean  $K$  y  $L$  dos complejos simpliciales y sea  $f: |K| \rightarrow |L|$  una función continua. Una *aproximación simplicial de  $f$*  es un morfismo simplicial  $\varphi: K \rightarrow L$  tal que  $|\varphi|(\alpha) \in |s|$  para todo  $\alpha \in |K|$  y todo  $s \in S_L$  tales que  $f(\alpha) \in \langle s \rangle$ .

**Proposición 1.2.58.** Sean  $K$  y  $L$  complejos simpliciales, sea  $f: |K| \rightarrow |L|$  una función continua y sea  $\varphi: K \rightarrow L$  una aproximación simplicial de  $f$ . Sea además

$$A = \{\alpha \in |K| : |\varphi|(\alpha) = f(\alpha)\}.$$

Entonces  $|\varphi| \simeq f \text{ (rel } A)$ .

*Demostración.* Definimos la homotopía  $H: |K| \times I \rightarrow |L|$  por

$$H(\alpha, t) = tf(\alpha) + (1-t)|\varphi|(\alpha)$$

para toda  $\alpha \in |K|$  y todo  $t \in I$ . No es difícil ver que  $H$  está bien definida. Puede probarse además que  $H$  es continua (cf. [5, Prop. A.1.2] y su demostración).

Es claro que  $H i_0 = |\varphi|$ , que  $H i_1 = f$  y que  $H(\alpha, t) = f(\alpha) = |\varphi|(\alpha)$  para toda  $\alpha \in A$ . El resultado se sigue.  $\square$

**Lema 1.2.59.** Sea  $K$  un complejo simplicial y sea  $\varphi: V_{K'} \rightarrow V_K$  una función tal que  $\varphi(s) \in s$  para todo  $s \in V_{K'}$ . Entonces  $\varphi: K' \rightarrow K$  es un morfismo simplicial y una aproximación simplicial de  $j_K$ .

*Demostración.* Es fácil ver que  $\varphi$  es un morfismo simplicial. Veamos que  $\varphi$  es una aproximación simplicial de  $j_K$ . Sea  $\alpha \in |K'|$  y sea  $s \in S_K$  tales que  $j_K(\alpha) \in \langle s \rangle$ . Queremos probar que  $|\varphi|(\alpha) \in |s|$  o, equivalentemente, que  $\text{sop } |\varphi|(\alpha) \subseteq s$ . Sea entonces  $w \in \text{sop } |\varphi|(\alpha)$ . Existe  $\sigma \in S_{K'}$  tal que  $\varphi(\sigma) = w$  y  $\alpha(\sigma) \neq 0$ . Notemos que  $w = \varphi(\sigma) \in \sigma$ .

Así,  $\alpha(\sigma) > 0$ ,  $\chi_w(w) = 1$ ,  $w \in \sigma$  y  $\sigma \in S_K$ . Es claro entonces que

$$j_K(\alpha)(w) = \sum_{t \in S_K} \left( \frac{\alpha(t)}{\#t} \sum_{v \in t} \chi_v(w) \right) \geq \frac{\alpha(\sigma)}{\#\sigma} > 0.$$

Luego,  $w \in \text{sop } j_K(\alpha) = s$ . □

**Lema 1.2.60.** Sean  $K$  y  $L$  dos complejos simpliciales y sea  $\varphi: K \rightarrow L$  un morfismo simplicial. Entonces  $j_L|\varphi'| \simeq |\varphi|j_K$ .

*Demostración.* Si  $K$  y  $L$  son complejos simpliciales finitos, el resultado se sigue de la prueba de [5, Proposición 1.4.13].

No es difícil extender esta demostración al caso general por medio del teorema 21 de [66, Sección 3.1]. □

**Teorema 1.2.61.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Entonces existe una equivalencia débil

$$\varphi_K: |K| \rightarrow \mathcal{X}(K).$$

Adicionalmente, si  $K$  y  $L$  son complejos simpliciales y  $\psi: K \rightarrow L$  es un morfismo simplicial, entonces  $\mathcal{X}(\psi)\varphi_K \simeq \varphi_L|\psi|$ , es decir que el siguiente diagrama es homotópicamente conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} |K| & \xrightarrow{|\psi|} & |L| \\ \varphi_K \downarrow & & \downarrow \varphi_L \\ \mathcal{X}(K) & \xrightarrow{\mathcal{X}(\psi)} & \mathcal{X}(L) \end{array}$$

*Demostración.* Por el teorema 1.2.53 tenemos una equivalencia débil

$$\varphi_{\mathcal{X}(K)}: |K'| = |\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))| \rightarrow \mathcal{X}(K).$$

Componiendo  $\varphi_{\mathcal{X}(K)}$  con el homeomorfismo  $j_K^{-1}: |K| \rightarrow |K'|$ , obtenemos la equivalencia débil buscada.

La segunda parte se sigue del teorema 1.2.53 y del lema 1.2.60. □

**Definición 1.2.62.** Sea  $X$  un poset. Definimos la *subdivisión baricéntrica* de  $X$  como el poset  $\text{sd } X = \mathcal{X}\mathcal{K}(X)$ . Este poset también será denotado por  $X'$ .

Los elementos de  $X'$  son, obviamente, las cadenas no vacías de  $X$  y el orden en  $X'$  es el de la inclusión. La función  $\text{max}: X' \rightarrow X$  resulta claramente continua.

Es claro entonces que se tiene un functor covariante  $\text{sd}: \mathbf{Pos} \rightarrow \mathbf{Pos}$  definido por  $\text{sd} = \mathcal{X}\mathcal{K}$  y no es difícil probar que  $\text{max}$  induce una transformación natural  $\text{max}: \text{sd} \Rightarrow \text{Id}_{\mathbf{Pos}}$ .

*Observación 1.2.63.* Para todo poset  $X$  se tiene que  $\mathcal{K}(X') = \mathcal{K}(X)'$ . Similarmente, para todo complejo simplicial  $K$  se tiene que  $\mathcal{X}(K') = \mathcal{X}(K)'$ .

**Proposición 1.2.64.** Sea  $X$  un poset. Entonces, la función  $\text{max}: X' \rightarrow X$  es una equivalencia débil.

## 1 Preliminares

---

*Demostración.* Dado que  $X = V_{\mathcal{K}(X)}$  y que  $X' = V_{\mathcal{K}(X')} = V_{\mathcal{K}(X)'}$ , la función  $\max$  puede ser considerada como una función de conjuntos

$$\max: V_{\mathcal{K}(X)'} \rightarrow V_{\mathcal{K}(X)}.$$

Es claro que  $\max(s) \in s$  para todo  $s \in V_{\mathcal{K}(X)'}$ . Se sigue de 1.2.59 que el morfismo simplicial

$$\max: \mathcal{K}(X)' \rightarrow \mathcal{K}(X)$$

es una aproximación simplicial de  $j_K$ . Por otro lado, este morfismo simplicial no es otro que el morfismo simplicial

$$\mathcal{K}(\max): \mathcal{K}(X') \rightarrow \mathcal{K}(X).$$

Es claro entonces que  $|\mathcal{K}(\max)| \simeq j_K$ . Dado que  $j_K$  es un homeomorfismo, se sigue que  $|\mathcal{K}(\max)|$  es una equivalencia homotópica. El resultado, entonces, se sigue de 1.2.53 y de la propiedad 2-de-3 de las equivalencias débiles.  $\square$

El siguiente es un resultado conocido y puede encontrarse en [58, 61]<sup>3</sup>.

**Teorema 1.2.65.** *Los funtores*

$$\mathbf{Pos} \xrightarrow{\mathcal{K}} \mathbf{SCpx} \xrightarrow{|\cdot|} \mathbf{Top}$$

y

$$\mathbf{Pos} \hookrightarrow \mathbf{Cat} \xrightarrow{B} \mathbf{Top}$$

son naturalmente isomorfos.

*Demostración.* Sea  $X$  un poset. Para simplificar la notación, denotaremos por  $x$  a la función característica  $\chi_x: X \rightarrow I$  para todo  $x \in X$ . Dado  $t \in \Delta^n$ , notaremos por  $t_i$  a la  $i$ -ésima coordenada de  $t$  para  $i = 0, \dots, n$ .

Para cada  $m$ -símplex  $r$  de  $\mathcal{K}(X)$ , notaremos por  $l_r$  a la composición

$$\Delta^m \cong |r| \hookrightarrow |\mathcal{K}(X)|.$$

Ahora bien, para cada  $n$ -símplex  $\omega$  de  $N(X)$ , la imagen de  $\omega$  considerado como un morfismo de órdenes de  $[n]$  en  $X$ , es un símplex de  $\mathcal{K}(X)$  que denotaremos por  $r_\omega$ . Es claro que si  $m = \dim r_\omega$  entonces la factorización de  $\omega$  a través de  $r_\omega$  induce un morfismo de órdenes  $[n] \rightarrow [m]$  que a su vez induce una función continua

$$\omega_*: \Delta^n \rightarrow \Delta^m$$

definida por

$$\omega_*(t)_k = \sum_{\omega(j)=a_k} t_j$$

para todo  $k = 0, \dots, m$ , donde  $r_\omega = \{a_1, \dots, a_m\}$  con  $a_1 < \dots < a_m$ . Notemos que si  $\omega$  es no degenerado, entonces  $\omega_* = \text{Id}_{\Delta^n}$ .

---

<sup>3</sup>Ver también la afirmación al final de la sección 1 de [52], así como 1.3 y 1.29 de [27].

Notemos, por otro lado, que dado que  $N(X)_n$  es un conjunto considerado como un espacio topológico discreto para cada  $n \in \mathbb{N}$ , entonces el espacio  $N(X)_n \times \Delta^n$  puede identificarse con el coproducto

$$\coprod_{\omega \in N(X)_n} \Delta^n.$$

Se sigue que el espacio  $\overline{N(X)}$  definido en la subsección 1.1.3 es el coproducto

$$\coprod_{n \in \mathbb{N}_0} \coprod_{\omega \in X^{[n]}} \Delta^n.$$

Por lo tanto, la familia de funciones  $\{l_{r,\omega} : \omega \text{ es un simplejo de } N(X)\}$  induce una función continua

$$f: \overline{N(X)} \rightarrow |\mathcal{K}(X)|$$

definida claramente por  $f(\omega, t) = \sum_{k=0}^n t_k \omega(k)$  para todo  $(\omega, t) \in N(X)_n \times \Delta^n$  para  $n \in \mathbb{N}_0$ .

No es difícil ver que  $f$  es una función cociente. Por otro lado, un cálculo directo muestra que

$$f(d_i \omega, t) = f(\omega, \delta_i t)$$

para todo  $\omega \in N(X)_n$  y todo  $t \in \Delta^{n-1}$ , para  $n \in \mathbb{N}$  y  $0 \leq i \leq n$ , y que

$$f(s_i \omega, t) = f(\omega, \sigma_i t)$$

para todo  $\omega \in N(X)_n$  y todo  $t \in \Delta^{n+1}$ , para  $n \in \mathbb{N}_0$  y  $0 \leq i \leq n$ .

Queremos probar ahora que dos elementos de  $\overline{N(X)}$  que se mapean en la misma función por  $f$  son equivalentes. Veremos antes que todo elemento  $(\omega, t)$  de  $\overline{N(X)}$  es equivalente al elemento  $(\bar{\omega}, \bar{t})$  donde  $\bar{\omega}$  es el simplejo no degenerado que se mapea biyectivamente en el soporte de  $f(\omega, t)$  y

$$\bar{t}_j = f(\omega, t)(\bar{\omega}(j)) = \sum_{\omega(k)=\bar{\omega}(j)} t_k$$

para todo  $j = 0, \dots, \dim \bar{\omega}$  (comparar con [52, Lema 3]).

En primer lugar, notemos que si  $\omega$  es degenerado, entonces existe un (único) simplejo  $\omega'$  no degenerado y degeneraciones  $s_{i_1}, \dots, s_{i_p}$  tales que  $\omega = s_{i_p} \dots s_{i_1} \omega'$ . Poniendo  $t' = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_p} t$ , es claro que

$$(\omega, t) \sim (\omega', t').$$

Si  $\omega$  es no degenerado, ponemos  $\omega' = \omega$  y  $t' = t$ . Puesto que  $(\omega, t) \sim (\omega', t')$ ,  $f(\omega, t) = f(\omega', t')$  de donde se sigue que

$$t'_j = f(\omega', t')(\omega'(j)) = f(\omega, t)(\omega'(j)) = \sum_{\omega(k)=\omega'(j)} t_k$$

para  $j \in [\dim \omega']$ .

Ahora bien, si  $t'$  tiene una o más coordenadas iguales a cero, entonces existen  $q \in \mathbb{N}_0$ ,  $\bar{t} \in \Delta^q$  y caras  $\delta_{j_1}, \dots, \delta_{j_{p'}}$  tales que  $\bar{t}$  tiene todas sus coordenadas distintas de cero y  $t' = \delta_{j_{p'}} \dots \delta_{j_1} \bar{t}$ . Poniendo  $\bar{\omega} = d_{j_1} \dots d_{j_{p'}} \omega'$ , vemos que

$$(\omega', t') \sim (\bar{\omega}, \bar{t}).$$



## 1 Preliminares

---

Si todas las coordenadas de  $t'$  son distintas a cero, ponemos  $\bar{\omega} = \omega'$  y  $\bar{t} = t'$ .

Notemos que, dado que  $X$  es un poset y  $\omega'$  es no degenerado,  $\bar{\omega}$  es no degenerado y para todo  $j \in [\dim \bar{\omega}]$  existe un único elemento  $k \in [\dim \omega']$  tal que  $\omega'(k) = \bar{\omega}(j)$ . En ese caso, obtenemos que

$$\bar{t}_j = f(\bar{\omega}, \bar{t})(\bar{\omega}(j)) = f(\omega', t')(\omega'(k)) = t'_k.$$

Es claro que  $(\omega, t) \sim (\bar{\omega}, \bar{t})$ . Puede verse fácilmente, además, que la imagen de  $\bar{\omega}$  es el soporte de  $f(\omega, t)$  y que

$$\bar{t}_j = f(\bar{\omega}, \bar{t})(\bar{\omega}(j)) = f(\omega, t)(\bar{\omega}(j)) = \sum_{\omega(h)=\bar{\omega}(j)} t_h$$

para todo  $j = 0, \dots, \dim \bar{\omega}$  como queríamos.

Ahora, sean  $(\omega, t)$  y  $(\omega', t')$  elementos de  $\overline{N(X)}$  tales que  $f(\omega, t) = f(\omega', t')$ . Entonces

$$\sum_{h=0}^{\dim \omega} t_h \omega(h) = \sum_{j=0}^{\dim \omega'} t'_j \omega'(j).$$

Es claro que

$$\text{Im } \bar{\omega} = \text{sop } f(\omega, t) = \text{sop } f(\omega', t') = \text{Im } \bar{\omega}'$$

y que

$$\bar{t}_j = f(\omega, t)(\bar{\omega}(j)) = f(\omega', t')(\bar{\omega}'(j)) = \bar{t}'_j$$

siempre que  $0 \leq j \leq \dim \bar{\omega}$ . Luego

$$(\omega, t) \sim (\bar{\omega}, \bar{t}) = (\bar{\omega}', \bar{t}') \sim (\omega', t').$$

Así, si notamos por  $[\omega, t]$  a la clase de  $(\omega, t)$  en  $BX$  para  $(\omega, t) \in \overline{N(X)}$ , vemos que la función

$$f_X: BX = (\overline{N(X)} / \sim) \rightarrow |\mathcal{K}(X)|$$

definida por  $f_X([\omega, t]) = f(\omega, t)$  para todo  $[\omega, t] \in BX$  es un homeomorfismo.

Más aún, dados dos posets  $X$  e  $Y$  y un morfismo de órdenes  $g: X \rightarrow Y$ , un cálculo directo muestra que

$$(|\mathcal{K}(g)| \circ f_X)([\omega, t])(y) = \sum_{k \in (g\omega)^{-1}(y)} t_k = (f_Y \circ Bg)([\omega, t])(y)$$

para todo  $[\omega, t] \in BX$  y todo  $y \in Y$ . Se sigue que

$$|\mathcal{K}(g)|f_X = f_Y Bg.$$

Esto concluye la demostración. □

### 1.2.7 Homología de A-espacios

En virtud de la equivalencia débil  $\varphi_X: |\mathcal{K}(X)| \rightarrow X$  dada por el teorema 1.2.53, el cálculo de los grupos de homología singular de un espacio de Alexandroff  $T_0 X$  se reduce al cálculo de la homología simplicial de  $\mathcal{K}(X)$ , lo cual es hoy un procedimiento estándar en topología algebraica. Es inmediato que la homología simplicial de  $\mathcal{K}(X)$  no es otra cosa que la homología del poset  $X$ , que hemos definido como  $\mathcal{P}$ -homología en [20]. Recordaremos aquí las definiciones involucradas.

**Definición 1.2.66.** Sea  $X$  un espacio topológico de Alexandroff  $T_0$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ , definimos una  $n$ -cadena de  $X$  como un subconjunto totalmente ordenado de  $X$  de cardinal  $n + 1$ . Así, una  $n$ -cadena de  $X$  es precisamente un  $n$ -simplex de  $\mathcal{K}(X)$ . Una  $n$ -cadena  $\{x_0, \dots, x_n\}$  de  $X$  en que  $x_0 < \dots < x_n$  será denotada por  $[x_0, \dots, x_n]$ . Si  $[x_0, \dots, x_n]$  es una  $n$ -cadena de  $X$ , la cadena  $[x_0, \dots, x_n] - \{x_i\}$  será denotada por  $[x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n]$ , para  $i \in [n]$ .

Para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ , denotamos por  $\text{Ch}_n(X)$  al conjunto de  $n$ -cadenas de  $X$ .

**Definición 1.2.67.** Sea  $X$  un espacio de Alexandroff  $T_0$ . El  $\mathcal{P}$ -complejo de cadenas de  $X$  será el complejo de cadenas  $C(X) = (C_n(X), d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  definido por

$$C_n(X) = \begin{cases} \bigoplus_{\text{Ch}_n(X)} \mathbb{Z} & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

donde, para  $n \in \mathbb{N}$ , los morfismos  $d_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  están definidos por

$$d_n([v_0, \dots, v_n]) = \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]$$

para toda cadena  $[v_0, \dots, v_n] \in \text{Ch}_n(X)$ .

Es inmediato que el complejo  $C(X)$  es naturalmente isomorfo al complejo de cadenas simplicial de  $\mathcal{K}(X)$ .

**Definición 1.2.68.** Sea  $X$  un espacio de Alexandroff  $T_0$ . Para  $n \in \mathbb{Z}$  definimos el  $n$ -ésimo grupo de  $\mathcal{P}$ -homología de  $X$  como el  $n$ -ésimo grupo de homología del complejo  $C(X)$ . El mismo será denotado por  $H_n(X)$ .

Es claro entonces que, para todo espacio de Alexandroff  $T_0 X$  y para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , el grupo  $H_n(X)$  es naturalmente isomorfo al  $n$ -ésimo grupo de homología simplicial de  $\mathcal{K}(X)$ . Por [40, Teorema 2.27], este es a su vez naturalmente isomorfo al  $n$ -ésimo grupo de homología singular de  $|\mathcal{K}(X)|$  que, por [40, Proposición 4.21], resulta naturalmente isomorfo al  $n$ -ésimo grupo de homología singular de  $X$  con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

En particular, la característica de Euler de un espacio topológico finito  $T_0 X$  es igual a la suma alternada de las cantidades de  $n$ -cadenas de  $X$ , es decir

$$\chi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \# \text{Ch}_n(X).$$

**Definición 1.2.69.** Sea  $X$  un espacio de Alexandroff  $T_0$  y sea  $A$  un subespacio de  $X$ . Una  $n$ -cadena de  $(X, A)$  es una  $n$ -cadena de  $X$  que no está contenida en  $A$ . El conjunto de  $n$ -cadenas de  $(X, A)$  será denotado por  $\text{Ch}_n(X, A)$ .

**Definición 1.2.70.** Sea  $X$  un espacio de Alexandroff  $T_0$  y sea  $A$  un subespacio de  $X$ . Definimos el  $\mathcal{P}$ -complejo de cadenas de  $(X, A)$  como el complejo de cadenas  $C(X, A) = C(X)/C(A)$ . Para  $n \in \mathbb{Z}$ , definimos el  $n$ -ésimo grupo de  $\mathcal{P}$ -homología de  $(X, A)$  como el  $n$ -ésimo grupo de homología del complejo  $C(X, A)$ . El mismo será denotado por  $H_n(X, A)$ .

Es fácil ver que existe un isomorfismo natural

$$C_n(X, A) \cong \bigoplus_{\text{Ch}_n(X, A)} \mathbb{Z}$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Así, podemos asumir en general que  $C_n(X, A)$  es el grupo abeliano libre generado por las  $n$ -cadenas de  $(X, A)$  para  $n \in \mathbb{Z}$ .

Es claro, además, que el complejo  $C(X, A)$  es naturalmente isomorfo al complejo de cadenas simplicial relativo con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  correspondiente al par  $(\mathcal{K}(X), \mathcal{K}(A))$ , de donde se sigue que el  $n$ -ésimo grupo de  $\mathcal{P}$ -homología de  $(X, A)$  es naturalmente isomorfo al  $n$ -ésimo grupo de homología singular relativo del par  $(X, A)$  con coeficientes en  $\mathbb{Z}$ .

Desde luego, las definiciones aquí presentadas pueden modificarse para definir grupos de  $\mathcal{P}$ -homología reducida de espacios de Alexandroff  $T_0$ . Para esto, consideramos para un espacio de Alexandroff  $T_0$   $X$ , un  $\mathcal{P}$ -complejo de cadenas aumentado  $\tilde{C}(X)$  que se obtiene agregando a  $C(X)$  un grupo abeliano libre en grado  $-1$  generado por la cadena vacía, y un morfismo de aumentación  $d_0: C_0(X) \rightarrow C_{-1}(X)$  que “cuenta”  $0$ -cadenas. Es fácil ver entonces que el  $n$ -ésimo grupo de  $\mathcal{P}$ -homología reducida de un espacio de Alexandroff  $T_0$   $X$  es naturalmente isomorfo al  $n$ -ésimo grupo de homología singular de  $X$  con coeficientes en  $\mathbb{Z}$ . Notaremos los grupos de  $\mathcal{P}$ -homología reducida por  $\tilde{H}_n(-)$ .

El siguiente resultado será utilizado en el capítulo 2 para estudiar problemas de minimalidad de modelos finitos.

**Proposición 1.2.71** ([20, Proposición 3.3]). *Sea  $X$  un espacio de Alexandroff  $T_0$  y sea  $D$  un subespacio discreto de  $X$ . Entonces*

$$H_n(X, X - D) \cong \bigoplus_{x \in D} \tilde{H}_{n-1}(\hat{C}_x)$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

### 1.3 Nociones clásicas de teoría de homotopía

En esta sección haremos una introducción a algunos conceptos básicos de la teoría de homotopía que serán necesarios a lo largo de este trabajo, como ser: fibraciones y cofibraciones de Hurewicz, fibrados y revestimientos.

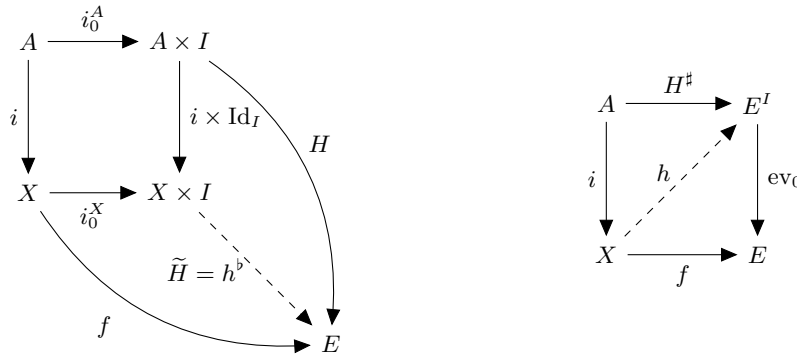
No pretendemos realizar un desarrollo profundo de la teoría, sino poner a disposición algunas de las propiedades básicas de estos objetos, así como proveer referencias a teoremas clásicos importantes, algunos de los cuales serán utilizados en los capítulos subsiguientes.

Las referencias principales para esta sección son [40, 75, 66, 46].

1.3.1 Cofibraciones

**Definición 1.3.1.** Sean  $A$ ,  $X$  y  $E$  espacios topológicos y sea  $i: A \rightarrow X$  una función continua. Decimos que  $i$  tiene la *propiedad de extensión de homotopías respecto de  $E$*  si para cualquier función continua  $f: X \rightarrow E$  y para cualquier homotopía  $H: A \times I \rightarrow E$  tales que  $H i_0^A = f i$  existe una homotopía  $\tilde{H}: X \times I \rightarrow E$  tal que  $\tilde{H}(i \times \text{Id}_I) = H$  y  $\tilde{H} i_0^X = f$

Utilizando la ley exponencial, no es difícil ver que esto es equivalente a que la inclusión  $i: A \hookrightarrow X$  tenga la propiedad de levantamiento a derecha respecto de la evaluación  $\text{ev}_0: E^I \rightarrow E$ . En efecto, tener funciones continuas  $H$  y  $f$  como arriba, es equivalente a que  $H^\sharp: A \rightarrow E^I$  y  $f: X \rightarrow E$  sean tales que  $\text{ev}_0 H^\sharp = f i$  mientras que tener una función continua  $h: X \rightarrow E^I$  tal que  $h i = H^\sharp$  y  $\text{ev}_0 h = f$  es equivalente a que  $h^\flat: X \times I \rightarrow E$  sea tal que  $h^\flat(i \times \text{Id}_I) = H$  y  $h^\flat i_0^X = f$ .



**Definición 1.3.2.** Sean  $A$  y  $X$  espacios topológicos y sea  $i: A \rightarrow X$  una función continua. Decimos que  $i$  es una *cofibración (de Hurewicz)* si tiene la propiedad de extensión de homotopías respecto de todos los espacios topológicos.

Equivalentemente,  $i$  es una cofibración (de Hurewicz) si tiene la propiedad de levantamiento a izquierda respecto a la evaluación  $\text{ev}_0: E^I \rightarrow E$  para todo espacio topológico  $E$ .

*Observación 1.3.3.* Se sigue de las proposiciones 1.1.31, 1.1.34, 1.1.38 y 1.1.35 que las composiciones, coproductos, pushouts y retracts de cofibraciones son cofibraciones.

**Ejemplo 1.3.4.** Sean  $X$  y  $E$  espacios topológicos. La proyección canónica  $\pi_E: E \times I \rightarrow E$  induce una función continua  $\pi_E^\sharp: E \rightarrow E^I$  que resulta una sección de  $\text{ev}_0: E^I \rightarrow E$ . Se sigue de 1.1.30 que la única flecha de  $\emptyset$  en  $X$  tiene la propiedad de levantamiento a izquierda respecto de  $\text{ev}_0$ . Así, la inclusión  $\emptyset \hookrightarrow X$  es una cofibración.

**Ejemplo 1.3.5.** Sean  $A$  y  $B$  espacios topológicos. Las funciones  $\text{Id}_A$  y  $\emptyset: \emptyset \rightarrow B$  son cofibraciones. Se sigue que el coproducto  $\text{Id}_A \sqcup \emptyset: A \sqcup \emptyset \rightarrow A \sqcup B$  es una cofibración. Luego, la inclusión canónica de  $A$  en  $A \sqcup B$  también lo es.

Si, en particular, la función  $\langle f, g \rangle: A \sqcup B \rightarrow X$  inducida por funciones continuas  $f: A \rightarrow X$  y  $g: B \rightarrow X$  resulta una cofibración, entonces las funciones  $f$  y  $g$  son cofibraciones.

## 1 Preliminares

---

**Definición 1.3.6.** Sean  $A$  y  $X$  espacios topológicos y sea  $f: A \rightarrow X$  una función continua. Se define la relación  $\sim$  en el espacio  $X \sqcup (A \times I)$  como la relación de equivalencia generada por

$$i_X(f(a)) \sim i_{A \times I}(a, 0)$$

para  $a \in A$ , donde  $i_X: X \rightarrow X \sqcup (A \times I)$  y  $i_{A \times I}: A \times I \rightarrow X \sqcup (A \times I)$  son las inclusiones canónicas de  $X$  y de  $A \times I$  en el coproducto, respectivamente. Definimos el *cilindro mapeante de  $f$*  como el espacio cociente  $Z_f = X \sqcup (A \times I) / \sim$ . No es difícil ver que se tiene un pushout

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_0^A} & A \times I \\ \downarrow f & \text{push} & \downarrow j_{A \times I} \\ X & \xrightarrow{j_X} & Z_f \end{array}$$

donde las funciones  $j_X$  y  $j_{A \times I}$  son las composiciones de las inclusiones canónicas  $i_X$  y  $i_{A \times I}$  con el cociente canónico  $q: X \sqcup (A \times I) \rightarrow Z_f$ .

La composición  $s = j_{A \times I} i_1$  mapea homeomórficamente al espacio  $A$  en su imagen. Por otro lado, es un resultado estándar que  $j_X(X)$  es un retracts por deformación fuerte de  $Z_f$ . Así, se suele considerar que  $Z_f$  es un espacio que contiene a  $A$  y a  $X$  como subespacios (de manera canónica) y que se retrae a  $X$  dejando fijos a los puntos de este.

Denotaremos por  $j$  a la función canónica  $j: Z_f \rightarrow X \times I$  inducida por la inclusión  $i_0^X: X \rightarrow X \times I$  y el producto  $f \times \text{Id}_I: A \times I \rightarrow X \times I$ .

**Proposición 1.3.7.** Sean  $A$  y  $X$  espacios topológicos y sea  $i: A \rightarrow X$  una función continua. Entonces  $i$  es una cofibración si y sólo si existe una retracción  $r: X \times I \rightarrow Z_i$  de la función canónica  $j: Z_i \rightarrow X \times I$ .

*Demostración.* Supongamos que  $i$  es una cofibración. Siguiendo la notación de la definición anterior, en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_0^A} & A \times I \\ \downarrow i & & \downarrow i \times \text{Id}_I \\ X & \xrightarrow{i_0^X} & X \times I \\ & \searrow j_X & \downarrow j_{A \times I} \\ & & Z_i \end{array}$$

(Note: A dashed arrow labeled  $r$  points from  $X \times I$  to  $Z_i$  in the original diagram.)

tenemos que  $j_{A \times I} i_0^A = j_X i$  y por lo tanto, existe una función continua  $r: X \times I \rightarrow Z_i$  tal que  $r(i \times \text{Id}_I) = j_{A \times I}$  y  $r i_0^X = j_X$ . Utilizando la propiedad universal del pushout, es fácil ver que  $r j = \text{Id}_{Z_i}$ .

### 1.3 Nociones clásicas de teoría de homotopía

---

Para la proposición recíproca, supongamos que  $r$  es una retracción de  $j$  y que se tienen funciones continuas  $H: A \times I \rightarrow E$  y  $f: X \rightarrow E$  tales que  $Hi_0^A = fi$ . Es claro que existe una única función continua  $g: Z_i \rightarrow E$  tal que  $gj_X = f$  y  $gj_{A \times I} = H$ . Es fácil ver que  $gri_0^X = f$  y que  $gr(i \times \text{Id}_I) = H$ .  $\square$

El siguiente teorema muestra que toda función continua entre espacios topológicos se puede factorizar como una cofibración seguida de una equivalencia homotópica.

**Teorema 1.3.8** ([66, Sección 1.4, Teorema 12]). *Sean  $A$  y  $B$  espacios topológicos y sea  $f: A \rightarrow B$  una función continua. Sea  $r: Z_f \rightarrow B$  la función definida por  $r([(a, t)]) = f(a)$  para todo  $a \in A$  y por  $r([b]) = b$  para todo  $b \in B$ . Sea además  $s = j_{A \times I}i_1: A \rightarrow Z_f$  la función subespacio canónica definida en 1.3.6.*

*Entonces*

1.  $s$  es una cofibración.
2.  $r$  es una retracción por deformación fuerte.
3.  $rs = f$ .

El siguiente resultado se deduce fácilmente y resulta una pieza clave para la caracterización de cofibraciones entre espacios topológicos finitos que daremos en el capítulo 3.

**Proposición 1.3.9.** *Sean  $A$  y  $X$  espacios topológicos y sea  $i: A \rightarrow X$  una cofibración. Entonces  $i$  es una función subespacio.*

*Demostración.* Sea  $r: X \times I \rightarrow Z_i$  una retracción de  $j: Z_i \rightarrow X \times I$ . Tenemos que

$$j_{A \times I}i_1^A = rj_{A \times I}i_1^A = r(i \times \text{Id}_I)i_1^A = ri_1^X i.$$

Dado que  $j_{A \times I}i_1^A$  es subespacio, es claro que  $i$  también lo es.  $\square$

**Proposición 1.3.10.** *Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $A \subseteq X$  un subespacio. Si la inclusión  $i: A \rightarrow X$  es una cofibración entonces  $X \times \{0\} \cup A \times I$  es un retracto de  $X \times I$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $i$  es una cofibración. Las restricciones

$$(i \times \text{Id}_I)|: A \times I \hookrightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$$

y

$$i_0^X|: X \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$$

de  $i \times \text{Id}_I$  y  $i_0^X$  permiten obtener una homotopía

$$H: X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$$

tal que  $H(i \times \text{Id}_I) = i \times \text{Id}_I|$  y  $Hi_0^X = i_0^X|$ . Se sigue fácilmente que  $H$  es una retracción de la inclusión  $X \times \{0\} \cup A \times I \hookrightarrow X \times I$ .  $\square$

## 1 Preliminares

---

Si  $X$  es un espacio topológico y  $A \subseteq X$  es un subespacio cerrado, entonces  $X \times \{0\}$  y  $A \times I$  son subespacios cerrados de  $X \times I$ . No es difícil ver que el siguiente diagrama es un pushout

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i_0^A} & A \times I \\
 \downarrow i & \text{push} & \downarrow (i \times \text{Id}_I)| \\
 X & \xrightarrow{i_0^X|} & X \times \{0\} \cup A \times I
 \end{array}$$

donde las funciones  $(i \times \text{Id}_I)|$  y  $i_0^X|$  son las restricciones obvias definidas en la prueba anterior.

En efecto, si  $f: A \times I \rightarrow E$  y  $g: X \rightarrow E$  son funciones continuas tales que  $f i_0^A = g i$ , la única función  $h: X \times \{0\} \cup A \times I \rightarrow E$  tal que  $h(i \times \text{Id}_I)| = f$  y  $h i_0^X| = g$  está definida por

$$h(x, 0) = g(x)$$

para todo  $x \in X$  y

$$h(a, t) = f(a, t)$$

para todo  $a \in A$  y todo  $t \in I$ . Es claro que  $h$  está bien definida y del lema de pegado se deduce que  $h$  resulta continua.

Se sigue que  $Z_i$  es naturalmente homeomorfo a  $X \times \{0\} \cup A \times I$ .

El siguiente resultado es inmediato.

**Proposición 1.3.11.** *Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $A \subseteq X$  un subespacio cerrado. Entonces, la inclusión  $i: A \rightarrow X$  es una cofibración si y sólo si  $X \times \{0\} \cup A \times I$  es un retracto de  $X \times I$ .*

La hipótesis de que  $A$  sea un subespacio cerrado en la proposición anterior no es esencial. El matemático Arne Strøm probó en [70] el siguiente lema.

**Lema 1.3.12** ([70, Lema 3]). *Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $A$  un subespacio de  $X$  tal que  $X \times \{0\} \cup A \times I$  es un retracto de  $X \times I$ . Entonces, un subconjunto  $C$  de  $X \times \{0\} \cup A \times I$  es abierto si y sólo si  $C \cap X \times \{0\}$  es abierto en  $X \times \{0\}$  y  $C \cap A \times I$  es abierto en  $A \times I$ .*

De este lema, no es difícil obtener la siguiente caracterización de cofibraciones.

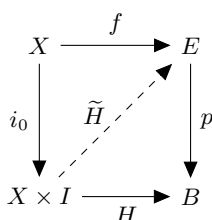
**Teorema 1.3.13** ([70, Teorema 2]). *Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $A$  un subespacio de  $X$ . Entonces, la inclusión  $i: A \hookrightarrow X$  es una cofibración si y sólo si  $X \times \{0\} \cup A \times I$  es un retracto de  $X \times I$ .*

Como veremos en el capítulo 3, la hipótesis de que  $X \times \{0\} \cup A \times I$  sea un retracto de  $X \times I$  en el lema 1.3.12 puede ser sustituida por una que resulta mucho más conveniente para nuestro propósito de caracterizar cofibraciones entre espacios topológicos finitos. En efecto, el resultado vale si pedimos en cambio que el espacio  $A$  sea un espacio topológico finito (cf. lema 3.3.1).

### 1.3.2 Fibraciones de Hurewicz

Es extensa la bibliografía que desarrolla la teoría de fibraciones de Hurewicz, una importantísima herramienta en topología algebraica. En esta sección introduciremos algunas definiciones y enunciaremos los resultados más importantes de esta teoría que pueden ser ampliados y profundizados en [42, 75, 40, 66, 46].

**Definición 1.3.14.** Sean  $E$ ,  $B$  y  $X$  espacios topológicos y sea  $p: E \rightarrow B$  una función continua. Decimos que  $p$  tiene la *propiedad de levantamiento de homotopías respecto de  $X$*  si tiene la propiedad de levantamiento a derecha respecto de la inclusión  $i_0: X \rightarrow X \times I$ . Explícitamente,  $p$  tiene la propiedad de levantamiento de homotopías respecto de  $X$  si para cualquier función continua  $f: X \rightarrow E$  y cualquier homotopía  $H: X \times I \rightarrow B$  tales que  $H i_0 = p f$ , existe una homotopía  $\tilde{H}: X \times I \rightarrow E$  tal que  $\tilde{H} i_0 = f$  y  $p \tilde{H} = H$ .



Dado que la proyección canónica  $X \times \{0\} \rightarrow X$  es un homeomorfismo, es claro que  $p$  tiene la propiedad de levantamiento de homotopías respecto de  $X$  si y sólo si  $p$  tiene la propiedad de levantamiento a derecha respecto de la inclusión  $i: X \times \{0\} \hookrightarrow X \times I$ .

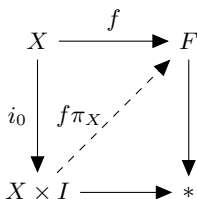
**Definición 1.3.15.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos y sea  $p: E \rightarrow B$  una función continua. Decimos que  $p$  es una *fibración (de Hurewicz)* si tiene la propiedad de levantamiento de homotopías respecto de todos los espacios topológicos.

*Observación 1.3.16.* Se sigue de las proposiciones 1.1.32, 1.1.33, 1.1.37 y 1.1.36 que las composiciones, productos, pullbacks y retracts de fibraciones son fibraciones.

Más aún, si  $p: E \rightarrow B$  es una fibración y  $X$  es un espacio exponenciable, utilizando la ley exponencial no es difícil ver que  $p^X: E^X \rightarrow B^X$  es también fibración.

**Ejemplo 1.3.17.** Sea  $F$  un espacio topológico. Dado que para cualquier espacio topológico  $X$  la inclusión  $i_0: X \rightarrow X \times I$  es una sección de la proyección canónica  $\pi_X: X \times I \rightarrow X$ , se sigue de 1.1.30 que la única función  $F \rightarrow *$  es fibración de Hurewicz.

Explícitamente, para cualquier espacio topológico  $X$  y cualquier función continua  $f: X \rightarrow F$ , la función  $f \pi_X: X \times I \rightarrow F$  es un levantado de  $X \times I \rightarrow *$  por  $F \rightarrow *$  a partir de  $f$ .





## 1 Preliminares

---

**Ejemplo 1.3.18.** Sean  $B$  y  $F$  espacios topológicos y sea  $\pi_B: B \times F \rightarrow B$  la proyección canónica. Dado que la única función  $F \rightarrow *$  es fibración y que  $\pi_B$  es el pullback de  $F \rightarrow *$  a lo largo de  $B \rightarrow *$ , se sigue que  $\pi_B$  es fibración de Hurewicz.

**Ejemplo 1.3.19.** Sea  $B$  un espacio topológico y sea  $t \in I$ . La evaluación  $\text{ev}_t: B^I \rightarrow B$  es fibración de Hurewicz. Para ver esto, observemos primero que  $I \times \{t\} \cup \{0\} \times I$  es un retracto de  $I \times I$  de donde se sigue que  $X \times I \times \{t\} \cup X \times \{0\} \times I$  es un retracto de  $X \times I \times I$  para cualquier espacio topológico  $X$ .

Ahora bien, sea  $X$  un espacio topológico, sea  $H: X \times I \rightarrow B$  una homotopía y sea  $f: X \rightarrow B^I$  una función continua tal que  $H i_0 = \text{ev}_t f$ . Sea  $\rho: X \times I \times I \rightarrow X \times I \times \{t\} \cup X \times \{0\} \times I$  una retracción. Definimos  $\Gamma: X \times I \times \{t\} \cup X \times \{0\} \times I \rightarrow B$  por

$$\Gamma(x, r, s) = \begin{cases} H(x, r) & \text{si } s = t, \\ f(x)(s) & \text{si } r = 0. \end{cases}$$

Dado que  $H i_0 = \text{ev}_t f$ , es claro que  $\Gamma$  está bien definida. Es claro además que las restricciones de  $\Gamma$  a  $X \times I \times \{t\}$  y a  $X \times \{0\} \times I$  son continuas. Se sigue del lema de pegado que  $\Gamma$  es continua. Es fácil ver que la función  $(\Gamma\rho)^\sharp: X \times I \rightarrow B^I$  inducida por  $\Gamma\rho$  por la ley exponencial es un levantado de  $H$  por  $\text{ev}_t$  desde  $f$ . En efecto,

$$(\Gamma\rho)^\sharp(x, 0)(s) = \Gamma\rho(x, 0, s) = \Gamma(x, 0, s) = f(x)(s)$$

para todo  $x \in X$  y todo  $s \in I$ , de donde obtenemos que  $(\Gamma\rho)^\sharp i_0 = f$ , y

$$\text{ev}_t(\Gamma\rho)^\sharp(x, r) = (\Gamma\rho)^\sharp(x, r)(t) = \Gamma\rho(x, r, t) = \Gamma(x, r, t) = H(x, r)$$

para todo  $x \in X$  y todo  $r \in I$ , de donde obtenemos que  $\text{ev}_t(\Gamma\rho)^\sharp = H$ .

**Definición 1.3.20.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos y sea  $p: E \rightarrow B$  una función continua. Definimos el espacio  $E \times_p B^I = \{(e, \gamma) \in E \times B^I : p(e) = \gamma(0)\}$  con la topología de subespacio de  $E \times B^I$ .

En la situación de la definición anterior, no es difícil probar que el siguiente diagrama conmutativo es un pullback, donde  $\pi_E$  y  $\pi_{B^I}$  son las restricciones a  $E \times_p B^I$  de las proyecciones canónicas de  $E \times B^I$  a  $E$  y a  $B^I$ , respectivamente:

$$\begin{array}{ccc} E \times_p B^I & \xrightarrow{\pi_E} & E \\ \pi_{B^I} \downarrow & \text{pull} & \downarrow p \\ B^I & \xrightarrow{\text{ev}_0} & B \end{array}$$

Notemos que la construcción  $E \times_p B^I$  es formalmente dual a la construcción del cilindro  $Z_i$  definida en 1.3.6.

**Definición 1.3.21.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos y sea  $p: E \rightarrow B$  una función continua. Sea  $\rho: E^I \rightarrow E \times_p B^I$  la función inducida por las funciones  $\text{ev}_0: E^I \rightarrow E$  y  $p^I: E^I \rightarrow B^I$ .

Sea  $\Lambda: E \times_p B^I \rightarrow E^I$  una función continua. Decimos que  $\Lambda$  es una *función levantadora de caminos para p* si  $\Lambda$  es una sección de  $\rho$ .

### 1.3 Nociones clásicas de teoría de homotopía

*Observación 1.3.22.* Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos, sea  $p: E \rightarrow B$  una función continua y, como en la definición anterior, sea  $\rho: E^I \rightarrow E \times_p B^I$  la función inducida por las funciones  $\text{ev}_0: E^I \rightarrow E$  y  $p^I: E^I \rightarrow B^I$ . Sean además, como antes,  $\pi_E$  y  $\pi_{B^I}$  las restricciones a  $E \times_p B^I$  de las proyecciones canónicas de  $E \times B^I$  a  $E$  y a  $B^I$ , respectivamente.

Sea  $\Lambda$  una función levantadora de caminos para  $p$ . Entonces  $\rho\Lambda = \text{Id}_{E \times_p B^I}$  y por lo tanto se tiene que  $\text{ev}_0\Lambda = \pi_E\rho\Lambda = \pi_E$  y que  $p^I\Lambda = \pi_{B^I}\rho\Lambda = \pi_{B^I}$ .

Recíprocamente, si  $\Lambda: E \times_p B^I \rightarrow E^I$  es una función continua tal que  $\text{ev}_0\Lambda = \pi_E$  y  $p^I\Lambda = \pi_{B^I}$ , entonces  $\pi_E\rho\Lambda = \text{ev}_0\Lambda = \pi_E$  y  $\pi_{B^I}\rho\Lambda = p^I\Lambda = \pi_{B^I}$ . Por propiedad universal del pullback, es claro que  $\rho\Lambda = \text{Id}_{E \times_p B^I}$  y por lo tanto,  $\Lambda$  es una función levantadora de caminos para  $p$ .

Luego, las funciones levantadoras de caminos para  $p$  son precisamente las funciones continuas  $\Lambda: E \times_p B^I \rightarrow E^I$  tales que  $\text{ev}_0\Lambda = \pi_E$  y  $p^I\Lambda = \pi_{B^I}$ .

La proposición 1.3.23 que probaremos a continuación es una importante caracterización de las fibraciones de Hurewicz y resulta dual a la proposición 1.3.7 para cofibraciones.

**Proposición 1.3.23.** *Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos y sea  $p: E \rightarrow B$  una función continua. Entonces  $p$  es fibración de Hurewicz si y sólo si  $p$  tiene una función levantadora de caminos.*

*Demostración.* Supongamos primero que  $p$  es fibración de Hurewicz. Sean  $\pi_E: E \times_p B^I \rightarrow E$  y  $\pi_{B^I}: E \times_p B^I \rightarrow B^I$  las restricciones de las proyecciones canónicas de  $E \times B^I$  a  $E$  y a  $B^I$ .

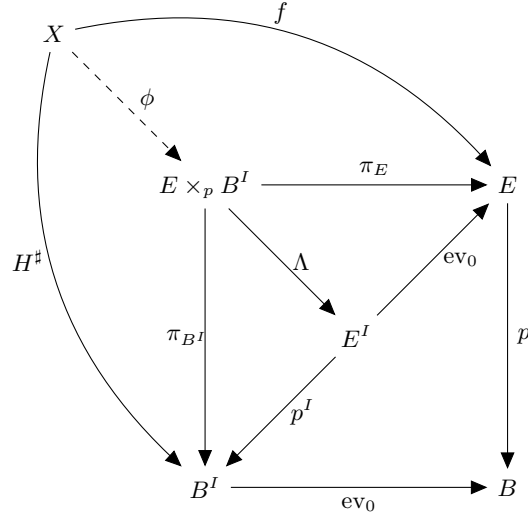
Notemos que  $\text{ev}(\pi_{B^I} \times \text{Id}_I)i_0 = p\pi_E$  y por lo tanto existe  $\lambda: E \times_p B^I \times I \rightarrow E$  tal que  $p\lambda = \text{ev}(\pi_{B^I} \times \text{Id}_I)$  y  $\lambda i_0 = \pi_E$ .

$$\begin{array}{ccc}
 E \times_p B^I & \xrightarrow{\pi_E} & E \\
 \downarrow i_0 & \searrow \lambda & \downarrow p \\
 E \times_p B^I \times I & \xrightarrow{\text{ev}(\pi_{B^I} \times \text{Id}_I)} & B
 \end{array}$$

Sea  $\Lambda = \lambda^\sharp: E \times_p B^I \rightarrow E^I$  la función inducida por  $\lambda$  por la ley exponencial. Es fácil probar que  $\text{ev}_0\Lambda = \lambda i_0 = \pi_E$  y que  $p^I\Lambda = (p\lambda)^\sharp = \pi_{B^I}$ . De la observación anterior, concluimos que  $\Lambda$  es una función levantadora de caminos para  $p$ .

Supongamos ahora que  $p$  tiene una función levantadora de caminos  $\Lambda$ . Sea  $X$  un espacio topológico y sean  $f: X \rightarrow E$  y  $H: X \times I \rightarrow B$  funciones continuas tales que  $H i_0 = pf$ .

Sea  $H^\sharp: X \rightarrow B^I$  la función inducida por  $H$  por la ley exponencial. Entonces  $\text{ev}_0 H^\sharp = H i_0 = pf$  y por lo tanto, existe una única función continua  $\phi: X \rightarrow E \times_p B^I$  tal que  $\pi_E\phi = f$  y  $\pi_{B^I}\phi = H^\sharp$ .



Sea  $\tilde{H} = (\Lambda\phi)^b: X \times I \rightarrow E$  la función inducida por  $\Lambda\phi$  por la ley exponencial. Entonces  $\tilde{H}i_0 = \text{ev}_0\Lambda\phi = \pi_E\phi = f$  y  $(p\tilde{H})^\# = p^I\Lambda\phi = \pi_{B^I}\phi = H^\#$  de donde obtenemos claramente que  $p\tilde{H} = H$ . Se sigue que  $p$  es fibración de Hurewicz.  $\square$

Enunciamos a continuación algunos resultados importantes de la teoría de fibraciones.

**Teorema 1.3.24** ([40, Proposición 4.61]). *Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos con  $B$  arcoconexo y sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración de Hurewicz. Entonces las fibras de  $p$  son homotópicamente equivalentes.*

**Teorema 1.3.25** ([75, Teorema 5.6.4]). *Sean  $p: E \rightarrow B$  y  $\tilde{p}: \tilde{E} \rightarrow B$  dos fibraciones de Hurewicz y sea  $h: E \rightarrow \tilde{E}$  una equivalencia homotópica que es una flecha sobre  $B$  de  $p$  a  $\tilde{p}$ . Entonces  $h$  es una equivalencia homotópica por fibras.*

El siguiente teorema muestra que toda función continua entre espacios topológicos se puede factorizar como una equivalencia homotópica seguida de una fibración. Como consecuencia, se obtiene que toda función continua es homotópicamente equivalente por fibras a una fibración de Hurewicz.

**Teorema 1.3.26** ([40, p. 407]). *Sean  $A$  y  $B$  espacios topológicos y sea  $f: A \rightarrow B$  una función continua. Sea  $i: A \rightarrow A \times_f B^I$  la función definida por  $i(a) = (a, C_{f(a)})$  y sea  $p: A \times_f B^I \rightarrow B$  la composición  $A \times_f B^I \hookrightarrow A \times B^I \xrightarrow{\pi_{B^I}} B^I \xrightarrow{\text{ev}_1} B$  donde  $A \times_f B^I \hookrightarrow A \times B^I$  es la inclusión y  $\pi_{B^I}: A \times B^I \rightarrow B^I$  es la proyección canónica. Entonces*

1.  $i$  es una equivalencia homotópica y subespacio.
2.  $p$  es una fibración de Hurewicz.
3.  $pi = f$ .

Más aún, el espacio  $i(A)$  es un retracto por deformación fuerte de  $A \times_f B^I$  y la retracción correspondiente está inducida por la proyección canónica  $A \times_f B^I \twoheadrightarrow A$ .

### 1.3 Nociones clásicas de teoría de homotopía

---

En las condiciones del teorema anterior, se suele considerar que  $A$  es un retracto por deformación fuerte de  $A \times_f B^I$  y que  $i$  es la inclusión.

La siguiente generalización del concepto de fibración de Hurewicz suele ser de gran utilidad.

**Definición 1.3.27.** Una función continua se denomina *fibración de Serre* si tiene la propiedad de levantamiento de homotopías respecto de cubos  $I^n$  (o discos  $D^n$ ) para  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Equivalentemente, una función continua es una fibración de Serre si tiene la propiedad de levantamiento de homotopías respecto de CW-complejos (ver [40, p. 376]).

**Teorema 1.3.28** ([40, Teorema 4.41]). Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos, sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración de Serre y sea  $b_0 \in B$ . Sea  $F = p^{-1}(b_0)$ . Entonces, para cada  $x_0 \in F$  se tiene una sucesión exacta larga

$$\cdots \rightarrow \pi_n(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \cdots \xrightarrow{i_*} \pi_0(E, x_0) \rightarrow 0$$

donde  $i_*$  es la función inducida por la inclusión  $i: F \hookrightarrow E$  y  $p_*$  es la función inducida por  $p$ .

La siguiente definición resultará muy útil en el capítulo 5, en el que estudiaremos fibraciones entre espacios topológicos finitos  $T_0$ .

**Definición 1.3.29.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos y sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración de Hurewicz. Una función levantadora de caminos  $\Lambda$  para  $p$  se llamará *regular* si levanta caminos constantes a caminos constantes, es decir, si  $\Lambda(e, C_b) = C_e$  para cualquier  $b \in B$  y cualquier  $e \in p^{-1}(b)$ .

Un resultado de W. Hurewicz establece que las fibraciones sobre espacios métricos tienen funciones de levantamiento regulares.

**Teorema 1.3.30** ([42, Sección 3]). Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos y sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración de Hurewicz. Si  $B$  es un espacio métrico, entonces  $p$  tiene una función levantadora de caminos regular.

Un importantísimo resultado de la teoría de fibraciones de Hurewicz establece que, bajo ciertas condiciones, una *fibración local* es una fibración. Este teorema y uno de sus corolarios ocupan un rol fundamental en la teoría de fibrados que desarrollaremos en la subsección 1.3.3. Veamos las definiciones necesarias para enunciar dichos resultados. Estas pueden encontrarse en [66].

**Definición 1.3.31.** Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $\mathcal{A}$  un cubrimiento de  $X$ .

El cubrimiento  $\mathcal{A}$  de  $X$  se dice *localmente finito* si para todo  $x \in X$  existe un entorno  $U$  de  $x$  que interseca finitos elementos de  $\mathcal{A}$ .

El cubrimiento  $\mathcal{A}$  se dice *numerable* si es localmente finito y para todo  $U \in \mathcal{A}$  existe una función continua  $f_U: X \rightarrow I$  tal que  $U = f_U^{-1}((0, 1])$ .

**Definición 1.3.32.** Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $\mathcal{A}$  un cubrimiento de  $X$ . Un cubrimiento  $\mathcal{B}$  de  $X$  se llamará *refinamiento de  $\mathcal{A}$*  si para todo  $U \in \mathcal{B}$  existe  $V \in \mathcal{A}$  tal que  $U \subseteq V$ .

Un refinamiento  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{A}$  se dirá *abierto* si es abierto como cubrimiento, es decir, si sus elementos son conjuntos abiertos.

## 1 Preliminares

---

**Definición 1.3.33.** Sea  $X$  un espacio topológico. Decimos que  $X$  es un espacio *paracompacto* si todo cubrimiento abierto de  $X$  tiene un refinamiento abierto localmente finito.

**Definición 1.3.34.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos y sea  $p: E \rightarrow B$  una función continua. Decimos que  $p$  es una *fibración (de Hurewicz) local* si existe un cubrimiento abierto  $\mathcal{B}$  de  $B$  tal que para todo  $U \in \mathcal{B}$ , la restricción  $p|: p^{-1}(U) \rightarrow U$  es una fibración de Hurewicz.

*Observación 1.3.35.* Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos y sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración de Hurewicz. Para cualquier  $A \subseteq B$ , podemos considerar la restricción  $p|: p^{-1}(A) \rightarrow A$  de  $p$ . Dado que  $p|$  es el pullback de  $p$  a lo largo de la inclusión  $A \hookrightarrow B$ , se sigue de 1.1.37 que  $p|$  tiene la propiedad de levantamiento de homotopías respecto de todos los espacios topológicos y por lo tanto es una fibración de Hurewicz.

Así, toda fibración de Hurewicz es una fibración local. Existen, sin embargo, ejemplos de fibraciones locales que no son fibraciones de Hurewicz. Uno de estos ejemplos es desarrollado en [76].

Enunciamos ahora los resultados anteriormente mencionados.

**Teorema 1.3.36** ([66, Sección 2.7, Teorema 12]). *Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos y sea  $p: E \rightarrow B$  una función continua. Si existe un cubrimiento numerable  $\mathcal{B}$  de  $B$  tal que para todo  $U \in \mathcal{B}$  la restricción  $p|: p^{-1}(U) \rightarrow U$  de  $p$  es una fibración de Hurewicz entonces  $p$  es también una fibración de Hurewicz.*

Es un hecho conocido que si  $B$  es un espacio paracompacto y Hausdorff entonces todo cubrimiento abierto de  $B$  tiene un refinamiento numerable. Se obtiene entonces el corolario siguiente (ver [42, Sección 4] o [66, Sección 2.7, Teorema 13]):

**Corolario 1.3.37** (“Teorema de Uniformización de Hurewicz”). *Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos con  $B$  paracompacto y Hausdorff y sea  $p: E \rightarrow B$  una función continua. Entonces  $p$  es fibración de Hurewicz si y sólo si es fibración de Hurewicz local.*

### 1.3.3 Fibrados

Exponemos a continuación las principales definiciones y resultados de la teoría de fibrados. La bibliografía básica para esta subsección es [66, 67].

**Definición 1.3.38.** Sean  $E$ ,  $B$  y  $F$  espacios topológicos con  $B$  conexo y sea  $p: E \rightarrow B$  una función continua. Diremos que la cuaterna  $(E, B, F, p)$  es un *fibrado sobre  $B$  con fibra  $F$  y espacio total  $E$*  si para todo  $b \in B$  existe un entorno  $U$  de  $b$ , llamado *entorno trivializante de  $b$*  y un homeomorfismo  $\varphi: p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ , llamado *morfismo trivializante de  $U$* , tales que  $\pi_U \varphi = p|$  donde  $\pi_U: U \times F \rightarrow U$  es la proyección canónica y  $p|: p^{-1}(U) \rightarrow U$  es la restricción de  $p$ . Esto es, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\ & \searrow p| & \swarrow \pi_U \\ & U & \end{array}$$

conmuta.

Por simplicidad, diremos que una función continua  $p: E \rightarrow B$  es un fibrado (sobre  $B$  con fibra  $F$  y espacio total  $E$ ) si  $(E, B, F, p)$  es un fibrado.

**Ejemplo 1.3.39.** Sean  $B$  y  $F$  espacios topológicos con  $B$  conexo y sea  $\pi_B: B \times F \rightarrow B$  la proyección canónica. Entonces  $\pi_B$  es un fibrado con fibra  $F$ .

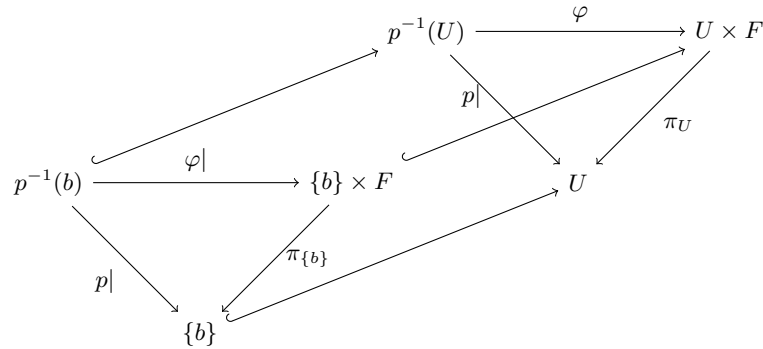
**Ejemplo 1.3.40.** Sea  $X$  un espacio topológico, sea  $f$  un automorfismo de  $X$  y sea  $\sim$  la relación de equivalencia en  $X \times I$  generada por  $(x, 0) \sim (f(x), 1)$  para todo  $x \in X$ . Se define el *toro mapeante* de  $f$  como el espacio cociente  $T_f = X \times I / \sim$ .

Sea  $q: X \times I \rightarrow T_f$  la proyección al cociente y sea  $\pi_I: X \times I \rightarrow I$  la proyección canónica a la segunda coordenada. Consideremos a  $S^1$  como el subespacio de  $\mathbb{C}$  formado por los números complejos de módulo 1 y sea  $\rho: I \rightarrow S^1$  la función (claramente continua) definida por  $\rho(t) = e^{2\pi it}$ . Es fácil ver que  $\rho\pi_I$  “pasa al cociente” y por lo tanto induce una única función continua  $p: T_f \rightarrow S^1$  tal que  $\rho\pi_I = pq$ , necesariamente definida por  $p(q(x, t)) = e^{2\pi it}$  para todo  $x \in X$  y todo  $t \in I$ .

Puede probarse que  $p$  es un fibrado con base  $S^1$ , espacio total  $T_f$  y fibra  $X$ .

En particular, el toro mapeante de  $\text{Id}_{S^1}$  es el toro usual, mientras que el toro mapeante de la función conjugación compleja, restringida a un automorfismo de  $S^1$ , es la botella de Klein.

*Observación 1.3.41.* Sea  $(E, B, F, p)$  un fibrado, sea  $b \in B$ , sea  $U$  un entorno trivializante de  $b$  y sea  $\varphi$  un morfismo trivializante de  $U$ . No es difícil ver que se tiene un diagrama conmutativo



donde las flechas no rotuladas son las inclusiones y las “caras rectangulares” son pullbacks. Dado que  $\varphi$  es homeomorfismo,  $\varphi|$  también lo es.

Se sigue entonces que las fibras de  $p$  son homeomorfas a  $\{b\} \times F$  y por lo tanto a  $F$ .

Dado que las proyecciones de productos son fibraciones de Hurewicz, de la definición de fibrado se sigue que los fibrados son fibraciones locales. Del Teorema de Uniformización de Hurewicz (Corolario 1.3.37), se obtiene inmediatamente el siguiente resultado:

**Teorema 1.3.42** ([66, Sección 2.7, Teorema 14]). *Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos con  $B$  conexo, paracompacto y Hausdorff y sea  $p: E \rightarrow B$  un fibrado. Entonces  $p$  es una fibración de Hurewicz.*

## 1 Preliminares

**Definición 1.3.43.** Sean  $E$ ,  $E'$  y  $B$  espacios topológicos con  $B$  conexo y sean  $p: E \rightarrow B$  y  $p': E' \rightarrow B$  dos fibrados. Un *morfismo de fibrados*  $\phi$  de  $p$  a  $p'$  es una función continua  $\phi: E \rightarrow E'$  tal que  $p'\phi = p$ , es decir, tal que se tiene un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & & B \end{array}$$

Por lo tanto, un morfismo de fibrados de  $p$  a  $p'$  es una flecha de  $p$  a  $p'$  en la categoría  $\mathbf{Top}/B$  de espacios topológicos sobre  $B$ . Notemos que si  $\phi$  es un homeomorfismo,  $\phi^{-1}$  es un morfismo de fibrados de  $p'$  a  $p$ , y por lo tanto,  $\phi$  es un isomorfismo en  $\mathbf{Top}/B$ . En este caso, diremos que  $\phi$  es un *isomorfismo de fibrados*. Si  $p = p'$ , entonces  $\phi$  es llamado *automorfismo de fibrados* de  $p$ .

La siguiente proposición es clásica.

**Proposición 1.3.44.** Sean  $E$ ,  $B$ ,  $F$  e  $Y$  espacios topológicos con  $B$  e  $Y$  conexos, sea  $p: E \rightarrow B$  un fibrado con fibra  $F$  y sea  $f: Y \rightarrow B$  una función continua. Entonces el pullback de  $p$  a lo largo de  $f$  es un fibrado con fibra  $F$ .

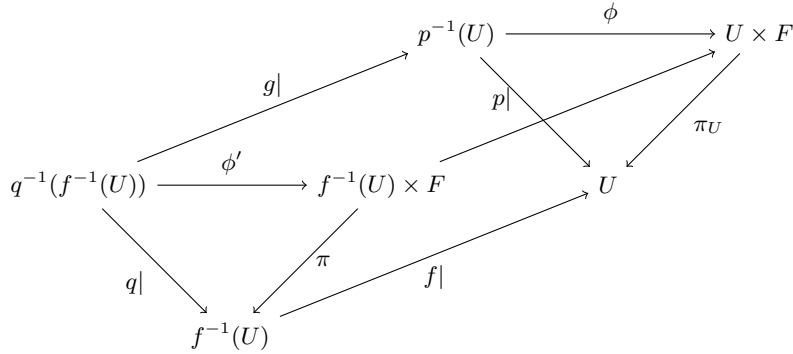
*Demostración.* Sea  $U$  un entorno trivializante de  $B$  y sea  $\phi: p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  un morfismo trivializante de  $U$ . Veremos que  $f^{-1}(U)$  es un entorno trivializante de  $Y$ .

Sea  $X$ , junto con flechas  $q: X \rightarrow Y$  y  $g: X \rightarrow E$ , un pullback del diagrama  $Y \xrightarrow{f} B \xleftarrow{p} E$ . Sean  $q|: q^{-1}(f^{-1}(U)) \rightarrow f^{-1}(U)$ ,  $p|: p^{-1}(U) \rightarrow U$  y  $f|: f^{-1}(U) \rightarrow U$  las restricciones de  $q$ ,  $p$  y  $f$ , respectivamente. Dado que  $p|$  es el pullback de  $p$  a lo largo de la inclusión  $U \hookrightarrow B$  y  $q|$  es el pullback de  $q$  a lo largo de la inclusión  $f^{-1}(U) \hookrightarrow Y$ , la restricción  $g|: q^{-1}(f^{-1}(U)) \rightarrow p^{-1}(U)$  de  $g$  es la única flecha que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & X & \xrightarrow{g} & E \\ & \nearrow & \downarrow & & \downarrow p \\ q^{-1}(f^{-1}(U)) & \xrightarrow{\quad} & p^{-1}(U) & & \\ & \downarrow q & \downarrow p| & & \\ & & Y & \xrightarrow{f} & B \\ & \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\ f^{-1}(U) & \xrightarrow{\quad} & U & & \end{array}$$

Observemos que  $f| \times \text{Id}_F$  es el pullback de  $f|$  a lo largo de la proyección  $\pi_U: U \times F \rightarrow U$  y que  $g|$  es el pullback de  $f|$  a lo largo de  $p|$ . No es difícil ver entonces que se tiene un

diagrama conmutativo



donde la flecha no rotulada de  $f^{-1}(U) \times F$  en  $U \times F$  es  $f| \times \text{Id}_F$ , la flecha  $\pi$  es la proyección canónica y la flecha  $\phi'$  es la flecha inducida entre los pullbacks de  $f^{-1}(U) \xrightarrow{f|} U \xleftarrow{p|} p^{-1}(U)$  y de  $f^{-1}(U) \xrightarrow{f|} U \xleftarrow{\pi_U} U \times F$  por las flechas  $\text{Id}_{f^{-1}(U)}$ ,  $\text{Id}_U$  y  $\phi$ .

Se sigue fácilmente que la “cara superior” del diagrama anterior es un pullback, de donde obtenemos que  $\phi'$  es un homeomorfismo. Así,  $f^{-1}(U)$  es un entorno trivializante con morfismo trivializante  $\phi'$ .

Ahora bien, es claro que para cualquier punto  $y \in Y$ , el espacio  $f^{-1}(U)$  es un entorno trivializante de  $y$  en  $Y$ , para cualquier entorno trivializante  $U$  de  $f(y)$  en  $B$ . El resultado se sigue.  $\square$

### 1.3.4 Revestimientos

**Definición 1.3.45.** Sean  $X$  y  $\tilde{X}$  espacios topológicos y sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  una función continua. Sea  $U \subseteq X$  un subespacio abierto. Decimos que  $U$  está *parejamente cubierto por  $p$*  si  $p^{-1}(U)$  es unión disjunta de abiertos de  $\tilde{X}$  que se mapean homeomórficamente sobre  $U$  por  $p$ .

**Definición 1.3.46.** Sean  $X$  y  $\tilde{X}$  espacios topológicos y sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  una función continua. Decimos que la terna  $(\tilde{X}, p, X)$  es un *revestimiento* si para todo punto  $x$  de  $X$  existe un entorno abierto de  $x$  parejamente cubierto por  $p$ .

Si  $(\tilde{X}, p, X)$  es un revestimiento, es usual llamar *revestimiento de  $X$*  tanto al espacio  $\tilde{X}$  como a la función  $p$ .

**Ejemplo 1.3.47.** Los homeomorfismos son revestimientos.

**Ejemplo 1.3.48.** Consideremos nuevamente a  $S^1$  como el subespacio de  $\mathbb{C}$  formado por los números complejos de módulo 1 y sea  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  la función continua definida por  $p(t) = e^{2\pi it}$ . No es difícil ver que  $p$  es un revestimiento de  $S^1$ . En efecto, para cada  $z \in S^1$ , tenemos que  $S^1 - \{-z\}$  es un entorno abierto de  $z$ , que  $p^{-1}(S^1 - \{-z\}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (\phi + n, \phi + n + 1)$  donde  $\phi$  es cualquier solución de la ecuación  $e^{2\pi i\phi} = -z$ , y que cada intervalo  $(\phi + n, \phi + n + 1)$  se mapea homeomórficamente por  $p$  sobre  $S^1 - \{-z\}$ .

De manera similar, la función  $p \times p: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times S^1$  es un revestimiento. Componiendo con los homeomorfismos canónicos, se puede considerar a  $p \times p$  como un revestimiento de  $\mathbb{R}^2$  en el toro  $\mathbf{T}^2$ .



## 1 Preliminares

---

**Proposición 1.3.49.** Sean  $X$  y  $\tilde{X}$  espacios topológicos con  $X$  conexo y sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  una función continua.

Entonces  $p$  es un revestimiento si y sólo si es un fibrado con fibra discreta.

*Demostración.* Supongamos que  $(\tilde{X}, p, X)$  es un revestimiento. Veremos primero que para cada  $x \in X$  existe un entorno  $U_x$  de  $x$  y un homeomorfismo  $\varphi_x: p^{-1}(U_x) \rightarrow U_x \times p^{-1}(x)$  tal que  $\pi_{U_x} \varphi_x = p|$  donde  $\pi_{U_x}: U_x \times p^{-1}(x) \rightarrow U_x$  es la proyección y  $p|: p^{-1}(U_x) \rightarrow U_x$  es la restricción de  $p$ .

Sea entonces  $x \in X$ . Existe un entorno  $U_x$  de  $x$  tal que

$$p^{-1}(U_x) = \bigcup_{\alpha \in F} V_\alpha$$

donde  $F$  es algún conjunto, donde los conjuntos  $V_\alpha$ ,  $\alpha \in F$ , son abiertos disjuntos dos a dos, y donde la restricción  $p_\alpha: V_\alpha \rightarrow U_x$  de  $p$  es un homeomorfismo para cada  $\alpha \in F$ . No es difícil ver que se tiene un homeomorfismo  $\varphi: \bigcup_{\alpha \in F} V_\alpha \rightarrow U_x \times F$  definido por  $\varphi(\tilde{x}) = (p(\tilde{x}), \alpha)$  para  $\tilde{x} \in V_\alpha$  con  $\alpha \in F$ , donde  $F$  es considerado como un espacio topológico discreto. Es claro entonces que se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_x) & \xrightarrow{\varphi} & U_x \times F \\ & \searrow p| & \swarrow \pi_{U_x} \\ & & U_x \end{array}$$

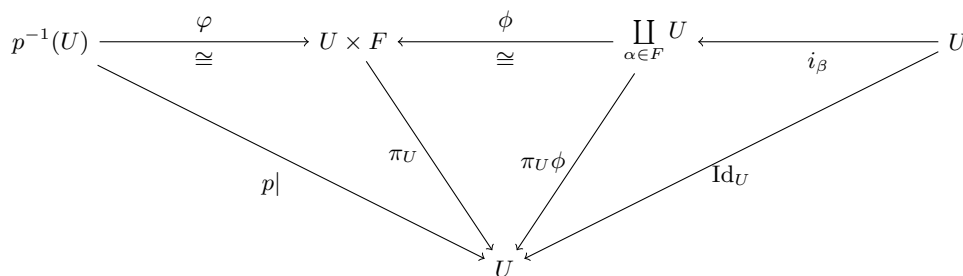
donde  $\pi_{U_x}$  es la proyección a la primera coordenada y  $p|$  es la restricción de  $p$ .

Es evidente que  $\varphi$  mapea a  $p^{-1}(x)$  sobre  $\{x\} \times F$  homeomórficamente y por lo tanto, tenemos un homeomorfismo  $F \xrightarrow{i_x} \{x\} \times F \xrightarrow{\varphi^{-1}|} p^{-1}(x)$  que induce un homeomorfismo  $U_x \times F \cong U_x \times p^{-1}(x)$ . Componiendo  $\varphi$  con este último obtenemos el homeomorfismo  $\varphi_x$  deseado.

Sea ahora  $x_0 \in X$ . Notemos que, por lo que hemos probado, el cardinal de  $p^{-1}(z)$ ,  $z \in X$ , es localmente constante. Dado que  $X$  es conexo, tenemos que  $p^{-1}(z) \cong p^{-1}(x_0)$  para todo  $z \in X$ . Es fácil ver entonces que se tienen morfismos trivializantes  $\phi_z: p^{-1}(U_z) \rightarrow U_z \times p^{-1}(x_0)$  que se obtienen componiendo  $\varphi_z$  con  $\text{Id}_{U_z} \times h$  para algún homeomorfismo  $h: p^{-1}(z) \rightarrow p^{-1}(x_0)$ . Se sigue que  $p$  es un fibrado con fibra discreta  $p^{-1}(x_0)$ .

Supongamos ahora que  $p$  es un fibrado con fibra  $F$  discreta. Basta probar que todo entorno trivializante (de algún punto de  $X$ ) está parejamente cubierto por  $p$ . Sea  $U$ , entonces, un entorno trivializante de algún punto de  $X$  y sea  $\varphi$  un morfismo trivializante de  $U$ . Por propiedad universal del producto y del coproducto, existe una única función continua  $\phi: \coprod_{\alpha \in F} U \rightarrow U \times F$  tal que  $\pi_U \phi i_\alpha = \text{Id}_U$  y  $\pi_F \phi i_\alpha = C_\alpha$  para todo  $\alpha \in F$ , donde  $\pi_U$  y  $\pi_F$  son las proyecciones canónicas de  $U \times F$  en  $U$  y  $F$ , respectivamente, e  $i_\alpha$  es la inclusión canónica de  $U$  en el coproducto para cada  $\alpha \in F$ .

Un cálculo explícito muestra que, dado que  $F$  es discreto,  $\phi$  es un homeomorfismo cuyo inverso  $\phi^{-1}$  está definido por  $\phi^{-1}(z, \beta) = i_\beta(z)$  para  $z \in U$  y  $\beta \in F$ .



No es difícil ver que  $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in F} \varphi^{-1}\phi i_\alpha(U)$  y que  $\varphi^{-1}\phi i_\alpha(U)$  se mapea homeomórficamente sobre  $U$  por  $p$  para todo  $\alpha \in F$ . Se sigue que  $p$  es un revestimiento.  $\square$

El siguiente resultado se desprende de [40, Proposición 1.30].

**Teorema 1.3.50.** *Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  un revestimiento. Entonces  $p$  es una fibración de Hurewicz.*

El siguiente teorema muestra que el levantado por un revestimiento de una función continua con dominio conexo, si existe, es único.

**Teorema 1.3.51** ([40, Proposición 1.34]). *Sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  un revestimiento, sea  $Y$  un espacio topológico conexo, sea  $y \in Y$  y sean  $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2: Y \rightarrow \tilde{X}$  dos funciones continuas tales que  $p\tilde{f}_1 = p\tilde{f}_2$  y  $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)$ . Entonces  $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ .*

**Corolario 1.3.52.** *Sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  un revestimiento. Entonces  $p$  es una fibración de Hurewicz con levantamiento único de caminos, esto es, para cualquier camino  $\gamma$  en  $X$  y cualquier punto  $\tilde{x} \in p^{-1}(\gamma(0))$ , existe un único camino  $\tilde{\gamma}$  tal que  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}$  y  $p\tilde{\gamma} = \gamma$ .*

Cuando se estudia la relación entre revestimientos y grupos de homotopía, es conveniente considerar revestimientos entre espacios punteados que preservan puntos base. Resulta útil entonces la siguiente definición.

**Definición 1.3.53.** Diremos que una función entre espacios punteados  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  es un *revestimiento (punteado)* si  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  es un revestimiento y preserva puntos base.

**Proposición 1.3.54** ([40, Proposición 1.31]). *Sea  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  un revestimiento. Entonces,  $p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  es un monomorfismo.*

**Proposición 1.3.55** ([40, Proposición 1.33]). *Sea  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  un revestimiento. Sea  $Y$  un espacio topológico arcoconexo y localmente arcoconexo, sea  $y_0 \in Y$  y sea  $f: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  una función continua. Entonces, existe un levantado  $\tilde{f}: (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  de  $f$  por  $p$  si y sólo si  $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$  donde  $f_*$  y  $p_*$  son los morfismos inducidos por  $f$  y  $p$ , respectivamente, entre los grupos fundamentales.*

La siguiente definición resulta de extrema utilidad en el desarrollo de la teoría de revestimientos.

## 1 Preliminares

---

**Definición 1.3.56.** Sea  $X$  un espacio topológico. Decimos que  $X$  es *semilocalmente simplemente conexo* si para todo  $x \in X$  existe un entorno  $U$  de  $x$  tal que la inclusión  $i: U \rightarrow X$  induce el morfismo trivial

$$i_*: \pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$$

entre los grupos fundamentales.

**Proposición 1.3.57** ([40, Proposición 1.36]). *Sea  $X$  un espacio topológico arcoconexo, localmente arcoconexo y semilocalmente simplemente conexo, sea  $x_0 \in X$  y sea  $G$  un subgrupo de  $\pi_1(X, x_0)$ . Entonces existe un revestimiento  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  tal que  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = G$ .*

La proposición anterior, muestra en particular que todo espacio arcoconexo, localmente arcoconexo y semilocalmente simplemente conexo tiene un revestimiento simplemente conexo.

**Definición 1.3.58.** Sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  un revestimiento. Decimos que  $p$  es un *revestimiento universal de  $X$*  si el espacio  $\tilde{X}$  es simplemente conexo,

En virtud de la siguiente proposición, se sigue que el revestimiento universal de un espacio arcoconexo y localmente arcoconexo es único salvo isomorfismo.

**Proposición 1.3.59** ([40, Proposición 1.37]). *Sea  $X$  un espacio arcoconexo y localmente arcoconexo, sea  $x_0 \in X$  y sean  $p_1: (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (X, x_0)$  y  $p_2: (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \rightarrow (X, x_0)$  dos revestimientos de  $(X, x_0)$ . Entonces existe un isomorfismo de revestimientos punteados  $f: p_1 \cong p_2$  si y sólo si  $(p_1)_*(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = (p_2)_*(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$ .*

*Dicho isomorfismo, si existe, es el único levantado de  $p_1$  por  $p_2$ .*

La siguiente proposición será de utilidad en la sección 2.2.

**Proposición 1.3.60** ([40, Sección 1.3, Ejercicio 15]). *Sea  $X$  un espacio topológico conexo y sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  el revestimiento universal de  $X$ . Sea  $A \subseteq X$  un subespacio arcoconexo y localmente arcoconexo de  $X$  y sea  $i: A \rightarrow X$  la inclusión. Sea además  $\tilde{A}$  una componente conexa de  $p^{-1}(A)$ , sea  $\tilde{a} \in \tilde{A}$  y sea  $a = p(\tilde{a})$ . Entonces, la restricción  $\tilde{p}: (\tilde{A}, \tilde{a}) \rightarrow (A, a)$  de  $p$  es el revestimiento que corresponde al subgrupo  $\ker(i_*)$  de  $\pi_1(A, a)$  donde  $i_*: \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$  es la función inducida por  $i$  entre los grupos fundamentales.*

*Demostración.* Sea  $p|: p^{-1}(A) \rightarrow A$  la restricción de  $p$ . No es difícil probar por definición que  $p|$  es un revestimiento de  $A$ . Sin embargo, una demostración alternativa se obtiene de 1.3.49 y 1.3.44, observando que, dado que  $p$  es un fibrado con fibra discreta y  $p|$  es el pullback de  $p$  a lo largo de  $i$ , entonces  $p|$  también es un fibrado con fibra discreta y por lo tanto, un revestimiento.

Veamos ahora que  $\tilde{p}$  es revestimiento. Sea  $a_0 \in A$  y sea  $U$  un entorno abierto arcoconexo de  $a_0$  parejamente cubierto por  $p|$ . Entonces  $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha$  donde  $\Gamma$  es un conjunto de índices, donde cada  $U_\alpha$  se mapea homeomórficamente sobre  $U$  por  $p$  y donde los conjuntos  $U_\alpha$ ,  $\alpha \in \Gamma$ , son disjuntos dos a dos.

### 1.3 Nociones clásicas de teoría de homotopía

Observemos que, dado que  $U$  es arcoconexo,  $U_\alpha$  es arcoconexo para cada  $\alpha \in \Gamma$ . Puesto que  $\tilde{A}$  es una componente conexa de  $p^{-1}(A)$ , para cada  $\alpha \in \Gamma$  se tiene que  $U_\alpha \cap \tilde{A} \in \{\emptyset, U_\alpha\}$ .

Luego

$$\tilde{p}^{-1}(U) = p^{-1}(U) \cap \tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} (U_\alpha \cap \tilde{A}) = \bigcup_{\alpha \in \Gamma_0} U_\alpha$$

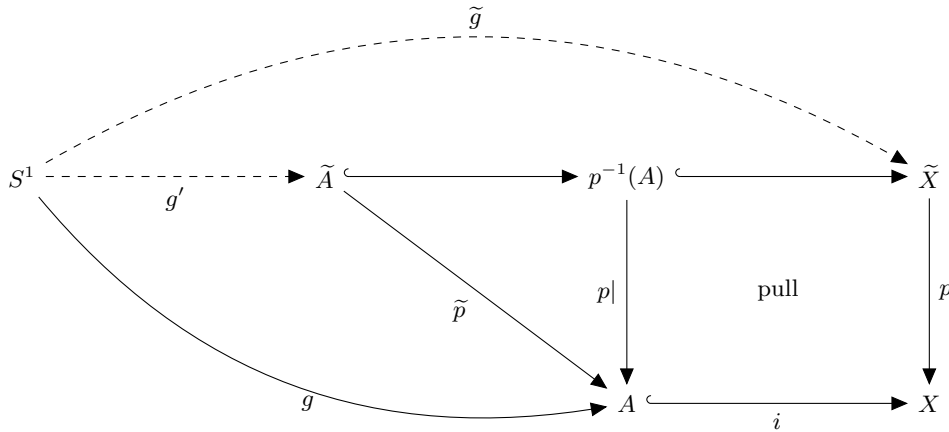
donde  $\Gamma_0 = \{\alpha \in \Gamma : U_\alpha \cap \tilde{A} \neq \emptyset\}$ . Se sigue que  $U$  está parejamente cubierto por  $\tilde{p}$ . Así,  $\tilde{p}$  es un revestimiento.

Veamos ahora que  $\tilde{p}_*(\pi_1(\tilde{A}, \tilde{a})) = \ker i_*$ . Puesto que  $i\tilde{p}$  se factoriza a través de  $\tilde{X}$  y  $\tilde{X}$  es simplemente conexo, es claro que  $i_*\tilde{p}_* = 0$  y por lo tanto, que  $\tilde{p}_*(\pi_1(\tilde{A}, \tilde{a})) \subseteq \ker i_*$ .

Veamos la otra inclusión. Sea  $g: (S^1, 1) \rightarrow (A, a)$  una función continua tal que  $[g] \in \ker i_*$ . Entonces  $ig$  es nullhomotópica y se sigue de 1.3.55 que existe un levantado

$$\tilde{g}: (S^1, 1) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{a})$$

de  $ig$  por  $p$ . Más aún, la imagen de  $\tilde{g}$  es arcoconexa y por lo tanto está contenida en  $\tilde{A}$ . Así, podemos considerar la restricción  $g': (S^1, 1) \rightarrow (\tilde{A}, \tilde{a})$  de  $\tilde{g}$ .



Es inmediato ver que

$$[g] = [\tilde{p}g'] = \tilde{p}_*([g']) \in \tilde{p}_*(\pi_1(\tilde{A}, \tilde{a})).$$

El resultado se sigue. □

**Teorema 1.3.61** (Teorema de clasificación de revestimientos, [40, Teorema 1.38]). *Sea  $X$  un espacio topológico arcoconexo, localmente arcoconexo y semilocalmente simplemente conexo y sea  $x_0 \in X$ . La asignación  $p \mapsto p_*(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  induce una biyección entre el conjunto de clases de equivalencia de revestimientos puntuados  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  y el conjunto de subgrupos de  $\pi_1(X, x_0)$ .*



## Capítulo 2

# Problemas de minimalidad

### 2.1 Introducción

Dos espacios topológicos  $X$  e  $Y$  se dicen *débilmente equivalentes* si existen espacios

$$X_0, X_1, \dots, X_n$$

tales que  $X_0 = X$ ,  $X_n = Y$  y tales que para cada  $i = 1, \dots, n$  existe una equivalencia débil (cf. definición 1.2.51)

$$f_i: X_{i-1} \rightarrow X_i$$

o una equivalencia débil

$$f_i: X_i \rightarrow X_{i-1}.$$

Es claro que dos espacios débilmente equivalentes tendrán grupos de homotopía, homología y cohomología isomorfos. Así, dado un espacio  $X$ , puede utilizarse un espacio  $\bar{X}$  débilmente equivalente a  $X$  para calcular los invariantes homotópicos débiles de  $X$ .

Un *modelo finito* de un espacio topológico  $X$  es un espacio topológico finito  $T_0$  débilmente equivalente a  $X$ . Se sigue del teorema de Whitehead [40, Teorema 4.5] que si  $X$  es un CW-complejo, los modelos finitos de  $X$  son precisamente los espacios finitos  $T_0$  tales que la realización geométrica de su complejo simplicial asociado (cf. 1.2.46) es homotópicamente equivalente a  $X$ . Es bien sabido que todo CW-complejo compacto es homotópicamente equivalente a la realización geométrica de un complejo simplicial finito [40, Teorema 2C.5]. Se sigue del teorema 1.2.61 que todo CW-complejo compacto admite un modelo finito.

Un problema que surge de manera natural con respecto a los modelos finitos, entonces, consiste en encontrar los *modelos finitos minimales* de un CW-complejo compacto  $X$ , esto es, modelos finitos de  $X$  de la menor cardinalidad posible. El primer problema de minimalidad del cual tenemos referencia fue formulado por J. P. May en [48], donde el autor se pregunta si la suspensión no Hausdorff  $n$ -ésima de la 0-esfera, que es el poset  $\mathbb{S}^n S^0$  de  $2n + 2$  puntos, es un modelo finito minimal de la  $n$ -esfera y conjetura que la respuesta es afirmativa.

Esta conjetura fue probada por Barmak y Minian en [7]. Más precisamente, fue probado el siguiente teorema del cual se deduce que la conjetura de May es cierta.

## 2 Problemas de minimalidad

---

**Teorema 2.1.1** ([7, Teorema 2.12]). *Sea  $X \neq *$  un espacio topológico finito sin beat points. Entonces  $X$  tiene al menos  $2h(X) + 2$  puntos, donde  $h(X)$  denota la altura de  $X$ . Más aún, si  $X$  tiene exactamente  $2h(X) + 2$  puntos, entonces  $X$  es homeomorfo a  $\mathbb{S}^{h(X)}S^0$ .*

De este teorema, se deduce además que el espacio  $\mathbb{S}^{h(X)}S^0$  es el *único* modelo finito minimal de  $S^n$ . En el mismo artículo, Barmak y Minian dan una caracterización de los modelos finitos minimales de los grafos finitos, es decir, de CW-complejos finitos de dimensión 1.

A pesar de la aparente simplicidad de su formulación, el problema de encontrar modelos finitos minimales de un espacio es un problema muy difícil debido a la falta de herramientas que relacionen invariantes homotópicos débiles de posets finitos con la información que puede ser obtenida a partir de sus diagramas de Hasse. Más aún, el número de posets de  $n$  puntos parece crecer de manera exponencial en  $n^2$  (véase [14]) lo que dificulta el abordaje de este tipo de problemas mediante el uso de computadoras por métodos de “fuerza bruta” para valores de  $n$  mayores o iguales a 12.

En la literatura aparecen diversas preguntas sobre modelos finitos minimales. En [5, Ejemplo 7.1.1] se construye un modelo finito del plano proyectivo real de 13 puntos como el poset de celdas de una estructura celular regular del mismo. El opuesto a este poset ya había sido obtenido en [39] a partir de una construcción denominada *doble cono mapeante no Hausdorff* que es un caso particular de colímite homotópico no Hausdorff. La minimalidad de este modelo fue enunciada en forma de pregunta en [39] y [5], y verificada por M. Adamaszek mediante una prueba asistida por computadora, la cual requirió el análisis de aproximadamente  $10^8$  casos [1].

En este capítulo damos una prueba de este resultado que no requiere asistencia de ordenador, probando que el grupo fundamental de la realización geométrica del complejo simplicial asociado a un espacio finito de menos de 13 puntos debe ser un grupo libre. Más aún, probamos que los dos modelos finitos que hemos mencionado son, salvo homeomorfismo, los únicos dos modelos finitos minimales del plano proyectivo.

En [39], Hardie, Vermeulen y Witbooi enuncian una conjetura más fuerte: que el modelo del plano proyectivo real de 13 puntos es el poset finito de menor cardinalidad con 2-torsión no trivial en cualquiera de sus grupos de homología (con coeficientes en  $\mathbb{Z}$ ). Probamos también esta conjetura mostrando que si  $X$  es un poset con torsión en alguno de sus grupos de homología, entonces debe tener al menos 13 puntos.

En 2.6 probamos que no existen modelos finitos del toro con menos de 16 puntos, resolviendo otro problema abierto [5, p.44]. De hecho, probamos un resultado más fuerte del cual además obtenemos que no existen modelos finitos minimales de la botella de Klein de menos de 16 puntos. Más aún, probamos que existen, salvo homeomorfismo, exactamente dos modelos finitos minimales del toro y exactamente dos modelos finitos minimales de la botella de Klein, todos ellos de 16 puntos.

En [62] y [5] se muestra un espacio finito débilmente contráctil no contráctil. La pregunta que surge naturalmente en este caso es si este espacio tiene el menor cardinal posible, entre todos los espacios que comparten estas características [50, Problema 3.5.4]. En este trabajo damos una respuesta afirmativa a esta pregunta, mostrando que un espacio débilmente contráctil no contráctil debe tener al menos 9 puntos. Más aún, mostramos

que existen, salvo homeomorfismo, exactamente dos posets débilmente contráctiles no contráctiles de 9 puntos.

Todos estos resultados son obtenidos gracias a la técnica que hemos denominado *splitting de posets*, la cual permite obtener información homotópica de un poset a partir de la de dos subposets que lo cubran, no necesariamente abiertos, cerrados o conexos. Además de ser una herramienta clave para resolver los problemas de minimalidad citados, el *splitting* de posets permite desarrollar diversos teoremas de tipo Hurewicz a través de su aplicación al estudio de la homología de revestimientos de posets finitos.

La mayor parte de los resultados de las secciones 2.4, 2.5 y 2.6, así como el teorema 2.7.1, se encuentran publicados en [21]. Los resultados de la subsección 2.7.2 pueden encontrarse en [26], mientras que los resultados originales de la sección 2.3 pueden encontrarse en [19].

## 2.2 Resultados básicos

Expondremos a continuación algunos resultados básicos que necesitamos para las secciones siguientes.

**Proposición 2.2.1.** *Sea  $X$  un espacio finito  $T_0$  y sean  $a, b \in X$ . Entonces  $U_a \cup U_b$  es homotópicamente equivalente a  $\mathbb{S}(U_a \cap U_b)$ . En particular, si  $U_a \cap U_b$  es contráctil entonces  $U_a \cup U_b$  también lo es.*

*Demostración.* Si  $a \leq b$  o  $b \leq a$  el resultado se sigue, pues en ese caso, tanto  $U_a \cup U_b$  como  $\mathbb{S}(U_a \cap U_b)$  son contráctiles. Luego, podemos asumir que  $a$  y  $b$  son incomparables.

Notemos que  $\mathbb{S}(U_a \cap U_b) \cong \{a, b\} \cup (U_a \cap U_b)$ . Luego, basta probar que  $\{a, b\} \cup (U_a \cap U_b)$  es homotópicamente equivalente a  $U_a \cup U_b$ .

Sea  $i: \{a, b\} \cup (U_a \cap U_b) \rightarrow U_a \cup U_b$  la inclusión y sea  $r: U_a \cup U_b \rightarrow \{a, b\} \cup (U_a \cap U_b)$  la función definida por

$$r(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in U_a \cap U_b, \\ a & \text{si } x \in U_a - U_b, \\ b & \text{si } x \in U_b - U_a. \end{cases}$$

Es fácil ver que  $r$  es morfismo de órdenes y por lo tanto, una función continua. Además,  $ri = \text{Id}$  y  $ir \geq \text{Id}$ . Por 1.2.20,  $r$  es una retracción por deformación fuerte y por lo tanto,  $U_a \cup U_b$  es homotópicamente equivalente a  $\mathbb{S}(U_a \cap U_b)$  como queríamos mostrar.

El resto de la proposición se sigue de [5, Proposición 2.7.3].  $\square$

Debemos mencionar que la función  $r$  de la prueba anterior aparece en la prueba de la proposición 11.2.3 de [5]. De manera similar, la proposición siguiente está relacionada con la noción de qc-reducción [5, p.140].

**Proposición 2.2.2.** *Sea  $X$  un espacio finito  $T_0$  y sean  $a$  y  $b$  elementos maximales de  $X$ . Si  $U_a \cup U_b$  es débilmente contráctil entonces la función cociente  $q: X \rightarrow X/\{a, b\}$  es una equivalencia homotópica débil.*

*Demostración.* Dado que  $a$  y  $b$  son maximales en  $X$ , entonces  $\{a, b\}$  es convexo y por lo tanto  $X/\{a, b\}$  es un espacio finito  $T_0$  (cf. [5, Proposición 2.7.8]). El resultado se sigue del teorema 1.2.52 tomando como base de  $X/\{a, b\}$  a su base minimal.  $\square$



## 2 Problemas de minimalidad

---

**Lema 2.2.3.** *Sea  $X$  un espacio de Alexandroff  $T_0$  y sea  $A \subsetneq X$ . Entonces*

1.  $A'$  es un subconjunto abierto de  $X'$  y  $(X - A)' \subseteq X' - A'$ ,
2. el subespacio  $(X - A)'$  es un retracto por deformación fuerte de  $X' - A'$ , y
3. los grupos  $H_n(X, A)$  y  $H_n(X', A')$  son naturalmente isomorfos para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

*Demostración.* La proposición (1) se sigue trivialmente por definición de subdivisión bicéntrica de posets.

Veamos (2). Sea  $i: (X - A)' \rightarrow X' - A'$  la función inclusión y sea  $r: X' - A' \rightarrow (X - A)'$  la función definida por  $r(\sigma) = \sigma \cap (X - A)$ . Claramente,  $r$  es una función continua,  $ri = \text{Id}_{(X-A)'}$  y  $ir \leq \text{Id}_{X'-A'}$ . El resultado se sigue de 1.2.20.

La proposición (3) se sigue de [40, Proposición 4.21] y de 1.2.64, utilizando el lema de los 5.  $\square$

### 2.3 Revestimientos y grupo fundamental de $\mathbf{A}$ -espacios

En esta sección utilizamos resultados clásicos para desarrollar herramientas que nos permitirán establecer, en la sección 2.4, fuertes relaciones entre la estructura combinatoria de espacios de Alexandroff y sus invariantes homotópicos débiles.

Muchos de estos resultados no son originales. La subsección 2.3.1 desarrolla temas clásicos que pueden encontrarse en [16, 35] y la subsección 2.3.2 está dedicada a un resultado de Quillen [58] que resultará indispensable para lo que sigue. Por último, gran parte los resultados de la subsección 2.3.3 pueden considerarse una reelaboración de resultados de [11], realizada a partir de los obtenidos en las primeras dos. Pueden encontrarse en [19].

#### 2.3.1 Localización y grupoides

**Definición 2.3.1.** Una categoría  $\mathcal{C}$  se denomina *grupoide* si toda flecha de  $\mathcal{C}$  es un isomorfismo.

Un functor  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  entre grupoides  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  se denomina *morfismo de grupoides*.

Los grupoides y morfismos de grupoides forman una categoría que denotaremos por **Grpd**.

**Definición 2.3.2.** Sea  $X$  un espacio topológico. Definimos el *grupoide fundamental* de  $X$  como la categoría  $\Pi_1(X)$  que tiene por objetos a los elementos de  $X$  y por flechas de  $x$  a  $y$  a las clases homotópicas de caminos en  $X$  de  $x$  a  $y$ , para todo  $x, y \in X$ , con composición definida por

$$[\delta][\gamma] = [\gamma * \delta]$$

para caminos  $\gamma, \delta: I \rightarrow X$  tales que  $\gamma(1) = \delta(0)$ , donde  $*$  denota la concatenación de caminos y  $[\alpha]$  denota la clase de homotopía de caminos del camino  $\alpha: I \rightarrow X$ .

Es fácil probar que  $\Pi_1(X)$  es en efecto un grupoide y que  $\pi_1(X, x_0)$  es la subcategoría  $\text{Aut}_{\Pi_1(X)}(x_0)$  de automorfismos del elemento  $x_0$  en  $\Pi_1(X)$  para cualquier  $x_0 \in X$ .

## 2.3 Revestimientos y grupo fundamental de A-espacios

---

Notemos que la operación de composición en  $\pi_1(X, x_0)$  cuando es considerado como la categoría  $\text{Aut}_{\pi_1(X)}(x_0)$ , queda definida por

$$[\delta][\gamma] = [\gamma * \delta] = [\gamma] * [\delta]$$

para caminos cualesquiera  $\gamma, \delta: I \rightarrow X$  tales que  $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0 = \delta(0) = \delta(1)$ , donde el signo  $*$  en el miembro derecho de la última expresión denota, desde luego, la operación usual en  $\pi_1(X, x_0)$  inducida por concatenación de caminos<sup>1</sup>.

**Definición 2.3.3.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y sea  $W$  una clase de flechas de  $\mathcal{C}$ . Una *categoría de fracciones de  $\mathcal{C}$  para  $W$*  (también denominada *localización de  $\mathcal{C}$  en  $W$* ) es una categoría  $\mathcal{C}[W^{-1}]$  y un funtor  $\iota_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[W^{-1}]$  tales que:

1.  $\iota_{\mathcal{C}}(w)$  es un isomorfismo para todo  $w \in W$ , y
2. para cualquier categoría  $\mathcal{D}$  y cualquier funtor  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  tal que  $F(w)$  es un isomorfismo para todo  $w \in W$ , existe un único funtor  $\bar{F}: \mathcal{C}[W^{-1}] \rightarrow \mathcal{D}$  tal que  $\bar{F}\iota_{\mathcal{C}} = F$ .

No es difícil probar que la categoría  $\mathcal{C}[W^{-1}]$ , si existe, es única salvo isomorfismo canónico. En [35] y [41] se describen construcciones explícitas de la categoría  $\mathcal{C}[W^{-1}]$  bajo ciertas hipótesis<sup>2</sup>.

Dada una categoría pequeña  $\mathcal{C}$ , podemos considerar su localización  $\mathcal{C}[\text{Mor}(\mathcal{C})^{-1}]$  (junto con un funtor  $\iota_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[\text{Mor}(\mathcal{C})^{-1}]$ ) con respecto a todas sus flechas. Siguiendo la construcción dada en [35], vemos que esta categoría resulta un grupoide. La misma será denotada por  $\mathcal{L}\mathcal{C}$ .

**Ejemplo 2.3.4.** Sea  $G$  un grupoide. Es claro que  $G$  junto con el funtor  $\text{Id}_G$  es una localización de  $G$ . Así, se puede considerar que  $\mathcal{L}G = G$ .

Notemos que un funtor  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  entre categorías pequeñas induce un único morfismo de grupoideos  $\mathcal{L}F: \mathcal{L}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{L}\mathcal{D}$  tal que  $\mathcal{L}F\iota_{\mathcal{C}} = \iota_{\mathcal{D}}F$  y que la asignación  $F \mapsto \mathcal{L}F$  respeta identidades y composiciones. Es posible definir, entonces, un funtor “localización”

$$\mathcal{L}: \text{Cat} \rightarrow \text{Grpd}$$

eligiendo, para cada categoría pequeña  $\mathcal{C}$ , una localización  $\mathcal{L}\mathcal{C}$  de  $\mathcal{C}$ . Una manera de realizar la elección es precisamente mediante una construcción explícita, como la que hemos mencionado. Por simplicidad, sin embargo, asumiremos de ahora en adelante que  $\mathcal{L}\mathcal{G} = \mathcal{G}$  y  $\iota_{\mathcal{G}} = \text{Id}_{\mathcal{G}}$  para todo grupoide  $\mathcal{G}$ . Notemos que, en este caso, todo funtor  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G}$ , con  $\mathcal{G}$  grupoide, se factoriza de manera única por  $\iota_{\mathcal{C}}$  como  $F = \mathcal{L}F\iota_{\mathcal{C}}$ .

---

<sup>1</sup>Debido a nuestra definición de composición en el grupoide fundamental, el grupo fundamental que hemos definido es, técnicamente, el opuesto al grupo fundamental clásico.

<sup>2</sup>Es sabido que la categoría de fracciones de una categoría puede no ser una categoría según la definición adoptada para este trabajo (es decir, una categoría localmente pequeña). Sin embargo, se deduce de la construcción presentada en [35] que la categoría de fracciones de una categoría pequeña siempre existe y es nuevamente una categoría pequeña.

## 2 Problemas de minimalidad

---

**Definición 2.3.5.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Decimos que  $\mathcal{C}$  es una categoría *indiscreta* si para dos objetos cualesquiera  $x, y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , el conjunto  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$  tiene exactamente un elemento.

*Observación 2.3.6.* Es fácil probar que cualquier categoría indiscreta es un grupoide conexo equivalente a la categoría trivial. En particular, todas las categorías indiscretas son equivalentes entre sí. Adicionalmente, dos categorías indiscretas son isomorfas si y sólo si existe una biyección entre sus objetos.

**Definición 2.3.7.** Decimos que una categoría pequeña  $T$  es un *árbol* si  $\mathcal{L}T$  es una categoría indiscreta.

Decimos además que una categoría pequeña  $\mathcal{C}$  es un *bosque* si es una unión disjunta, o coproducto, de árboles. En otras palabras,  $\mathcal{C}$  es un bosque si sus componentes conexas son árboles.

**Definición 2.3.8.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría pequeña conexa. Un *árbol maximal* en  $\mathcal{C}$  es una subcategoría  $T$  de  $\mathcal{C}$  que es un árbol y tiene a todos los objetos<sup>3</sup> de  $\mathcal{C}$ .

*Observación 2.3.9.* Notemos que en una categoría pequeña  $\mathcal{C}$  pueden existir árboles maximales  $T$  y  $T'$  con  $T$  subcategoría propia de  $T'$ . En este caso, la inclusión  $i: T \rightarrow T'$  induce un isomorfismo de grupoides  $\mathcal{L}i: \mathcal{L}T \cong \mathcal{L}T'$ . Esto justifica, de alguna manera, el nombre de *árbol maximal*.

*Observación 2.3.10.* Sea  $\mathcal{C}$  una categoría pequeña y conexa y sea  $B$  un bosque en  $\mathcal{C}$ . Es claro que podemos extender  $B$  a un bosque  $\tilde{B}$  que contiene a todos los objetos de  $\mathcal{C}$ .

Consideramos al conjunto de bosques de  $\mathcal{C}$  que contienen a  $\tilde{B}$  como un poset ordenado por la relación “es subcategoría de”. Mediante una aplicación estándar del Lema de Zorn, no es difícil ver que este conjunto tiene un elemento maximal. Con algo de trabajo puede probarse que dicho bosque resulta conexo, y es, por lo tanto, un árbol maximal de  $\mathcal{C}$ .

Explícitamente, todo bosque de una categoría pequeña conexa  $\mathcal{C}$  puede ser extendido a un árbol maximal. Una demostración detallada de este resultado puede encontrarse en [19, Proposición 2.14].

Sea  $\mathcal{G}$  un grupoide y sea  $\mathcal{N}$  un subgrupoide de  $\mathcal{G}$ . Siguiendo [17], diremos que  $\mathcal{N}$  es un *subgrupoide normal* de  $\mathcal{G}$  si  $\text{Obj}(\mathcal{N}) = \text{Obj}(\mathcal{G})$  y para toda flecha  $g: x \rightarrow y$  en  $\mathcal{G}$  se tiene que  $g^{-1} \text{Aut}_{\mathcal{N}}(y)g = \text{Aut}_{\mathcal{N}}(x)$ . En este caso, podemos identificar objetos  $x, y \in \text{Obj}(\mathcal{G})$  si  $\text{Hom}_{\mathcal{N}}(x, y) \neq \emptyset$  y morfismos  $\alpha, \beta \in \text{Mor}(\mathcal{G})$  si existen morfismos  $n_1, n_2 \in \text{Mor}(\mathcal{N})$  tales que  $\alpha = n_1\beta n_2$ . Es fácil ver que las clases de equivalencia de objetos de  $\mathcal{G}$  forman una categoría cuyos morfismos son las clases de equivalencia de morfismos de  $\mathcal{G}$  con composición inducida por la composición en  $\mathcal{G}$ . Esta categoría es claramente un grupoide que será llamado *grupoide cociente de  $\mathcal{G}$  por  $\mathcal{N}$*  y será notado por  $\mathcal{G}/\mathcal{N}$ . La proyección canónica  $q: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{N}$  que mapea cada objeto y morfismo de  $\mathcal{G}$  en su clase de equivalencia es un functor y por lo tanto un morfismo de grupoides. Es fácil probar que, con la notación anterior, si  $F: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  es un morfismo de grupoides que mapea morfismos de  $\mathcal{N}$  en identidades, entonces existe un único morfismo de grupoides  $\bar{F}: \mathcal{G}/\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{H}$  tal que  $\bar{F}q = F$ .

---

<sup>3</sup>En la bibliografía, una subcategoría de  $\mathcal{C}$  que tiene a todos los objetos de  $\mathcal{C}$  suele denominarse *wide subcategory*. No hemos encontrado terminología estándar en español para este concepto.

## 2.3 Revestimientos y grupo fundamental de A-espacios

---

*Notación.* Sea  $\mathcal{G}$  un grupoide y sea  $\mathcal{N}$  un subgrupoide normal de  $\mathcal{G}$ . Denotaremos por  $[x]$  a la clase de equivalencia de un objeto  $x$  de  $\mathcal{G}$  en  $\mathcal{G}/\mathcal{N}$ . Similarmente, denotaremos por  $[\alpha]$  a la clase de equivalencia de una flecha  $\alpha$  de  $\mathcal{G}$  en  $\mathcal{G}/\mathcal{N}$ .

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría pequeña conexa, sea  $c_0 \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  y sea  $T$  un árbol maximal en  $\mathcal{C}$ . Claramente  $\mathcal{L}T$  es un subgrupoide normal de  $\mathcal{L}\mathcal{C}$  y, dado que  $\mathcal{L}T$  es conexo, el cociente  $\mathcal{L}\mathcal{C}/\mathcal{L}T$  es un grupoide con un único objeto; en otras palabras, un grupo.

Consideremos el cociente

$$q_{\mathcal{C}}: \mathcal{L}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{L}\mathcal{C}/\mathcal{L}T$$

y la función

$$\rho_{\mathcal{C}}: \mathcal{L}\mathcal{C}/\mathcal{L}T \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0)$$

definida por  $\rho_{\mathcal{C}}([f]) = \beta f \alpha$  donde  $\alpha$  es la única flecha en  $\mathcal{L}T$  de  $c_0$  a  $s(f)$  y  $\beta$  es la única flecha en  $\mathcal{L}T$  de  $t(f)$  a  $c_0$ , para toda flecha  $f$  en  $\mathcal{L}\mathcal{C}$ . Es fácil ver que  $q_{\mathcal{C}}$  es una equivalencia de categorías cuya inversa viene dada por la composición

$$\mathcal{L}\mathcal{C}/\mathcal{L}T \xrightarrow{\rho_{\mathcal{C}}} \text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0) \hookrightarrow \mathcal{L}\mathcal{C}.$$

En particular,  $\rho_{\mathcal{C}}$  es un isomorfismo de grupos cuyo inverso es la composición

$$\text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0) \hookrightarrow \mathcal{L}\mathcal{C} \xrightarrow{q_{\mathcal{C}}} \mathcal{L}\mathcal{C}/\mathcal{L}T.$$

Así, podemos identificar canónicamente al cociente  $\mathcal{L}\mathcal{C}/\mathcal{L}T$  con el grupo  $\text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0)$ .

### 2.3.2 Grupo fundamental de categorías pequeñas

En esta subsección desarrollaremos un conocido resultado de D. Quillen que ofrece una descripción combinatoria del grupo fundamental de categorías pequeñas y exploramos aplicaciones a la teoría de homotopía de espacios de Alexandroff. Uno de los resultados principales de esta sección establece que el grupoide fundamental de un espacio de Alexandroff es naturalmente isomorfo a la localización del mismo.

Los resultados de esta sección se encuentran desarrollados en [19].

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría pequeña conexa y sea  $c_0 \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ . El siguiente teorema nos permitirá identificar canónicamente al grupo  $\text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0)$  con el grupo  $\pi_1(\mathcal{C}, c_0)$  para cualquier objeto  $c_0$  de  $\mathcal{C}$ .

**Teorema 2.3.11** ([58, Proposición 1]). *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría pequeña y sea  $c_0 \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ . Entonces el grupo fundamental de  $\mathcal{C}$  en  $c_0$  es canónicamente isomorfo al grupo  $\text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0)$  de automorfismos de  $c_0$  en  $\mathcal{L}\mathcal{C}$ .*

Un candidato natural a ser el isomorfismo canónico construido por Quillen es el morfismo que se define como sigue. Una flecha  $f: c \rightarrow c'$  en  $\mathcal{C}$  corresponde a un 1-símplex de  $N\mathcal{C}$  y por lo tanto induce un camino canónico  $\gamma_f$  en  $B\mathcal{C}$  desde la 0-celda correspondiente a  $c$  hasta la 0-celda correspondiente a  $c'$ . Este camino está definido por  $\gamma_f(t) = [(\sigma_f, t)]$  para todo  $t \in I$ , donde  $\sigma_f$  denota el 1-símplex (posiblemente degenerado) correspondiente a la flecha  $f$  y donde identificamos el 1-símplex topológico  $\Delta^1$  con el intervalo unidad  $I$  de la manera obvia.

## 2 Problemas de minimalidad

---

No es difícil ver que la asignación  $f \mapsto [\gamma_f]$  define un funtor

$$\mathcal{C} \rightarrow \Pi_1(B\mathcal{C}),$$

que con nuestra definición de grupoide fundamental (cf. 2.3.2) resulta covariante. Dado que  $\Pi_1(B\mathcal{C})$  es un grupoide, dicho funtor se factoriza de manera única a través de  $\mathcal{L}\mathcal{C}$  induciendo entonces un funtor

$$\mathcal{L}\mathcal{C} \rightarrow \Pi_1(B\mathcal{C}).$$

que se restringe a la composición

$$\text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0) \hookrightarrow \mathcal{L}\mathcal{C} \rightarrow \Pi_1(B\mathcal{C}).$$

Es claro que este último funtor mapea  $c_0$  en la 0-celda de  $B\mathcal{C}$  correspondiente a  $c_0$  y por lo tanto se factoriza vía  $\text{Aut}_{\Pi_1(B\mathcal{C})}(c_0) = \pi_1(B\mathcal{C}, c_0) = \pi_1(\mathcal{C}, c_0)$ . Así, tenemos un funtor

$$\zeta: \text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0) \rightarrow \pi_1(\mathcal{C}, c_0)$$

que consideraremos como un morfismo de grupos.

Toda flecha  $f$  de  $\text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0)$  tiene entonces asociada una clase  $\zeta(f)$  de homotopía de caminos que comienzan y terminan en  $c_0$ . Denotaremos por  $\gamma_f$  a cualquiera de los representantes de  $\zeta(f)$ , de modo que tendremos que  $\zeta(f) = [\gamma_f]$ , para cualquier  $f \in \text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0)$  y para cualquier  $\gamma_f \in \zeta(f)$ .

Para probar que  $\zeta$  es el isomorfismo canónico mencionado en el teorema anterior, dedicaremos unos párrafos a comentar la demostración dada por Quillen en [58].

Supongamos primero que la categoría  $\mathcal{C}$  es conexa. El primer paso de la demostración consiste en establecer una equivalencia de categorías entre la categoría  $\mathbf{Cov}(B\mathcal{C})$  de revestimientos de  $B\mathcal{C}$  y la subcategoría plena de  $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$  cuyos objetos son los funtores de  $\mathcal{C}$  a  $\mathbf{Set}$  que invierten morfismos, que será denotada por  $\mathcal{D}$ . Para esto, Quillen da construcciones explícitas de las equivalencias, que describiremos a continuación. Dado un revestimiento  $p: E \rightarrow B\mathcal{C}$  y una flecha  $f: c \rightarrow c'$  en  $\mathcal{C}$ , obtenemos una biyección  $E(f): p^{-1}(c) \rightarrow p^{-1}(c')$  inducida por la acción de  $[\gamma_f]$ . Explícitamente,  $E(f)$  mapea a todo elemento  $\tilde{c}$  de  $p^{-1}(c)$  en el punto final del único levantado de  $\gamma_f$  por  $p$  desde  $\tilde{c}$ . La asignación  $f \mapsto E(f)$  define un funtor  $E: \mathbf{Cov}(B\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}$ .

Por otro lado, Quillen observa que, utilizando [35, Apéndice I, Sección 3.2], puede probarse que para todo funtor  $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$  que invierte morfismos, la proyección

$$u_F: * \downarrow F \rightarrow \mathcal{C}$$

induce un revestimiento

$$B(u_F): B(* \downarrow F) \rightarrow B\mathcal{C}$$

en espacios clasificantes<sup>4</sup>. La asignación  $F \mapsto B(u_F)$  define un funtor de  $\mathcal{D}$  en  $\mathbf{Cov}(B\mathcal{C})$  que resulta un inverso de  $E$  (en el sentido de equivalencia de categorías).

---

<sup>4</sup>El teorema citado establece que la realización geométrica de un *revestimiento de conjuntos simpliciales* es un revestimiento de espacios topológicos. El desarrollo de la teoría de revestimientos de conjuntos simpliciales resultaría excesivo para los objetivos de este trabajo por lo cual hemos decidido omitirlo. Las secciones 2 y 3 del Apéndice I de [35] desarrollan este tópico y su relación con revestimientos de espacios topológicos. Asimismo, pueden encontrarse tratamientos muy amenos de estos resultados en [28, Capítulo 3] y en [74, Sección 1.4].

### 2.3 Revestimientos y grupo fundamental de A-espacios

---

Ahora bien, por la propiedad de  $\mathcal{L}\mathcal{C}$  de factorización única de funtores que invierten morfismos, es claro que el funtor  $\nu_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{L}\mathcal{C}$  induce un isomorfismo de categorías entre  $\mathbf{Set}^{\mathcal{L}\mathcal{C}}$  y  $\mathcal{D}$  ([35, Capítulo I, Lema 1.2]). Por otro lado, como  $\mathcal{C}$  es conexa, la inclusión  $\text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0) \hookrightarrow \mathcal{L}\mathcal{C}$  es una equivalencia de categorías y por lo tanto induce una equivalencia de categorías  $\mathbf{Set}^{\mathcal{L}\mathcal{C}} \simeq \mathbf{Set}^{\text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0)}$ .

Dado un grupo  $G$ , considerado como una categoría con un único objeto  $*$ , un funtor  $F: G \rightarrow \mathbf{Set}$  puede interpretarse como una acción a izquierda de  $G$  sobre  $F(*)$ , definida obviamente por

$$g \cdot x = F(g)(x)$$

para todo  $g \in G$  y todo  $x \in F(*)$ . Es claro que una transformación natural  $\alpha: F \Rightarrow F'$  entre dos funtores  $F, F': G \rightarrow \mathbf{Set}$  no es otra cosa que una función de  $F(*)$  en  $F'(*)$  que respeta las acciones correspondientes, es decir, una  $G$ -función. Es fácil probar que la asignación  $F \mapsto (F(*), \cdot)$  es un isomorfismo de categorías entre la categoría  $\mathbf{Set}^G$  y la categoría  $G\text{-Set}$  de  $G$ -conjuntos.

Sea  $G = \text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0)$ . Tenemos entonces equivalencias de categorías

$$\mathbf{Cov}(B\mathcal{C}) \simeq \mathcal{D} \cong \mathbf{Set}^{\mathcal{L}\mathcal{C}} \simeq \mathbf{Set}^G \cong G\text{-Set}.$$

Consideremos a  $G$  como un  $G$ -conjunto con la acción usual por traslación a izquierda, y sea  $p: \widetilde{B\mathcal{C}} \rightarrow B\mathcal{C}$  el revestimiento correspondiente de  $B\mathcal{C}$  por medio de la equivalencia  $G\text{-Set} \simeq \mathbf{Cov}(B\mathcal{C})$ . Notemos que  $p^{-1}(c_0)$  es el espacio discreto  $\{c_0\} \times G$ . Sea entonces  $\tilde{c}_0 = (c_0, \text{Id}_{c_0}) \in p^{-1}(c_0)$ .

Dado un camino  $\gamma$  en  $B\mathcal{C}$  y dado  $x \in p^{-1}(\gamma(0))$ , denotaremos por  $\tilde{\gamma}^x$  al único levantado de  $\gamma$  por  $p$  desde  $x$ . La identificación canónica  $\{c_0\} \times G \cong G$ , muestra entonces que

$$(c_0, gh) = g \cdot (c_0, h) = \tilde{\gamma}_g^{(c_0, h)}(1)$$

para algún  $\gamma_g \in \zeta(g)$ , para cualesquiera  $g, h \in G$ .

Dado que la acción de  $G$  es transitiva, es claro que  $\widetilde{B\mathcal{C}}$  resulta un revestimiento conexo de  $B\mathcal{C}$ . Más aún, dado cualquier  $G$ -espacio  $X$  no vacío, es posible definir una  $G$ -función  $f: G \rightarrow X$  por  $f(g) = g \cdot x$  para algún  $x \in X$  fijo. Es fácil ver entonces que  $p$  se factoriza a través de cualquier revestimiento de  $B\mathcal{C}$ , de donde se sigue claramente que  $p$  es el revestimiento universal de  $B\mathcal{C}$ .

La equivalencia  $\mathbf{Cov}(B\mathcal{C}) \simeq G\text{-Set}$  se restringe a un isomorfismo

$$\text{Aut}_{\mathbf{Cov}(B\mathcal{C})}(p) \cong \text{Aut}_{G\text{-Set}}(G).$$

Notemos que  $\text{Aut}_{\mathbf{Cov}(B\mathcal{C})}(p)$  no es otra cosa que el grupo  $\mathbf{Deck}(\widetilde{B\mathcal{C}}, B\mathcal{C})$  de transformaciones deck de  $p$ . Se sigue de la demostración de [40, Proposición 1.39], que se tiene un isomorfismo

$$\pi_1(B\mathcal{C}, c_0)^{\text{op}} \cong \mathbf{Deck}(\widetilde{B\mathcal{C}}, B\mathcal{C})$$

que mapea al elemento  $[\gamma]$  en la única transformación deck  $\tau_\gamma$  de  $p$  tal que

$$\tau_\gamma(\tilde{c}_0) = \tilde{\gamma}^{\tilde{c}_0}(1).$$

## 2 Problemas de minimalidad

---

Por otro lado, el grupo de automorfismos de  $G$  en  $G\text{-Set}$  es canónicamente isomorfo a  $G^{\text{op}}$  vía el isomorfismo que mapea a todo elemento  $g \in G$  en la biyección  $\sigma_g: G \rightarrow G$  definida por

$$\sigma_g(h) = hg$$

para todo  $h \in G$ .

Así, la composición

$$G^{\text{op}} \cong \text{Aut}_{G\text{-Set}}(G) \cong \mathbf{Deck}(\widetilde{B\mathcal{C}}, B\mathcal{C}) \cong \pi_1(B\mathcal{C}, c_0)^{\text{op}}$$

nos da el isomorfismo opuesto al mencionado en el teorema de Quillen. Ahora bien, para todo  $g \in G$ , la biyección  $\sigma_g$  mapea a la identidad  $\text{Id}_{c_0}$  en  $g$ , de donde se sigue que la transformación deck correspondiente a  $g$  es precisamente la única transformación deck  $\tau^g$  de  $p$  que mapea a  $\tilde{c}_0 = (c_0, \text{Id}_{c_0})$  en  $(c_0, g) = \tilde{\gamma}_g^{c_0}(1)$ . Se sigue que, vía la composición  $G \cong \mathbf{Deck}(\widetilde{B\mathcal{C}}, B\mathcal{C})^{\text{op}} \cong \pi_1(B\mathcal{C}, c_0)$ , un elemento  $g$  de  $G$  se mapea como

$$g \mapsto \tau^g = \tau_{\gamma_g} \mapsto [\gamma_g] = \zeta(g)$$

y por lo tanto el isomorfismo

$$G \cong \pi_1(B\mathcal{C}, c_0)$$

es precisamente  $\zeta$ , como queríamos mostrar.

Si  $\mathcal{C}$  no es conexa, el resultado se sigue fácilmente puesto que tanto  $\text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0)$  como  $\pi_1(B\mathcal{C}, c_0)$  dependen únicamente de la componente conexa de  $\mathcal{C}$  que contiene a  $c_0$ .

Un cálculo directo muestra, además, que el isomorfismo  $\zeta$  es natural en  $(\mathcal{C}, c_0)$ , y por lo tanto los funtores  $\text{Aut}_{\mathcal{L}(\cdot)}(\cdot)$  y  $\pi_1(\cdot, \cdot)$  de  $\mathbf{Cat}_*$  en  $\mathbf{Grp}$  son naturalmente isomorfos.

Haremos aquí un paréntesis para deducir de la demostración de Quillen un resultado que se considera estándar en la teoría de homotopía de categorías y que utilizaremos más adelante.

**Ejemplo 2.3.12.** Sea  $G$  un grupo, considerado como una categoría con un único objeto  $*$  y sea  $\varphi \in \mathbf{Set}^G$  el funtor asociado a  $G$ , al ser considerado como un objeto de  $G\text{-Set}$  con la acción usual por traslación a izquierda.

Se sigue del teorema 2.3.11, que existe un isomorfismo canónico  $\zeta: G \rightarrow \pi_1(G, *)$ . Notemos que  $G$  está siendo considerado como un grupo en el dominio, mientras que  $\pi_1(G, *)$  es el grupo fundamental de la categoría punteada  $(G, *)$ , es decir, el grupo fundamental de  $BG$  en  $*$ .

La categoría  $* \downarrow \varphi$  se puede calcular explícitamente: sus objetos están en correspondencia con los elementos de  $G$ , y existe exactamente una flecha (correspondiente al elemento  $hg^{-1}$ ) entre los objetos correspondientes a  $g$  y a  $h$ , para cualesquiera  $g, h \in G$ . Es claro entonces que  $* \downarrow \varphi$  es una categoría indiscreta.

Así, el único funtor de  $* \downarrow \varphi$  en la categoría terminal, cuyo espacio clasificante es el singleton, es una equivalencia de categorías. Se sigue que  $B(* \downarrow \varphi)$  resulta contráctil. Dado que  $B(u_\varphi): B(* \downarrow \varphi) \rightarrow BG$  es un revestimiento de  $BG$ , se sigue claramente que  $BG$  es esférico. Luego,  $BG$  es un espacio de Eilenberg-MacLane de tipo  $(G, 1)$ .

## 2.3 Revestimientos y grupo fundamental de A-espacios

---

*Observación 2.3.13.* De la naturalidad de  $\zeta$ , obtenemos que el funtor

$$\mathbf{Grp} \hookrightarrow \mathbf{Cat}_* \xrightarrow{B} \mathbf{Top}_* \xrightarrow{\pi_1} \mathbf{Grp}$$

es naturalmente isomorfo a la identidad de  $\mathbf{Grp}$ .

Uno de los resultados principales de esta sección será el Teorema 2.3.17 que establece que el grupoide fundamental de un espacio de Alexandroff es naturalmente isomorfo a la localización de dicho espacio. Debemos desarrollar antes algunos resultados preliminares.

**Definición 2.3.14.** Para todo  $t \in \Delta^n$  denotaremos por  $m_t$  al mínimo del conjunto

$$\{i \in \{0, \dots, n\} : t_i \neq 0\}.$$

Sea  $X$  un espacio de Alexandroff. Definimos la función  $\varphi_X: BX \rightarrow X$  por  $\varphi_X([\omega, t]) = \omega(m_t)$  para todo  $[\omega, t] \in BX$ . No es difícil ver que  $\varphi_X$  está bien definida.

Más aún, es fácil ver que  $f\varphi_X = \varphi_Y Bf$  para cualquier función continua  $f: X \rightarrow Y$  entre espacios de Alexandroff  $X$  e  $Y$ .

Notemos que si  $X$  es un espacio de Alexandroff  $T_0$ , entonces  $\varphi_X$  no es otra cosa que la equivalencia débil obtenida al combinar los teoremas 1.2.53 y 1.2.65.

**Teorema 2.3.15.** *La colección de flechas  $\{\varphi_X : X \text{ es un espacio de Alexandroff}\}$  define una equivalencia débil natural  $\varphi$  entre el funtor*

$$\mathbf{ATop} \cong \mathbf{Ord} \hookrightarrow \mathbf{Cat} \xrightarrow{B} \mathbf{Top}$$

y el funtor “inclusión”

$$\mathbf{ATop} \hookrightarrow \mathbf{Top}.$$

*Demostración.* De los teoremas 1.2.53 y 1.2.65 obtenemos inmediatamente que  $\varphi_X$  es una equivalencia débil para todo espacio de Alexandroff  $T_0$ . Necesitamos probar que  $\varphi_X$  es una equivalencia débil para todo espacio de Alexandroff  $X$  (no necesariamente  $T_0$ ). Sea  $X$  un espacio de Alexandroff, sea  $X_0$  su cociente de Kolmogorov (Subsección 1.2.5), sea  $q_X: X \rightarrow X_0$  la función cociente obvia y sea  $i_X$  cualquier sección de  $q_X$ . Un cálculo directo muestra que  $q_X$  es una equivalencia de categorías con inversa  $i_X$ . Se sigue que  $Bq_X$  es una equivalencia homotópica.

Notemos que  $q_X\varphi_X$  es continua dado que es igual a la composición  $\varphi_{X_0}Bq_X$ . La continuidad de  $\varphi_X$  se sigue fácilmente.

Dado que  $\varphi_{X_0}$ ,  $q_X$  y  $Bq_X$  son equivalencias débiles, se sigue claramente que  $\varphi_X$  también lo es, como queríamos probar.  $\square$

**Corolario 2.3.16.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre espacios de Alexandroff. Entonces,  $f$  es una equivalencia débil si y sólo si  $Bf: BX \rightarrow BY$  es una equivalencia homotópica.*

*Demostración.* Del teorema 2.3.15 y de la propiedad 2-de-3 de las equivalencias débiles se sigue que  $f$  es una equivalencia débil si y sólo si  $Bf$  es una equivalencia débil. Dado que  $BX$  y  $BY$  son CW-complejos, el resultado se sigue directamente del Teorema de Whitehead.  $\square$



## 2 Problemas de minimalidad

---

**Teorema 2.3.17.** *Los funtores  $\mathcal{L}: \mathbf{ATop} \rightarrow \mathbf{Grpd}$  y  $\Pi_1: \mathbf{ATop} \rightarrow \mathbf{Grpd}$  son naturalmente isomorfos.*

*Demostración.* Definiremos primero una transformación natural  $Z: \mathcal{L} \Rightarrow \Pi_1$ . Para cada espacio de Alexandroff  $X$  definimos el funtor  $\bar{Z}_X: X \rightarrow \Pi_1(X)$  como el funtor que es la identidad en objetos y mapea la flecha  $x \leq x'$  en  $[\eta(x \leq x')]$ , la clase de homotopía de caminos de  $\eta(x \leq x')$ , para cualesquiera  $x, x' \in X$  tales que  $x \leq x'$ .

Notemos que si  $X$  e  $Y$  son espacios de Alexandroff,  $f: X \rightarrow Y$  es una función continua y  $x, x'$  son elementos de  $X$  tales que  $x \leq x'$ , entonces  $f \circ \eta(x \leq x') = \eta(f(x) \leq f(x'))$ . Se sigue que  $\bar{Z}$  es una transformación natural del funtor

$$\mathbf{ATop} \cong \mathbf{Ord} \hookrightarrow \mathbf{Cat}$$

en el funtor

$$\mathbf{ATop} \hookrightarrow \mathbf{Top} \xrightarrow{\Pi_1} \mathbf{Grpd} \hookrightarrow \mathbf{Cat}.$$

Definimos  $Z_X: \mathcal{L}X \rightarrow \Pi_1(X)$  como el único morfismo de grupoides tal que  $\bar{Z}_X = Z_X \iota_X$  para cada espacio de Alexandroff  $X$ . No es difícil ver que  $Z: \mathcal{L} \Rightarrow \Pi_1$  es, en efecto, una transformación natural.

Veamos que  $Z_X$  es un isomorfismo para todo espacio de Alexandroff  $X$ . Sea  $X$  un espacio de Alexandroff  $T_0$  conexo. Por argumentos estándar de la teoría de grupoides, es suficiente probar que  $Z_X$  es biyectivo en objetos (lo cual se deduce trivialmente de la construcción explícita de  $\mathcal{L}X$  realizada en [35]) y se restringe a un isomorfismo de grupos entre  $\text{Aut}_{\mathcal{L}X}(x_0)$  y  $\pi_1(X, x_0)$  para algún  $x_0 \in X$ .

Sea entonces  $x_0 \in X$  y sea  $\varphi_X: BX \rightarrow X$  la equivalencia débil natural del Teorema 2.3.15. Dados elementos  $x$  y  $x'$  en  $X$  tales que  $x \leq x'$ , denotemos por  $\gamma_{x \leq x'}$  al camino canónico en  $BX$  de  $x$  a  $x'$  descrito al comienzo de esta subsección.

Un cálculo directo muestra que  $\eta(x \leq x') = \varphi_X \circ \gamma_{x \leq x'}$  para cualesquiera  $x, x'$  en  $X$  tales que  $x \leq x'$ . Se sigue que

$$\bar{Z}_X(x \leq x') = [\eta(x \leq x')] = [\varphi_X \circ \gamma_{x \leq x'}] = \Pi_1(\varphi_X)([\gamma_{x \leq x'}]) = \Pi_1(\varphi_X)\bar{\zeta}_X \iota_X(x \leq x')$$

para cualesquiera  $x, x' \in X$  tales que  $x \leq x'$ , donde  $\bar{\zeta}_X: \mathcal{L}X \rightarrow \Pi_1(BX)$  es el funtor definido al comienzo de esta subsección. Es inmediato entonces que la restricción

$$Z_X: \text{Aut}_{\mathcal{L}X}(x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

de  $Z_X$  no es otra cosa que la composición  $\pi_1(\varphi_X)\zeta_X$ , donde  $\zeta_X$  es el isomorfismo de Quillen. Se sigue claramente que esta restricción es un isomorfismo.  $\square$

### 2.3.3 Aplicaciones a revestimientos de A-espacios

Como mencionamos en la introducción de esta sección, los resultados que desarrollaremos en esta subsección están fuertemente inspirados en ideas y resultados de [11]. La principal diferencia entre nuestro trabajo y el del artículo mencionado está en que en lugar de utilizar el *edge-path group* de  $\mathcal{K}(X)$  para caracterizar el grupo fundamental de un espacio de Alexandroff  $X$ , hemos optado aquí por utilizar el teorema 2.3.11 de Quillen, cuya

## 2.3 Revestimientos y grupo fundamental de A-espacios

---

naturaleza categórica lo hace, a nuestro criterio, más compatible con la noción de  $G$ -coloring admisible, esto es, un funtor de  $X$  en un grupo  $G$ .

Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  categorías pequeñas conexas, sean  $T_{\mathcal{C}}$  y  $T_{\mathcal{D}}$  árboles maximales en  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  respectivamente y sea  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un funtor tal que  $F(T_{\mathcal{C}}) \subseteq T_{\mathcal{D}}$ . Dado  $c_0 \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , tenemos el siguiente diagrama conmutativo donde  $q_{\mathcal{C}}$  y  $q_{\mathcal{D}}$  son las proyecciones canónicas.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{C} & \xrightarrow{\nu_{\mathcal{C}}} & \mathcal{L}\mathcal{C} & \xrightarrow{q_{\mathcal{C}}} & \mathcal{L}\mathcal{C}/\mathcal{L}T_{\mathcal{C}} & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(\mathcal{C}, c_0) \\
 \downarrow F & & \downarrow \mathcal{L}F & & \downarrow \overline{\mathcal{L}F} & & \downarrow F_* \\
 \mathcal{D} & \xrightarrow{\nu_{\mathcal{D}}} & \mathcal{L}\mathcal{D} & \xrightarrow{q_{\mathcal{D}}} & \mathcal{L}\mathcal{D}/\mathcal{L}T_{\mathcal{D}} & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(\mathcal{D}, F(c_0))
 \end{array}$$

Figura 2.1

Ahora, dada una categoría pequeña conexas  $\mathcal{C}$ , un objeto  $c_0$  de  $\mathcal{C}$  y un árbol maximal  $T$  en  $\mathcal{C}$ , tenemos un funtor  $\mathcal{F}_T: \mathcal{C} \rightarrow \pi_1(\mathcal{C}, c_0)$  inducido por  $T$  dado por la composición

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\nu_{\mathcal{C}}} \mathcal{L}\mathcal{C} \xrightarrow{q_{\mathcal{C}}} \mathcal{L}\mathcal{C}/\mathcal{L}T \xrightarrow{\cong} \pi_1(\mathcal{C}, c_0).$$

Notemos que el funtor  $\mathcal{F}_T$  no depende sólo de  $T$ , sino también del objeto  $c_0$ . Dado que el rol del objeto  $c_0$  no será, en general, de suma importancia, hemos preferido no incluirlo en la notación.

Dado un morfismo de grupos  $\alpha: \pi_1(\mathcal{C}, c_0) \rightarrow G$ , el funtor  $\alpha \circ \mathcal{F}_T$  será denotado por  $\mathcal{F}_{T,\alpha}$ .

Notemos que el funtor  $\mathcal{F}_{T,\alpha}$  induce un morfismo de grupos

$$\pi_1(\mathcal{C}, c_0) \xrightarrow{(\mathcal{F}_{T,\alpha})^*} \pi_1(G, *) \cong G,$$

donde  $\pi_1(G, *) \cong G$  es el isomorfismo canónico del ejemplo 2.3.12.

**Lema 2.3.18.** *Con las definiciones anteriores, la composición*

$$\pi_1(\mathcal{C}, c_0) \xrightarrow{(\mathcal{F}_{T,\alpha})^*} \pi_1(G, *) \cong G$$

*es igual a  $\alpha$ .*

*Demostración.* Denotaremos los isomorfismos canónicos mencionados anteriormente y sus respectivos inversos por  $\xrightarrow{\cong}$ . Dado que no necesitaremos considerar otros isomorfismos, esto no debería causar confusión.

Es fácil ver que  $\nu_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{L}\mathcal{C}$  induce la identidad

$$\text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0) \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0)$$

## 2 Problemas de minimalidad

---

y por lo tanto, induce el isomorfismo

$$\pi_1(\mathcal{C}, c_0) \xrightarrow{\cong} \text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(\mathcal{L}\mathcal{C}, c_0).$$

Asimismo, el funtor inclusión  $\text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0) \hookrightarrow \mathcal{L}\mathcal{C}$  induce también la identidad

$$\text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0) \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0)$$

y por lo tanto, induce el morfismo

$$\pi_1(\text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0), c_0) \xrightarrow{\cong} \text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(\mathcal{L}\mathcal{C}, c_0).$$

Como hemos mencionado antes, la composición

$$\text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0) \hookrightarrow \mathcal{L}\mathcal{C} \xrightarrow{q_{\mathcal{C}}} \mathcal{L}\mathcal{C}/\mathcal{L}T \xrightarrow{p_{\mathcal{C}}} \text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0)$$

es igual a la identidad. Se sigue que el funtor  $\rho_{\mathcal{C}}q_{\mathcal{C}}: \mathcal{L}\mathcal{C} \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0)$  induce, entre los grupos fundamentales, el isomorfismo

$$\pi_1(\mathcal{L}\mathcal{C}, c_0) \xrightarrow{\cong} \text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(\text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0), c_0).$$

De la observación 2.3.13, vemos que el isomorfismo canónico  $\text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0) \rightarrow \pi_1(\mathcal{C}, c_0)$  induce el isomorfismo

$$\pi_1(\text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0), c_0) \xrightarrow{\cong} \text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(\mathcal{C}, c_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(\pi_1(\mathcal{C}, c_0), *)$$

entre los grupos fundamentales.

Componiendo los morfismos inducidos correspondientes, obtenemos que

$$\mathcal{C} \xrightarrow{i_{\mathcal{C}}} \mathcal{L}\mathcal{C} \xrightarrow{\rho_{\mathcal{C}}q_{\mathcal{C}}} \text{Aut}_{\mathcal{L}\mathcal{C}}(c_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(\mathcal{C}, c_0)$$

induce el isomorfismo

$$\pi_1(\mathcal{C}, c_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(\pi_1(\mathcal{C}, c_0), *)$$

entre los grupos fundamentales.

En virtud de la naturalidad del isomorfismo canónico de Quillen, obtenemos que el morfismo inducido por  $\mathcal{F}_{T,\alpha}: \mathcal{C} \rightarrow G$  entre los grupos fundamentales es igual a la composición

$$\pi_1(\mathcal{C}, c_0) \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\cong} \pi_1(G, *).$$

El resultado se sigue componiendo el morfismo anterior con el isomorfismo  $\pi_1(G, *) \xrightarrow{\cong} G$ . □

En particular,  $(\mathcal{F}_T)_* = \text{Id}_{\pi_1(\mathcal{C}, c_0)}$ .

El siguiente corolario se demuestra fácilmente.

**Corolario 2.3.19.** *Con las definiciones anteriores, el funtor  $\mathcal{F}_{T,\alpha}$  es trivial si y sólo si  $\alpha = 0$ .*

### 2.3 Revestimientos y grupo fundamental de A-espacios

*Demostración.* Dado que  $\mathcal{F}_{T,\alpha}$  se factoriza a través de  $\alpha$ , entonces será trivial siempre que  $\alpha$  lo sea. Por otro lado, si  $\mathcal{F}_{T,\alpha}$  es trivial, entonces  $B\mathcal{F}_{T,\alpha}$  es constante. Se sigue del lema anterior que  $\alpha = (\mathcal{F}_{T,\alpha})_* = 0$ .  $\square$

Supongamos que  $X$  es un espacio topológico de Alexandroff  $T_0$  conexo, que  $A$  es un subespacio conexo de  $X$ , que tenemos un árbol maximal  $T$  de  $X$  cuya intersección con  $A$  es un árbol maximal  $T_A$  de  $A$ , y que tenemos un morfismo de grupos  $\alpha: \pi_1(X, a_0) \rightarrow G$  para algún  $a_0 \in A$  y algún grupo  $G$ .

Sea  $i: A \rightarrow X$  la inclusión y sea  $i_*: \pi_1(A, a_0) \rightarrow \pi_1(X, a_0)$  el morfismo inducido por  $i$ . Del diagrama de la figura 2.1, observamos que  $\mathcal{F}_{T_A, \alpha i_*}$  es la restricción de  $\mathcal{F}_{T,\alpha}$  a  $A$ . Se sigue del corolario anterior que  $\mathcal{F}_{T,\alpha}$  es trivial en  $A$  si y sólo si  $i_*(\pi_1(A, a_0)) \subseteq \ker \alpha$ .

Ahora bien, si  $A$  no es conexo, tendremos que considerar distintos puntos base, al menos uno por cada componente conexa de  $A$ , para determinar si el funtor  $\mathcal{F}_{T,\alpha}$  es trivial sobre  $A$ . Esto requiere considerar distintos puntos base en  $X$ .

**Proposición 2.3.20.** *Sea  $X$  un espacio de Alexandroff  $T_0$  conexo, sea  $A \subseteq X$  un subespacio, sea  $T$  un árbol maximal en  $X$ , sea  $x_0 \in X$  y sea  $\alpha: \pi_1(X, x_0) \rightarrow G$  un morfismo de grupos. Sea  $i: A \rightarrow X$  la inclusión. Supongamos además que la intersección de  $T$  con cada componente conexa de  $A$  es un árbol, y por lo tanto, un árbol maximal en dicha componente.*

*Para cada  $a \in A$ , sea  $\theta_a: \pi_1(X, a) \cong \pi_1(X, x_0)$  el isomorfismo inducido por la clase homotópica de algún camino en  $X$  de  $a$  a  $x_0$  correspondiente a la única flecha en  $\mathcal{L}T$  de  $a$  a  $x_0$ .*

*Entonces,  $\mathcal{F}_{T,\alpha}$  es trivial en  $A$  si y sólo si  $i_*(\pi_1(A, a)) \subseteq \ker \alpha \theta_a$  para todo  $a \in A$ .*

*Demostración.* Sea  $a \in A$ . Consideremos el siguiente diagrama en  $\mathbf{Cat}_*$

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\mathcal{L}X/\mathcal{L}T, [a]) & \xrightarrow{\cong} & \text{Aut}_{\mathcal{L}X}(a) & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(X, a) & \xrightarrow{\alpha \theta_a} & G \\
 \parallel & & \cong \downarrow & & \theta_a \downarrow & \nearrow \alpha & \\
 (\mathcal{L}X/\mathcal{L}T, [x_0]) & \xrightarrow{\cong} & \text{Aut}_{\mathcal{L}X}(x_0) & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(X, x_0) & & 
 \end{array}$$

donde el isomorfismo  $\text{Aut}_{\mathcal{L}X}(a) \cong \text{Aut}_{\mathcal{L}X}(x_0)$  es el isomorfismo obvio inducido por la única flecha en  $\mathcal{L}T$  de  $a$  a  $x_0$ . Es fácil ver que el diagrama conmuta, de donde se sigue que  $\mathcal{F}_{T,\alpha} = \mathcal{F}_{T,\alpha \theta_a}$ .

Denotemos por  $T_a$  al árbol que se obtiene al intersecar con  $T$  a la componente conexa de  $A$  que contiene a  $a$ . Notemos que, por el diagrama de la figura 2.1, la restricción de  $\mathcal{F}_{T,\alpha \theta_a}$  a  $A$  no es otra cosa que el funtor  $\mathcal{F}_{T_a, \alpha \theta_a i_*}$ . Ahora bien,  $\mathcal{F}_{T,\alpha}$  es trivial en la componente conexa que contiene a  $a$  si y sólo si  $\mathcal{F}_{T_a, \alpha \theta_a}$  lo es. Por el corolario 2.3.19, esto sucede si y sólo si  $\alpha \theta_a i_* = 0$ , o equivalentemente, si y sólo si  $i_*(\pi_1(A, a)) \subseteq \ker \alpha \theta_a$ . El resultado se sigue fácilmente.  $\square$

**Corolario 2.3.21.** *Sea  $X$  un espacio topológico de Alexandroff  $T_0$  conexo y sea  $A$  un subespacio de  $X$  tal que la inclusión  $i: A \rightarrow X$  induce el morfismo trivial  $i_*: \pi_1(A, a) \rightarrow$*

## 2 Problemas de minimalidad

---

$\pi_1(X, a)$  para todo punto base  $a \in A$ . Entonces existe un árbol maximal  $T$  en  $X$  tal que  $\mathcal{F}_T$  es trivial en  $A$ .

*Demostración.* Podemos elegir un árbol maximal en cada componente conexa de  $A$  y extenderlo a un árbol maximal  $T$  de  $X$ . Las hipótesis de la proposición anterior se verifican trivialmente y por lo tanto  $\mathcal{F}_T$  es trivial en  $A$ .  $\square$

**Teorema 2.3.22.** Sea  $X$  un espacio topológico de Alexandroff conexo y sea  $x_0 \in X$ . Sea  $G$  un grupo considerado como una categoría con un único objeto  $*$  y sea  $\mathcal{F}: X \rightarrow G$  un funtor. Sea  $\tilde{X} = \mathcal{F}/*$ , sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  la proyección canónica y sea  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ . Sea  $\mathcal{F}_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow G$  el morfismo inducido por  $\mathcal{F}$  entre los grupos fundamentales. Entonces, la proyección  $p$  es el revestimiento (regular) de  $X$  correspondiente al núcleo de  $\mathcal{F}_*$  con  $\pi_0(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cong \text{coker } \mathcal{F}_*$ .

Si, en particular,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{T, \alpha}$  para algún árbol maximal  $T$  en  $X$  y algún morfismo de grupos  $\alpha: \pi_1(X, x_0) \rightarrow G$ , entonces  $p$  es el revestimiento de  $X$  correspondiente a  $\ker \alpha$  con  $\pi_0(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cong \text{coker } \alpha$ .

*Demostración.* Un cálculo explícito muestra que  $\text{Obj}(\tilde{X}) = X \times G$  y que, para cualesquiera  $(x, g), (x', g') \in \tilde{X}$  existe una (única) flecha en  $\tilde{X}$  de  $(x, g)$  a  $(x', g')$  si y sólo si  $x \leq x'$  en  $X$  y  $g' \mathcal{F}(x \leq x') = g$  en  $G$ . Se sigue que  $\tilde{X}$  es un espacio de Alexandroff cuyo preorden asociado está definido por

$$(x, g) \leq (x', g') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ y } g = g' \mathcal{F}(x \leq x')$$

para  $(x, g), (x', g') \in \tilde{X}$  y que  $p$  es una función continua.

Veamos que para todo  $x \in X$ ,

$$p^{-1}(U_x) = \bigcup_{g \in G} U_{(x, g)}$$

y los conjuntos  $U_{(x, g)}$  con  $g \in G$  son disjuntos dos a dos y se mapean homeomórficamente sobre  $U_x$  por  $p$ . Sea  $x \in X$ . Veamos primero que  $p^{-1}(U_x) = \bigcup_{g \in G} U_{(x, g)}$ . Si  $(x', g') \in p^{-1}(U_x)$

entonces  $x' \leq x$  y por lo tanto  $(x', g') \leq (x, g)$  donde  $g = g' \mathcal{F}(x' \leq x)^{-1}$ . Se sigue que  $p^{-1}(U_x) \subseteq \bigcup_{g \in G} U_{(x, g)}$ . La otra inclusión es obvia.

Veamos ahora que los conjuntos  $U_{(x, g)}$ ,  $g \in G$ , son disjuntos dos a dos. En efecto, si  $(a, h) \in U_{(x, g)} \cap U_{(x, g')}$  para  $g, g' \in G$ , tenemos que

$$g \mathcal{F}(a \leq x) = h = g' \mathcal{F}(a \leq x)$$

de donde se sigue que  $g = g'$ .

Finalmente, utilizando la descripción explícita del preorden en  $\tilde{X}$  es fácil probar que, para todo  $g \in G$ , la función  $\phi_g: U_x \rightarrow U_{(x, g)}$  definida por

$$\phi_g(x') = (x', g \mathcal{F}(x' \leq x))$$

para  $x' \in U_x$  es el inverso de la restricción  $p|: U_{(x, g)} \rightarrow U_x$  de  $p$ . Se sigue que  $p$  mapea  $U_{(x, g)}$  homeomórficamente sobre  $U_x$  como queríamos probar.

## 2.3 Revestimientos y grupo fundamental de A-espacios

Concluimos que  $p$  es un revestimiento de  $X$ .

Ahora bien, para cada  $g \in G$ , el funtor  $g_*: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  inducido por  $g$  del teorema 1.1.15 no es otra cosa que la transformación deck definida por

$$g_*(x, h) = (x, gh)$$

para todo  $(x, h) \in \tilde{X}$ . Se sigue que  $B(g_*)$  es un homeomorfismo para todo  $g \in G$ . Mediante una aplicación directa del Teorema B de Quillen (Teorema 1.1.15), obtenemos la siguiente porción de sucesión exacta larga

$$\pi_2(G, *) \rightarrow \pi_1(\tilde{X}, (x_0, e)) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\mathcal{F}_*} \pi_1(G, *) \rightarrow \pi_0(\tilde{X}, (x_0, e)) \xrightarrow{p_*} \pi_0(X, x_0)$$

donde  $e$  es el neutro de  $G$ . Por 2.3.12 vemos entonces que existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \pi_1(\tilde{X}, (x_0, e)) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\mathcal{F}_*} G \rightarrow \pi_0(\tilde{X}, (x_0, e)) \rightarrow 0.$$

Se sigue que  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, (x_0, e))) = \ker \mathcal{F}_*$  y que  $\pi_0(\tilde{X}, (x_0, e)) \cong \text{coker } \mathcal{F}_*$ .

Sabemos de la demostración de [40, Teorema 1.38] que  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$  es un conjugado de  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, (x_0, e))) = \ker \mathcal{F}_*$ . Dado que  $\ker \mathcal{F}_*$  es un subgrupo normal de  $\pi_1(X, x_0)$ , es claro que  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \ker \mathcal{F}_*$  como queríamos. Por otro lado,  $\pi_0(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cong \pi_0(\tilde{X}, (x_0, e)) \cong \text{coker } \mathcal{F}_*$ .

La última parte se sigue fácilmente de 2.3.18. □

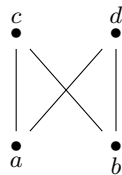
*Observación 2.3.23.* Se sigue del teorema anterior que  $\tilde{X} = \mathcal{F}/*$  es conexo si y sólo si  $\alpha$  es un epimorfismo, y que  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  es el revestimiento universal de  $X$  si y sólo si  $\alpha$  es un isomorfismo.

*Observación 2.3.24.* No es difícil ver que el teorema anterior admite una versión análoga con  $\tilde{X} = *\backslash\mathcal{F}$ . En efecto, la aplicación  $(x, g) \mapsto (x, g^{-1})$  de  $\mathcal{F}/*$  en  $*\backslash\mathcal{F}$  es un homeomorfismo sobre  $X$ .

**Corolario 2.3.25.** *Sea  $X$  un espacio de Alexandroff conexo, sea  $x_0 \in X$  y sea  $H$  un subgrupo normal de  $\pi_1(X, x_0)$ . Entonces existe un grupo  $G$  y un funtor  $\mathcal{F}: X \rightarrow G$  tal que la proyección canónica  $p: \mathcal{F}/* \rightarrow X$  es el revestimiento (regular) conexo de  $X$  correspondiente al subgrupo  $H$ .*

*Demostración.* Se sigue inmediatamente del teorema 2.3.22, tomando  $G = \pi_1(X, x_0)/H$ ,  $\alpha: \pi_1(X, x_0) \rightarrow G$  la proyección al cociente y  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{T, \alpha}$  para algún árbol maximal  $T$  en  $X$ . □

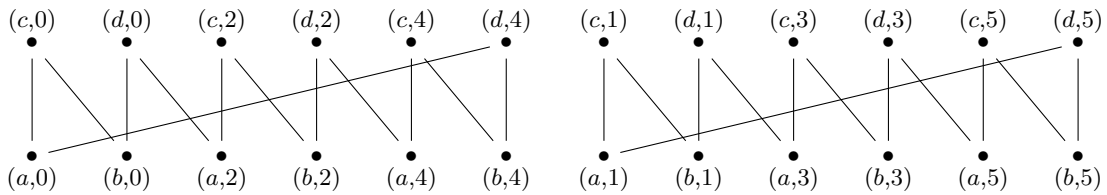
**Ejemplo 2.3.26.** Sea  $X$  el poset definido por el siguiente diagrama de Hasse:



## 2 Problemas de minimalidad

Consideramos a  $X$  como una categoría pequeña. Sea  $T$  el árbol maximal de  $X$  que contiene a las flechas  $a \leq c$ ,  $b \leq c$  y  $b \leq d$ , y sean  $\iota_X: X \rightarrow \mathcal{L}X$  y  $q_X: \mathcal{L}X \rightarrow \mathcal{L}X/\mathcal{L}T$  funtores definidos como antes. Tenemos que  $\mathcal{L}X/\mathcal{L}T \cong \pi_1(X, a) \cong \mathbb{Z}$ . No es difícil ver que  $\eta = q_X(\iota_X(a \leq d))$  es un generador del grupo  $\mathcal{L}X/\mathcal{L}T$ .

Sea  $\alpha: \pi_1(X, a) \rightarrow \mathbb{Z}_6$  el morfismo de grupos que mapea al generador de  $\pi_1(X, a)$  que se identifica con  $\eta$ , en el elemento  $2 \in \mathbb{Z}_6$ . El functor  $\mathcal{F}_{T,\alpha}: X \rightarrow \mathbb{Z}_6$  está definido por  $\mathcal{F}_{T,\alpha}(a \leq d) = 2$ ,  $\mathcal{F}_{T,\alpha}(a \leq c) = 0$ ,  $\mathcal{F}_{T,\alpha}(b \leq c) = 0$  y  $\mathcal{F}_{T,\alpha}(b \leq d) = 0$ . Por lo tanto, el espacio  $\tilde{X} = \mathcal{F}_{T,\alpha}/*$  es el siguiente poset



y la proyección  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  es un revestimiento. Es evidente que

$$\pi_0(\tilde{X}, (a, 0)) \cong \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_6 / \text{Im } \alpha.$$

Por otro lado, utilizando el teorema 1.2.53 y resultados estándar sobre el grupo fundamental de  $S^1$ , puede probarse que

$$p_*(\pi_1(\tilde{X}, (a, 0))) = \ker \alpha.$$

## 2.4 Splitting de posets

### 2.4.1 Tríadas split

En esta subsección presentamos la técnica del *splitting de posets* y exhibimos algunas consecuencias interesantes de su aplicación. Más aún, desarrollamos resultados que utilizaremos para resolver los problemas de minimalidad que estudiaremos en las subsecciones siguientes: los modelos minimales del plano proyectivo, del toro y de la botella de Klein, espacios con torsión en sus grupos de homología (con coeficientes en  $\mathbb{Z}$ ) y débilmente contráctiles no contráctiles de cardinalidad mínima.

La técnica del splitting consiste en dividir un poset  $X$  en dos subespacios  $C$  y  $X - C$  (no necesariamente abiertos, cerrados o conexos), y deducir a partir de propiedades homotópicas u homológicas de dichos subespacios, propiedades homotópicas u homológicas de  $X$ .

Esto resulta natural, puesto que  $|\mathcal{K}(C)|$  y  $|\mathcal{K}(X - C)|$  son retractos por deformación fuerte de los subespacios abiertos  $|\mathcal{K}(X)| - |\mathcal{K}(X - C)|$  y  $|\mathcal{K}(X)| - |\mathcal{K}(C)|$  respectivamente, los cuales forman un cubrimiento de  $|\mathcal{K}(X)|$ .

Notemos que si  $X$  es un poset finito y  $U$  y  $V$  son subespacios abiertos de  $X$  tales que  $X = U \cup V$  entonces  $X$  es retracto por deformación fuerte del pushout homotópico no Hausdorff [29, Definición 2.1] del diagrama  $U \leftarrow U \cap V \hookrightarrow V$  y, por el teorema de Thomason [73],  $|\mathcal{K}(X)|$  es el pushout homotópico del diagrama  $|\mathcal{K}(U)| \leftarrow |\mathcal{K}(U \cap V)| \hookrightarrow |\mathcal{K}(V)|$  (cf.

[29]). Observemos también que  $(|\mathcal{K}(X)|; |\mathcal{K}(U)|, |\mathcal{K}(V)|)$  es una CW-tríada. Por lo tanto, existen diversas herramientas para obtener información homotópica de  $X$  a partir de información homotópica de  $U$  y de  $V$ . Vemos además que, considerando posets opuestos, el argumento anterior se aplica si  $U$  y  $V$  son subespacios cerrados de  $X$ .

Sin embargo, el requerimiento de que  $U$  y  $V$  sean subespacios abiertos o cerrados de  $X$  es demasiado restrictivo y no se encuentra presente en el argumento del segundo párrafo de esta subsección. Para deshacernos de estas hipótesis en el contexto de los espacios finitos podemos utilizar la subdivisión de posets de la siguiente manera. Sean  $C$  y  $D$  subespacios disjuntos de  $X$  tales que  $X = C \cup D$ . Entonces  $C'$  y  $D'$  son subespacios abiertos de  $X' = (X' - C') \cup (X' - D')$ . Por el argumento expuesto anteriormente, podemos obtener información homotópica de  $X$  a partir de  $X' - C'$  y  $X' - D'$ , los cuales, por el lema 2.2.3, son homotópicamente equivalentes a  $(X - C)'$  y  $(X - D)'$  respectivamente. Por lo tanto, si  $C$  y  $D$  son subespacios disjuntos de  $X$  tales que  $X = C \cup D$ , es razonable esperar obtener información homotópica de  $X$  a partir de  $C'$  y  $D'$ , y de igual manera, a partir de  $C$  y  $D$ .

Como un primer ejemplo simple de aplicación, consideremos el siguiente resultado, el cual es aplicación directa de la sucesión de Mayer-Vietoris en homología. En lo que sigue, *homología* significará *homología singular con coeficientes en  $\mathbb{Z}$*  y por lo tanto el grupo de coeficientes será omitido de la notación.

**Proposición 2.4.1.** *Sea  $X$  un espacio de Alexandroff  $T_0$ . Supongamos que existen subespacios  $C, D \subseteq X$  tales que  $X = C \cup D$  y tales que los morfismos  $H_1(C) \rightarrow H_1(X)$  y  $H_1(D) \rightarrow H_1(X)$  inducidos por las inclusiones canónicas son triviales. Entonces  $H_1(X)$  es un grupo abeliano libre.*

*Demostración.* Podemos asumir que  $C, D \subsetneq X$  y que  $C \cap D = \emptyset$ . Observemos que la inclusión  $(X - C)' \rightarrow X'$  induce el morfismo trivial en  $H_1$  dado que  $(X - C)' \subseteq D'$ . Ahora, por 2.2.3, se sigue que la inclusión  $X' - C' \rightarrow X'$  también induce el morfismo trivial en  $H_1$ . Similarmente, la inclusión  $X' - D' \rightarrow X'$  induce el morfismo trivial en  $H_1$ .

Dado que  $X' - C'$  y  $X' - D'$  son subespacios cerrados de  $X'$  y  $X' = (X' - C') \cup (X' - D')$ , considerando posets opuestos obtenemos la siguiente porción de la sucesión exacta de Mayer-Vietoris

$$H_1(X' - C') \oplus H_1(X' - D') \xrightarrow{0} H_1(X') \xrightarrow{\partial} H_0((X' - C') \cap (X' - D')).$$

Y dado que  $H_0((X' - C') \cap (X' - D'))$  es un grupo abeliano libre y  $\partial$  es un monomorfismo obtenemos que  $H_1(X') \cong H_1(X)$  es un grupo abeliano libre.  $\square$

**Teorema 2.4.2.** *Sea  $X$  un espacio de Alexandroff  $T_0$  conexo y sea  $x_0 \in X$ . Sea  $A \subsetneq X$  un subespacio y sea  $i: X - A \rightarrow X$  la inclusión. Sea  $G$  un grupo y sea  $\alpha: \pi_1(X, x_0) \rightarrow G$  un epimorfismo. Supongamos que  $i_*(\pi_1(X - A, x)) \subseteq \ker \alpha_x$  para todo  $x \in X - A$ , donde  $\alpha_x$  es la composición*

$$\pi_1(X, x) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\alpha} G,$$

donde  $\pi_1(X, x) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_0)$  es el isomorfismo inducido por un camino cualquiera en  $X$  de  $x$  a  $x_0$ .



## 2 Problemas de minimalidad

---

Sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  el revestimiento conexo de  $X$  correspondiente al subgrupo  $\ker \alpha$  de  $\pi_1(X, x_0)$ . Entonces,

$$H_n(\tilde{X}, p^{-1}(A)) = \bigoplus_G H_n(X, A)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

*Demostración.* Consideremos los  $\mathcal{P}$ -complejos de cadenas (cf. definición 1.2.70)

$$C(\tilde{X}, p^{-1}(A)) = (C_n(\tilde{X}, p^{-1}(A)), \tilde{d}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

y

$$C(X, A) = (C_n(X, A), d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

de los pares  $(\tilde{X}, p^{-1}(A))$  y  $(X, A)$ . Consideraremos que los grupos  $C_n$  de estos complejos están generados por las cadenas relativas correspondientes a cada par. Probaremos que

$$C(\tilde{X}, p^{-1}(A)) \cong \bigoplus_{g \in G} C(X, A),$$

de donde se deduce trivialmente el resultado deseado.

Tomemos un árbol maximal en cada componente conexa de  $X - A$  y extendamos el bosque así obtenido a un árbol maximal  $T$  en  $X$ . Sea  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{T, \alpha}$ .

Por el teorema 2.3.22, podemos suponer que  $\tilde{X} = \mathcal{F}/*$  y que  $p$  es la proyección a  $X$ . Es claro que el grupo  $\ker \alpha_x$  es independiente del morfismo  $\alpha_x$  y del camino de  $x$  a  $x_0$  elegido para construir el isomorfismo  $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, x_0)$ . En particular, podemos considerar que el camino elegido es el inducido por la única flecha en  $\mathcal{L}T$  de  $x$  a  $x_0$ . Por la proposición 2.3.20, tenemos que  $\mathcal{F}$  es trivial en  $X - A$ .

Para  $n \in \mathbb{N}_0$ , definimos

$$\phi_n: C_n(\tilde{X}, p^{-1}(A)) \rightarrow \bigoplus_{g \in G} C_n(X, A)$$

como el morfismo de grupos que mapea cada  $n$ -cadena  $[(x_0, g_0), \dots, (x_n, g_n)]$  en la  $n$ -cadena  $[x_0, \dots, x_n]$  de  $(X, A)$  correspondiente a la coordenada  $g_i$  de  $\bigoplus_{g \in G} C_n(X, A)$ , para

algún  $i \in [n]$  tal que  $x_i \in X - A$ . Es fácil ver que  $\phi_n$  está bien definido. En efecto, si existen  $x_i, x_j \in X - A$  con  $0 \leq i \leq j \leq n$ , dado que  $(x_i, g_i) \leq (x_j, g_j)$  y utilizando que  $\mathcal{F}$  es trivial en  $X - A$ , se tiene que  $g_i = g_j \mathcal{F}(x_i \leq x_j) = g_j$ .

Si  $[x_0, \dots, x_n]$  es una  $n$ -cadena de  $(X, A)$ , entonces, para cada  $g \in G$ , existe una única  $n$ -cadena de  $(\tilde{X}, p^{-1}(A))$  que se mapea en la cadena  $[x_0, \dots, x_n]$  correspondiente a la coordenada  $g$  de  $\bigoplus_{g \in G} C_n(X, A)$  por  $\phi$ . Esta es la cadena  $[(x_0, g_0), \dots, (x_n, g_n)]$  donde  $g_i = g$  para algún  $i \in [n]$  tal que  $x_i \in X - A$ , y donde

$$g_j = \begin{cases} g_i \mathcal{F}(x_j \leq x_i) & \text{si } 0 \leq j \leq i, \\ g_i \mathcal{F}(x_i \leq x_j)^{-1} & \text{si } i \leq j \leq n. \end{cases}$$

Se sigue que  $\phi_n$  es un isomorfismo. No es difícil, además, probar que  $(\oplus d_n)\phi_n = \phi_{n-1}\tilde{d}_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . Así, la colección de morfismos  $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$  se puede extender a un isomorfismo de complejos de cadenas

$$\phi: C(\tilde{X}, p^{-1}(A)) \cong \bigoplus_{g \in G} C(X, A).$$

Dado que los grupos de homología singular con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  de un espacio de Alexandroff  $T_0$  son naturalmente isomorfos a los grupos de  $\mathcal{P}$ -homología de dicho espacio, el resultado se sigue.  $\square$

De este teorema obtenemos el siguiente corolario que será de utilidad más adelante.

**Corolario 2.4.3.** *Sea  $X$  un espacio topológico de Alexandroff  $T_0$  conexo y sea  $x_0 \in X$ . Sea  $A \subsetneq X$  un subespacio tal que la inclusión de  $X - A$  en  $X$  induce el morfismo trivial entre los grupos fundamentales correspondientes para cualquier elección de punto base. Sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  el revestimiento universal de  $X$ .*

Entonces

$$H_n(\tilde{X}, p^{-1}(A)) \cong \bigoplus_{\pi_1(X, x_0)} H_n(X, A)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

*Demostración.* Tomando  $\alpha = \text{Id}_{\pi_1(X, x_0)}$ , el resultado se sigue por aplicación directa del teorema 2.4.2.  $\square$

Este corolario motiva la siguiente definición.

**Definición 2.4.4.** Sea  $X$  un poset conexo (o equivalentemente, un espacio topológico de Alexandroff  $T_0$  conexo) y sean  $C$  y  $D$  subposets de  $X$  no vacíos tales que  $X = C \cup D$ . Decimos que la terna  $(X; C, D)$  es una *tríada split* si la inclusión de  $D$  en  $X$  induce el morfismo trivial entre los grupos fundamentales correspondientes para cualquier elección de punto base.

Observemos que una tríada split  $(X; C, D)$  con  $C \neq X$  da lugar a una tríada  $(X; C, X - C)$  que *parte*  $X$  en dos subespacios disjuntos que satisfacen las hipótesis del corolario anterior. En este caso,  $(X; C, X - C)$  es también una tríada split.

Estamos principalmente interesados en las tríadas split  $(X; C, X - C)$  tales que el subespacio  $C$  satisface hipótesis adicionales. Bajo condiciones adecuadas, podremos obtener información homotópica concreta de  $X$  como se observa en el siguiente teorema de tipo Hurewicz.

**Teorema 2.4.5.** *Sea  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 2$  y sea  $(X; C, Y)$  una tríada split tal que*

- $\pi_r(C, c_0) \cong H_r(C) = 0$  para todo  $2 \leq r \leq n$  y para todo  $c_0 \in C$ ,
- $\pi_1(C, c_0)$  es un grupo abeliano para todo  $c_0 \in C$ , y
- la inclusión  $C \rightarrow X$  induce un monomorfismo  $H_1(C) \rightarrow H_1(X)$ .

## 2 Problemas de minimalidad

Si  $l \in \mathbb{N}$  es tal que  $2 \leq l \leq n$  y  $H_j(X) = 0$  para todo  $2 \leq j \leq l-1$  entonces  $\pi_j(X, x_0) = 0$  para todo  $2 \leq j \leq l-1$  y  $\pi_l(X, x_0) \cong H_l(X) \otimes \mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$  para cualquier  $x_0 \in X$ . En particular,  $\pi_2(X, x_0) \cong H_2(X) \otimes \mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$ .

*Demostración.* Notemos que el resultado vale trivialmente si  $C = X$ . Podemos suponer entonces que  $C \neq X$ .

Sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  el revestimiento universal de  $X$  y sea  $i: C \rightarrow X$  la inclusión.

Veamos primero que  $H_r(p^{-1}(C)) = 0$  para  $1 \leq r \leq n$ . Sea  $C_0$  una componente conexa de  $C$  y sea  $D$  una componente conexa de  $p^{-1}(C_0)$ . Sea  $c_0 \in C_0$ . Por un lado,  $\pi_1(C_0, c_0) = \pi_1(C, c_0)$  es un grupo abeliano. Por otro, es claro que  $i_*: H_1(C_0) \rightarrow H_1(X)$  es un monomorfismo. Sea  $h_{C_0}: \pi_1(C_0, c_0) \rightarrow H_1(C_0)$  el morfismo de Hurewicz (en grado 1) correspondiente a  $(C_0, c_0)$ . Por [40, Teorema 2A.1] se sigue que  $h_{C_0}$  es un isomorfismo. Por la naturalidad del morfismo de Hurewicz [40, p. 370], es claro que  $i_*: \pi_1(C_0, c_0) \rightarrow \pi_1(X, c_0)$  es también un monomorfismo. De la proposición 1.3.60, obtenemos que la restricción  $p|_D: D \rightarrow C_0$  de  $p$  es el revestimiento universal de  $C_0$ . Puesto que  $\pi_r(C, c_0) = 0$  para todo  $2 \leq r \leq n$ , se sigue de [40, Proposición 4.1] que  $D$  es  $n$ -conexo. Luego, aplicando el teorema de Hurewicz, se obtiene que  $H_r(p^{-1}(D)) = 0$  para  $1 \leq r \leq n$ . Se sigue que  $H_r(p^{-1}(C)) = 0$  para  $1 \leq r \leq n$  como queríamos probar.

De la sucesión exacta larga en homología para el par  $(\tilde{X}, p^{-1}(C))$  obtenemos que  $H_r(\tilde{X}) \cong H_r(\tilde{X}, p^{-1}(C))$  para todo  $2 \leq r \leq n$ .

Por otro lado, dado que la inclusión de  $X - C$  en  $X$  induce el morfismo trivial entre los grupos fundamentales para cualquier elección de punto base, de 2.4.3 obtenemos que  $H_r(\tilde{X}, p^{-1}(C)) \cong \bigoplus_{\pi_1(X, x_0)} H_r(X, C)$  para todo  $r \in \mathbb{N}_0$ , para cualquier  $x_0 \in X$ .

Finalmente, dado que  $H_r(C) = 0$  para todo  $2 \leq r \leq n$  y  $i_*: H_1(C) \rightarrow H_1(X)$  es un monomorfismo, de la sucesión exacta larga en homología para el par  $(X, C)$ , obtenemos que  $H_r(X, C) \cong H_r(X)$  para todo  $2 \leq r \leq n$ . Así, si  $l$  es como en la hipótesis del teorema, para cualquier  $x_0 \in X$  tenemos que

$$H_j(\tilde{X}) \cong H_j(\tilde{X}, p^{-1}(C)) \cong \bigoplus_{\pi_1(X, x_0)} H_j(X, C) \cong \bigoplus_{\pi_1(X, x_0)} H_j(X) = 0$$

para  $2 \leq j \leq l-1$ , y

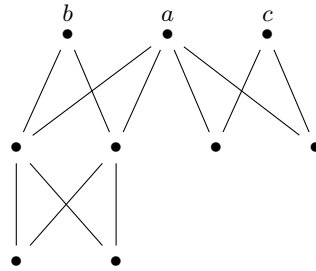
$$H_l(\tilde{X}) \cong H_l(\tilde{X}, p^{-1}(C)) \cong \bigoplus_{\pi_1(X, x_0)} H_l(X, C) \cong \bigoplus_{\pi_1(X, x_0)} H_l(X) \cong H_l(X) \otimes \mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)].$$

El resultado se sigue fácilmente utilizando el teorema de Hurewicz.  $\square$

Notemos que las hipótesis del teorema anterior se satisfacen si toda componente conexa de  $C$  es 2-conexa.

El siguiente es un ejemplo simple de aplicación de 2.4.5.

**Ejemplo 2.4.6.** Consideremos el poset  $Z$  definido por el siguiente diagrama de Hasse



Calculemos  $\pi_2(Z, a)$ .

Claramente, la inclusión de cada componente conexa de  $Z - U_a$  en  $Z$  induce el morfismo trivial entre los grupos fundamentales, y dado que  $U_a$  es contráctil, aplicando el teorema anterior obtenemos

$$\pi_2(Z, a) = H_2(Z) \otimes \mathbb{Z}[\pi_1(Z, a)].$$

Ahora, es fácil verificar que  $H_2(Z) \cong \mathbb{Z}$  (cf. ejemplo 3.21 de [20]).

Por otro lado, el grupo fundamental de  $Z$  es fácil de calcular. Considerando los conjuntos abiertos  $U_a \cup U_c$  y  $U_b$  y aplicando el teorema de van Kampen obtenemos que

$$\pi_1(Z, x) \cong \pi_1(U_a \cup U_c, x) \cong \pi_1(U_c \cup \{a\}, a) \cong \mathbb{Z}$$

para cualquier  $x \in U_a \cap U_b$ . Aquí, el primer isomorfismo vale dado que la función

$$\pi_1(U_b \cap (U_a \cup U_c)) \rightarrow \pi_1(U_a \cup U_c)$$

inducida por la inclusión es trivial puesto que puede ser factorizada a través de  $\pi_1(U_a, x)$ . El segundo isomorfismo vale dado que  $U_c \cup \{a\}$  se puede obtener a partir de  $U_a \cup U_c$  eliminando beat points sucesivamente.

Por consiguiente,  $\pi_2(Z, a) \cong \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$ . Esto no es sorprendente, puesto que  $|\mathcal{K}(Z)|$  es homeomorfo a  $S^2 \vee S^1$ .

**Teorema 2.4.7.** Sea  $X$  un espacio de Alexandroff  $T_0$  conexo. Supongamos que existen subespacios no vacíos  $C, D \subseteq X$  tales que  $X = C \cup D$  y tales que las inclusiones de  $C$  y  $D$  en  $X$  inducen morfismos triviales entre los grupos fundamentales para cualquier elección de punto base. Entonces  $\pi_1(X, x_0)$  es un grupo libre para cualquier  $x_0 \in X$ .

*Demostración.* Podemos asumir que  $C, D \subsetneq X$ . Dado que  $X - C \subseteq D$ , la inclusión de  $X - C$  en  $X$  induce el morfismo trivial entre los grupos fundamentales para cualquier elección de punto base. Así, por el lema 2.2.3, las inclusiones de  $C'$  y de  $X' - C'$  en  $X'$  inducen el morfismo trivial entre los grupos fundamentales para cualquier elección de punto base. Podemos suponer entonces, sin pérdida de generalidad, que  $X$  es un espacio topológico localmente finito  $T_0$  y que  $C$  es un subespacio abierto de  $X$ . Sea  $x_0 \in X$ .

Eligiendo un árbol maximal en cada componente conexa de  $C$  y de  $X - C$  obtenemos un bosque  $\tilde{T}$  que puede ser extendido a un árbol maximal  $T$  de  $X$ . Consideremos el funtor  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T: X \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  asociado a  $T$  y al morfismo identidad  $\text{Id}: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ . Dado que las inclusiones de  $C$  y de  $X - C$  en  $X$  inducen el morfismo trivial entre los

## 2 Problemas de minimalidad

---

grupos fundamentales para cualquier elección de punto base, se sigue de 2.3.20 que  $\mathcal{F}$  es trivial en  $C$  y  $X - C$ .

Definimos una relación de equivalencia en  $X$  como sigue. Dos objetos  $x, y \in \text{Obj}(X)$  son equivalentes si y sólo si ambos están en la misma componente conexa de  $C$  o de  $X - C$  y dos flechas  $\alpha, \beta \in \text{Mor}(X)$  son equivalentes si y sólo se mapean por  $\mathcal{F}$  en el mismo elemento de  $\pi_1(X, x_0)$  y sus dominios y codominios son, respectivamente, objetos equivalentes. Para  $x \in \text{Obj}(X)$  y  $\alpha \in \text{Mor}(X)$  denotaremos la clase de equivalencia de  $x$  por  $[x]$  y la clase de equivalencia de  $\alpha$  por  $[\alpha]$ .

Sea  $\mathcal{C}$  la categoría cuyos objetos son las clases de equivalencia de objetos de  $X$  y cuyos morfismos son las clases de equivalencia de flechas de  $X$ , esto es

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}([x], [y]) = \{[\alpha] : \alpha \in \text{Hom}_X(x', y'), x' \in [x], y' \in [y]\}$$

para  $[x], [y] \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ . Observemos que, dado que  $\mathcal{F}$  es trivial en cada componente conexa de  $C$  y de  $X - C$ , entonces el dominio y el codominio de cada flecha no trivial de  $\mathcal{C}$  son, respectivamente, la clase de un objeto de  $C$  y la clase de un objeto de  $X - C$ . En particular,  $\mathcal{C}$  no tiene composiciones no triviales. Se sigue que cada símplex no degenerado del nervio de  $\mathcal{C}$  tiene dimensión a lo sumo 1 y por lo tanto el espacio clasificante de  $\mathcal{C}$  es un CW-complejo de dimensión 1. Se sigue de resultados estándar que  $\pi_1(\mathcal{C}, [x_0])$  es un grupo libre.

Sea  $\phi: X \rightarrow \mathcal{C}$  la función que mapea cada objeto y cada morfismo de  $X$  a su clase. Es fácil verificar que  $\phi$  es un funtor bien definido de  $X$  a  $\mathcal{C}$ .

Es claro que se tiene un funtor  $\mathcal{F}': \mathcal{C} \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  definido por  $\mathcal{F}'([\alpha]) = \mathcal{F}(\alpha)$  para cada  $\alpha \in \text{Mor}(X)$ , y que por lo tanto,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}'\phi$ . Dado que  $\mathcal{F}$  induce el morfismo identidad en  $\pi_1(X, x_0)$  obtenemos que

$$\phi_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(\mathcal{C}, [x_0])$$

es un monomorfismo. Y dado que  $\pi_1(\mathcal{C}, [x_0])$  es un grupo libre, se sigue que  $\pi_1(X, x_0)$  también lo es.  $\square$

*Observación 2.4.8.* En la situación de la demostración del teorema anterior, puede probarse que la categoría  $\mathcal{L}\mathcal{C}$  es isomorfa a la categoría  $\mathcal{L}X/\mathcal{L}\tilde{T}$  y que el morfismo  $\phi_*: \pi_1(\mathcal{C}, [x_0]) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  es un isomorfismo. No necesitaremos estos resultados.

### 2.4.2 Propiedades (S1) y (S2)

Definiremos ahora ciertas propiedades sobre tríadas split de posets finitos y conexos que serán llamadas *propiedades split*. Estas son esenciales para el desarrollo de los resultados del resto de las secciones de este capítulo dado que proveerán el nexo entre topología y combinatoria necesario para resolver los problemas de minimalidad que siguen.

**Definición 2.4.9.** Sea  $X$  un poset finito y conexo y sea  $(X; C, D)$  una tríada split. Definimos las siguientes propiedades sobre  $(X; C, D)$ .

- (S1) La inclusión de  $C$  en  $X$  induce el morfismo trivial entre los grupos fundamentales para cualquier elección de punto base. Equivalentemente, la tríada  $(X; D, C)$  es también una tríada split.

(S2) A lo sumo una de las componentes conexas de  $C$  es débilmente equivalente a  $S^1$  mientras que el resto de ellas son débilmente contráctiles.

Diremos también que un poset finito y conexo  $X$  satisface (S1) (resp. (S2)) si existe una tríada split  $(X; C, D)$  que satisface (S1) (resp. (S2)).

Notemos que, por 2.4.7, si  $X$  satisface (S1) entonces  $\pi_1(X, x_0)$  es un grupo libre para cualquier  $x_0 \in X$ .

La siguiente observación resume hechos sencillos sobre las propiedades (S1) y (S2).

*Observación 2.4.10.* Sea  $X$  un poset finito y conexo.

1. Si  $X$  tiene un máximo, entonces  $X$  satisface (S1) y (S2).
2. Si  $h(X) = 1$ , entonces  $X$  satisface (S1) y (S2). En efecto, si  $C$  es el conjunto de puntos maximales de  $X$  entonces la tríada split  $(X; C, X - C)$  satisface (S1) y (S2).
3. Si  $X$  es unión de dos subespacios contráctiles entonces  $X$  satisface (S1) y (S2). En particular, si  $X$  tiene a lo sumo 2 puntos maximales (o a lo sumo 2 puntos minimales) entonces  $X$  satisface (S1) y (S2).

**Ejemplo 2.4.11.** Si  $X$  es un modelo finito del plano proyectivo real entonces  $X$  no satisface (S1) dado que su grupo fundamental no es libre. En particular, el espacio  $\mathbb{P}_2^2$  de la figura 2.3 de página 94 no satisface (S1). Sin embargo, satisface (S2) dado que la tríada split  $(\mathbb{P}_2^2; \mathbb{P}_2^2 - U_{a_1}, U_{a_1})$  satisface (S2).

**Proposición 2.4.12.** Sea  $X$  un espacio topológico  $T_0$ , finito y conexo y sea  $a$  un beat point de  $X$ . Si  $X - \{a\}$  satisface (S1) (resp. (S2)) entonces  $X$  satisface (S1) (resp. (S2)).

*Demostración.* Se sigue del hecho de que si  $a$  es un beat point de  $X$  y  $C \subseteq X - \{a\}$  entonces  $a$  es un beat point de  $C \cup \{a\}$  o  $a$  es un beat point de  $X - C$ .  $\square$

Para probar la siguiente proposición, necesitamos algunos resultados de la teoría de cohomología de grupos. Estos pueden encontrarse en [15]. Dado un grupo  $G$ , el grupo  $\mathbb{Z}$  puede ser considerado de manera trivial como un  $\mathbb{Z}[G]$ -módulo. Una *resolución proyectiva* de  $\mathbb{Z}$  como  $\mathbb{Z}[G]$ -módulo es una sucesión exacta larga de  $\mathbb{Z}[G]$ -módulos proyectivos

$$\cdots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Pueden definirse distintos invariantes algebraicos utilizando resoluciones proyectivas de este tipo. En particular, se define la *dimensión cohomológica* de un grupo  $G$ , notada por  $\text{cd } G$ , como el ínfimo de los  $n \in \mathbb{N}$  tales que existe una resolución proyectiva

$$0 \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

de  $\mathbb{Z}$  como  $\mathbb{Z}[G]$ -módulo.

Si  $G$  es un grupo y  $X$  es un CW-complejo que es un espacio de Eilenberg-MacLane de tipo  $(G, 1)$ , el revestimiento universal  $\tilde{X}$  de  $X$  resulta un CW-complejo contráctil de la misma dimensión que  $X$  [64, Teorema III.6.9.2]. El *complejo de cadenas celular aumentado* de  $\tilde{X}$  resulta una resolución proyectiva de  $\mathbb{Z}$  como  $\mathbb{Z}[G]$ -módulo [15, Proposición I.4.2]. Se

## 2 Problemas de minimalidad

---

sigue que si  $X$  tiene dimensión finita, entonces  $G$  tiene dimensión cohomológica finita [15, Proposición VIII.2.2].

La proposición [15, VIII.2.4] muestra que la dimensión cohomológica es creciente en el sentido de que si  $G$  es un subgrupo de  $H$ , entonces  $\text{cd } G \leq \text{cd } H$ . Más aún, de [15, Ejemplo 2 de III.1] se deduce que los grupos finitos no triviales tienen dimensión cohomológica infinita. Se sigue que los grupos de dimensión cohomológica finita son libres de torsión [15, Corolario VIII.2.5].

Ahora bien, si  $X$  es un modelo finito de un espacio de Eilenberg-MacLane de tipo  $(G, 1)$  para algún grupo  $G$ , entonces  $|\mathcal{K}(X)|$  es un CW-complejo de dimensión finita y un espacio de Eilenberg-MacLane de tipo  $(G, 1)$ . Se sigue que  $\text{cd } G < \infty$  y por lo tanto que  $G$  es libre de torsión.

La siguiente proposición muestra que los grupos de homología de un modelo finito de un espacio de Eilenberg-MacLane de tipo  $(G, 1)$  que cumplen (S2) están fuertemente condicionados.

**Proposición 2.4.13.** *Sea  $G$  un grupo y sea  $X$  un modelo finito de un espacio de Eilenberg-MacLane de tipo  $(G, 1)$  que satisface (S2). Entonces  $H_1(X)$  es un grupo abeliano libre y  $H_n(X) = 0$  para todo  $n \geq 2$ .*

*Demostración.* Podemos suponer que  $G \neq 0$ . Por lo expuesto anteriormente, es claro que  $G$  no tiene torsión.

Sea  $(X; C, Y)$  una tríada split que satisface (S2). Notemos que como  $X$  es conexo, si  $C$  fuera igual a  $X$  tendríamos que  $X$  es débilmente contráctil o débilmente equivalente a  $S^1$ . En ambos casos, el resultado se sigue fácilmente. Podemos suponer entonces que  $C \neq X$ .

Sea  $x_0 \in X$  y sea  $i: C \rightarrow X$  la función inclusión. Si  $i$  induce el morfismo trivial entre los grupos fundamentales para cualquier elección de punto base, de 2.4.7 obtenemos que  $\pi_1(X, x_0)$  es un grupo libre. En este caso, se sigue de resultados estándar que  $|\mathcal{K}(X)|$  es homotópicamente equivalente a la unión en un punto de circunferencias y por lo tanto, que  $H_1(X)$  es un grupo abeliano libre y  $H_n(X) = 0$  para todo  $n \geq 2$ .

Supongamos que este no es el caso. Entonces todas las componentes conexas de  $C$  son débilmente contráctiles, excepto exactamente una,  $C_0$ , que es débilmente equivalente a  $S^1$  y tal que la inclusión de  $C_0$  en  $X$  induce un morfismo no trivial entre los grupos fundamentales para cualquier elección de punto base. Dado que  $G$  es libre de torsión, el morfismo  $i_*: \pi_1(C_0, c_0) \rightarrow \pi_1(X, c_0)$  es necesariamente un monomorfismo para cualquier  $c_0 \in C_0$ . Se sigue que  $i_*: \pi_1(C, c_0) \rightarrow \pi_1(X, c_0)$  es un monomorfismo para todo  $c_0 \in C$ .

Sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  el revestimiento universal de  $X$ .

Dado que  $i_*: \pi_1(C, c_0) \rightarrow \pi_1(X, c_0)$  es un monomorfismo para todo  $c_0 \in C$ , por 1.3.60 se sigue que para toda componente conexa  $C'$  de  $C$  y para toda componente conexa  $D$  de  $p^{-1}(C')$ , la restricción  $p|_D: D \rightarrow C'$  de  $p$  es el revestimiento universal de  $C'$ . Puesto que  $\pi_r(C, c_0) = 0$  para todo  $r \geq 2$  y para todo  $c_0 \in C$ , se sigue que  $D$  es débilmente contráctil.

De la sucesión exacta larga en homología para el par  $(\tilde{X}, p^{-1}(C))$  obtenemos que  $H_r(\tilde{X}, p^{-1}(C)) = 0$  para todo  $r \neq 1$  y  $H_1(\tilde{X}, p^{-1}(C)) \cong \tilde{H}_0(p^{-1}(C))$  el cual es abeliano libre.

Por otro lado, dado que la inclusión de  $X - C$  en  $X$  induce el morfismo trivial entre los grupos fundamentales para cualquier elección de punto base, de 2.4.3 obtenemos que

$$H_r(\tilde{X}, p^{-1}(C)) \cong \bigoplus_{\pi_1(X, x_0)} H_r(X, C) \text{ para todo } r \in \mathbb{N}_0.$$

Como  $\pi_1(X, x_0) \neq 0$ , se sigue que  $H_r(X, C) = 0$  para todo  $r \neq 1$  y  $H_1(X, C)$  es un grupo abeliano libre. De la sucesión exacta larga en homología para el par  $(X, C)$ , obtenemos que  $H_n(X) = 0$  para todo  $n \geq 2$  y la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow H_1(C) \xrightarrow{i_*} H_1(X) \rightarrow \ker \partial \rightarrow 0$$

donde  $\partial: H_1(X, C) \rightarrow \tilde{H}_0(C)$  es el morfismo de conexión.

Puesto que las componentes arcoconexas de  $C$  son débilmente contráctiles, excepto una que es débilmente equivalente a  $S^1$ , se sigue de [40, Proposición 2.6] que  $H_1(C) \cong \mathbb{Z}$ . Por otro lado,  $\ker \partial$  es un grupo abeliano libre por ser subgrupo del grupo abeliano libre  $H_1(X, C)$ . Así, la sucesión exacta corta anterior se parte y concluimos entonces que  $H_1(X) \cong \ker \partial \oplus H_1(C)$  es un grupo abeliano libre por ser suma directa de grupos abelianos libres.  $\square$

De la proposición anterior obtenemos el siguiente corolario que será utilizado en la sección 2.6 para caracterizar los modelos finitos minimales del toro y de la botella de Klein.

**Corolario 2.4.14.** *Sea  $X$  un poset finito. Si  $X$  es un modelo finito del toro o de la botella de Klein entonces  $X$  no satisface (S2).*

*Demostración.* Es bien sabido que el toro y la botella de Klein son CW-complejos asféricos, que el segundo grupo de homología del toro es isomorfo a  $\mathbb{Z}$  y que el primer grupo de homología de la botella de Klein es isomorfo a  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ . El resultado se sigue inmediatamente de la proposición 2.4.13.  $\square$

La propiedad (S2) permite formular otro teorema de tipo Hurewicz que utilizaremos en el ejemplo 2.4.16.

**Proposición 2.4.15.** *Sea  $X$  un poset finito y conexo que satisface (S2) y sea  $x_0 \in X$ . Supongamos que  $\pi_2(X, x_0) = 0$ . Si existe  $n \geq 3$  tal que  $H_l(X) = 0$  para todo  $3 \leq l \leq n-1$  entonces  $\pi_l(X, x_0) = 0$  para todo  $3 \leq l \leq n-1$  y  $\pi_n(X, x_0) \cong H_n(X) \otimes \mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$ . En particular,  $\pi_3(X, x_0) \cong H_3(X) \otimes \mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$ .*

*Demostración.* Sea  $(X; C, Y)$  una tríada split que satisface (S2). Notemos que si  $C = X$ , entonces el resultado se sigue fácilmente. Podemos suponer entonces que  $C \subsetneq X$ , en cuyo caso,  $(X; C, X - C)$  es también una tríada split que satisface (S2). Sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  el revestimiento universal de  $X$ . Para cada componente conexa  $C'$  de  $C$  y cada componente conexa  $D$  de  $p^{-1}(C')$  obtenemos que  $p|_D: D \rightarrow C'$  es un revestimiento y por lo tanto que  $D$  es, o bien débilmente contráctil, o bien débilmente equivalente a  $S^1$ . En cualquiera de los dos casos,  $H_r(D) = 0$  para todo  $r \geq 2$ . Por consiguiente,  $H_r(p^{-1}(C)) = 0$  para todo  $r \geq 2$ .

De la sucesión exacta larga en homología para el par  $(\tilde{X}, p^{-1}(C))$  obtenemos que  $H_r(\tilde{X}) \cong H_r(\tilde{X}, p^{-1}(C))$  para todo  $r \geq 3$ .



## 2 Problemas de minimalidad

---

Por otro lado, dado que la inclusión de  $X - C$  en  $X$  induce el morfismo trivial entre los grupos fundamentales para cualquier elección de punto base, de 2.4.3 obtenemos que  $H_r(\tilde{X}, p^{-1}(C)) \cong \bigoplus_{\pi_1(X, x_0)} H_r(X, C)$  para todo  $r \in \mathbb{N}_0$ .

Dado que  $H_r(C) = 0$  para todo  $r \geq 2$ , entonces es claro que  $H_r(X, C) \cong H_r(X)$  para todo  $r \geq 3$ . Luego,  $H_r(\tilde{X}) \cong \bigoplus_{\pi_1(X, x_0)} H_r(X, C) \cong \bigoplus_{\pi_1(X, x_0)} H_r(X)$  para todo  $r \geq 3$ .

La prueba se sigue como en la demostración del teorema 2.4.5.  $\square$

El siguiente ejemplo muestra un poset finito y conexo que satisface (S1) y pero no satisface (S2). Recordemos que  $S^0$  denota la 0-esfera.

**Ejemplo 2.4.16.** Sea  $X = \mathbb{S}S^0 \times \mathbb{S}^3S^0$  y sea  $x_0 \in X$ . Veremos que  $X$  satisface (S1) pero no (S2).

Por [50, Proposición 5.6.4],  $X$  es un modelo finito de  $S^1 \times S^3$ . Se sigue que  $\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z}$ ,  $\pi_2(X, x_0) = 0$  y  $\pi_3(X, x_0) \cong \mathbb{Z}$ .

Por otro lado, de [40, Proposición 3A.5] se deduce fácilmente que

$$\text{Tor}(H_i(S^1), H_{2-i}(S^3)) = 0$$

para  $i = 0, 1, 2$  donde  $\text{Tor}$  representa al funtor  $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}$  usual (cf. [15, Sección III.2]). Utilizando la fórmula de Künneth ([40, Teorema 3B.6]) obtenemos que

$$H_3(X) \cong H_3(S^1 \times S^3) \cong \bigoplus_{i=0}^3 (H_i(S^1) \otimes H_{3-i}(S^3)) \cong \mathbb{Z}.$$

Si  $X$  satisficiera (S2), se seguiría de 2.4.15 que

$$\mathbb{Z} \cong \pi_3(X, x_0) \cong H_3(X) \otimes \mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)] \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \cong \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$$

lo cual es absurdo. Por lo tanto  $X$  no puede satisfacer (S2).

Ahora, sea  $w$  un elemento minimal de  $\mathbb{S}S^0$  y sea  $C = \{w\} \times \mathbb{S}^3S^0$ . Es fácil verificar que  $C$  y  $X - C$  son ambos homotópicamente equivalentes a  $\mathbb{S}^3S^0$ . Por lo tanto,  $X$  satisface (S1).

### 2.4.3 Notación y definiciones preliminares

En esta subsección fijaremos la notación específica que utilizaremos en el resto del capítulo. También definiremos dos relaciones que utilizaremos en el estudio de los problemas de minimalidad de modelos finitos que siguen.

Recordemos que si  $X$  es un poset,  $\text{mxl}(X)$  y  $\text{mnl}(X)$  denotan los conjuntos de elementos maximales y minimales de  $X$  respectivamente. Si  $a \in \text{mxl}(X)$ , definimos

$$V_a^X = U_a^X \cup \text{mnl}(X)$$

y

$$W_a^X = U_a^X \cup \text{mnl}(X) \cup \text{mxl}(X).$$

*Observación 2.4.17.*

1. Sea  $X$  un espacio finito  $T_0$  conexo con más de un punto. Entonces  $\text{mxl}(X) \cap \text{mnl}(X) = \emptyset$ .
2. Sea  $X$  un espacio finito  $T_0$  sin beat points. Si  $a \in X - \text{mxl}(X)$  entonces  $\#(\widehat{F}_a \cap \text{mxl}(X)) \geq 2$ . Similarmente, si  $b \in X - \text{mnl}(X)$  entonces  $\#(\widehat{U}_b \cap \text{mnl}(X)) \geq 2$ .
3. Sea  $X$  un espacio finito  $T_0$  sin beat points. Si  $\# \text{mxl}(X) = 2$  entonces  $X$  es homeomorfo a  $\mathbb{S}(X - \text{mxl}(X))$ .

**Definición 2.4.18.** Sea  $X$  un poset finito y conexo. Definimos

- $\mathcal{M}_X = \text{mxl}(X) \times \text{mnl}(X)$ ,
- $\mathcal{B}_X = X - (\text{mxl}(X) \cup \text{mnl}(X))$ ,
- $\alpha_b = \#(F_b \cap \text{mxl}(X))$ , para cada  $b \in \mathcal{B}_X$ ,
- $\beta_b = \#(U_b \cap \text{mnl}(X))$ , para cada  $b \in \mathcal{B}_X$ ,
- $m_X = \# \text{mxl}(X)$ ,
- $n_X = \# \text{mnl}(X)$ , y
- $l_X = \# \mathcal{B}_X$ .

También definimos la relación  $\mathcal{S}_X \subseteq \mathcal{B}_X \times \text{mxl}(X)$  por

$$b \mathcal{S}_X a \Leftrightarrow b \notin U_a$$

y la relación  $\mathcal{R}_X \subseteq \mathcal{B}_X \times \mathcal{M}_X$  por

$$b \mathcal{R}_X (x, y) \Leftrightarrow b \notin U_x \text{ y } b \notin F_y.$$

Frecuentemente, escribiremos  $m$ ,  $n$  y  $l$  en lugar de  $m_X$ ,  $n_X$  y  $l_X$  cuando no haya riesgo de confusión.

Notemos que  $\# \mathcal{S}_X(b) = m_X - \alpha_b$  y  $\# \mathcal{R}_X(b) = (m_X - \alpha_b)(n_X - \beta_b)$  para todo  $b \in \mathcal{B}_X$ . Notemos también que, si  $X$  no tiene beat points entonces  $\alpha_b \geq 2$  y  $\beta_b \geq 2$  para todo  $b \in \mathcal{B}_X$  por 2.4.17.

Finalmente, si  $m \in \mathbb{N}$ ,  $D_m$  denotará el espacio discreto de cardinal  $m$ .

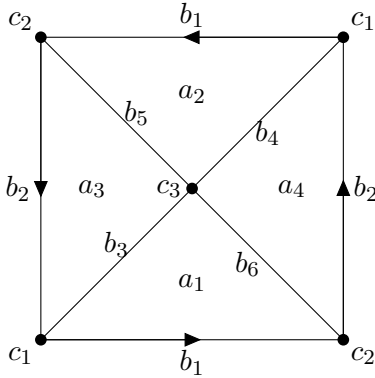
## 2.5 Modelos minimales del plano proyectivo

En esta sección mostraremos que el poset de la figura 2.2(b) es un modelo finito minimal del plano proyectivo real, respondiendo una pregunta de Barmak [5, p. 94]. De hecho, probaremos que si  $X$  es un poset con menos de 13 puntos entonces  $X$  satisface (S1) (ver definición 2.4.9) y así, de 2.4.7 obtendremos que  $\pi_1(X, x_0)$  es un grupo libre para cualquier  $x_0 \in X$ .

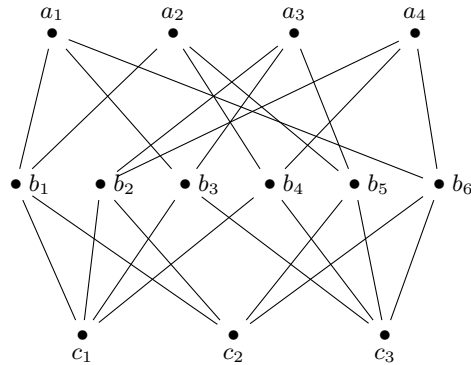
## 2 Problemas de minimalidad

Más aún, mostraremos que el poset de la figura 2.2(b) y su opuesto son los únicos modelos finitos minimalmente del plano proyectivo real.

El modelo finito del plano proyectivo real de la figura 2.2(b) es construido en [5, Ejemplo 7.1.1] como el poset de celdas de la estructura celular de la figura 2.2(a). Este poset será notado por  $\mathbb{P}_1^2$  y el plano proyectivo real será notado por  $\mathbb{P}^2$ .



(a) Estructura celular regular de  $\mathbb{P}^2$ .



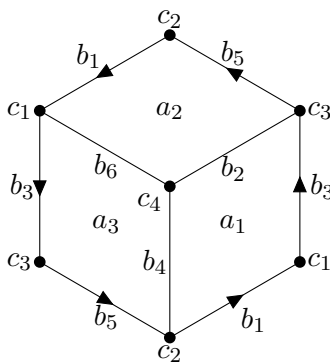
(b) Espacio  $\mathbb{P}_1^2$ , modelo finito de  $\mathbb{P}^2$ .

Figura 2.2: Modelos celular y finito de  $\mathbb{P}^2$ .

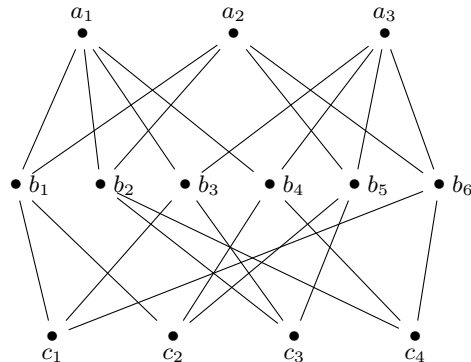
Claramente, el espacio  $(\mathbb{P}_1^2)^{\text{op}}$  es otro modelo finito de  $\mathbb{P}^2$  y será denotado por  $\mathbb{P}_2^2$  (ver figura 2.3(b)). Este fue obtenido en [39] como la construcción de Grothendieck<sup>5</sup> sobre diagrama de posets

$$* \leftarrow \tilde{X} \xrightarrow{p} X$$

donde  $X = \mathbb{S}^0$  y  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  es el revestimiento conexo de dos hojas de  $X$ . Puede también ser obtenido como el poset de celdas de la estructura celular regular de  $\mathbb{P}^2$  exhibida en la figura 2.3(a).



(a) Estructura celular regular de  $\mathbb{P}^2$ .



(b) Espacio  $\mathbb{P}_2^2$ , modelo finito de  $\mathbb{P}^2$ .

Figura 2.3: Modelos celular y finito de  $\mathbb{P}^2$ .

<sup>5</sup>En el trabajo original, la construcción presentada se denomina *doble cilindro mapeante no Hausdorff*; esta fue definida en [77] y es un caso particular del colímite homotópico no Hausdorff (definición 1.2.14).

## 2.5 Modelos minimales del plano proyectivo

Para probar la minimalidad de estos modelos finitos necesitamos los siguientes lemas.

**Lema 2.5.1.** *Sea  $X$  un poset finito que no satisface la propiedad (S1). Sea  $a \in \text{mxl}(X)$ . Entonces existen dos elementos incomparables  $b_1, b_2 \in X - W_a^X$ .*

*Más aún, si  $X - W_a^X = \{b_1, b_2\}$  entonces  $U_{b_1} \cap U_{b_2} = \emptyset$ .*

*Demostración.* Supongamos que no existen elementos distintos incomparables  $b_1, b_2 \in X - W_a^X$ . Entonces  $X - W_a^X$  es una cadena (posiblemente vacía) y por lo tanto las componentes conexas de  $X - V_a^X$  son contráctiles. Dado que las componentes conexas de  $V_a^X$  son también contráctiles se sigue que  $X$  satisface la propiedad (S1).

Ahora, si  $X - W_a^X = \{b_1, b_2\}$  y  $z \in U_{b_1} \cap U_{b_2}$  entonces  $(X; V_a^X, F_z \cup \text{mxl}(X))$  es una tríada split que satisface (S1). □

**Lema 2.5.2.** *Sea  $X$  un poset finito y conexo. Si  $X$  no satisface la propiedad (S1), entonces para todo  $(x, y) \in \mathcal{M}_X$  existe  $b \in \mathcal{B}_X$  tal que  $b \mathcal{R}_X(x, y)$ .*

*Demostración.* Supongamos que existe  $(x, y) \in \mathcal{M}_X$  tal que  $\mathcal{R}_X^{-1}(x, y) = \emptyset$  y sea  $G_y = F_y \cup \text{mxl}(X)$ . Entonces  $V_x \cup G_y = X$ . Dado que las componentes conexas de los subespacios  $V_x$  y  $G_y$  son contráctiles obtenemos que la tríada split  $(X; V_x, G_y)$  satisface (S1). Por lo tanto,  $X$  satisface (S1). □

**Lema 2.5.3.** *Sea  $X$  un poset finito y conexo sin beat points. Supongamos que  $X$  no satisface la propiedad (S1). Entonces,*

$$l_X \geq \frac{2m_X}{m_X - 2}$$

*y vale la igualdad si y sólo si  $\alpha_b = 2$  para todo  $b \in \mathcal{B}_X$  y  $\#\mathcal{S}_X^{-1}(a) = 2$  para todo  $a \in \text{mxl}(X)$ .*

*Demostración.* Notemos que  $\#\text{mxl}(X) \geq 3$  y  $\#\text{mnl}(X) \geq 3$  por 2.4.10. Ahora, por 2.5.1,

$$2m_X \leq \sum_{a \in \text{mxl}(X)} \#\mathcal{S}_X^{-1}(a) = \#\mathcal{S}_X = \sum_{b \in \mathcal{B}_X} \#\mathcal{S}_X(b) = \sum_{b \in \mathcal{B}_X} (m_X - \alpha_b) \leq l_X(m_X - 2).$$

El resultado se sigue. □

**Lema 2.5.4.** *Sea  $X$  un poset finito y conexo sin beat points. Supongamos que  $X$  no satisface la propiedad (S1). Entonces,*

$$l_X \geq \frac{m_X n_X}{(m_X - 2)(n_X - 2)}$$

*y vale la igualdad sólo si  $\alpha_b = \beta_b = 2$  para todo  $b \in \mathcal{B}_X$ .*

*Demostración.* Como en la prueba anterior,  $\#\text{mxl}(X) \geq 3$  y  $\#\text{mnl}(X) \geq 3$  por 2.4.10. Ahora, por 2.5.2,

$$m_X n_X \leq \#\mathcal{R}_X = \sum_{b \in \mathcal{B}_X} \#\mathcal{R}_X(b) = \sum_{b \in \mathcal{B}_X} (m_X - \alpha_b)(n_X - \beta_b) \leq l_X(m_X - 2)(n_X - 2).$$

El resultado se sigue. □

## 2 Problemas de minimalidad

---

**Lema 2.5.5.** *Sea  $X$  un poset finito y conexo sin beat points. Supongamos que  $X$  no satisface la propiedad (S1) y que existen  $c, d \in \mathcal{B}_X$  tales que  $c < d$ . Entonces*

$$l_X \geq \frac{m_X n_X}{(m_X - 2)(n_X - 2)} + 1$$

y vale la igualdad sólo si  $\alpha_b = \beta_b = 2$  para todo  $b \in \mathcal{B}_X$ .

*Demostración.* Como en las pruebas anteriores,  $\# \text{mxl}(X) \geq 3$  y  $\# \text{mnl}(X) \geq 3$ . Dado que  $c < d$ ,  $F_d \subseteq F_c$  y  $U_c \subseteq U_d$ . Así,  $2 \leq \alpha_d \leq \alpha_c \leq m_X$ ,  $2 \leq \beta_c \leq \beta_d \leq n_X$  y  $c, d \in \mathcal{R}_X^{-1}(x, y)$  para todo  $x \in \text{mxl}(X) - F_c$  y  $y \in \text{mnl}(X) - U_d$ .

Por consiguiente, aplicando 2.5.2 obtenemos que  $\# \mathcal{R}_X \geq m_X n_X + (m_X - \alpha_c)(n_X - \beta_d)$ . Por otro lado,

$$\begin{aligned} \# \mathcal{R}_X &= (m - \alpha_c)(n - \beta_c) + (m - \alpha_d)(n - \beta_d) + \sum_{b \in \mathcal{B}_X - \{c, d\}} (m - \alpha_b)(n - \beta_b) \leq \\ &\leq (m - \alpha_c)(n - \beta_c) + (m - \alpha_d)(n - \beta_d) + (l - 2)(m - 2)(n - 2). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} (l - 2)(m - 2)(n - 2) &\geq \\ &\geq mn + (m - \alpha_c)(n - \beta_d) - (m - \alpha_c)(n - \beta_c) - (m - \alpha_d)(n - \beta_d) = \\ &= mn + (\alpha_c - \alpha_d)(\beta_d - \beta_c) - (m - \alpha_d)(n - \beta_c) \geq \\ &\geq mn - (m - \alpha_d)(n - \beta_c) \geq mn - (m - 2)(n - 2). \end{aligned}$$

El resultado se sigue. □

El siguiente teorema es uno de los resultados principales de este capítulo.

**Teorema 2.5.6.** *Sea  $X$  un poset finito y conexo que no satisface la propiedad (S1). Entonces  $\#X \geq 13$ .*

*Demostración.* Por 2.4.12 podemos asumir que  $X$  no tiene beat points. Dado que  $\#X = m_X + n_X + l_X$ , de 2.5.4 obtenemos que  $\#X \geq m_X + n_X + \frac{m_X n_X}{(m_X - 2)(n_X - 2)}$ . Sean  $a = m_X - 2$  y  $b = n_X - 2$ . Entonces

$$\begin{aligned} \#X &\geq a + b + \frac{(a + 2)(b + 2)}{ab} + 4 = \left(\frac{2}{a} + \frac{a}{2}\right) + \left(\frac{2}{b} + \frac{b}{2}\right) + \left(\frac{4}{ab} + \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) + 5 \geq \\ &\geq 2 + 2 + 3 + 5 = 12. \end{aligned}$$

donde la última desigualdad vale por la desigualdad entre media aritmética y geométrica, con igualdad si y sólo si  $a = b = 2$ . Así, si  $m_X \neq 4$  o  $n_X \neq 4$  obtenemos que  $\#X \geq 13$  como queríamos.

Supongamos ahora que  $m_X = n_X = l_X = 4$ . Por 2.5.5,  $\mathcal{B}_X$  debe ser una anticadena y de 2.5.4 obtenemos que  $\alpha_b = \beta_b = 2$  para todo  $b \in \mathcal{B}_X$ . De 2.5.3 se sigue que  $\# \mathcal{S}_X^{-1}(a) = 2$  para todo  $a \in \text{mxl}(X)$ . Así,  $\#(U_x \cap \mathcal{B}_X) = 2$  para todo  $x \in \text{mxl}(X)$ . Sea  $x_1 \in \text{mxl}(X)$  y supongamos que  $U_{x_1} \cap \mathcal{B}_X = \{b_1, b_2\}$  y  $\mathcal{B}_X - U_{x_1} = \{b_3, b_4\}$ . Notemos que, dado que

$\alpha_{b_3} = \alpha_{b_4} = 2$ , entonces  $1 \leq \#(\widehat{F}_{b_3} \cap \widehat{F}_{b_4}) \leq 2$ . Si  $\#(\widehat{F}_{b_3} \cap \widehat{F}_{b_4}) = 1$  entonces  $X - V_{x_1}$  es contráctil y por lo tanto  $X$  satisface (S1) lo cual es una contradicción.

Así,  $\#(\widehat{F}_{b_3} \cap \widehat{F}_{b_4}) = 2$ . Entonces, existen  $x_3, x_4 \in \text{mxl}(X)$  tales que  $\widehat{F}_{b_3} \cap \widehat{F}_{b_4} = \{x_3, x_4\}$  y por lo tanto  $\widehat{F}_{b_3} = \widehat{F}_{b_4} = \{x_3, x_4\}$ . Claramente  $x_3$  y  $x_4$  son diferentes de  $x_1$ . Sea  $x_2 \in \text{mxl}(X) - \{x_1, x_3, x_4\}$ . Así,  $b_3, b_4 \notin U_{x_2}$ . Por lo tanto,  $U_{x_2} \cap \mathcal{B}_X = \{b_1, b_2\}$ .

En resumen, tenemos que  $U_{x_1} \cap \mathcal{B}_X = U_{x_2} \cap \mathcal{B}_X = \{b_1, b_2\}$  y  $U_{x_3} \cap \mathcal{B}_X = U_{x_4} \cap \mathcal{B}_X = \{b_3, b_4\}$ . Esto dice que  $X - \text{mnl}(X)$  es isomorfo a  $\mathbb{S}D_2 \amalg \mathbb{S}D_2$ . De manera similar obtenemos que  $X - \text{mxl}(X)$  es isomorfo a  $\mathbb{S}D_2 \amalg \mathbb{S}D_2$ . Así, sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $\widehat{U}_{b_1} \cap \widehat{U}_{b_4} = \emptyset$ . Ahora notemos que las componentes conexas de los subespacios  $\text{mnl}(X) \cup \{b_1, b_4\}$  y  $\text{mxl}(X) \cup \{b_2, b_3\}$  son contráctiles y por lo tanto  $X$  satisface (S1), lo cual es una contradicción.  $\square$

Un resultado de Adamaszek [1] establece que el primer grupo de homología de cualquier poset con no más de 12 elementos es libre de torsión. La prueba que Adamaszek ofrece de este hecho es asistida por ordenador, requirió analizar alrededor de 90 millones de casos y demandó más de 200 horas de tiempo de proceso. Como corolario del teorema anterior obtenemos una prueba de este resultado que no requiere asistencia de computadoras.

**Teorema 2.5.7.** *Sea  $X$  un espacio topológico finito  $T_0$  tal que  $\#X \leq 12$ . Entonces  $\pi_1(X, x_0)$  es un grupo libre para cualquier  $x_0 \in X$ . En particular,  $H_1(X)$  es libre de torsión.*

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $X$  es conexo. Por 2.5.6,  $X$  satisface (S1). Así, por 2.4.7,  $\pi_1(X, x_0)$  es un grupo libre para cualquier  $x_0 \in X$ . Por lo tanto,  $H_1(X)$  es libre de torsión.  $\square$

Como corolario de los resultados anteriores obtenemos una respuesta afirmativa a la pregunta sobre la minimalidad del modelo finito del plano proyectivo real presente en [5, Ejemplo 7.1.1].

**Corolario 2.5.8** ([1, Teorema 1.2]). *Sea  $X$  un modelo finito del plano proyectivo real. Entonces  $\#X \geq 13$ .*

Dado que el poset de celdas de un CW-complejo regular  $X$  es un modelo finito de  $X$  obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 2.5.9.** *Cualquier estructura celular regular del plano proyectivo real tiene al menos trece celdas.*

Ahora probaremos que existen exactamente dos modelos finitos de  $\mathbb{P}^2$  con 13 puntos: los espacios  $\mathbb{P}_1^2$  y  $\mathbb{P}_2^2$  de las figuras 2.2(b) y 2.3(b) respectivamente.

**Teorema 2.5.10.** *Sea  $X$  un modelo finito del plano proyectivo real tal que  $\#X = 13$ . Entonces  $X$  es isomorfo a  $\mathbb{P}_1^2$  o a  $\mathbb{P}_2^2$ .*

*Demostración.* Por 2.5.8,  $X$  no tiene beat points. Considerando que tanto  $X$  como  $X^{\text{op}}$  son modelos finitos del plano proyectivo real y que  $\mathbb{P}_2^2 \cong (\mathbb{P}_1^2)^{\text{op}}$ , podemos asumir que  $\# \text{mxl}(X) \leq \# \text{mnl}(X)$ . Notemos también que  $\# \text{mxl}(X) \geq 3$  por 2.4.10 y que  $\text{mxl}(X) \cap \text{mnl}(X) = \emptyset$  puesto que  $X$  es conexo y  $\#X \geq 2$ .

## 2 Problemas de minimalidad

---

Consideraremos varios casos.

Caso 1:  $\# \text{mxl}(X) = 3$ .

Caso 1.1:  $\# \text{mnl}(X) = 3$ . Por 2.5.4,  $l_X \geq 9$  y así  $\#X \geq 15$ . Absurdo.

Caso 1.2:  $\# \text{mnl}(X) \geq 4$ . Supongamos que  $\text{mxl}(X) = \{a_1, a_2, a_3\}$ . Por 2.5.1, existen puntos incomparables  $b_1, b_2 \in X - W_{a_3}^X$ . Por 2.4.17, para  $i \in \{1, 2\}$  tenemos que  $\widehat{F}_{b_i} \cap \text{mxl}(X) \geq 2$  y dado que  $b_i \not\leq a_3$  obtenemos que  $\widehat{F}_{b_i} \cap \text{mxl}(X) = \{a_1, a_2\}$ . Así,  $b_1, b_2 \in U_{a_1} \cap U_{a_2} - U_{a_3}$ .

De manera similar, obtenemos que existen puntos incomparables  $b_3, b_4 \in U_{a_1} \cap U_{a_3} - U_{a_2}$  y puntos incomparables  $b_5, b_6 \in U_{a_2} \cap U_{a_3} - U_{a_1}$  que no son minimales en  $X$ . Notemos que  $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$  es una anticadena con seis elementos.

Dado que  $\#X = 13$ , obtenemos que  $\# \text{mnl}(X) = 4$ . Podemos asumir entonces que  $\text{mnl}(X) = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ . Dado que  $X - W_{a_3}^X = \{b_1, b_2\}$ , de 2.5.1 se sigue que  $U_{b_1} \cap U_{b_2} = \emptyset$ . Por consiguiente, aplicando 2.4.17 obtenemos que  $\#(U_{b_1} \cap \text{mnl}(X)) = \#(U_{b_2} \cap \text{mnl}(X)) = 2$  y  $U_{b_1} \cup U_{b_2} = \text{mnl}(X)$  y así  $F_{c_i}$  contiene exactamente uno de los puntos  $b_1, b_2$ , para  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Un resultado similar vale para los puntos  $b_3$  y  $b_4$  y para los puntos  $b_5$  y  $b_6$ .

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $b_2, b_4$  y  $b_6$  pertenecen a  $F_{c_4}$ . En ese caso,  $F_{c_4} \cap \mathcal{B}_X = \{b_2, b_4, b_6\}$ . Probaremos que  $\#(U_{b_1} \cap U_{b_3}) \neq 2$ . Supongamos que  $\#(U_{b_1} \cap U_{b_3}) = 2$ . Nuevamente sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $U_{b_1} \cap U_{b_3} = \{c_1, c_2\}$ . Si  $c_3 \leq b_5$  entonces  $X - F_{c_4} = \{b_1, b_3, b_5, c_1, c_2, c_3\}$  es homotópicamente equivalente a  $\{b_1, b_3, c_1, c_2\}$ , al cual puede retraerse eliminando el up beat point  $c_3$  y luego el down beat point  $b_5$ . Este último está contenido en el subespacio contráctil  $U_{a_1}$ . Así, la inclusión de  $X - F_{c_4}$  en  $X$  induce el morfismo trivial entre los grupos fundamentales y por lo tanto  $X$  satisface (S1). Si  $c_3 \not\leq b_5$  entonces  $c_1 \leq b_5$  y  $c_2 \leq b_5$  y así las componentes conexas de  $X - F_{c_4}$  son  $\{c_3\}$  y  $\{b_1, b_3, b_5, c_1, c_2\}$ . Notemos que este último está incluido en el subespacio contráctil  $\{b_1, b_3, b_5, c_1, c_2, a_1, a_3\}$ . Por lo tanto,  $X$  satisface (S1). Luego,  $\#(U_{b_1} \cap U_{b_3}) \neq 2$ .

Por consiguiente,  $\#(U_{b_1} \cap U_{b_3}) = 1$  dado que  $\beta_{b_1} = \beta_{b_3} = 2$  y que  $\widehat{U}_{b_1}$  y  $\widehat{U}_{b_3}$  están incluidos en  $\{c_1, c_2, c_3\}$ . De manera similar,  $\#(U_{b_1} \cap U_{b_5}) = 1$  y  $\#(U_{b_3} \cap U_{b_5}) = 1$ . Por lo tanto, sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $\widehat{U}_{b_1} = \{c_1, c_2\}$ ,  $\widehat{U}_{b_3} = \{c_1, c_3\}$  y  $\widehat{U}_{b_5} = \{c_2, c_3\}$ . Se sigue que  $\widehat{U}_{b_2} = \{c_3, c_4\}$ ,  $\widehat{U}_{b_4} = \{c_2, c_4\}$  y  $\widehat{U}_{b_6} = \{c_1, c_4\}$ . Notemos que en este caso  $X$  es el poset  $\mathbb{P}_2^2$  de la figura 2.3(b).

Caso 2:  $\# \text{mxl}(X) = 4$ . Sean  $a_1, a_2, a_3$  y  $a_4$  los puntos maximales de  $X$ .

Caso 2.1:  $\# \text{mnl}(X) = 4$ . Entonces  $\# \mathcal{B}_X = 5$ . Si existen  $d_1, d_2 \in \mathcal{B}_X$  tales que  $d_1 < d_2$  entonces, de 2.5.5, obtenemos que  $\alpha_b = \beta_b = 2$  para todo  $b \in \mathcal{B}_X$ . Por lo tanto,  $F_{d_1} \cap \text{mxl}(X) = F_{d_2} \cap \text{mxl}(X)$ . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $F_{d_1} \cap \text{mxl}(X) = \{a_1, a_2\}$ .

Dado que  $X$  no tiene beat points,  $\widehat{F}_{d_1}$  no tiene elemento mínimo. Así,  $\# \text{mnl}(\widehat{F}_{d_1}) \geq 2$  y es fácil probar que  $\text{mnl}(\widehat{F}_{d_1}) \subseteq \mathcal{B}_X$ . Sean  $e_1, e_2$  elementos distintos de  $\text{mnl}(\widehat{F}_{d_1})$ . Notemos que  $F_{e_1} \cap \text{mxl}(X) = F_{e_2} \cap \text{mxl}(X) = \{a_1, a_2\}$ . De manera similar,  $\# \text{mxl}(\widehat{U}_{e_1}) \geq 2$  y  $\text{mxl}(\widehat{U}_{e_1}) \subseteq \mathcal{B}_X$ . Así,  $\#(U_{a_1} \cap \mathcal{B}_X) \geq 4$  lo cual contradice 2.5.1.

Por consiguiente,  $\mathcal{B}_X$  debe ser una anticadena.

Dado que  $\#(F_b \cap \text{mxl}(X)) \geq 2$  para todo  $b \in \mathcal{B}_X$  se sigue que existe  $a \in \text{mxl}(X)$  tal que  $\#(U_a \cap \mathcal{B}_X) \geq 3$ . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $\#(U_{a_1} \cap \mathcal{B}_X) \geq 3$ . Por 2.5.1, existen puntos incomparables  $b_1, b_2 \in X - W_{a_1}^X$ . Por lo tanto,  $\#(U_{a_1} \cap \mathcal{B}_X) = 3$  y  $\mathcal{B}_X - U_{a_1} = \{b_1, b_2\}$ . Así,  $U_{b_1} \cap U_{b_2} = \emptyset$  por 2.5.1. Por 2.4.17 se sigue que  $\#(U_{b_1} \cap$

$\text{mnl}(X) = 2$  y  $\#(U_{b_2} \cap \text{mnl}(X)) = 2$ .

Ahora notemos que, por 2.4.17,  $F_{b_1} \cap F_{b_2} \neq \emptyset$ . Si  $\#(F_{b_1} \cap F_{b_2}) = 1$  entonces  $X - V_{a_1}^X$  es contráctil y por lo tanto  $X$  satisface (S1). Así  $\#(F_{b_1} \cap F_{b_2}) \geq 2$ . Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $\{a_3, a_4\} \subseteq F_{b_1} \cap F_{b_2}$ .

Se sigue que  $U_{a_j} \supseteq \text{mnl}(X)$  para  $j \in \{3, 4\}$ . Probaremos ahora que lo mismo vale para  $j \in \{1, 2\}$ . Notemos que  $\#(U_a \cap \mathcal{B}_X) \leq 3$  para todo  $a \in \text{mnl}(X)$  por 2.5.1. Si  $\#(U_{a_k} \cap \mathcal{B}_X) = 3$  para algún  $k \in \{3, 4\}$  entonces aplicando el razonamiento anterior a  $a_k$  puede probarse que  $U_{a_j} \supseteq \text{mnl}(X)$  para  $j \in \{1, 2\}$ . De otro modo,  $U_{a_j} \cap \mathcal{B}_X = \{b_1, b_2\}$  para  $j \in \{3, 4\}$  y por lo tanto  $\mathcal{B}_X - \{b_1, b_2\} \subseteq U_{a_2}$  por 2.4.17. Sean  $b_3, b_4, b_5 \in \mathcal{B}_X$  tales que  $\mathcal{B}_X - \{b_1, b_2\} = \{b_3, b_4, b_5\}$ . Si  $\#(U_{b_3} \cup U_{b_4} \cup U_{b_5}) \leq 3$  entonces existe  $z \in \text{mnl}(X)$  tal que  $z \in U_{b_3} \cap U_{b_4} \cap U_{b_5}$ , o bien existen puntos distintos  $z_1, z_2 \in \text{mnl}(X)$  tales que cada uno de ellos pertenece exactamente a dos de los subconjuntos  $U_{b_3}, U_{b_4}$  y  $U_{b_5}$  y tales que  $\{b_3, b_4, b_5\} \subseteq F_{z_1} \cup F_{z_2}$ . Notemos que en ambos casos el subespacio  $\{a_1, a_2, b_3, b_4, b_5\}$  está incluido en un subespacio contráctil de  $X$ . Se sigue que la tríada split  $(X; X - V_{a_4}, V_{a_4})$  satisface (S1) lo cual es una contradicción. Por consiguiente,  $U_a \supseteq \text{mnl}(X)$  para todo  $a \in \text{mnl}(X)$ .

Ahora, notemos que si  $b \in \mathcal{B}_X$  es tal que  $\alpha_b \geq 3$  y  $\beta_b \geq 3$  entonces las componentes conexas de  $X - C_b$  son contráctiles y por lo tanto  $X$  satisface (S1). Así, para todo  $b \in \mathcal{B}_X$  tenemos que  $\alpha_b = 2$  o  $\beta_b = 2$ . Por lo tanto,  $(\alpha_b - 1)(\beta_b - 1) = 3 - \frac{1}{2}(4 - \alpha_b)(4 - \beta_b)$  para todo  $b \in \mathcal{B}_X$ .

Como en la prueba de 2.5.4 obtenemos que  $16 \leq \#\mathcal{R}_X = \sum_{b \in \mathcal{B}_X} (4 - \alpha_b)(4 - \beta_b)$ . Así, se sigue que la característica de Euler de  $X$  es

$$\begin{aligned} \chi(X) &= 13 - \left( \sum_{b \in \mathcal{B}_X} \alpha_b + \sum_{b \in \mathcal{B}_X} \beta_b + 16 \right) + \sum_{b \in \mathcal{B}_X} \alpha_b \beta_b = \\ &= -8 + \sum_{b \in \mathcal{B}_X} (\alpha_b - 1)(\beta_b - 1) = -8 + \sum_{b \in \mathcal{B}_X} \left( 3 - \frac{1}{2}(4 - \alpha_b)(4 - \beta_b) \right) = \\ &= 7 - \frac{1}{2} \sum_{b \in \mathcal{B}_X} (4 - \alpha_b)(4 - \beta_b) \leq -1. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $X$  no puede ser un modelo finito del plano proyectivo real.

Caso 2.2:  $\#\text{mnl}(X) \geq 5$ . De 2.5.3 se sigue que  $\#\mathcal{B}_X = 4$ , que  $\alpha_b = 2$  para todo  $b \in \mathcal{B}_X$  y que  $\#\mathcal{S}_X^{-1}(a) = 2$  para todo  $a \in \text{mnl}(X)$ . Dado que  $\#\mathcal{B}_X = 4$  obtenemos que  $\#\text{mnl}(X) = 5$ . De 2.5.5 se sigue que  $\mathcal{B}_X$  debe ser una anticadena. Procediendo como en la prueba de 2.5.6 obtenemos que  $X - \text{mnl}(X)$  es isomorfo a  $\mathbb{S}D_2 \amalg \mathbb{S}D_2$ .

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $U_{a_1} \cap \mathcal{B}_X = U_{a_2} \cap \mathcal{B}_X = \{b_1, b_2\}$  y  $U_{a_3} \cap \mathcal{B}_X = U_{a_4} \cap \mathcal{B}_X = \{b_3, b_4\}$ . Por 2.5.1,  $U_{b_1} \cap U_{b_2} = \emptyset$  y  $U_{b_3} \cap U_{b_4} = \emptyset$ .

Sean  $i \in \{1, 2\}$  y  $j \in \{3, 4\}$ . Si  $\#(U_{b_i} \cap U_{b_j}) \leq 1$  entonces las componentes conexas de  $\{b_i, b_j\} \cup \text{mnl}(X)$  y de su complemento son contráctiles y por lo tanto  $X$  satisface (S1). Por consiguiente  $\#(U_{b_i} \cap U_{b_j}) \geq 2$  para todo  $i \in \{1, 2\}$  y todo  $j \in \{3, 4\}$ . Y dado que  $U_{b_3} \cap U_{b_4} = \emptyset$  obtenemos que  $\#\widehat{U}_{b_i} \geq 4$  para todo  $i \in \{1, 2\}$ . Así,  $U_{b_1} \cap U_{b_2} \neq \emptyset$ , lo cual es una contradicción.



## 2 Problemas de minimalidad

**Caso 3:**  $\# \text{mxl}(X) \geq 5$ . Sea  $a_1 \in \text{mxl}(X)$ . Por 2.5.1, existen puntos incomparables  $b_1, b_2 \in X - W_{a_1}^X$ . Más aún, podemos asumir que  $F_{b_1} \cap F_{b_2} \neq \emptyset$  dado que si  $F_y \cap F_z = \emptyset$  para cualesquiera  $y, z \in X - W_{a_1}^X$  entonces las componentes conexas de  $X - V_{a_1}^X$  son contráctiles y por lo tanto  $X$  satisface (S1).

Sea  $a_2 \in \text{mxl}(X)$  tal que  $a_2 \in F_{b_1} \cap F_{b_2}$ . Por 2.5.1, existen puntos incomparables  $b_3, b_4 \in X - W_{a_2}^X$  que deben ser diferentes de  $b_1$  y  $b_2$ . Por consiguiente  $\#X \geq 14$ .  $\square$

## 2.6 Modelos minimales del toro y de la botella de Klein

En esta sección probaremos que el poset  $\mathbb{S}S^0 \times \mathbb{S}S^0$  es un modelo finito minimal del toro, respondiendo otra pregunta abierta de Barmak [5, p. 44]. Este resultado será obtenido como corolario del teorema 2.6.3, el cual establece que si un poset  $X$  no satisface (S2) entonces  $\#X \geq 16$ . De este teorema también se deducirá que no existen modelos finitos de la botella de Klein con menos de 16 puntos.

Con un poco más de trabajo podremos caracterizar los modelos finitos minimales del toro y de la botella de Klein, lo cual resulta una tarea mucho más ardua. En efecto, probaremos que existen exactamente dos modelos finitos minimales del toro: los posets  $\mathbb{T}_{0,0}^2$  y  $\mathbb{T}_{1,1}^2$  de las figuras 2.4(b) y 2.6(b). En la misma prueba, también mostraremos que existen exactamente dos modelos finitos minimales de la botella de Klein: el poset  $\mathbb{K}_{1,0}$  de la figura 2.5(b) y su opuesto, el poset  $\mathbb{K}_{0,1}$  de la figura 2.7(b).

Comenzaremos describiendo los modelos finitos del toro y la botella de Klein mencionados anteriormente. Consideremos la estructura celular regular del toro  $\mathbf{T}^2$  dada en la figura 2.4(a) con 2-celdas  $a_i$ , 1-celdas  $b_j$ , y 0-celdas  $c_k$ , donde las 0-celdas y 1-celdas están identificadas de la manera obvia. El poset de celdas de este CW-complejo regular, dado en la figura 2.4(b), es un modelo finito de  $\mathbf{T}^2$ . Nos referiremos a este poset como  $\mathbb{T}_{0,0}^2$ , un nombre que hereda de la prueba del teorema 2.6.11. Este poset finito es isomorfo a  $\mathbb{S}S^0 \times \mathbb{S}S^0$ .

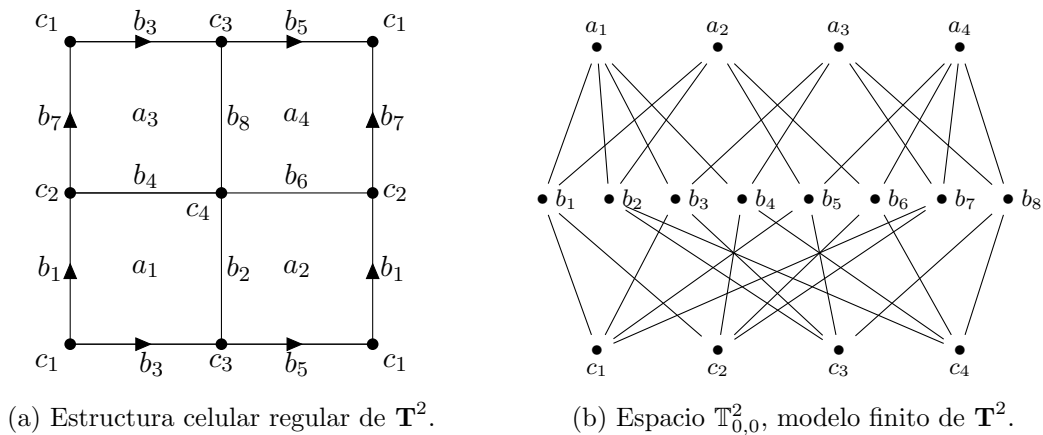


Figura 2.4: Modelos celular y finito de  $\mathbf{T}^2$ .

De manera similar, podemos construir el modelo finito de la botella de Klein de la figura 2.5(b) como el poset de celdas del CW-complejo regular de la figura 2.5(a). La

botella de Klein será denotada por  $\mathbb{K}$ .

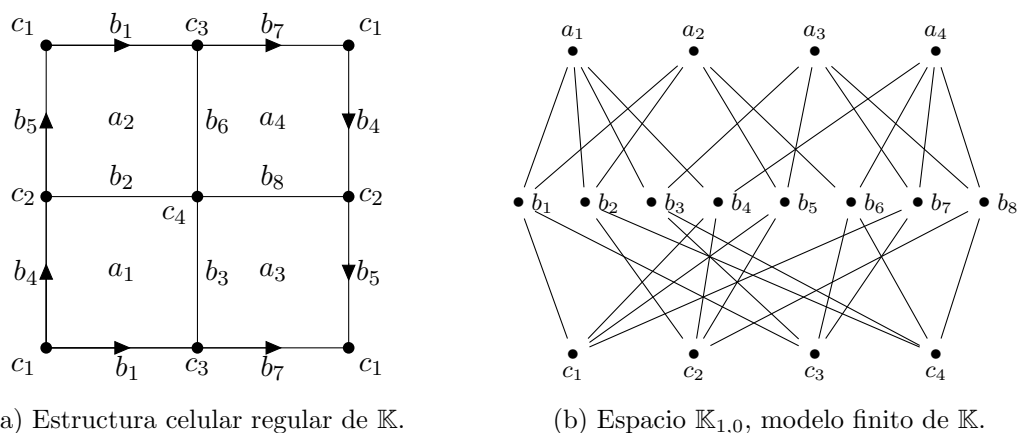


Figura 2.5: Modelos celular y finito de  $\mathbb{K}$ .

Como mencionamos antes, encontraremos otro modelo finito del toro en la prueba de 2.6.11: el poset  $\mathbb{T}_{1,1}^2$  de la figura 2.6(b). Observemos que  $\mathbb{T}_{1,1}^2$  es el poset de celdas de la estructura celular regular de  $\mathbf{T}^2$  dada en la figura 2.6(a).

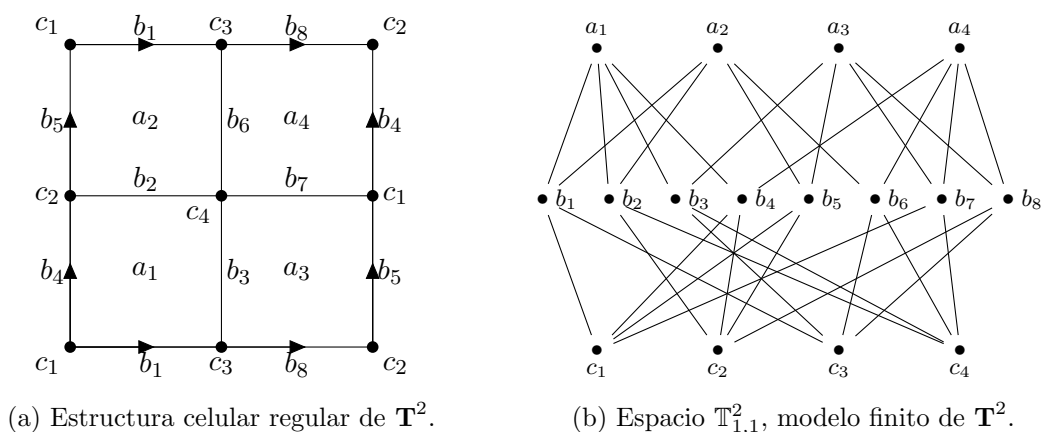


Figura 2.6: Modelos celular y finito de  $\mathbf{T}^2$ .

Por otro lado, es claro que  $\mathbb{K}_{1,0}^{\text{op}}$  es otro modelo finito de la botella de Klein. Es fácil verificar que  $\mathbb{K}_{1,0}^{\text{op}}$  es isomorfo al poset  $\mathbb{K}_{0,1}$  de la figura 2.7(b), que es el poset de celdas de la estructura celular regular de  $\mathbb{K}$  dada en la figura 2.7(a).

Daremos ahora dos lemas que serán utilizados repetidamente a lo largo de esta sección.

**Lema 2.6.1.** *Sea  $X$  un poset finito y conexo sin beat points. Si  $X$  no satisface la propiedad (S2), entonces para todo  $(x, y) \in \mathcal{M}_X$  se cumple que  $\#\mathcal{R}_X^{-1}(x, y) \geq 2$  o que  $\mathcal{R}_X^{-1}(x, y) = \{b\}$  y  $\min\{\alpha_b, \beta_b\} \geq 3$ .*

*Demostración.* Como en la prueba de 2.5.2 obtenemos que  $\mathcal{R}_X^{-1}(x, y) \neq \emptyset$  para todo  $(x, y) \in \mathcal{M}_X$ . Supongamos que existen  $(x, y) \in \mathcal{M}_X$  y  $b \in \mathcal{B}_X$  tales que  $\mathcal{R}_X^{-1}(x, y) = \{b\}$  y  $\alpha_b = 2$ .

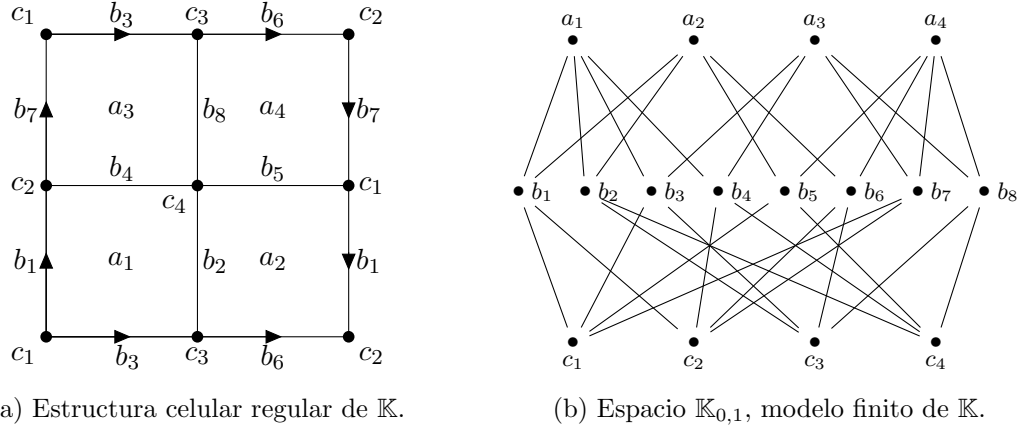


Figura 2.7: Modelos celular y finito de  $\mathbb{K}$ .

Veamos que  $F_b \cap F_y$  no es conexo. Supongamos que sí. Es claro que las componentes conexas de  $F_b \cup F_y \cup \text{mxl}(X)$  son contráctiles, excepto quizás  $F_b \cup F_y$  que es homotópicamente equivalente a  $\mathbb{S}((F_b \cap F_y)^{\text{op}})^{\text{op}}$  por 2.2.1. Dado que  $(F_b \cap F_y)^{\text{op}}$  es conexo, se sigue del teorema de van Kampen que  $\mathbb{S}((F_b \cap F_y)^{\text{op}})$  es simplemente conexo. Luego, las componentes conexas de  $F_b \cup F_y \cup \text{mxl}(X)$  también lo son. Se sigue que  $(X; V_x, F_b \cup F_y \cup \text{mxl}(X))$  es una tríada split que satisface (S2), lo cual es una contradicción. Así,  $F_b \cap F_y$  no puede ser conexo, como queríamos probar.

Notemos que  $\text{mxl}(F_b \cap F_y) \subseteq \text{mxl}(F_b) = F_b \cap \text{mxl}(X)$ . Entonces  $F_b \cap F_y$  tiene, a lo sumo, dos puntos maximales. Pero dado que  $F_b \cap F_y$  no es conexo,  $F_b \cap F_y$  tiene exactamente dos puntos maximales cada uno de los cuales debe ser el máximo de su componente conexa. Así  $F_b \cap F_y$  es homotópicamente equivalente a  $D_2$  y por lo tanto  $F_b \cup F_y$  es homotópicamente equivalente a  $\mathbb{S}D_2$ . Entonces, la tríada split  $(X; F_b \cup F_y \cup \text{mxl}(X), V_x)$  satisface (S2).  $\square$

**Lema 2.6.2.** Sea  $X$  un poset finito y conexo sin beat points. Sea

$$\mathcal{B}'_X = \{b \in \mathcal{B}_X \mid \min\{\alpha_b, \beta_b\} \geq 3\}$$

y sea  $\mathcal{B}''_X = \mathcal{B}_X - \mathcal{B}'_X$ .

Supongamos que  $X$  no satisface la propiedad (S2). Entonces, con las notaciones anteriores,

$$2\#\mathcal{B}'_X(m_X - 3)(n_X - 3) + \#\mathcal{B}''_X(m_X - 2)(n_X - 2) \geq 2m_X n_X$$

y vale la igualdad sólo si  $\alpha_b = \beta_b = 2$  para todo  $b \in \mathcal{B}''_X$ .

Más aún, si vale la igualdad y  $\min\{m_X, n_X\} \geq 4$  entonces  $\alpha_b = \beta_b = 3$  para todo  $b \in \mathcal{B}'_X$ .

*Demostración.* Notemos que  $\#\text{mxl}(X) \geq 3$  y  $\#\text{mnl}(X) \geq 3$  por 2.4.10.

Sea  $\mathcal{M}'_X = \{(x, y) \in \mathcal{M}_X \mid \#\mathcal{R}_X^{-1}(x, y) = 1\}$  y sea  $\mathcal{M}''_X = \mathcal{M}_X - \mathcal{M}'_X$ . Por 2.6.1,

$$\begin{aligned} \#\mathcal{R}_X &\geq \#\mathcal{M}'_X + 2\#\mathcal{M}''_X = 2mn - \#\mathcal{M}'_X \geq \\ &\geq 2mn - \sum_{b \in \mathcal{B}'_X} \#\mathcal{R}_X(b) = 2mn - \sum_{b \in \mathcal{B}'_X} (m - \alpha_b)(n - \beta_b). \end{aligned}$$

## 2.6 Modelos minimales del toro y de la botella de Klein

Por otro lado,  $\#\mathcal{R}_X = \sum_{b \in \mathcal{B}'_X} (m - \alpha_b)(n - \beta_b) + \sum_{b \in \mathcal{B}''_X} (m - \alpha_b)(n - \beta_b)$ . Así,

$$\begin{aligned} 2mn &\leq 2 \sum_{b \in \mathcal{B}'_X} (m - \alpha_b)(n - \beta_b) + \sum_{b \in \mathcal{B}''_X} (m - \alpha_b)(n - \beta_b) \leq \\ &\leq 2\#\mathcal{B}'_X(m - 3)(n - 3) + \mathcal{B}''_X(m - 2)(n - 2). \end{aligned}$$

El resultado se sigue. □

El siguiente teorema es otro de los resultados principales de este capítulo.

**Teorema 2.6.3.** *Sea  $X$  un poset finito y conexo sin beat points que no satisfice la propiedad (S2). Entonces  $\#X \geq 16$ .*

*Demostración.* Como antes,  $\#\text{mxl}(X) \geq 3$  y  $\#\text{mnl}(X) \geq 3$  por 2.4.10. Ahora, por 2.6.2,

$$\begin{aligned} 2mn &\leq 2\#\mathcal{B}'_X(m - 3)(n - 3) + \#\mathcal{B}''_X(m - 2)(n - 2) \leq \\ &\leq \#\mathcal{B}_X \cdot \max\{2(m - 3)(n - 3), (m - 2)(n - 2)\}. \end{aligned}$$

Si  $\max\{2(m - 3)(n - 3), (m - 2)(n - 2)\} = 2(m - 3)(n - 3)$ , ponemos  $a = m - 3$  y  $b = n - 3$ . Entonces

$$\begin{aligned} \#X &= m + n + \#\mathcal{B}_X \geq m + n + \frac{mn}{(m - 3)(n - 3)} = a + b + \frac{3}{a} + \frac{3}{b} + \frac{9}{ab} + 7 = \\ &= \left(\frac{a}{3} + \frac{3}{a}\right) + \left(\frac{b}{3} + \frac{3}{b}\right) + \left(\frac{9}{ab} + \frac{2a}{3} + \frac{2b}{3}\right) + 7 \geq 2 + 2 + 3\sqrt[3]{4} + 7 > 15, \end{aligned}$$

donde la penúltima desigualdad vale por la desigualdad entre media aritmética y geométrica.

Si  $\max\{2(m - 3)(n - 3), (m - 2)(n - 2)\} = (m - 2)(n - 2)$ , ponemos  $a = m - 2$  y  $b = n - 2$ . Entonces

$$\begin{aligned} \#X &= m + n + \#\mathcal{B}_X \geq m + n + \frac{2mn}{(m - 2)(n - 2)} = a + b + \frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{8}{ab} + 6 = \\ &= \left(\frac{a}{2} + \frac{4}{a}\right) + \left(\frac{b}{2} + \frac{4}{b}\right) + \left(\frac{8}{ab} + \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) + 6 \geq 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{2} + 6 > 15, \end{aligned}$$

donde, como antes, la penúltima desigualdad vale por la desigualdad entre media aritmética y geométrica.

Por consiguiente,  $\#X \geq 16$ . □

Como corolario del teorema anterior obtenemos una respuesta afirmativa a la pregunta realizada en [5, p.44] sobre la minimalidad de  $\mathbb{S}S^0 \times \mathbb{S}S^0$  como modelo finito del toro.

**Corolario 2.6.4.** *Sea  $X$  un modelo finito del toro. Entonces  $\#X \geq 16$ .*

*Demostración.* Sea  $X$  un modelo finito del toro. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $X$  no tiene beat points. De 2.4.14 obtenemos que  $X$  no satisfice (S2). Por consiguiente,  $\#X \geq 16$  por 2.6.3. □

## 2 Problemas de minimalidad

---

**Corolario 2.6.5.** *Sea  $X$  un modelo finito de la botella de Klein. Entonces  $\#X \geq 16$ .*

*Demostración.* Por 2.4.14,  $X$  no satisface (S2). El resultado se sigue de 2.6.3.  $\square$

De los corolarios 2.6.4 y 2.6.5 obtenemos el siguiente:

**Corolario 2.6.6.** *Cualquier estructura celular regular del toro o de la botella de Klein tiene al menos dieciséis celdas.*

Ahora hallaremos todos los modelos finitos minimales del toro y la botella de Klein.

Sea  $X$  un poset finito y conexo sin beat points que no satisface (S2). Para cada  $a \in \text{mxl}(X)$  definimos

$$\sigma_a = \sum_{b \in \mathcal{S}_X^{-1}(a)} \frac{1}{\#\mathcal{S}_X(b)}.$$

*Observación 2.6.7.* Sea  $X$  un poset finito y conexo sin beat points que no satisface (S2) y sea  $x \in \text{mxl}(X)$ . Puesto que  $\mathcal{R}_X^{-1}(x, y) \subseteq \mathcal{S}_X^{-1}(x)$  para todo  $y \in \text{mnl} X$ , entonces  $\#\mathcal{S}_X^{-1}(x) \geq 2$  siempre que exista  $y \in \text{mnl} X$  tal que  $\#\mathcal{R}_X^{-1}(x, y) \geq 2$ .

Por otro lado, si  $\mathcal{R}_X^{-1}(x, y) = \{b\}$  para algún  $y \in \text{mnl}(X)$ , se sigue de 2.6.1 que existe  $c \in \mathcal{R}_X^{-1}(x, z)$  para algún  $z \in U_b \cap \text{mnl}(X)$ , que es, por supuesto, distinto de  $b$ . Luego,  $\{b, c\} \subseteq \mathcal{S}_X^{-1}(x)$  y por lo tanto  $\#\mathcal{S}_X^{-1}(x) \geq 2$  también en este caso.

Se sigue entonces de 2.6.1 que  $\#\mathcal{S}_X^{-1}(a) \geq 2$  para todo  $a \in \text{mxl}(X)$ .

**Lema 2.6.8.** *Sea  $X$  un poset finito y conexo sin beat points que no satisface (S2). Sea  $a \in \text{mxl}(X)$ . Si  $\mathcal{S}_X^{-1}(a) = \{b_1, b_2\}$  (con  $b_1 \neq b_2$ ) entonces  $\{b_1, b_2\}$  es una anticadena,  $\#(F_{b_1} \cap F_{b_2} \cap \text{mxl}(X)) \geq 3$ ,  $U_{b_1} \cap U_{b_2} = \emptyset$  y  $\min\{\beta_{b_1}, \beta_{b_2}\} \geq 3$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\mathcal{S}_X^{-1}(a) = \{b_1, b_2\}$ . Si  $F_{b_1} \cap F_{b_2} = \emptyset$  o  $b_1 \leq b_2$  o  $b_2 \leq b_1$  entonces las componentes conexas de  $X - V_a^X$  son contráctiles y por lo tanto la tríada split  $(X; X - V_a^X, V_a^X)$  satisface (S2). Así,  $F_{b_1} \cap F_{b_2} \neq \emptyset$  y  $\{b_1, b_2\}$  es una anticadena. Por lo tanto, las componentes conexas de  $X - V_a^X$  son  $F_{b_1} \cup F_{b_2}$  o espacios unipuntuales.

Notemos que  $F_{b_1} \cap F_{b_2} \subseteq \text{mxl}(X)$ . Por lo tanto  $F_{b_1} \cap F_{b_2}$  es discreto. Dado que, por la proposición 2.2.1,  $F_{b_1} \cup F_{b_2}$  es homotópicamente equivalente a  $(\mathbb{S}(F_{b_1} \cap F_{b_2}))^{\text{op}}$  obtenemos que si  $\#(F_{b_1} \cap F_{b_2}) \leq 2$  entonces la tríada split  $(X; X - V_a^X, V_a^X)$  satisface (S2). Por consiguiente,  $\#(F_{b_1} \cap F_{b_2} \cap \text{mxl}(X)) \geq 3$ .

Ahora, si  $U_{b_1} \cap U_{b_2} \neq \emptyset$  entonces existe  $w \in U_{b_1} \cap U_{b_2} \cap \text{mnl}(X)$  y en ese caso es claro que  $\mathcal{R}_X^{-1}(a, w) = \emptyset$  contradiciendo 2.6.1. Por lo tanto,  $U_{b_1} \cap U_{b_2} = \emptyset$ . Sea  $w_1 \in U_{b_1} \cap \text{mnl}(X)$ . Entonces  $b_2 \notin F_{w_1}$  y por lo tanto  $\mathcal{R}_X^{-1}(a, w_1) = \{b_2\}$ . Así,  $\beta_{b_2} \geq 3$  por 2.6.1. De manera similar obtenemos que  $\beta_{b_1} \geq 3$ .  $\square$

**Lema 2.6.9.** *Sea  $X$  un poset finito y conexo sin beat points que no satisface (S2) y tal que  $m_X \geq 4$ . Sea  $a \in \text{mxl}(X)$ . Entonces  $\sigma_a \geq \min\left\{\frac{2}{m_X-3}, \frac{3}{m_X-2}\right\}$ .*

*Si, además,  $n_X \leq 5$  entonces  $\sigma_a \geq \frac{2}{m_X-3}$ .*

*Demostración.* Por 2.6.7,  $\#\mathcal{S}_X^{-1}(a) \geq 2$ .

## 2.6 Modelos minimales del toro y de la botella de Klein

Supongamos que  $\#\mathcal{S}_X^{-1}(a) = 2$  y sean  $b_1, b_2 \in \mathcal{B}_X$  tales que  $\mathcal{S}_X^{-1}(a) = \{b_1, b_2\}$ . Entonces  $\#(F_{b_1} \cap F_{b_2} \cap \text{mxl}(X)) \geq 3$  por 2.6.8 y por lo tanto  $\alpha_{b_j} \geq 3$  para  $j \in \{1, 2\}$ . Luego,

$$\sigma_a = \sum_{b \in \mathcal{S}_X^{-1}(a)} \frac{1}{\#\mathcal{S}_X(b)} \geq \frac{2}{m_X - 3}.$$

Por otro lado, si  $\#\mathcal{S}_X^{-1}(a) \geq 3$  entonces

$$\sigma_a = \sum_{b \in \mathcal{S}_X^{-1}(a)} \frac{1}{\#\mathcal{S}_X(b)} \geq \frac{3}{m_X - 2}$$

por 2.4.17. Esto prueba la primera afirmación.

Supongamos ahora que  $n_X \leq 5$ . Si  $\#\mathcal{S}_X^{-1}(a) \geq 4$  entonces  $\sigma_a \geq \frac{4}{m_X - 2} \geq \frac{2}{m_X - 3}$  puesto que  $m_X \geq 4$ .

Supongamos que  $\#\mathcal{S}_X^{-1}(a) = 3$ . Dado que  $n_X \leq 5$ , de 2.4.17 obtenemos que existen puntos distintos  $b_1, b_2 \in \mathcal{S}_X^{-1}(a)$  y  $y \in \text{mnl}(X)$  tales que  $b_1, b_2 \in F_y$ . Sea  $b_3 \in \mathcal{S}_X^{-1}(a) - \{b_1, b_2\}$ . De 2.6.1 se sigue que  $\mathcal{R}_X^{-1}(a, y) = \{b_3\}$  y  $\alpha_{b_3} \geq 3$ . Así,

$$\sigma_a = \sum_{b \in \mathcal{S}_X^{-1}(a)} \frac{1}{\#\mathcal{S}_X(b)} \geq \frac{2}{m_X - 2} + \frac{1}{m_X - 3} \geq \frac{2}{m_X - 3}$$

puesto que  $m_X \geq 4$ . □

**Lema 2.6.10.** *Sea  $X$  un poset finito y conexo sin beat points que no satisface la propiedad (S2) y tal que  $m_X \geq 4$ . Entonces*

$$\#\mathcal{B}_X \geq m_X \cdot \min \left\{ \frac{2}{m_X - 3}, \frac{3}{m_X - 2} \right\} = \begin{cases} \frac{2m_X}{m_X - 3} & \text{si } m_X \geq 5, \\ \frac{3m_X}{m_X - 2} & \text{si } m_X \leq 5. \end{cases}$$

Si, además,  $n_X \leq 5$  entonces  $\#\mathcal{B}_X \geq \frac{2m_X}{m_X - 3}$ .

*Demostración.* Notemos que

$$\begin{aligned} \#\mathcal{B}_X &\geq \#\mathcal{S}_X^{-1}(\text{mxl}(X)) = \sum_{b \in \mathcal{S}_X^{-1}(\text{mxl}(X))} \left( \sum_{a \in \mathcal{S}_X(b)} \frac{1}{\#\mathcal{S}_X(b)} \right) = \sum_{(b,a) \in \mathcal{S}_X} \frac{1}{\#\mathcal{S}_X(b)} = \\ &= \sum_{a \in \text{mxl}(X)} \left( \sum_{b \in \mathcal{S}_X^{-1}(a)} \frac{1}{\#\mathcal{S}_X(b)} \right) = \sum_{a \in \text{mxl}(X)} \sigma_a. \end{aligned}$$

El resultado ahora se sigue de 2.6.9. □

El siguiente teorema describe todos los modelos finitos minimales del toro y de la botella de Klein.

## 2 Problemas de minimalidad

---

**Teorema 2.6.11.** *Sea  $X$  un poset finito tal que  $\#X = 16$ .*

1. *Si  $X$  es un modelo finito del toro entonces  $X$  es isomorfo a  $\mathbb{T}_{0,0}^2$  o a  $\mathbb{T}_{1,1}^2$ .*
2. *Si  $X$  es un modelo finito de la botella de Klein entonces  $X$  es isomorfo a  $\mathbb{K}_{1,0}$  o a  $\mathbb{K}_{0,1}$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es un modelo finito del toro o un modelo finito de la botella de Klein. Por lo tanto, por 2.4.14,  $X$  no satisface (S2). Así, por 2.4.10,  $\#\text{mxl}(X) \geq 3$ . Además,  $\text{mxl}(X) \cap \text{mnl}(X) = \emptyset$  dado que  $X$  es conexo. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $\#\text{mxl}(X) \leq \#\text{mnl}(X)$ . De 2.6.4 y 2.6.5 obtenemos que  $X$  no tiene beat points.

Caso 1:  $\#\text{mxl}(X) = 3$ . Por 2.6.2,  $\#\mathcal{B}_X \geq \frac{6n}{n-2}$ . Así,

$$\#X = 3 + n + \#\mathcal{B}_X \geq 3 + n + \frac{6n}{n-2} = 11 + (n-2) + \frac{12}{n-2} \geq 11 + 2\sqrt{12} > 17,$$

donde la penúltima desigualdad vale por la desigualdad entre medias aritmética y geométrica.

Caso 2:  $\#\text{mxl}(X) = 4$ .

Caso 2.1:  $\#\text{mnl}(X) = 4$  o  $\#\text{mnl}(X) = 5$ . De 2.6.10 obtenemos que  $\#\mathcal{B}_X \geq 8$ . Por lo tanto,  $\#\mathcal{B}_X = 8$  y  $\#\text{mnl}(X) = 4$ .

De 2.6.2 obtenemos que  $2\#\mathcal{B}'_X + 4\#\mathcal{B}''_X \geq 32$ . Por lo tanto,  $\#\mathcal{B}''_X = 8$ ,  $\#\mathcal{B}'_X = 0$  y vale la igualdad. Así,  $\mathcal{B}''_X = \mathcal{B}_X$  y de 2.6.1 y de la prueba de 2.6.2 se sigue que  $\alpha_b = \beta_b = 2$  para todo  $b \in \mathcal{B}_X$  y que  $\#\mathcal{R}_X^{-1}(x, y) = 2$  para todo  $(x, y) \in \mathcal{M}_X$ . Probaremos ahora que  $\#(U_a \cap \mathcal{B}_X) \leq 4$  para todo  $a \in \text{mxl}(X)$ . Sea  $a \in \text{mxl}(X)$ . Sea  $y_1 \in \text{mnl}(X)$  y sean  $b_1$  y  $b_2$  los elementos (distintos) de  $\mathcal{R}_X^{-1}(a, y_1)$ . Dado que  $y_1 \notin U_{b_1} \cup U_{b_2}$  y  $\beta_{b_1} = \beta_{b_2} = 2$  se sigue que existe  $y_2 \in \text{mnl}(X)$  tal que  $y_2 \in U_{b_1} \cap U_{b_2}$ . Dado que  $\#\mathcal{R}_X^{-1}(a, y_2) = 2$ , se sigue que  $\#\mathcal{S}_X^{-1}(a) \geq 4$  y por lo tanto  $\#(U_a \cap \mathcal{B}_X) \leq 4$ .

Dado que  $\alpha_b = 2$  para todo  $b \in \mathcal{B}_X$  y  $\#(U_a \cap \mathcal{B}_X) \leq 4$  para todo  $a \in \text{mxl}(X)$  obtenemos que  $\#(U_a \cap \mathcal{B}_X) = 4$  para todo  $a \in \text{mxl}(X)$ . De manera similar obtenemos que  $\#(F_y \cap \mathcal{B}_X) = 4$  para todo  $y \in \text{mnl}(X)$ . Puesto que  $\#\mathcal{R}_X^{-1}(x, y) = 2$  para todo  $(x, y) \in \mathcal{M}_X$  se sigue que  $\#(U_x \cap F_y \cap \mathcal{B}_X) = 2$  para todo  $(x, y) \in \mathcal{M}_X$ . En particular,  $x > y$  para todo  $(x, y) \in \mathcal{M}_X$ .

Afirmamos que  $\mathcal{B}_X$  es una anticadena. Supongamos que existen  $b_1, b_2 \in \mathcal{B}_X$  con  $b_1 < b_2$ . Puesto que  $\alpha_{b_1} = \alpha_{b_2} = 2$  obtenemos que  $F_{b_1} \cap \text{mxl}(X) = F_{b_2} \cap \text{mxl}(X)$ . Dado que  $b_1$  no es un up beat point de  $X$ , existe  $b_3 \in \widehat{F}_{b_1} \cap \mathcal{B}_X$  tal que  $b_3 \neq b_2$ . Como antes, obtenemos que  $F_{b_3} \cap \text{mxl}(X) = F_{b_1} \cap \text{mxl}(X)$ . Sea  $x_0 \in F_{b_1} \cap \text{mxl}(X)$  y sea  $y_0 \in U_{b_1} \cap \text{mnl}(X)$ . Entonces,  $\{b_1, b_2, b_3\} \subseteq U_{x_0} \cap F_{y_0} \cap \mathcal{B}_X$  lo cual es una contradicción.

Probaremos ahora que  $\#(U_{a_1} \cap U_{a_2} \cap \mathcal{B}_X) \leq 3$  para cualesquiera  $a_1, a_2 \in \text{mxl}(X)$  con  $a_1 \neq a_2$ . Sean  $a_1, a_2 \in \text{mxl}(X)$  con  $a_1 \neq a_2$  y supongamos que  $\#(U_{a_1} \cap U_{a_2} \cap \mathcal{B}_X) = 4$ . Así  $U_{a_1} \cap \mathcal{B}_X = U_{a_2} \cap \mathcal{B}_X$ . Sean  $a_3$  y  $a_4$  los puntos maximales restantes de  $X$ . Se sigue que  $U_{a_3} \cap \mathcal{B}_X = U_{a_4} \cap \mathcal{B}_X = \mathcal{B}_X - U_{a_1}$  puesto que  $\alpha_b = 2$  para todo  $b \in \mathcal{B}_X$ . Notemos que  $\#(F_y \cap U_{a_j} \cap \mathcal{B}_X) = 2$  para todo  $y \in \text{mnl}(X)$  y para todo  $j \in \{1, 3\}$ . Sea  $w \in \text{mnl}(X)$  y sea  $A = F_w \cup \mathcal{B}_X$ . Dado que  $\widetilde{H}_0(A) = 0$  existe un epimorfismo  $H_1(X) \rightarrow H_1(X, A)$ . De 1.2.71 obtenemos que  $H_1(X, A) \cong \bigoplus_{z \in X-A} \widetilde{H}_0(\widehat{F}_z) \cong \mathbb{Z}^3$ . Así, el rango de  $H_1(X)$  es mayor

## 2.6 Modelos minimales del toro y de la botella de Klein

o igual a 3, lo cual no es posible puesto que  $X$  es un modelo finito del toro o de la botella de Klein. Por consiguiente,  $\#(U_{a_1} \cap U_{a_2} \cap \mathcal{B}_X) \leq 3$  para cualesquiera  $a_1, a_2 \in \text{mxl}(X)$  con  $a_1 \neq a_2$ .

Aplicando este argumento a  $X^{\text{op}}$  obtenemos que  $\#(F_{y_1} \cap F_{y_2} \cap \mathcal{B}_X) \leq 3$  para cualesquiera  $y_1, y_2 \in \text{mnl}(X)$  con  $y_1 \neq y_2$ .

Probaremos ahora que, de hecho,  $\#(U_{a_1} \cap U_{a_2} \cap \mathcal{B}_X) \leq 2$  para cualesquiera  $a_1, a_2 \in \text{mxl}(X)$  con  $a_1 \neq a_2$ . Sean  $a_1, a_2, a_3$  y  $a_4$  los puntos maximales de  $X$  y supongamos que  $\#(U_{a_1} \cap U_{a_2} \cap \mathcal{B}_X) = 3$ . Sean  $b_1, b_2$  y  $b_3$  los elementos de  $U_{a_1} \cap U_{a_2} \cap \mathcal{B}_X$ , sea  $b_4$  el único elemento de  $U_{a_1} - U_{a_2}$  y sea  $b_5$  el único elemento de  $U_{a_2} - U_{a_1}$ . Sean  $b_6, b_7$  y  $b_8$  los elementos restantes de  $\mathcal{B}_X$ . Claramente,  $\{b_6, b_7, b_8\} \subseteq U_{a_3} \cap U_{a_4}$ . Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $U_{a_3} \cap \mathcal{B}_X = \{b_4, b_6, b_7, b_8\}$  y que  $U_{a_4} \cap \mathcal{B}_X = \{b_5, b_6, b_7, b_8\}$ . Sean  $c_2$  y  $c_3$  los elementos de  $U_{b_4} \cap \text{mnl}(X)$ . Entonces, para cada  $j \in \{2, 3\}$  tenemos que  $\#(F_{c_j} \cap \{b_1, b_2, b_3\}) = 1$  y  $\#(F_{c_j} \cap \{b_6, b_7, b_8\}) = 1$  puesto que  $\#(U_{a_1} \cap F_{c_j} \cap \mathcal{B}_X) = 2 = \#(U_{a_3} \cap F_{c_j} \cap \mathcal{B}_X)$ . Y dado que  $\#(F_{c_j} \cap \mathcal{B}_X) = 4$  para  $j \in \{2, 3\}$  se sigue que  $c_j < b_5$  para  $j \in \{2, 3\}$ . Así  $U_{b_4} \cap \text{mnl}(X) = U_{b_5} \cap \text{mnl}(X) = \{c_2, c_3\}$ .

Sean  $c_1$  y  $c_4$  los elementos minimales restantes de  $X$ . Notemos que para  $j \in \{1, 4\}$ , se tiene que  $\#(F_{c_j} \cap \{b_1, b_2, b_3\}) = 2$ . Sea  $W = \{b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, c_4\}$ . Observemos que  $W = U_{a_1} \cap U_{a_2}$  y que  $W$  es homotópicamente equivalente a  $\{b_1, b_2, b_3, c_1, c_4\}$ . Notemos también que  $1 \leq \#(F_{c_1}^W \cap F_{c_4}^W) \leq 2$ . Supongamos que  $\#(F_{c_1}^W \cap F_{c_4}^W) = 1$ . Entonces  $W$  es contráctil y por lo tanto  $U_{a_1} \cup U_{a_2}$  es contráctil por 2.2.1. Así, de 2.2.2 se sigue que existe un modelo finito del toro o de la botella de Klein con menos de 16 puntos, lo cual contradice 2.6.4 o 2.6.5. Por consiguiente,  $\#(F_{c_1}^W \cap F_{c_4}^W) = 2$ .

De manera similar, se sigue que  $\#(F_{c_1} \cap F_{c_4} \cap \{b_6, b_7, b_8\}) = 2$ . Por lo tanto,  $\#(F_{c_1} \cap F_{c_4} \cap \mathcal{B}_X) = 4$  lo cual es una contradicción.

Por consiguiente,  $\#(U_{x_1} \cap U_{x_2} \cap \mathcal{B}_X) \leq 2$  para cualesquiera  $x_1, x_2 \in \text{mxl}(X)$  con  $x_1 \neq x_2$ . Aplicando este mismo argumento a  $X^{\text{op}}$  obtenemos que  $\#(F_{y_1} \cap F_{y_2} \cap \mathcal{B}_X) \leq 2$  para cualesquiera  $y_1, y_2 \in \text{mnl}(X)$  con  $y_1 \neq y_2$ .

Dado que existen seis pares de puntos maximales y ocho puntos en  $\mathcal{B}_X$ , y que  $\alpha_b = 2$  para todo  $b \in \mathcal{B}_X$  obtenemos que existen puntos distintos  $a_1, a_2 \in \text{mxl}(X)$  tales que  $\#(U_{a_1} \cap U_{a_2} \cap \mathcal{B}_X) = 2$ . Sean  $a_3$  y  $a_4$  los puntos maximales restantes de  $X$ . Observemos que  $U_{a_3} \cap U_{a_4} \cap \mathcal{B}_X = \mathcal{B}_X - U_{a_1} \cup U_{a_2}$  y por lo tanto  $\#(U_{a_3} \cap U_{a_4} \cap \mathcal{B}_X) = 2$ .

Sean  $b_1$  y  $b_2$  los elementos de  $U_{a_1} \cap U_{a_2} \cap \mathcal{B}_X$ , sean  $b_3$  y  $b_4$  los elementos de  $\widehat{U}_{a_1} - U_{a_2}$ , sean  $b_5$  y  $b_6$  los elementos de  $\widehat{U}_{a_2} - U_{a_1}$  y sean  $b_7$  y  $b_8$  los elementos de  $U_{a_3} \cap U_{a_4} \cap \mathcal{B}_X$ . Puesto que  $\alpha_{b_3} = \alpha_{b_4} = 2$ , sin pérdida de generalidad podemos asumir que vale uno de los siguientes dos casos:

- $b_3 < a_3$  y  $b_4 < a_3$ , o
- $b_3 < a_3$  y  $b_4 < a_4$ .

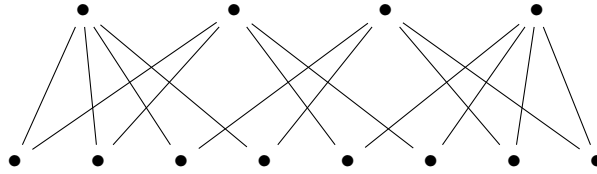
En el primer caso, obtenemos que  $b_5 < a_4$  y  $b_6 < a_4$  y así  $X - \text{mnl}(X)$  es isomorfo al



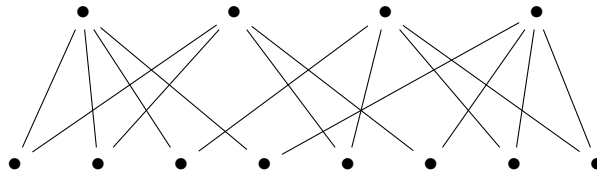
## 2 Problemas de minimalidad

---

siguiente poset que será llamado  $\mathcal{Q}_0$ .



En el segundo caso, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $b_5 < a_3$  y  $b_6 < a_4$  y así  $X - \text{mnl}(X)$  es isomorfo al siguiente poset que será llamado  $\mathcal{Q}_1$ .



Ahora, afirmamos que en cualquiera de los casos anteriores, dado que  $U_{a_1} \cap U_{a_2} \cap \mathcal{B}_X = \{b_1, b_2\}$  entonces  $U_{b_1} \cap U_{b_2} = \emptyset$ . Supongamos que  $z \in U_{b_1} \cap U_{b_2}$ . Puesto que  $\#(U_{a_j} \cap F_z \cap \mathcal{B}_X) = 2$  para todo  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  obtenemos que  $z < b_7$  y  $z < b_8$ . Así, si  $z_1$  y  $z_2$  son elementos distintos de  $U_{b_1} \cap U_{b_2}$  entonces  $\#(F_{z_1} \cap F_{z_2} \cap \mathcal{B}_X) = 4$  lo cual es una contradicción. Por consiguiente,  $\#(U_{b_1} \cap U_{b_2}) \leq 1$ . Si  $U_{b_1} \cap U_{b_2} = \{z_1\}$  entonces  $U_{a_1} \cap U_{a_2} = \{b_1, b_2\} \cup \text{mnl}(X)$  que es la unión disjunta de dos espacios contráctiles. Por lo tanto, se sigue de 2.2.1 que  $U_{a_1} \cup U_{a_2}$  es homotópicamente equivalente a  $\mathbb{S}D_2$ . Notemos que la inclusión de  $X - (U_{a_1} \cup U_{a_2}) = \{a_3, a_4, b_7, b_8\}$  en  $X$  induce el morfismo trivial entre los grupos fundamentales puesto que  $X - (U_{a_1} \cup U_{a_2})$  está incluido en el subespacio contráctil  $\{a_3, a_4, b_7, b_8, z_1\}$ . Se sigue que  $X$  satisface (S2). Por consiguiente,  $U_{b_1} \cap U_{b_2} = \emptyset$  como afirmamos.

Claramente, la misma conclusión vale para el par  $b_7, b_8$  en ambos casos y para los pares  $b_3, b_4$  y  $b_5, b_6$  en el primer caso. Aplicando el mismo razonamiento a  $X^{\text{op}}$  se sigue que si  $y_1, y_2 \in \text{mnl}(X)$  son tales que  $F_{y_1} \cap F_{y_2} \cap \mathcal{B}_X = \{b', b''\}$  (con  $b' \neq b''$ ) entonces  $F_{b'} \cap F_{b''} = \emptyset$ .

Analizaremos ahora el primer caso, esto es,  $X - \text{mnl}(X)$  isomorfo a  $\mathcal{Q}_0$ . Notemos que, dado que  $X^{\text{op}}$  es un modelo finito del toro o de la botella de Klein de 16 puntos y que  $\# \text{mnl}(X^{\text{op}}) = \# \text{mxl}(X^{\text{op}}) = 4$ , se sigue de lo que hemos probado hasta ahora que el espacio  $X - \text{mxl}(X) = (X^{\text{op}} - \text{mnl}(X^{\text{op}}))^{\text{op}}$  debe ser o bien homeomorfo a  $\mathcal{Q}_0^{\text{op}}$  o bien homeomorfo a  $\mathcal{Q}_1^{\text{op}}$ . Es claro entonces que existen dos elementos distintos  $c_1, c_2$  de  $\text{mnl}(X)$  tales que  $\#(F_{c_1} \cap F_{c_2} \cap \mathcal{B}_X) = 2$ . Sean  $c_3$  y  $c_4$  los dos elementos restantes de  $\text{mnl}(X)$  y sea  $b_1 \in F_{c_1} \cap F_{c_2}$ . Sea  $j \in \{2, 3, \dots, 8\}$  tal que  $F_{c_1} \cap F_{c_2} \cap \mathcal{B}_X = \{b_1, b_j\}$ . Entonces,  $F_{b_1} \cap F_{b_j} = \emptyset$  y por lo tanto  $j = 7$  o  $j = 8$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $j = 7$ . Ahora, dado que  $U_{b_1} \cap U_{b_2} = \emptyset$  y que  $U_{b_7} \cap U_{b_8} = \emptyset$  obtenemos que  $U_{b_2} \cap \text{mnl}(X) = U_{b_8} \cap \text{mnl}(X) = \{c_3, c_4\}$ . Dado que  $U_{b_3} \cap U_{b_4} = \emptyset$  y que  $U_{b_5} \cap U_{b_6} = \emptyset$  entonces  $\#(F_{c_k} \cap \{b_3, b_4\}) = \#(F_{c_k} \cap \{b_5, b_6\}) = 1$  para todo  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Por lo tanto, sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $F_{c_1} \cap \{b_3, b_4, b_5, b_6\} = \{b_3, b_5\}$ . Dado que  $F_{c_1} \cap F_{c_2} \cap \mathcal{B}_X = \{b_1, b_7\}$  se sigue que  $F_{c_2} \cap \{b_3, b_4, b_5, b_6\} = \{b_4, b_6\}$ .

## 2.6 Modelos minimales del toro y de la botella de Klein

Ahora, reetiquetando  $c_3$  y  $c_4$  si fuera necesario podemos suponer que  $c_3 < b_3$  y dado que  $\#(F_{c_3} \cap F_{c_4} \cap \mathcal{B}_X) \leq 2$  y que  $b_2, b_8 \in F_{c_3} \cap F_{c_4} \cap \mathcal{B}_X$  obtenemos que  $c_4 < b_4$ .

Hay ahora dos posibilidades:  $c_3 < b_5$  o  $c_3 < b_6$ .

Si  $c_3 < b_5$  entonces  $c_4 < b_6$  y  $X - \text{mnl}(X)$  es isomorfo a  $\mathcal{Q}_0^{\text{op}}$ . En este caso  $X$  es isomorfo al poset  $\mathbb{T}_{0,0}^2$  de la página 100.

Si  $c_3 < b_6$  entonces  $c_4 < b_5$  y  $X - \text{mnl}(X)$  es isomorfo a  $\mathcal{Q}_1^{\text{op}}$ . En este caso  $X$  es isomorfo al poset  $\mathbb{K}_{0,1}$  de la página 102.

Analizaremos ahora el segundo caso, esto es,  $X - \text{mnl}(X)$  isomorfo a  $\mathcal{Q}_1$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $U_{b_4} \cap \text{mnl}(X) = \{c_1, c_2\}$ . Dado que  $\#(F_{c_1} \cap U_{a_1} \cap \mathcal{B}_X) = 2 = \#(F_{c_1} \cap U_{a_4} \cap \mathcal{B}_X)$  se sigue que  $\#(F_{c_1} \cap \{b_1, b_2, b_3\}) = \#(F_{c_1} \cap \{b_6, b_7, b_8\}) = 1$  y dado que  $\#(F_{c_1} \cap \mathcal{B}_X) = 4$  obtenemos que  $b_5 \in F_{c_1}$ . De manera similar obtenemos que  $b_5 \in F_{c_2}$ .

Ahora, dado que  $U_{b_1} \cap U_{b_2} = \emptyset$  y que  $\beta_{b_1} = \beta_{b_2} = 2$  se sigue que  $U_{b_1} \cup U_{b_2} \supseteq \text{mnl}(X)$ . Por consiguiente,  $F_{c_1} \cap \{b_1, b_2\} \neq \emptyset$  y por lo tanto  $b_3 \notin F_{c_1}$ . De manera similar,  $b_6 \notin F_{c_1}$  y  $b_3, b_6 \notin F_{c_2}$ . Así,  $U_{b_3} \cap \text{mnl}(X) = U_{b_6} \cap \text{mnl}(X) = \{c_3, c_4\}$ .

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $c_1 < b_1$  y que  $c_1 < b_7$ . Dado que  $\#(F_{c_1} \cap F_{c_2} \cap \mathcal{B}_X) \leq 2$  y que  $b_4, b_5 \in F_{c_1} \cap F_{c_2} \cap \mathcal{B}_X$  obtenemos que  $F_{c_2} \cap \mathcal{B}_X = \{b_2, b_4, b_5, b_8\}$ . Ahora, reetiquetando  $c_3$  y  $c_4$  si fuera necesario, podemos suponer que  $U_{b_1} \cap \text{mnl}(X) = \{c_1, c_3\}$  y por lo tanto  $U_{b_2} \cap \text{mnl}(X) = \{c_2, c_4\}$ .

Hay ahora dos posibilidades:  $c_3 < b_7$  o  $c_3 < b_8$ .

Si  $c_3 < b_7$  entonces  $c_4 < b_8$  y  $X - \text{mnl}(X)$  es isomorfo a  $\mathcal{Q}_0^{\text{op}}$ . En este caso  $X$  es isomorfo al poset  $\mathbb{K}_{1,0}$  de la figura 2.5(b) de la página 101.

Si  $c_3 < b_8$  entonces  $c_4 < b_7$  y  $X - \text{mnl}(X)$  es isomorfo a  $\mathcal{Q}_1^{\text{op}}$ . En este caso  $X$  es isomorfo al poset  $\mathbb{T}_{1,1}^2$  de la figura 2.6(b) de la página 101.

**Caso 2.2:**  $\# \text{mnl}(X) \geq 6$ . En este caso,  $\# \mathcal{B}_X \geq 6$  por 2.6.10. Por lo tanto,  $\# \mathcal{B}_X = 6$  y  $\# \text{mnl}(X) = 6$ . Así, de la prueba de 2.6.10 obtenemos que  $\mathcal{S}_X^{-1}(\text{mnl}(X)) = \mathcal{B}_X$  y que  $\sigma_a = \frac{3}{2}$  para todo  $a \in \text{mnl}(X)$ .

Probaremos ahora que para todo  $a \in \text{mnl}(X)$  tenemos que  $\# \mathcal{S}_X^{-1}(a) = 3$  y que los subconjuntos  $U_b$ , para  $b \in \mathcal{S}_X^{-1}(a)$ , son disjuntos dos a dos. En particular, obtendremos que  $\mathcal{S}_X^{-1}(a)$  es una anticadena para todo  $a \in \text{mnl}(X)$ . Probaremos también que  $\alpha_b = \beta_b = 2$  para todo  $b \in \mathcal{S}_X^{-1}(\text{mnl}(X)) = \mathcal{B}_X$ .

Sea  $a \in \text{mnl}(X)$ . Dado que

$$\sigma_a = \sum_{b \in \mathcal{S}_X^{-1}(a)} \frac{1}{\# \mathcal{S}_X(b)} \geq \frac{1}{2} \# \mathcal{S}_X^{-1}(a)$$

se sigue que  $\# \mathcal{S}_X^{-1}(a) \leq 3$ . Además,  $\# \mathcal{S}_X^{-1}(a) \geq 2$  por 2.6.7.

Supongamos que  $\# \mathcal{S}_X^{-1}(a) = 2$ . Entonces, por 2.6.8,  $\alpha_b = 3$  para todo  $b \in \mathcal{S}_X^{-1}(a)$  y así  $\sigma_a = 2$  lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $\# \mathcal{S}_X^{-1}(a) = 3$  y así  $\alpha_b = 2$  para todo  $b \in \mathcal{S}_X^{-1}(a)$ .

Supongamos que  $\mathcal{S}_X^{-1}(a) = \{b_1, b_2, b_3\}$ . De 2.6.1 se sigue que  $U_{b_1}$ ,  $U_{b_2}$  y  $U_{b_3}$  son disjuntos dos a dos. Por lo tanto,  $\mathcal{S}_X^{-1}(a)$  es una anticadena y  $\beta_{b_j} = 2$  para todo  $j \in \{1, 2, 3\}$ .

Probaremos ahora que  $x > y$  para todo  $x \in \text{mnl}(X)$  y  $y \in \text{mnl}(X)$  y que  $\mathcal{B}_X$  es una anticadena. Sea  $a_1 \in \text{mnl}(X)$  y supongamos que  $\mathcal{S}_X^{-1}(a_1) = \{b_1, b_2, b_3\}$ . Si  $F_{b_1} \cap F_{b_2} \cap F_{b_3} = \emptyset$ , es fácil verificar que  $X - V_{a_1}^X$  es débilmente equivalente a  $S^1$  y por lo tanto la tríada

## 2 Problemas de minimalidad

split  $(X; X - V_{a_1}^X, V_{a_1}^X)$  satisface (S2). Así, existe  $a_2 \in \text{mxl}(X)$  tal que  $\{b_1, b_2, b_3\} \subseteq U_{a_2}$ . Se sigue que  $\mathcal{S}_X^{-1}(a_2) = U_{a_1} \cap \mathcal{B}_X$  y así  $U_{a_1} \cap \mathcal{B}_X$  es una anticadena. Por consiguiente,  $\mathcal{B}_X$  es una anticadena. Ahora, si  $\mathcal{S}_X^{-1}(a_2) = \{b_4, b_5, b_6\}$  entonces  $U_{b_4}, U_{b_5}$  y  $U_{b_6}$  son disjuntos dos a dos y por lo tanto  $\text{mnl}(X) \subseteq U_{b_4} \cup U_{b_5} \cup U_{b_6} \subseteq U_{a_1}$ .

Por consiguiente,  $\chi(X) = 16 - (12 + 12 + 24) + 24 = -8$ , lo cual es claramente una contradicción.

Caso 3:  $\#\text{mxl}(X) = 5$ .

Caso 3.1:  $\#\text{mnl}(X) = 5$ . Tenemos que  $\#\mathcal{B}_X = 6$ . Por 2.6.7,  $\#(U_a \cap \mathcal{B}_X) \leq 4$  para todo  $a \in \text{mxl}(X)$ . Probaremos ahora que  $\#(U_a \cap \mathcal{B}_X) \leq 3$  para todo  $a \in \text{mxl}(X)$ . Supongamos que existe  $a \in \text{mxl}(X)$  tal que  $\#(U_a \cap \mathcal{B}_X) = 4$ . Sean  $b_1, b_2 \in \mathcal{B}_X$  tales que  $\mathcal{B}_X - U_a = \{b_1, b_2\}$ . De 2.6.8 obtenemos que  $U_{b_1} \cap U_{b_2} = \emptyset$  y que  $\beta_{b_1} \geq 3$  y  $\beta_{b_2} \geq 3$ , lo cual no puede ser posible puesto que  $\#\text{mnl}(X) = 5$ . Por consiguiente,  $\#(U_a \cap \mathcal{B}_X) \leq 3$  para todo  $a \in \text{mxl}(X)$ . Aplicando el mismo argumento a  $X^{\text{op}}$  se sigue que  $\#(F_t \cap \mathcal{B}_X) \leq 3$  para todo  $t \in \text{mnl}(X)$ .

Sea  $\mathcal{A} = \{x \in \text{mxl}(X) \mid \#(U_x \cap \mathcal{B}_X) = 3\}$  y sean  $\mathcal{B}'_X$  y  $\mathcal{B}''_X$  definidos como en el lema 2.6.2. Sea  $a \in \mathcal{A}$  y sean  $b_1, b_2$  y  $b_3$  los elementos de  $\mathcal{B}_X - U_a$ . Por 2.4.17,  $\beta_{b_j} \geq 2$  para todo  $j \in \{1, 2, 3\}$ . Dado que  $\#\text{mnl}(X) = 5$ , sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $U_{b_2} \cap U_{b_3} \cap \text{mnl}(X) \neq \emptyset$ . Sea  $z \in U_{b_2} \cap U_{b_3} \cap \text{mnl}(X)$ . Entonces de 2.6.1 obtenemos que  $\mathcal{R}_X^{-1}(a, z) = \{b_1\}$  y  $b_1 \in \mathcal{B}'_X$ . Si, además,  $U_{b_1} \cap U_{b_3} \cap \text{mnl}(X) \neq \emptyset$ , por el argumento anterior obtenemos que  $b_2 \in \mathcal{B}'_X$  y así  $U_{b_1} \cap U_{b_2} \cap \text{mnl}(X) \neq \emptyset$  donde se sigue que  $b_3 \in \mathcal{B}'_X$ . Por consiguiente, existe  $a' \in F_{b_1} \cap F_{b_2} \cap F_{b_3} \cap \text{mxl}(X)$ . Por lo tanto,  $a' \in \mathcal{A}$  y así, por el argumento anterior,  $\mathcal{B}'_X - U_{a'} \neq \emptyset$ . Se sigue que  $\#\mathcal{B}'_X \geq 4$  y por lo tanto existe  $c \in \text{mxl}(X)$  tal que  $\#(U_c \cap \mathcal{B}_X) \geq 4$ , lo cual es una contradicción. Por consiguiente,  $U_{b_1} \cap U_{b_3} \cap \text{mnl}(X) = \emptyset$ . De manera similar obtenemos que  $U_{b_1} \cap U_{b_2} \cap \text{mnl}(X) = \emptyset$ . Dado que  $\beta_{b_1} \geq 3$ ,  $\beta_{b_2} \geq 2$  y  $\beta_{b_3} \geq 2$  se sigue que  $\beta_{b_1} = 3$ ,  $\beta_{b_2} = \beta_{b_3} = 2$  y  $U_{b_2} \cap \text{mnl}(X) = U_{b_3} \cap \text{mnl}(X)$ . Notemos que  $b_2, b_3 \in \mathcal{B}''_X$ . Por lo tanto, para cada  $a \in \mathcal{A}$  existe un único  $b \in \mathcal{B}'_X$  tal que  $b\mathcal{S}_X a$ .

Se sigue que  $\#\mathcal{A} = \#(\mathcal{S}_X \cap (\mathcal{B}'_X \times \mathcal{A})) \leq 2\#\mathcal{B}'_X$ . Por consiguiente

$$12 + \frac{\#\mathcal{A}}{2} \leq 12 + \#\mathcal{B}'_X = 2\#\mathcal{B}_X + \#\mathcal{B}'_X = 3\#\mathcal{B}'_X + 2\#\mathcal{B}''_X \leq \sum_{b \in \mathcal{B}_X} \alpha_b$$

y dado que

$$\sum_{b \in \mathcal{B}_X} \alpha_b \leq 3\#\mathcal{A} + 2(5 - \#\mathcal{A}) = 10 + \#\mathcal{A}$$

obtenemos que  $12 + \frac{1}{2}\#\mathcal{A} \leq 10 + \#\mathcal{A}$  y por lo tanto  $\#\mathcal{A} \geq 4$  y  $\#\mathcal{B}'_X \geq 2$ .

Como en la prueba del lema 2.6.2, tenemos que

$$50 \leq 2 \sum_{b \in \mathcal{B}'_X} (5 - \alpha_b)(5 - \beta_b) + \sum_{b \in \mathcal{B}''_X} (5 - \alpha_b)(5 - \beta_b)$$

y puesto que  $\#\mathcal{B}'_X \geq 2$ , no es difícil probar que  $\alpha_b = \beta_b = 3$  para todo  $b \in \mathcal{B}'_X$  y que  $\alpha_b = \beta_b = 2$  para todo  $b \in \mathcal{B}''_X$ .

Ahora, notemos que  $\sigma_a = \frac{7}{6}$  para todo  $a \in \mathcal{A}$  y dado que

$$\sum_{a \in \text{mxl}(X)} \sigma_a = \#\mathcal{S}_X^{-1}(\text{mxl}(X)) = \#\mathcal{B}_X = 6$$

## 2.6 Modelos minimales del toro y de la botella de Klein

se sigue que  $\mathcal{A} \neq \text{mxl}(X)$  y por lo tanto que  $\#\mathcal{A} = 4$ . Sea  $c$  el único elemento de  $\text{mxl}(X) - \mathcal{A}$ . Entonces  $\sigma_c = \frac{4}{3}$  y, por consiguiente,  $\#\mathcal{S}_X^{-1}(c) \leq 4$ . Dado que  $c \notin \mathcal{A}$  obtenemos que  $\#\mathcal{S}_X^{-1}(c) = 4$  y por lo tanto  $\alpha_b = 2$  para todo  $b \in \mathcal{S}_X^{-1}(c)$ . Así,  $U_c \cap \mathcal{B}_X = \mathcal{B}'_X$  y  $\#\mathcal{B}'_X = 2$ . De manera similar, trabajando con  $X^{\text{op}}$  obtenemos que existe  $x \in \text{mnl}(X)$  tal que  $F_x \cap \mathcal{B}_X = \mathcal{B}'_X$ .

Sean  $c_1$  y  $c_2$  los elementos de  $\mathcal{B}'_X$ . Sea  $a_1 \in \text{mxl}(X) \cap F_{c_1} - \{c\}$ . Dado que  $a_1 \in \mathcal{A}$ , existen elementos distintos  $d_1, d_2 \in \mathcal{B}''_X - U_{a_1}$  y por los argumentos anteriores sabemos que  $U_{d_1} \cap \text{mnl}(X) = U_{d_2} \cap \text{mnl}(X)$  y que  $\beta_{d_1} = \beta_{d_2} = 2$ . Sean  $y, z \in \text{mnl}(X)$  tal que  $U_{d_1} \cap \text{mnl}(X) = \{y, z\}$ .

Dado que  $\alpha_{d_1} = \alpha_{d_2} = 2$  obtenemos que existe  $a_2 \in (\text{mxl}(X) - \{a_1, c\}) \cap F_{d_1} \cap F_{d_2}$ . Como  $a_2 \in \mathcal{A}$ , existen elementos distintos  $e_1, e_2 \in \mathcal{B}''_X - U_{a_2}$  y por los argumentos anteriores sabemos que  $U_{e_1} \cap \text{mnl}(X) = U_{e_2} \cap \text{mnl}(X)$  y que  $\beta_{e_1} = \beta_{e_2} = 2$ . Sean  $v, w \in \text{mnl}(X)$  tales que  $U_{e_1} \cap \text{mnl}(X) = \{v, w\}$ . Notemos que  $\{v, w\} \cap \{y, z\} = \emptyset$  pues si  $u \in \{v, w\} \cap \{y, z\}$  entonces  $F_u \cap \mathcal{B}_X \supseteq \{d_1, d_2, e_1, e_2\}$  lo cual es imposible. Notemos también que  $x \notin \{v, w, y, z\}$ . Observemos además que, dado que  $a_1 \in \mathcal{A}$  y  $c_2, d_1, d_2 \notin U_{a_1}$ , entonces  $e_1, e_2 \in U_{a_1}$ .

Ahora tomemos  $C = F_x \cup \text{mxl}(X)$ . Las componentes conexas de  $X - C$  son  $\{d_1, d_2, y, z\}$  y  $\{e_1, e_2, v, w\}$  y dado que ambas están incluidas en subespacios contráctiles de  $X$  ( $U_{a_2}$  y  $U_{a_1}$  respectivamente) obtenemos que  $X$  satisface (S2).

**Caso 3.2:**  $\#\text{mnl}(X) \geq 6$ . De 2.6.10 obtenemos que  $\#\mathcal{B}_X \geq 5$ . Así,  $\#\mathcal{B}_X = 5$  y  $\#\text{mnl}(X) = 6$ . Por lo tanto, de la prueba de 2.6.10 obtenemos que  $\sigma_a = 1$  para todo  $a \in \text{mxl}(X)$ .

Por 2.6.7,  $\#\mathcal{S}_X^{-1}(a) \geq 2$  para todo  $a \in \text{mxl}(X)$ . Así,  $\#(U_a \cap \mathcal{B}_X) \leq 3$  para todo  $a \in \text{mxl}(X)$ .

Supongamos que  $\#(U_a \cap \mathcal{B}_X) = 3$  para todo  $a \in \text{mxl}(X)$ . Sea  $a_1 \in \text{mxl}(X)$  y supongamos que  $U_{a_1} \cap \mathcal{B}_X = \{b_1, b_2, b_3\}$  y que  $\mathcal{B}_X - U_{a_1} = \{b_4, b_5\}$ . Por 2.6.8,  $\{b_4, b_5\}$  es una anticadena y  $\#(F_{b_4} \cap F_{b_5} \cap \text{mxl}(X)) \geq 3$ . Sean  $a_3, a_4, a_5$  tres elementos distintos de  $F_{b_4} \cap F_{b_5} \cap \text{mxl}(X)$  (notemos que ninguno de ellos es  $a_1$ ). Dado que  $\#(U_{a_3} \cap \mathcal{B}_X) = 3$  se sigue que  $\#(U_{a_3} \cap \{b_1, b_2, b_3\}) = 1$ . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $b_3 \in U_{a_3}$ . Por lo tanto,  $\mathcal{B}_X - U_{a_3} = \{b_1, b_2\}$  y aplicando 2.6.8 nuevamente obtenemos que  $\#(F_{b_1} \cap F_{b_2} \cap \text{mxl}(X)) \geq 3$ . Así, existe  $k \in \{4, 5\}$  tal que  $a_k \in F_{b_1} \cap F_{b_2}$ . Por lo tanto,  $\{b_1, b_2, b_4, b_5\} \subseteq U_{a_k} \cap \mathcal{B}_X$  lo cual es absurdo.

Por consiguiente, existe  $a_1 \in \text{mxl}(X)$  tal que  $\#(U_{a_1} \cap \mathcal{B}_X) \leq 2$ . Entonces  $\#\mathcal{S}_X^{-1}(a_1) \geq 3$  y por lo tanto

$$1 = \sigma_{a_1} = \sum_{b \in \mathcal{S}_X^{-1}(a_1)} \frac{1}{\#\mathcal{S}_X(b)} \geq \frac{1}{3} \#\mathcal{S}_X^{-1}(a_1) \geq 1.$$

Así,  $\#\mathcal{S}_X^{-1}(a_1) = 3$ ,  $\#(U_{a_1} \cap \mathcal{B}_X) = 2$  y  $\#\mathcal{S}_X(b) = 3$  para todo  $b \in \mathcal{S}_X^{-1}(a_1)$ . Luego,  $\alpha_b = 2$  para todo  $b \in \mathcal{S}_X^{-1}(a_1)$ .

Supongamos que  $U_{a_1} \cap \mathcal{B}_X = \{b_1, b_2\}$  y  $\mathcal{S}_X^{-1}(a_1) = \{b_3, b_4, b_5\}$ . De 2.6.1 se sigue que los conjuntos  $U_{b_3}$ ,  $U_{b_4}$  y  $U_{b_5}$  son disjuntos dos a dos. En particular,  $\{b_3, b_4, b_5\}$  es una anticadena. Dado que  $\beta_{b_j} \geq 2$  para todo  $j \in \{3, 4, 5\}$  obtenemos que  $\text{mnl}(X) \subseteq U_{b_3} \cup U_{b_4} \cup U_{b_5}$  y que  $\beta_{b_j} = 2$  para todo  $j \in \{3, 4, 5\}$ .

Sea  $i \in \{1, 2\}$ . Si  $\beta_{b_i} \leq 3$  entonces existen elementos distintos  $j, k \in \{3, 4, 5\}$  tales que  $\#(U_{b_i} \cap U_{b_j}) \leq 1$  y  $\#(U_{b_i} \cap U_{b_k}) \leq 1$ . Sea  $C = \{b_i, b_j, b_k\} \cup \text{mnl}(X)$ . Notemos que las

## 2 Problemas de minimalidad

componentes conexas de  $C$  son contráctiles. Sea  $l$  el elemento de  $\{1, 2\}$  distinto de  $i$  y sea  $m$  el elemento de  $\{3, 4, 5\}$  distinto de  $j$  y de  $k$ . Dado que  $X - C = \{b_l, b_m\} \cup \text{mxl}(X)$ , las componentes conexas de  $X - C$  son contráctiles, excepto quizás,  $F_{b_l} \cup F_{b_m}$ . Puesto que  $\alpha_{b_m} = 2$ , podemos utilizar 2.2.1 como en el segundo párrafo de la prueba de 2.6.8, de donde obtenemos que la tríada split  $(X; X - C, C)$  satisface (S2).

Por consiguiente,  $\beta_{b_i} \geq 4$  para cada  $i \in \{1, 2\}$ . Así, existe  $w \in \text{mnl}(X)$  tal que  $w \in U_{b_1} \cap U_{b_2}$ . Sea  $G = F_w \cup \text{mxl}(X)$ . Notemos que las componentes conexas de  $X - G$  son contráctiles. Por lo tanto, la tríada split  $(X; X - G, G)$  satisface (S2).

Caso 4:  $\#\text{mxl}(X) = 6$ . En este caso,  $\#\mathcal{B}_X \geq 4$  por 2.6.10. Por lo tanto,  $\#\mathcal{B}_X = 4$  y  $\#\text{mnl}(X) = 6$ . Así, de la prueba de 2.6.10 obtenemos que  $\sigma_a = \frac{2}{3}$  para todo  $a \in \text{mxl}(X)$ .

Sea  $a \in \text{mxl}(X)$ . Por 2.6.7,  $\#\mathcal{S}_X^{-1}(a) \geq 2$ . Si  $\#\mathcal{S}_X^{-1}(a) \geq 3$  entonces  $\sigma_a \geq \frac{3}{4}$  lo cual es una contradicción. Así,  $\#\mathcal{S}_X^{-1}(a) = 2$  para todo  $a \in \text{mxl}(X)$ .

Sea  $a_1 \in \text{mxl}(X)$  y supongamos que  $U_{a_1} \cap \mathcal{B}_X = \{b_1, b_2\}$  y que  $\mathcal{S}_X^{-1}(a_1) = \{b_3, b_4\}$ . Por 2.6.8,  $\{b_3, b_4\}$  es una anticadena y  $\#(F_{b_3} \cap F_{b_4} \cap \text{mxl}(X)) \geq 3$ . Dado que  $\sigma_{a_1} = \frac{2}{3}$ , obtenemos que  $\alpha_{b_3} = \alpha_{b_4} = 3$  y  $\#(F_{b_3} \cap F_{b_4} \cap \text{mxl}(X)) = 3$ . Sean  $a_4, a_5, a_6 \in \text{mxl}(X)$  tales que  $F_{b_3} \cap F_{b_4} \cap \text{mxl}(X) = \{a_4, a_5, a_6\}$  y sean  $a_2$  y  $a_3$  los puntos maximales restantes de  $X$ . Se sigue que  $U_{a_j} \cap \mathcal{B}_X = \{b_3, b_4\}$  para todo  $j \in \{4, 5, 6\}$  y que  $U_{a_j} \cap \mathcal{B}_X = \{b_1, b_2\}$  para todo  $j \in \{1, 2, 3\}$ . Notemos que  $\{b_1, b_2\}$  es una anticadena por 2.6.8.

Así,  $X - \text{mnl}(X)$  es isomorfo a  $(\mathbb{S}D_3)^{\text{op}} \amalg (\mathbb{S}D_3)^{\text{op}}$ . Trabajando con  $X^{\text{op}}$  de manera similar, obtenemos que  $X - \text{mxl}(X)$  es isomorfo a  $\mathbb{S}D_3 \amalg \mathbb{S}D_3$ .

Por 2.6.8,  $U_{b_1} \cap U_{b_2} = \emptyset$  y  $U_{b_3} \cap U_{b_4} = \emptyset$ . Dado que  $X - \text{mxl}(X)$  es isomorfo a  $\mathbb{S}D_3 \amalg \mathbb{S}D_3$  se sigue que existe  $k \in \{3, 4\}$  tal que  $U_{b_1} \cap U_{b_k} = \emptyset$ . Sea  $C = U_{b_1} \cup U_{b_k}$ . Notemos que las componentes conexas de  $C$  y de su complemento son contráctiles. Por consiguiente, la tríada split  $(X; C, X - C)$  satisface (S2).

Vale la pena observar las similitudes entre la prueba de este caso y la segunda parte de la prueba de 2.5.6.

Caso 5:  $\#\text{mxl}(X) \geq 7$ . Del lema 2.6.10 obtenemos que  $\#\mathcal{B}_X \geq m_X \cdot \frac{2}{m_X - 3}$  y así  $\#X \geq 2m_X + \frac{2m_X}{m_X - 3} > 2m_X + 2 \geq 16$ .  $\square$

## 2.7 Otros problemas de minimalidad

### 2.7.1 Espacios con torsión en sus grupos de homología entera de cardinalidad mínima

En esta subsección, probaremos que si  $X$  es un poset con menos de 13 puntos entonces  $H_n(X)$  es libre de torsión para todo  $n \in \mathbb{N}$ , demostrando una conjetura de Hardie, Vermeulen y Witbooi [39, Observación 4.2].

**Teorema 2.7.1.** *Sea  $X$  un espacio topológico finito tal que  $H_k(X)$  tiene torsión para algún  $k \in \mathbb{N}$ . Entonces  $\#X \geq 13$ .*

*Demostración.* Podemos asumir que  $X$  es un espacio  $T_0$  minimal y que los grupos de homología (con coeficientes en  $\mathbb{Z}$ ) de cualquier subespacio propio de  $X$  son libres de torsión. Tomemos  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $H_k(X)$  tiene torsión. Por 2.5.7 podemos asumir que  $k \geq 2$ .

Sea  $p \in X$ . De 1.2.71 obtenemos que existe una sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow H_k(\widehat{C}_p) \longrightarrow H_k(X - \{p\}) \longrightarrow H_k(X) \longrightarrow H_{k-1}(\widehat{C}_p) \longrightarrow \cdots$$

Si  $H_k(\widehat{C}_p) = 0$ , dado que  $H_k(X - \{p\})$  y  $H_{k-1}(\widehat{C}_p)$  son grupos abelianos libres obtenemos que  $H_k(X)$  es un grupo abeliano libre. Así,  $H_k(\widehat{C}_p) \neq 0$ . En particular,  $h(C_p) \geq k + 1$  y por lo tanto todo punto  $p \in X$  pertenece a una cadena de altura  $k + 1$ .

Sea  $a \in \text{mxl}(X)$ . Supongamos que  $X - U_a$  es una anticadena. Entonces, por 1.2.71

$$H_k(X) \cong H_k(X, U_a) \cong \bigoplus_{x \in X - U_a} H_{k-1}(\widehat{C}_x)$$

el cual es libre de torsión por una de nuestras suposiciones iniciales. Por lo tanto,  $X - U_a$  no es una anticadena. Así,  $X - U_a - \text{mxl}(X) \neq \emptyset$ .

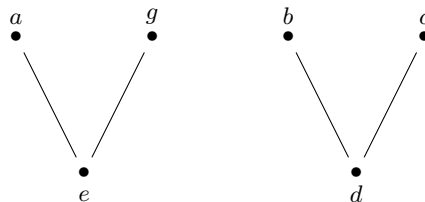
Sea  $d \in \text{mxl}(X - U_a - \text{mxl}(X))$ . Por 2.4.17, existen  $b, c \in \text{mxl}(X)$  tales que  $b \neq c$ ,  $b \geq d$  y  $c \geq d$ . Notemos que  $b \neq a$  y  $c \neq a$ . Aplicando el razonamiento anterior obtenemos que  $X - U_b$  no es una anticadena y así existe un punto  $e \in \text{mxl}(X - U_b - \text{mxl}(X))$ . Nuevamente, por 2.4.17 obtenemos que  $\#(F_e \cap \text{mxl}(X)) \geq 2$ . Sea  $X_1 = \text{mxl}(X) \cup \text{mxl}(X - \text{mxl}(X))$ . Si  $F_e \cap \text{mxl}(X) \not\subseteq \{a, b, c\}$  entonces  $\# \text{mxl}(X) \geq 4$  y así  $\#X_1 \geq 6$ . Si no,  $\widehat{F}_e = \{a, c\}$  y dado que  $X - U_c$  no es una anticadena, existe un punto  $f \in \text{mxl}(X - U_c - \text{mxl}(X))$  que debe ser, por supuesto, diferente de  $d$  y  $e$ . Por consiguiente,  $\#X_1 \geq 6$  en cualquier caso.

Sea  $X_2 = \text{mnl}(X) \cup \text{mnl}(X - \text{mnl}(X))$ . Aplicando el argumento anterior a  $X^{\text{op}}$ , obtenemos que  $\#X_2 \geq 6$ . Dado que  $H_k(X)$  tiene torsión se sigue que  $h(X) \geq k + 1 \geq 3$ . Puesto que todo punto de  $X$  pertenece a una cadena de altura  $k + 1$  obtenemos que  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ . Por consiguiente,  $\#X \geq 12$ .

Supongamos ahora que  $\#X = 12$ . Entonces  $X = X_1 \cup X_2$  y  $\#X_1 = \#X_2 = 6$ . En particular,  $h(X) = 3$  y entonces  $k = 2$ . Siguiendo el argumento anterior y con la notación utilizada previamente, tenemos que  $F_e \cap \text{mxl}(X) \not\subseteq \{a, b, c\}$  o  $\widehat{F}_e = \{a, c\}$ .

Supongamos que  $F_e \cap \text{mxl}(X) \not\subseteq \{a, b, c\}$ . Se sigue que  $\# \text{mxl}(X) = 4$ . Sea  $g$  el único elemento de  $F_e \cap \text{mxl}(X) - \{a, b, c\}$ . Supongamos que  $d \leq g$ . Dado que  $X - U_g$  no es una anticadena, existe un punto  $h \in \text{mxl}(X - U_g - \text{mxl}(X))$  que es claramente diferente de  $d$  y  $e$ . Notemos que  $h \in X_1$ . Por consiguiente,  $\#X_1 \geq 7$  lo cual es una contradicción. Luego,  $d \not\leq g$ . De manera similar obtenemos que  $e \not\leq c$ .

Así,  $\widehat{F}_e \subseteq \{a, g\}$  y por lo tanto, por 2.4.17,  $\widehat{F}_e = \{a, g\}$ . Por consiguiente,  $X_1$  es el siguiente poset



que será llamado  $V$ .

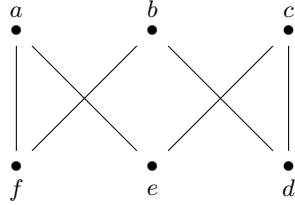
Pero, en este caso, si  $y$  es un punto maximal de  $X_2$  se tiene que  $\emptyset \neq \widehat{F}_y \subseteq X_1$  y entonces las componentes conexas de  $\widehat{F}_y$  son contráctiles. Así,  $\widehat{C}_y = \widehat{U}_y \otimes \widehat{F}_y$  es homotópicamente

## 2 Problemas de minimalidad

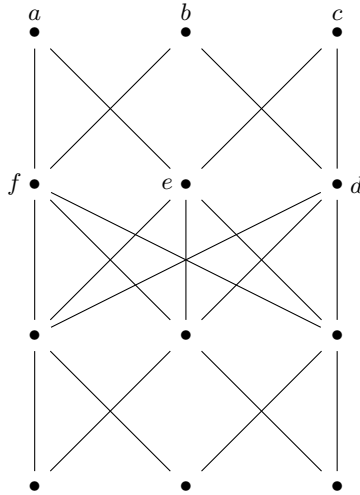
---

equivalente al join no Hausdorff (cf. [5, Definición 2.7.1]) de dos espacios discretos. Se sigue que  $h(\widehat{C}_y) = 1$  y por lo tanto, que  $H_2(\widehat{C}_y) = 0$ , lo cual es una contradicción.

Por consiguiente,  $\widehat{F}_e = \{a, c\}$  y de 2.4.17 obtenemos que  $\widehat{F}_f = \{a, b\}$ . Entonces  $X_1$  es el siguiente poset



Aplicando el mismo razonamiento a  $X^{\text{op}}$  obtenemos que  $X_2$  es isomorfo a  $X_1^{\text{op}}$  el cual es isomorfo a  $X_1$ . Por un argumento anterior, si  $y$  es un punto maximal de  $X_2$  entonces  $\widehat{F}_y$  no puede ser homotópicamente equivalente a un espacio discreto. Dado que  $\widehat{F}_y \subseteq X_1$  la única posibilidad es que  $\widehat{F}_y = X_1$  para todo  $y \in \text{mxl}(X_2)$ . Se sigue que  $X = X_2 \otimes X_1$ , esto es,  $X$  es el siguiente poset



Sea  $U = U_a \cup U_c$ . Es fácil probar que  $U$  es contráctil. Entonces, por 1.2.71,

$$H_2(X) \cong H_2(X, U) \cong H_1(\widehat{C}_b)$$

el cual es abeliano libre por nuestros supuestos iniciales. Así, este caso no resulta posible. Por consiguiente,  $\#X \geq 13$ . □

### 2.7.2 Espacios minimales débilmente contráctiles no contráctiles

En esta subsección probaremos que un espacio débilmente contráctil no contráctil debe tener al menos nueve puntos.

Más aún, probaremos que existen (salvo homeomorfismo) exactamente dos espacios débilmente contráctiles no contráctiles de nueve puntos.

En la figura 2.8 exhibimos un espacio débilmente contráctil no contráctil  $T_0$  de nueve puntos, el cual fue considerado en [62, Figura 2] y en [5, Ejemplo 4.3.3]. Observemos que este espacio no es contráctil dado que no tiene beat points y es débilmente contráctil dado que la realización geométrica de su complejo simplicial asociado es contráctil.

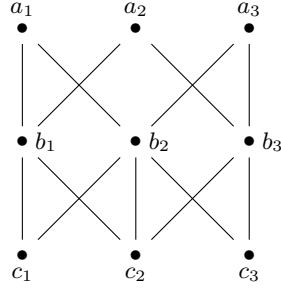


Figura 2.8: Espacio débilmente contráctil no contráctil de 9 puntos.

Probaremos ahora algunos lemas que necesitaremos para demostrar el resultado principal de esta subsección.

**Lema 2.7.2.** *Sea  $X$  un espacio topológico finito  $T_0$  sin beat points. Sean  $a, b \in X$  con  $a > b$ . Entonces  $\#\widehat{U}_a \geq \#\widehat{U}_b + 2$  y  $\#\widehat{F}_b \geq \#\widehat{F}_a + 2$ .*

*Demostración.* Notemos que  $\widehat{U}_a \supseteq U_b$  puesto que  $b < a$ . Dado que  $a$  no es un beat point de  $X$  obtenemos que  $\widehat{U}_a \supsetneq U_b$ . Por consiguiente  $\#\widehat{U}_a \geq \#U_b + 1 = \#\widehat{U}_b + 2$ .

Aplicando este resultado a  $X^{\text{op}}$  obtenemos que  $\#\widehat{F}_b \geq \#\widehat{F}_a + 2$ . □

**Lema 2.7.3.** *Sea  $X$  un espacio topológico finito  $T_0$  tal que  $h(X) = 2$ . Si  $X$  es débilmente contráctil entonces  $H_2(A) = 0$  para todo subespacio  $A \subseteq X$ .*

*Demostración.* Sea  $A$  un subespacio de  $X$ . Notemos que  $H_3(X, A) = 0$  dado que  $h(X) = 2$ . El resultado entonces se sigue de la sucesión exacta  $H_3(X, A) \rightarrow H_2(A) \rightarrow H_2(X)$ . □

**Lema 2.7.4.** *Sea  $X$  un espacio topológico finito  $T_0$  débilmente contráctil tal que  $h(X) = 2$ . Sean  $b, b' \in X - (\text{mxl}(X) \cup \text{mnl}(X))$  tales que  $b \neq b'$ . Si  $\#(\widehat{F}_b \cap \widehat{F}_{b'}) \geq 2$  entonces  $\#(\widehat{U}_b \cap \widehat{U}_{b'}) \leq 1$ .*

*Demostración.* Notemos que  $\{b, b'\}$  debe ser una anticadena. Supongamos que  $\#(\widehat{U}_b \cap \widehat{U}_{b'}) \geq 2$ . Entonces existen elementos distintos  $a, a' \in \widehat{F}_b \cap \widehat{F}_{b'}$  y elementos distintos  $c, c' \in \widehat{U}_b \cap \widehat{U}_{b'}$ . Notemos que  $\{a, a'\} \subseteq \text{mxl}(X)$  y que  $\{c, c'\} \subseteq \text{mnl}(X)$ . Por lo tanto el subespacio  $A = \{a, a', b, b', c, c'\}$  es homeomorfo a  $\mathbb{S}^2 S^0$  y entonces  $H_2(A) \neq 0$ , contradiciendo 2.7.3. Así  $\#(\widehat{U}_b \cap \widehat{U}_{b'}) \leq 1$ . □

**Lema 2.7.5.** *Sea  $X$  un espacio topológico tal que, para algún  $x_0 \in X$ ,  $\pi_1(X, x_0)$  no es un grupo perfecto no trivial. Si  $\mathbb{S}X$  es débilmente contráctil entonces  $X$  es débilmente contráctil.*

*Demostración.* Sea  $\Sigma X$  la suspensión de  $X$ . Dado que  $\Sigma X$  es débilmente equivalente a  $\mathbb{S}X$  obtenemos que  $\Sigma X$  es débilmente contráctil. Así  $H_n(\Sigma X) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por



## 2 Problemas de minimalidad

---

lo tanto  $X$  es arcoconexo y  $H_n(X) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Así  $\pi_1(X, x_0)$  es un grupo perfecto. Por consiguiente  $\pi_1(X, x_0)$  debe ser el grupo trivial. El resultado entonces se sigue del teorema de Hurewicz.  $\square$

La siguiente proposición muestra que la altura de un espacio topológico finito  $T_0$  débilmente contráctil no contráctil debe ser mayor a 1.

**Proposición 2.7.6.** *Sea  $X$  un espacio topológico finito  $T_0$  débilmente contráctil con  $h(X) \leq 1$ . Entonces  $X$  es contráctil.*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  no es contráctil. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $X$  no tiene beat points. Sea  $E$  el conjunto de aristas del diagrama de Hasse de  $X$ . Para  $x \in X$ , denotaremos por  $\epsilon_x$  a la cantidad de aristas del diagrama de Hasse de  $X$  que contienen a  $x$ . Es claro que  $\epsilon_x = \#(\hat{U}_x \cap \text{mnl } X)$  si  $x \in \text{mxl } X$  y que  $\epsilon_x = \#(\hat{F}_x \cap \text{mxl } X)$  si  $x \in \text{mnl } X$ .

Ahora bien, como  $X$  tiene altura 1 y es conexo, entonces  $\text{mxl } X = X - \text{mnl } X$  por (1) de 2.4.17. Se sigue de (2) de 2.4.17, que  $\epsilon_x \geq 2$  para todo  $x \in \text{mxl } X$ . Del mismo modo,  $\epsilon_y \geq 2$  para todo  $y \in \text{mnl } X$ . Luego,  $\epsilon_x \geq 2$  para todo  $x \in X$ . Así, tenemos que

$$\#E = \frac{1}{2} \sum_{x \in X} \epsilon_x \geq \#X.$$

Pero  $1 = \chi(X) = \#X - \#E \leq 0$  lo cual es una contradicción.  $\square$

Probaremos ahora el resultado principal de esta subsección.

**Teorema 2.7.7.** *Sea  $X$  un espacio topológico débilmente contráctil no contráctil. Entonces  $\#X \geq 9$ .*

*Demostración.* Podemos asumir que  $X$  es un espacio topológico finito  $T_0$  sin beat points.

Por 2.1.1, si  $h(X) \geq 4$  entonces  $\#X \geq 10$ . Y por 2.7.6,  $h(X) \geq 2$ . Así  $h(X) = 2$  o  $h(X) = 3$ .

Caso 1:  $h(X) = 3$ . Por 2.1.1,  $\#X \geq 8$ . Si  $\#X = 8$  entonces, nuevamente por 2.1.1,  $X$  es homeomorfo a  $\mathbb{S}^3 S^0$  el cual es débilmente equivalente a  $S^3$ . Este absurdo muestra que  $\#X \geq 9$ .

Caso 2:  $h(X) = 2$ . Si  $\#\text{mxl}(X) = 2$  entonces, de 2.4.17, obtenemos que  $X = \text{SY}$  con  $Y = X - \text{mxl}(X)$  y  $h(Y) = 1$ . Es claro que  $\pi_1(Y, y_0)$  es un grupo libre para todo  $y_0 \in Y$ . Por 2.7.5,  $Y$  resulta débilmente contráctil, y por 2.7.6 se sigue que  $Y$  es contráctil. Ahora bien, dado que  $X$  no tiene beat points, lo mismo vale para  $Y$ . Luego, tenemos que  $Y$  es un espacio contráctil sin beat points de altura 1, lo cual es claramente absurdo. Así  $\#\text{mxl}(X) \geq 3$ .

Trabajando con  $X^{\text{op}}$  de manera similar, obtenemos que  $\#\text{mnl}(X) \geq 3$ . Sea  $\mathcal{B}_X = X - (\text{mxl}(X) \cup \text{mnl}(X))$ . Dado que  $h(X) = 2$  obtenemos que  $\mathcal{B}_X$  es una anticadena no vacía de  $X$ . Si  $\#\mathcal{B}_X \geq 3$  entonces  $\#X \geq 9$ . Así, podemos asumir que  $\#\mathcal{B}_X \leq 2$ .

Caso 2.1:  $\#\mathcal{B}_X = 1$ . Supongamos que  $\mathcal{B}_X = \{b\}$ . Notemos que  $\hat{F}_b \subseteq \text{mxl}(X)$  y  $\hat{U}_b \subseteq \text{mnl}(X)$ . Por 2.4.17,  $\alpha_b \geq 2$  y  $\beta_b \geq 2$ .

Por 2.4.17,  $\#\hat{U}_a \geq 2$  para todo  $a \in \text{mxl}(X)$ . De 2.7.2 obtenemos que  $\#\hat{U}_a \geq \beta_b + 2$  para todo  $a \in \hat{F}_b$ .

Sea  $l$  el número de 1-cadenas de  $X$  y sea  $m = \# \text{mxl}(X)$ . Tenemos que

$$l = \#\widehat{U}_b + \sum_{a \in \text{mxl}(X)} \#\widehat{U}_a \geq \beta_b + \alpha_b(\beta_b + 2) + 2(m - \alpha_b) = \beta_b + \alpha_b\beta_b + 2m \geq \alpha_b\beta_b + 8.$$

Por otro lado, notemos que el número de 2-cadenas de  $X$  es  $\alpha_b\beta_b$ .

Por lo tanto

$$1 = \chi(X) = \#X - l + \alpha_b\beta_b \leq \#X - (\alpha_b\beta_b + 8) + \alpha_b\beta_b = \#X - 8.$$

Por consiguiente  $\#X \geq 9$ .

Caso 2.2:  $\#\mathcal{B}_X = 2$ . Si  $\# \text{mxl}(X) \geq 4$  o  $\# \text{mnl}(X) \geq 4$  entonces  $\#X \geq 9$ . Así podemos asumir que  $\# \text{mxl}(X) = \# \text{mnl}(X) = 3$ . Como antes, notemos que  $\widehat{F}_b \subseteq \text{mxl}(X)$  y  $\widehat{U}_b \subseteq \text{mnl}(X)$  para todo  $b \in \mathcal{B}_X$  dado que  $\mathcal{B}_X$  es una anticadena.

Probaremos primero que  $\#\widehat{U}_b \neq 3$  para todo  $b \in \mathcal{B}_X$ . Sea  $b \in \mathcal{B}_X$  y supongamos que  $\#\widehat{U}_b = 3$ . Entonces  $\widehat{U}_b = \text{mnl}(X)$ . Sea  $b'$  el (único) elemento de  $\mathcal{B}_X - \{b\}$ . Afirmamos que  $\widehat{F}_b \subseteq \widehat{F}_{b'}$ . Sea  $a \in \widehat{F}_b$ . Entonces  $\widehat{U}_a \supseteq U_b$  y dado que  $a$  no es un beat point de  $X$  obtenemos que  $\widehat{U}_a \supseteq U_b$ . Pero dado que  $U_b \supseteq \text{mnl}(X)$  se sigue que  $b' \in \widehat{U}_a$  y por lo tanto  $a \in \widehat{F}_{b'}$ .

Por 2.4.17,  $\#\widehat{F}_b \geq 2$  y  $\#\widehat{U}_{b'} \geq 2$ . Así  $\#(\widehat{F}_b \cap \widehat{F}_{b'}) \geq 2$  y  $\#(\widehat{U}_b \cap \widehat{U}_{b'}) \geq 2$  contradiciendo 2.7.4. Por consiguiente  $\#\widehat{U}_b \neq 3$  para todo  $b \in \mathcal{B}_X$ .

Por lo tanto  $\#\widehat{U}_b = 2$  para todo  $b \in \mathcal{B}_X$  por 2.4.17. De manera similar, obtenemos que  $\#\widehat{F}_b = 2$  para todo  $b \in \mathcal{B}_X$ .

Sean  $\text{mxl}(X) = \{a_1, a_2, a_3\}$ ,  $\mathcal{B}_X = \{b_1, b_2\}$  y  $\text{mnl}(X) = \{c_1, c_2, c_3\}$ . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $\widehat{F}_{b_1} = \{a_1, a_2\}$  y  $\widehat{U}_{b_1} = \{c_1, c_2\}$ . Probaremos que  $\#\widehat{U}_{a_1} + \#\widehat{U}_{a_2} + \#\widehat{U}_{a_3} \geq 12$  analizando dos casos posibles:  $b_2 < a_3$  y  $b_2 \not< a_3$ .

Si  $b_2 < a_3$  entonces  $\#\widehat{U}_{a_3} \geq \#\widehat{U}_{b_2} + 2 = 4$  por 2.7.2. Y dado que  $b_1 < a_1$  y  $b_1 < a_2$ , también obtenemos que  $\#\widehat{U}_{a_1} \geq 4$  y  $\#\widehat{U}_{a_2} \geq 4$  por 2.7.2. Así  $\#\widehat{U}_{a_1} + \#\widehat{U}_{a_2} + \#\widehat{U}_{a_3} \geq 12$ .

Si  $b_2 \not< a_3$  entonces  $\widehat{F}_{b_2} = \{a_1, a_2\} = \widehat{F}_{b_1}$ . Por 2.7.4,  $\widehat{U}_{b_2} \neq \widehat{U}_{b_1} = \{c_1, c_2\}$ . Por lo tanto  $c_3 < b_2$ . Así  $\widehat{U}_{a_1} = \widehat{U}_{a_2} = \{b_1, b_2, c_1, c_2, c_3\}$  y dado que  $\#\widehat{U}_{a_3} \geq 2$  por 2.4.17 obtenemos que  $\#\widehat{U}_{a_1} + \#\widehat{U}_{a_2} + \#\widehat{U}_{a_3} \geq 12$ .

Por consiguiente  $\#\widehat{U}_{a_1} + \#\widehat{U}_{a_2} + \#\widehat{U}_{a_3} \geq 12$  en cualquier caso. Como antes, sea  $l$  el número de 1-cadenas de  $X$ . Aplicando 2.4.17, obtenemos

$$l = \#\widehat{U}_{a_1} + \#\widehat{U}_{a_2} + \#\widehat{U}_{a_3} + \#\widehat{U}_{b_1} + \#\widehat{U}_{b_2} \geq 12 + 2 + 2 = 16.$$

Ahora, notemos que el número de 2-cadenas de  $X$  es  $\#\widehat{F}_{b_1}\#\widehat{U}_{b_1} + \#\widehat{F}_{b_2}\#\widehat{U}_{b_2} = 8$ . Así

$$\chi(X) = \#X - l + 8 \leq 8 - 16 + 8 = 0$$

y por lo tanto el espacio  $X$  no es débilmente contráctil.  $\square$

Como corolario del teorema anterior obtenemos que el espacio de la figura 2.8 es un espacio topológico débilmente contráctil no contráctil con la mínima cantidad posible de puntos. En el siguiente teorema encontraremos todos los espacios débilmente contráctil no contráctiles de esta cantidad de puntos mínima.

## 2 Problemas de minimalidad

---

**Teorema 2.7.8.** *Sea  $X$  un espacio topológico débilmente contráctil no contráctil tal que  $\#X = 9$ . Entonces  $X$  es homeomorfo al espacio de la figura 2.8 o a su opuesto.*

*Demostración.* Por 2.7.7,  $X$  es un espacio topológico finito  $T_0$  sin beat points. Por 2.4.17,  $\# \text{mxl}(X) \geq 2$ . Supongamos que  $\# \text{mxl}(X) = 2$ . Entonces  $X$  es homeomorfo a  $\mathbb{S}(X - \text{mxl}(X))$  por 2.4.17. Notemos que  $X - \text{mxl}(X)$  no tiene beat points. Dado que  $\#(X - \text{mxl}(X)) = 7$ , de 2.5.7 obtenemos que  $\pi_1(X - \text{mxl}(X), x_0)$  es un grupo libre para todo  $x_0 \in X - \text{mxl}(X)$ . Así  $X - \text{mxl}(X)$  es débilmente contráctil por 2.7.5, lo que contradice a 2.7.7. Por consiguiente  $\# \text{mxl}(X) \geq 3$ . Aplicando este argumento a  $X^{\text{op}}$  obtenemos que  $\# \text{mnl}(X) \geq 3$ .

Sea  $\mathcal{B}_X = X - (\text{mxl}(X) \cup \text{mnl}(X))$ . Del primer ítem de 2.4.17 se sigue que  $\#\mathcal{B}_X \leq 3$ . Por 2.7.6,  $h(X) \geq 2$ . Así  $\mathcal{B}_X \neq \emptyset$ .

Analizaremos tres casos que corresponden a las posibles cardinalidades del conjunto  $\mathcal{B}_X$ .

Caso 1:  $\#\mathcal{B}_X = 1$ . Sea  $b$  el único elemento de  $\mathcal{B}_X$ . Ponemos, como antes,  $n = \# \text{mnl}(X)$  y definimos  $\alpha = \#\widehat{F}_b$  y  $\beta = \#\widehat{U}_b$ . Por 2.4.17,  $\alpha \geq 2$  y  $\beta \geq 2$ . Sea  $\mathcal{S} = \leq \cap (\text{mnl}(X) \times \text{mxl}(X))$ , donde  $\leq$  es la relación de orden usual en  $X$ .

Sean  $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S} \cap (\widehat{U}_b \times \widehat{F}_b)$ ,  $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S} \cap (\widehat{U}_b \times (\text{mxl}(X) - \widehat{F}_b))$  y  $\mathcal{S}_3 = \mathcal{S} \cap ((\text{mnl}(X) - \widehat{U}_b) \times \text{mxl}(X))$ . Claramente,  $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_2$  y  $\mathcal{S}_3$  son conjuntos disjuntos dos a dos y su unión es igual a  $\mathcal{S}$ .

Notemos que  $\#\mathcal{S}_1 = \alpha\beta$ . Además, si  $z \in \widehat{U}_b$  entonces  $\widehat{F}_z \supsetneq F_b$  dado que  $z$  no es un beat point de  $X$ . Por lo tanto  $\widehat{F}_z \cap (\text{mxl}(X) - \widehat{F}_b) \neq \emptyset$  para todo  $z \in \widehat{U}_b$ . Así  $\#\mathcal{S}_2 \geq \beta$ . Por otro lado, de 2.4.17 obtenemos que  $\#\mathcal{S}_3 \geq 2\#(\text{mnl}(X) - \widehat{U}_b) = 2(n - \beta)$ .

Se sigue que

$$\#\mathcal{S} \geq \alpha\beta + \beta + 2(n - \beta) \geq \alpha\beta + 2 + 2(n - \beta) .$$

Procediendo de manera similar obtenemos también que

$$\#\mathcal{S} \geq \alpha\beta + 2 + 2\#(\text{mxl}(X) - \widehat{F}_b) = \alpha\beta + 2 + 2(8 - n - \alpha) .$$

Por lo tanto

$$\#\mathcal{S} \geq \alpha\beta + 2 + 2 \max\{n - \beta, 8 - n - \alpha\} \geq \alpha\beta + 2 + (n - \beta) + (8 - n - \alpha) = \alpha\beta + 10 - \alpha - \beta .$$

Así tenemos que

$$\chi(X) = 9 - (\#\mathcal{S} + \alpha + \beta) + \alpha\beta \leq 9 - \alpha\beta - 10 + \alpha\beta = -1 .$$

Por lo tanto  $X$  no es débilmente contráctil. Se sigue que este caso no es posible.

Caso 2:  $\#\mathcal{B}_X = 2$ . Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $\# \text{mxl}(X) = 3$  y  $\# \text{mnl}(X) = 4$ . Sean  $b_1$  y  $b_2$  los elementos de  $\mathcal{B}_X$ .

Probaremos que  $\mathcal{B}_X$  es una anticadena. En efecto, si  $b_1 < b_2$  entonces  $\#\widehat{F}_{b_1} \geq \#\widehat{F}_{b_2} + 2 \geq 4$  por 2.7.2 y 2.4.17. Así  $\widehat{F}_{b_1} = \{b_2\} \cup \text{mxl}(X)$ . Sea  $c \in \text{mnl}(X) \cap U_{b_1}$ . Entonces  $F_{b_1} \subseteq \widehat{F}_c \subseteq X - \text{mnl}(X) = \mathcal{B}_X \cup \text{mxl}(X) = F_{b_1}$ . Por lo tanto  $\widehat{F}_c = F_{b_1}$  y entonces  $c$  es un beat point de  $X$ , lo que contradice nuestros supuestos. Por consiguiente  $\mathcal{B}_X$  debe ser una anticadena.

## 2.7 Otros problemas de minimalidad

Por lo tanto  $h(X) = 2$ . Para  $j \in \{1, 2\}$ , sean  $\alpha_j = \#\widehat{F}_{b_j}$  y  $\beta_j = \#\widehat{U}_{b_j}$ . Notemos que  $\alpha_j \geq 2$  y  $\beta_j \geq 2$  para todo  $j \in \{1, 2\}$  por 2.4.17. Como en el caso anterior, sea  $\mathcal{S} = \leq \cap(\text{mnl}(X) \times \text{mxl}(X))$ . Tenemos que

$$\chi(X) = 9 - (\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \#\mathcal{S}) + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 7 - \#\mathcal{S} + \sum_{j=1}^2 (\alpha_j - 1)(\beta_j - 1).$$

Analizaremos dos subcasos.

**Caso 2.1:**  $\#(\widehat{F}_{b_1} \cap \widehat{F}_{b_2}) = 1$ . En este caso,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$  y  $\widehat{F}_{b_1} \cup \widehat{F}_{b_2} = \text{mxl}(X)$ . Sea  $a$  el único punto de  $\widehat{F}_{b_2} - \widehat{F}_{b_1}$ .

Probaremos ahora que  $\beta_2 \leq 3$ . Supongamos que  $\beta_2 > 3$ . Entonces  $\beta_2 = 4$  y  $\widehat{U}_{b_2} = \text{mnl}(X)$ . Así  $\widehat{U}_a = U_{b_2}$  y por lo tanto  $a$  es un beat point de  $X$ , lo cual es una contradicción. Por consiguiente  $\beta_2 \leq 3$ .

Probaremos ahora que  $\text{mxl}(X) \subseteq F_c$  para todo  $c \in \widehat{U}_{b_1}$ . Sea  $c \in \widehat{U}_{b_1}$ . Si  $b_2 > c$  entonces  $F_c \supseteq F_{b_1} \cup F_{b_2} \supseteq \text{mxl}(X)$ . Si  $b_2 \not> c$  entonces  $F_{b_1} \subseteq \widehat{F}_c \subseteq \{b_1\} \cup \text{mxl}(X) = F_{b_1} \cup \{a\}$ . Dado que  $c$  no es un beat point de  $X$ , obtenemos que  $\widehat{F}_c = F_{b_1} \cup \{a\}$  y por lo tanto  $\text{mxl}(X) \subseteq F_c$ .

Dado que  $\text{mxl}(X) \subseteq F_c$  para todo  $c \in \widehat{U}_{b_1}$  y aplicando 2.4.17, obtenemos que

$$\#\mathcal{S} \geq 3\#\widehat{U}_{b_1} + 2\#(\text{mnl}(X) - \widehat{U}_{b_1}) = 3\beta_1 + 2(4 - \beta_1) = \beta_1 + 8.$$

Así

$$\chi(X) = 7 - \#\mathcal{S} + \sum_{j=1}^2 (\alpha_j - 1)(\beta_j - 1) \leq 7 - \beta_1 - 8 + \beta_1 - 1 + \beta_2 - 1 = \beta_2 - 3 \leq 0$$

y por lo tanto  $X$  no es débilmente contráctil.

**Caso 2.2:**  $\#(\widehat{F}_{b_1} \cap \widehat{F}_{b_2}) \geq 2$ . Por 2.7.4,  $\#(\widehat{U}_{b_1} \cap \widehat{U}_{b_2}) \leq 1$ . Puesto que  $\#\text{mnl}(X) = 4$ , esto en particular implica que  $\beta_1 + \beta_2 \leq 5$ .

Dado que  $\beta_1 \geq 2$  y  $\beta_2 \geq 2$  obtenemos que  $\widehat{U}_{b_1} - \widehat{U}_{b_2} \neq \emptyset$  y  $\widehat{U}_{b_2} - \widehat{U}_{b_1} \neq \emptyset$ . Sea  $c \in \widehat{U}_{b_1} - \widehat{U}_{b_2}$ . Tenemos que  $F_{b_1} \subseteq \widehat{F}_c \subseteq \{b_1\} \cup \text{mxl}(X)$ . Dado que  $c$  no es un beat point de  $X$  obtenemos que  $\widehat{F}_c \neq F_{b_1}$ . Por consiguiente  $\text{mxl}(X) \not\subseteq F_{b_1}$  lo cual implica que  $\alpha_1 = 2$ . Así  $\#(\text{mxl}(X) - F_{b_1}) = 1$  y dado que  $\widehat{F}_c \neq F_{b_1}$  obtenemos que  $\text{mxl}(X) \subseteq F_c$ .

De manera similar obtenemos que  $\alpha_2 = 2$  y que  $\text{mxl}(X) \subseteq F_d$  para todo  $d \in \widehat{U}_{b_2} - \widehat{U}_{b_1}$ . Así, aplicando 2.4.17, obtenemos que  $\#\mathcal{S} \geq 3 + 3 + 2 + 2 = 10$ .

Por lo tanto

$$\chi(X) = 7 - \#\mathcal{S} + \sum_{j=1}^2 (\alpha_j - 1)(\beta_j - 1) \leq 7 - 10 + \beta_1 - 1 + \beta_2 - 1 = \beta_1 + \beta_2 - 5 \leq 0.$$

Por consiguiente  $X$  no es débilmente contráctil.

**Caso 3:**  $\#\mathcal{B}_X = 3$ . Notemos que  $\#\text{mxl}(X) = \#\text{mnl}(X) = 3$ . Sean  $b_1, b_2$  y  $b_3$  los elementos de  $\mathcal{B}_X$ .

Veamos que  $\mathcal{B}_X$  no es una cadena. Supongamos que sí. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $b_1 < b_2 < b_3$ . Aplicando 2.7.2 y 2.4.17 obtenemos que

$$\#\widehat{F}_{b_1} \geq \#\widehat{F}_{b_2} + 2 \geq \#\widehat{F}_{b_3} + 4 \geq 6$$

## 2 Problemas de minimalidad

pero esto no puede ser posible dado que  $\widehat{F}_{b_1} \subseteq \{b_2, b_3\} \cup \text{mxl}(X)$ . Así  $\mathcal{B}_X$  no es una cadena.

Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $b_1$  y  $b_3$  son incomparables.

Probaremos ahora que  $\mathcal{B}_X$  es una anticadena. Supongamos que no. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $b_2$  y  $b_1$  son comparables, y considerando  $X^{\text{op}}$  si fuera necesario, podemos suponer que  $b_2 > b_1$ . Notemos que  $b_2 \not\prec b_3$  dado que  $\mathcal{B}_X$  no es una cadena. Por lo tanto  $\widehat{F}_{b_2} \subseteq \text{mxl}(X)$ . Por 2.4.17,  $\#\widehat{F}_{b_2} \geq 2$ . Sean  $a_1$  y  $a_2$  elementos distintos de  $\widehat{F}_{b_2}$  y sea  $a_3$  el elemento maximal restante de  $X$ . Por 2.7.2,  $\#\widehat{F}_{b_1} \geq \#\widehat{F}_{b_2} + 2 \geq 4$  y dado que  $b_1$  y  $b_3$  son incomparables se sigue que  $\widehat{F}_{b_1} = \{b_2, a_1, a_2, a_3\}$  y  $\widehat{F}_{b_2} = \{a_1, a_2\}$ .

Ahora, observemos que  $\widehat{F}_{b_3} \subseteq \{b_2, a_1, a_2, a_3\}$  puesto que  $b_1$  y  $b_3$  son incomparables. Afirmamos que  $\widehat{F}_{b_3}$  no es arcoconexo. En efecto, si  $b_3 < b_2$  entonces procediendo como en el párrafo anterior obtenemos que  $\widehat{F}_{b_3} = \{b_2, a_1, a_2, a_3\}$  el cual no es arcoconexo. Y si  $b_3 \not\prec b_2$  entonces  $\widehat{F}_{b_3} \subseteq \text{mxl}(X)$  y por lo tanto  $\widehat{F}_{b_3}$  es un subespacio discreto y  $\#\widehat{F}_{b_3} \geq 2$  por 2.4.17. Así  $\widehat{F}_{b_3}$  no es arcoconexo.

Por 2.4.17,  $\#(\widehat{U}_{b_1} \cap \text{mnl}(X)) \geq 2$ . Sean  $c_1$  y  $c_2$  elementos distintos de  $\widehat{U}_{b_1} \cap \text{mnl}(X)$  y sea  $c_3$  el elemento minimal restante de  $X$ . Dado que  $c_1 < b_1$  y  $c_1$  no es un beat point de  $X$  obtenemos que  $\{b_1, b_2, a_1, a_2, a_3\} = F_{b_1} \subsetneq \widehat{F}_{c_1} \subseteq X - \text{mnl}(X)$ . Por lo tanto  $\widehat{F}_{c_1} = \{b_1, b_2, b_3, a_1, a_2, a_3\}$ . De manera similar,  $\widehat{F}_{c_2} = \{b_1, b_2, b_3, a_1, a_2, a_3\}$ .

De 1.2.71 obtenemos que  $H_1(\widehat{F}_{c_1}) \cong H_1(\widehat{F}_{c_1}, F_{b_1}) \cong \widetilde{H}_0(\widehat{F}_{b_3}) \neq 0$  dado que  $\widehat{F}_{b_3}$  no es arcoconexo.

Aplicando 1.2.71 nuevamente obtenemos que

$$H_2(X) \cong H_2(X, F_{c_2}) \cong H_1(\widehat{F}_{c_1}) \oplus H_1(\widehat{F}_{c_3}) \neq 0$$

y por lo tanto  $X$  no es débilmente contráctil. Por consiguiente  $\mathcal{B}_X$  debe ser una anticadena.

Se sigue que  $h(X) = 2$ . Para  $j \in \{1, 2, 3\}$ , sean  $\alpha_j = \#\widehat{F}_{b_j}$  y  $\beta_j = \#\widehat{U}_{b_j}$ . Notemos que  $\alpha_j \geq 2$  y  $\beta_j \geq 2$  para todo  $j \in \{1, 2, 3\}$  por 2.4.17. Como en los casos previos, tomamos  $\mathcal{S} = \leq \cap(\text{mnl}(X) \times \text{mxl}(X))$ . Así

$$1 = \chi(X) = 9 - \left( \sum_{j=1}^3 \alpha_j + \sum_{j=1}^3 \beta_j + \#\mathcal{S} \right) + \sum_{j=1}^3 \alpha_j \beta_j = 6 - \#\mathcal{S} + \sum_{j=1}^3 (\alpha_j - 1)(\beta_j - 1).$$

Por lo tanto

$$\#\mathcal{S} = 5 + \sum_{j=1}^3 (\alpha_j - 1)(\beta_j - 1) \geq 8.$$

Luego  $\#\mathcal{S} = 8$  o  $\#\mathcal{S} = 9$  y entonces  $\sum_{j=1}^3 (\alpha_j - 1)(\beta_j - 1) \in \{3, 4\}$ .

Por consiguiente al menos cinco de los números  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$  y  $\beta_3$  son iguales a 2 mientras que el restante podría ser igual a 2 o a 3.

Sin pérdida de generalidad y considerando  $X^{\text{op}}$  si fuera necesario, podemos asumir que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 2$ .

Afirmación 1:  $\#(\widehat{F}_{b_k} \cap \widehat{F}_{b_l}) = 1$  para todo  $k, l \in \{1, 2, 3\}$  con  $k \neq l$ .

Supongamos que existen  $k, l \in \{1, 2, 3\}$  con  $k \neq l$  tales que  $\#(\widehat{F}_{b_k} \cap \widehat{F}_{b_l}) = 2$ . Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $\#(\widehat{F}_{b_1} \cap \widehat{F}_{b_2}) = 2$ .

Así  $\#(\widehat{U}_{b_1} \cap \widehat{U}_{b_2}) \leq 1$  por 2.7.4. Dado que  $\# \text{mnl}(X) = 3$  obtenemos que  $\#(\widehat{U}_{b_1} \cap \widehat{U}_{b_2}) = 1$ . Por lo tanto  $\beta_1 = \beta_2 = 2$ . Así  $\widehat{U}_{b_1} \cup \widehat{U}_{b_2} = \text{mnl}(X)$ .

Sean  $a_1$  y  $a_2$  los elementos de  $\widehat{F}_{b_1} \cap \widehat{F}_{b_2}$  y sea  $a_3$  el elemento maximal restante de  $X$ . Notemos que  $U_{a_1} \supseteq \text{mnl}(X)$  y  $U_{a_2} \supseteq \text{mnl}(X)$ .

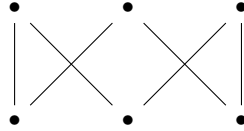
Si  $\{a_1, a_2\} \subseteq F_{b_3}$  entonces  $\#(\widehat{U}_{b_1} \cap \widehat{U}_{b_3}) \leq 1$  y  $\#(\widehat{U}_{b_2} \cap \widehat{U}_{b_3}) \leq 1$  por 2.7.4. Así  $\#(\widehat{U}_{b_1} \cap \widehat{U}_{b_3}) = 1$  y  $\#(\widehat{U}_{b_2} \cap \widehat{U}_{b_3}) = 1$ . Por lo tanto  $|\mathcal{K}(X - \{a_3\})|$  es homeomorfo a  $S^2$  contradiciendo 2.7.3. Se sigue que  $\{a_1, a_2\} \not\subseteq F_{b_3}$ .

Por lo tanto,  $a_3 \in \widehat{F}_{b_3}$ . Dado que  $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ , obtenemos que  $b_1 \not\prec a_3$  y  $b_2 \not\prec a_3$ . Y dado que  $a_3$  no es un beat point de  $X$  obtenemos que  $U_{b_3} \subsetneq \widehat{U}_{a_3} \subseteq \{b_3\} \cup \text{mnl}(X)$ . Pero  $\#U_{b_3} \geq 3$ . Así  $\#U_{b_3} = 3$ ,  $\beta_3 = 2$  y  $\widehat{U}_{a_3} = \{b_3\} \cup \text{mnl}(X)$ . Por lo tanto  $\mathcal{S} = \text{mnl}(X) \times \text{mxl}(X)$ . Luego

$$\chi(X) = 6 - \#\mathcal{S} + \sum_{j=1}^3 (\alpha_j - 1)(\beta_j - 1) = 6 - 9 + 3 = 0$$

lo cual es una contradicción. Esto prueba la Afirmación 1.

Por lo tanto  $X - \text{mnl}(X)$  es homeomorfo al siguiente espacio



Afirmación 2: Si  $k, l \in \{1, 2, 3\}$  son números distintos tales que  $\beta_k = \beta_l = 2$  entonces  $\#(\widehat{U}_{b_k} \cap \widehat{U}_{b_l}) = 1$ .

Supongamos que existen números distintos  $k, l \in \{1, 2, 3\}$  tales que  $\beta_k = \beta_l = 2$  y  $\#(\widehat{U}_{b_k} \cap \widehat{U}_{b_l}) = 2$ . Sea  $m$  el elemento restante de  $\{1, 2, 3\}$  y sean  $c_1$  y  $c_2$  los elementos de  $\widehat{U}_{b_k} \cap \widehat{U}_{b_l}$ . Notemos que  $\text{mxl}(X) \subseteq F_{c_1} \cap F_{c_2}$ . Si  $\{c_1, c_2\} \subseteq \widehat{U}_{b_m}$  entonces  $|\mathcal{K}(X - \{c_3\})|$  es homeomorfo a  $S^2$  contradiciendo 2.7.3. Así  $\{c_1, c_2\} \not\subseteq \widehat{U}_{b_m}$ . Por lo tanto  $\beta_m = 2$  y  $c_3 \in U_{b_m}$ . Si  $c_3 < b_k$  o  $c_3 < b_l$  entonces  $\text{mxl}(X) \subseteq F_{c_3}$ . En otro caso, dado que  $c_3$  no es un beat point de  $X$  obtenemos que  $F_{b_m} \subsetneq \widehat{F}_{c_3} \subseteq \{b_m\} \cup \text{mxl}(X)$ . Como  $\#F_{b_m} = 3$ , se sigue que  $\widehat{F}_{c_3} = \{b_m\} \cup \text{mxl}(X)$  y por lo tanto  $\text{mxl}(X) \subseteq F_{c_3}$ . Así  $\text{mxl}(X) \subseteq F_{c_3}$  en cualquier caso.

Por lo tanto  $\mathcal{S} = \text{mnl}(X) \times \text{mxl}(X)$ . Luego

$$\chi(X) = 6 - \#\mathcal{S} + \sum_{j=1}^3 (\alpha_j - 1)(\beta_j - 1) = 6 - 9 + 3 = 0$$

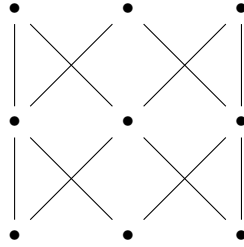
lo cual es una contradicción. Esto prueba la Afirmación 2.

Ahora, sean  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  los únicos elementos de  $\widehat{F}_{b_1} \cap \widehat{F}_{b_2}$ ,  $\widehat{F}_{b_1} \cap \widehat{F}_{b_3}$  y  $\widehat{F}_{b_2} \cap \widehat{F}_{b_3}$  respectivamente. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $\beta_1 = \beta_3 = 2$ . Por la Afirmación 2 se sigue que  $\#(\widehat{U}_{b_1} \cap \widehat{U}_{b_3}) = 1$ . Sean  $c_1$ ,  $c_2$  y  $c_3$  los únicos elementos de  $\widehat{U}_{b_1} - \widehat{U}_{b_3}$ ,  $\widehat{U}_{b_1} \cap \widehat{U}_{b_3}$  y  $\widehat{U}_{b_3} - \widehat{U}_{b_1}$  respectivamente.

## 2 Problemas de minimalidad

---

Si  $\beta_2 = 2$  entonces  $\#(\widehat{U}_{b_2} \cap \widehat{U}_{b_1}) = 1$  y  $\#(\widehat{U}_{b_2} \cap \widehat{U}_{b_3}) = 1$  por la Afirmación 2. Entonces  $X$  es homeomorfo al siguiente espacio



Por lo tanto  $|\mathcal{K}(X)|$  es homotópicamente equivalente a  $S^1$  y entonces  $X$  no es débilmente contráctil.

Así  $\beta_2 = 3$  y por lo tanto  $X$  es homeomorfo al espacio de la figura 2.8. □

## Capítulo 3

# Cofibraciones entre espacios finitos

### 3.1 Introducción

En este capítulo damos una caracterización de las cofibraciones entre espacios topológicos finitos. Esta caracterización es puramente combinatoria y sorprendentemente simple: si  $X$  es un espacio topológico finito conexo y  $A \subseteq X$  es un subespacio no vacío entonces la inclusión  $i: A \hookrightarrow X$  es una cofibración si y sólo si existe una retracción  $r: X \rightarrow A$  de  $i$  tal que  $ir \leq \text{Id}_X$ . Más aún, probamos que si  $X$  es un espacio topológico finito  $T_0$ , entonces dicha retracción existe si y sólo si el subespacio  $A$  es un *dbp-retracto* de  $X$ , es decir, si puede obtenerse eliminando sucesivamente down beat points de  $X$ . Esto es equivalente a que para todo  $x \in X - A$ , el conjunto  $U_x \cap A$  tenga máximo, lo que puede verificarse algorítmicamente de manera muy sencilla.

Probamos además que una inclusión  $i: A \hookrightarrow X$  entre espacios topológicos finitos  $A$  y  $X$  es una cofibración si y sólo si la función inducida entre los cocientes de Kolmogorov de  $A$  y de  $X$  es una cofibración, lo que permite aplicar el criterio mencionado arriba a funciones entre espacios no necesariamente  $T_0$ .

La primera sección de este capítulo está abocada al desarrollo de la teoría de *dbp-retractos*, los cuales resultan interesantes en sí mismos. La segunda sección, en cambio, se dedicará al estudio de cofibraciones entre espacios finitos y utilizará varios de los resultados de *dbp-retractos* desarrollados previamente.

Los resultados de este capítulo pueden encontrarse en [\[23\]](#)

### 3.2 Bp-retractos de espacios topológicos finitos $T_0$

En esta sección, introducimos los conceptos de *dbp-retractos* y *ubp-retractos* de espacios topológicos finitos  $T_0$  y probamos algunas de sus propiedades, que serán luego utilizadas en la sección 3.3.

**Definición 3.2.1.** Sea  $X$  un espacio topológico finito  $T_0$  y sea  $A \subseteq X$ . Diremos que  $A$  es un *dbp-retracto* (resp. *ubp-retracto*) de  $X$  si  $A$  puede obtenerse de  $X$  removiendo sucesivamente down beat points (resp. up beat points), esto es, si existen  $n \in \mathbb{N}_0$  y una sucesión  $X = X_0 \supseteq X_1 \supseteq \cdots \supseteq X_n = A$  de subespacios de  $X$  tales que, para todo



### 3 Cofibraciones entre espacios finitos

---

$i \in \{1, \dots, n\}$ , el espacio  $X_i$  es obtenido de  $X_{i-1}$  removiendo un único down beat point (resp. up beat point) de  $X_{i-1}$ .

Diremos que  $A$  es un *bp-retracto* de  $X$  si  $A$  es un dbp-retracto o un ubp-retracto de  $X$ .

En particular,  $X$  es un dbp-retracto y un ubp-retracto de sí mismo.

*Observación 3.2.2.* Si  $Y$  es un espacio topológico finito  $T_0$ ,  $X$  es un dbp-retracto de  $Y$  y  $A$  es un dbp-retracto de  $X$ , entonces  $A$  es un dbp-retracto de  $Y$ .

*Observación 3.2.3.* Notemos que si  $X$  es un espacio topológico finito  $T_0$  y  $A$  es un dbp-retracto de  $X$  entonces los puntos minimales de  $X$  pertenecen a  $A$ , dado que no pueden ser down beat points de ningún subespacio de  $X$ . En particular,  $A$  debe ser denso en  $X$ .

*Observación 3.2.4.* Si  $X$  es un espacio topológico finito  $T_0$ , entonces un subespacio  $A$  de  $X$  es un ubp-retracto de  $X$  si y sólo si  $A^{\text{op}}$  es un dbp-retracto de  $X^{\text{op}}$ .

*Observación 3.2.5.* De la proposición 1.2.26, se sigue que los bp-retractos son retractos por deformación fuerte.

A continuación, probaremos algunos resultados para dbp-retractos de espacios topológicos finitos  $T_0$ . Resultados análogos valen para ubp-retractos por 3.2.4.

**Teorema 3.2.6.** *Sea  $X$  un espacio topológico finito  $T_0$ , sea  $A$  un subespacio de  $X$  y sea  $i: A \rightarrow X$  la función inclusión. Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

- (1)  $A$  es un dbp-retracto de  $X$ .
- (2) Existe una función continua  $f: X \rightarrow X$  tal que  $f \leq \text{Id}_X$ ,  $f^2 = f$  y  $f(X) = A$ .
- (3) Existe una única función continua  $f: X \rightarrow X$  tal que  $f \leq \text{Id}_X$ ,  $f^2 = f$  y  $f(X) = A$ .
- (4) Existe una retracción  $r: X \rightarrow A$  de  $i$  tal que  $ir \leq \text{Id}_X$ .
- (5) Existe una única retracción  $r: X \rightarrow A$  de  $i$  tal que  $ir \leq \text{Id}_X$ .

*Demostración.* Probaremos que (1)  $\Rightarrow$  (4)  $\Rightarrow$  (5)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (1).

La implicación (1)  $\Rightarrow$  (4) se sigue de la demostración de 1.2.26.

Mostraremos que (4)  $\Rightarrow$  (5). Para  $k = 1, 2$ , sea  $r_k: X \rightarrow A$  una retracción de  $i$  tal que  $ir_k \leq \text{Id}_X$ . Queremos probar que  $r_1 = r_2$ . Sea  $x \in X$ . Dado que  $r_2(x) \in A$  y  $r_2(x) \leq x$  se sigue que  $r_2(x) = r_1 r_2(x) \leq r_1(x)$ . Similarmente,  $r_1(x) \leq r_2(x)$  y así,  $r_1(x) = r_2(x)$ . Por consiguiente,  $r_1 = r_2$ . La prueba de que (2)  $\Rightarrow$  (3) es similar.

Veremos ahora que (5)  $\Rightarrow$  (2). Supongamos que existe una única retracción  $r: X \rightarrow A$  de  $i$  tal que  $ir \leq \text{Id}_X$ . Es claro que  $(ir)^2 = ir$  y que  $ir(X) = A$ .

Dado que (3)  $\Rightarrow$  (2), para probar que (3)  $\Rightarrow$  (1), es suficiente probar que (2)  $\Rightarrow$  (1). Sea entonces  $f: X \rightarrow X$  una función continua tal que  $f \leq \text{Id}_X$ ,  $f^2 = f$  y  $f(X) = A$ .

Sea  $W = \{x \in X : f(x) < x\}$ . Si  $W = \emptyset$  entonces  $X = f(X) = A$  y el resultado se sigue.

Supongamos que  $W \neq \emptyset$  y tomemos  $x_0 \in \text{mnl}(W)$ . Dado que  $x_0 \in W$ ,  $f(x_0) < x_0$ . Afirmamos que  $f(x_0) = \max(\bar{U}_{x_0})$ . En efecto, si  $x_1 < x_0$  entonces  $x_1 \notin W$  y por lo tanto  $x_1 = f(x_1) \leq f(x_0)$ . Se sigue que  $x_0$  es un down beat point de  $X$ .

### 3.2 Bp-retractos de espacios topológicos finitos $T_0$

Sea  $X' = X - \{x_0\}$ . Así,  $X'$  es obtenido de  $X$  eliminando un único down beat point. Dado que  $f \circ f = f$  se sigue que  $x_0 \notin f(X)$ , y por lo tanto, podemos restringir  $f$  a una función  $f': X' \rightarrow X'$ . Es claro que  $f' \leq \text{Id}_{X'}$  y que  $f' \circ f' = f'$ . Más aún,  $\text{Im } f' = \text{Im } f = A$  dado que  $f(x_0) = f(f(x_0)) \in f(X')$ . El resultado se sigue por un argumento inductivo.  $\square$

*Observación 3.2.7.* Sea  $X$  un espacio topológico finito  $T_0$ , sea  $A$  un dbp-retracto de  $X$  y sea  $i: A \rightarrow X$  la función inclusión. De la prueba de 3.2.6, es claro que la única función continua  $f: X \rightarrow X$  tal que  $f \leq \text{Id}_X$ ,  $f^2 = f$  y  $f(X) = A$  y la única retracción  $r: X \rightarrow A$  de  $i$  tal que  $ir \leq \text{Id}_X$  están relacionadas por  $f = ir$ . Equivalentemente,  $r$  es la correstricción de  $f$  a su imagen  $A$ .

En [63] se definen las *down-retracciones* (resp. *up-retracciones*) de un poset  $P$  como los morfismos de órdenes  $r: P \rightarrow P$  tales que  $r \circ r = r$  y  $r \leq \text{Id}_P$  (resp.  $r \circ r = r$  y  $r \geq \text{Id}_P$ ). Desde luego, las down-retracciones de un poset finito  $X$  son precisamente las funciones  $f = ir$  de los incisos (2) a (5) del teorema anterior.

**Teorema 3.2.8.** *Sea  $X$  un espacio topológico finito  $T_0$  y sea  $A$  un subespacio de  $X$ . Entonces,  $A$  es un dbp-retracto de  $X$  si y sólo si  $U_x^X \cap A$  tiene máximo para todo  $x \in X$ . Equivalentemente,  $A$  es un dbp-retracto de  $X$  si y sólo si  $U_x^X \cap A$  tiene máximo para todo  $x \in X - A$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $A$  es un dbp-retracto de  $X$ . Sea  $r: X \rightarrow A$  la única retracción de  $i$  tal que  $ir \leq \text{Id}_X$  y sea  $x \in X$ . Es claro que  $r(x) \in U_x^X \cap A$ . Ahora, si  $y \in U_x^X \cap A$  entonces  $y = r(y) \leq r(x)$  puesto que  $y \leq x$ . Por consiguiente,  $r(x)$  es el máximo de  $U_x^X \cap A$ .

Ahora, supongamos que  $U_x^X \cap A$  tiene máximo para todo  $x \in X - A$ . Notemos que  $a$  es el máximo de  $U_a^X \cap A$  para todo  $a \in A$ . Sea  $r: X \rightarrow A$  la función definida por  $r(x) = \max(U_x^X \cap A)$ . Si  $x \leq x'$  entonces  $U_x^X \subseteq U_{x'}^X$  y por lo tanto  $r(x) \leq r(x')$ . Se sigue que  $r$  es continua. Es claro que  $ri = \text{Id}_A$  y que  $ir \leq \text{Id}_X$ . Por 3.2.6, se sigue que  $A$  es un dbp-retracto de  $X$ .  $\square$

**Proposición 3.2.9.** *Sea  $Y$  un espacio topológico finito  $T_0$ , sea  $X \subseteq Y$  y sea  $A \subseteq X$  un dbp-retracto de  $Y$ . Entonces  $A$  es un dbp-retracto de  $X$ .*

*Demostración.* Sean  $i: A \rightarrow X$  y  $j: X \rightarrow Y$  las funciones inclusión y sea  $r: Y \rightarrow A$  una retracción de  $ji$  tal que  $jir \leq \text{Id}_Y$ . Es claro que  $rji = \text{Id}_A$  y que  $irj \leq \text{Id}_X$ . El resultado se sigue del teorema 3.2.6.  $\square$

**Corolario 3.2.10.** *Sea  $Y$  un espacio topológico finito  $T_0$ , sea  $X$  un dbp-retracto de  $Y$  y sea  $A \subseteq X$ . Entonces  $A$  es un dbp-retracto de  $X$  si y sólo si  $A$  es un dbp-retracto de  $Y$ .*

*Demostración.* Inmediato a partir de 3.2.2 y 3.2.9.  $\square$

**Proposición 3.2.11.** *Sea  $X$  un espacio topológico finito  $T_0$  y sean  $A_1$  y  $A_2$  dos dbp-retractos de  $X$ . Para  $k = 1, 2$ , sea  $i_k: A_k \rightarrow X$  la inclusión y sea  $r_k: X \rightarrow A_k$  la única retracción de  $i_k$  tal que  $i_k r_k \leq \text{Id}_X$ . Entonces  $A_1 \subseteq A_2$  si y sólo si  $i_1 r_1 \leq i_2 r_2$ .*

### 3 Cofibraciones entre espacios finitos

---

*Demostración.* Supongamos que  $A_1 \subseteq A_2$  y sea  $i: A_1 \rightarrow A_2$  la inclusión. Por 3.2.9,  $A_1$  es un dbp-retracto de  $A_2$ . Por lo tanto, existe una retracción  $r$  de  $i$  tal que  $ir \leq \text{Id}_{A_2}$ . Ahora, dado que  $i_2i = i_1$ , se sigue que  $rr_2i_1 = rr_2i_2i = \text{Id}_{A_1}$  y  $i_1rr_2 = i_2ir_2 \leq i_2r_2 \leq \text{Id}_X$ . Por (5) de 3.2.6, se sigue que  $rr_2 = r_1$ . Así,  $i_1r_1 = i_2ir_2 \leq i_2r_2$ .

Ahora, supongamos que  $i_1r_1 \leq i_2r_2$  y sea  $w \in A_1$ . Entonces  $w = i_1r_1(w) \leq i_2r_2(w) \leq w$  y se sigue que  $i_2r_2(w) = w$ . Por lo tanto,  $w \in A_2$  como queríamos probar.  $\square$

**Corolario 3.2.12.** *Sea  $X$  un espacio topológico finito  $T_0$  y, para  $k = 1, 2$ , sea  $f_k: X \rightarrow X$  una función continua tal que  $f_k \circ f_k = f_k$  y  $f_k \leq \text{Id}_X$ . Entonces  $f_1 \leq f_2$  si y sólo si  $f_1(X) \subseteq f_2(X)$ .*

*Demostración.* Por 3.2.6,  $f_1(X)$  y  $f_2(X)$  son dbp-retractos de  $X$ . El resultado se sigue de 3.2.7 y 3.2.11.  $\square$

**Definición 3.2.13.** Sea  $X$  un espacio topológico finito  $T_0$  y sea  $A$  un subespacio de  $X$ . Definimos

$$\mathcal{F}(X, A) = \{f \in X^X : f \leq \text{Id}_X, f^2 = f, \text{ y } A \subseteq f(X)\}$$

y

$$\Omega(X, A) = \{W \subseteq X : W \text{ es un dbp-retracto de } X \text{ y } A \subseteq W\}.$$

El conjunto  $\mathcal{F}(X, A)$  será considerado como un poset, subposet de  $X^X$ , mientras que el conjunto  $\Omega(X, A)$  será considerado como un poset con el orden dado por la inclusión.

*Observación 3.2.14.* Sea  $X$  un espacio topológico finito  $T_0$ . Por 3.2.3, es claro que  $\Omega(X, \emptyset) = \Omega(X, A)$  para todo  $A \subseteq \text{mnl}(X)$ .

**Proposición 3.2.15.** *Sea  $X$  un espacio topológico finito  $T_0$  y sea  $A$  un subespacio de  $X$ . Entonces  $\mathcal{F}(X, A)$  y  $\Omega(X, A)$  son posets isomorfos.*

*Demostración.* Por 3.2.6, existe una biyección  $\varphi: \mathcal{F}(X, A) \rightarrow \Omega(X, A)$  definida por  $\varphi(f) = f(X)$  para toda  $f \in \mathcal{F}(X, A)$ . Por 3.2.12,  $\varphi$  y su inversa son morfismos de orden. El resultado se sigue.  $\square$

Sea  $X$  un espacio topológico finito  $T_0$  y sea  $f: X \rightarrow X$  una función continua tal que  $f \leq \text{Id}_X$ . Dado que  $f \geq f^2 \geq f^3 \geq \dots$  y  $X^X$  es finito, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $f^{N+1} = f^N$ . Es claro que  $f^n = f^N$  para todo  $n \geq N$ . Esto motiva la siguiente definición.

**Definición 3.2.16.** Sea  $X$  un espacio topológico finito  $T_0$  y sea  $f: X \rightarrow X$  una función continua tal que  $f \leq \text{Id}_X$ . Definimos  $f^\infty$  por  $f^N$  donde  $N \in \mathbb{N}$  es tal que  $f^N = f^{N+1}$ .

El siguiente lema reúne algunas propiedades simples de la construcción realizada en la definición anterior.

**Lema 3.2.17.** *Sea  $X$  un espacio topológico finito  $T_0$  y sean  $f, g: X \rightarrow X$  funciones continuas tales que  $f \leq \text{Id}_X$  y  $g \leq \text{Id}_X$ . Entonces:*

1.  $f^\infty \leq f \leq \text{Id}_X$ .
2.  $f^\infty \circ f^\infty = f^\infty$ .

3.  $f^\infty(X)$  es un dbp–retracto de  $X$ .
4. Para todo  $x \in X$ ,  $x \in f^\infty(X)$  si y sólo si  $f(x) = x$ .
5. Si  $f \leq g$  entonces  $f^\infty \leq g^\infty$ .
6.  $(fg)^\infty(X) = f^\infty(X) \cap g^\infty(X)$ .

*Demostración.* Las primeras dos afirmaciones se siguen fácilmente de la definición de  $f^\infty$ . La tercera afirmación se sigue de las dos primeras y del teorema 3.2.6. Las pruebas de (4) y (5) son sencillas y serán omitidas.

Ahora probaremos (6). Dado que  $fg \leq f$ ,  $(fg)^\infty \leq f^\infty$ . Así,  $(fg)^\infty(X) \subseteq f^\infty(X)$  por 3.2.12. Similarmente,  $(fg)^\infty(X) \subseteq g^\infty(X)$ . Por lo tanto,  $(fg)^\infty(X) \subseteq f^\infty(X) \cap g^\infty(X)$ . Ahora, si  $x \in f^\infty(X) \cap g^\infty(X)$  entonces  $f(x) = x = g(x)$  por ítem (4). Así,  $x = (fg)^\infty(x) \in (fg)^\infty(X)$ .  $\square$

**Proposición 3.2.18.** *Sea  $X$  un espacio topológico finito  $T_0$  y sea  $A \subseteq X$ .*

*Entonces, para todas  $f, g \in \mathcal{F}(X, A)$ :*

1.  $(fg)^\infty \in \mathcal{F}(X, A)$ , y
2.  $(fg)^\infty(X) = f(X) \cap g(X)$ .

*Demostración.* Sean  $f, g \in \mathcal{F}(X, A)$ . Notemos que  $f^\infty = f$  y  $g^\infty = g$ . Por (6) de 3.2.17 tenemos que

$$A \subseteq f(X) \cap g(X) = f^\infty(X) \cap g^\infty(X) = (fg)^\infty(X),$$

de donde la proposición (2) se sigue. La proposición (1) se sigue fácilmente de (1) y (2) de 3.2.17.  $\square$

**Proposición 3.2.19.** *Sea  $X$  un espacio topológico finito  $T_0$  y sea  $A \subseteq X$ .*

*Entonces  $\Omega(X, A)$  es cerrado por intersecciones. En particular,  $\Omega(X, A)$  tiene mínimo.*

*Demostración.* Sean  $W_1, W_2 \in \Omega(X, A)$ . Basta probar que  $W_1 \cap W_2$  es un dbp–retracto de  $X$ . Sea  $\varphi$  como en la prueba de 3.2.15 y sea  $f_k = \varphi^{-1}(W_k)$  para  $k = 1, 2$ . Por 3.2.18, tenemos que  $W_1 \cap W_2 = f_1(X) \cap f_2(X) = (f_1 f_2)^\infty(X)$ . El resultado se sigue del ítem (3) de 3.2.17.  $\square$

*Observación 3.2.20.* La proposición anterior muestra que todo espacio topológico finito  $T_0$   $X$  tiene un dbp–retracto mínimo, que es el elemento mínimo de  $\Omega(X, \emptyset)$ . Este resultado puede encontrarse en [63, Demostración de Teorema 4.25].

**Corolario 3.2.21.** *Sea  $X$  un espacio topológico finito  $T_0$  y sean  $A$  y  $B$  dos dbp–retractos de  $X$ . Entonces  $A \cap B$  es un dbp–retracto de  $X$ .*

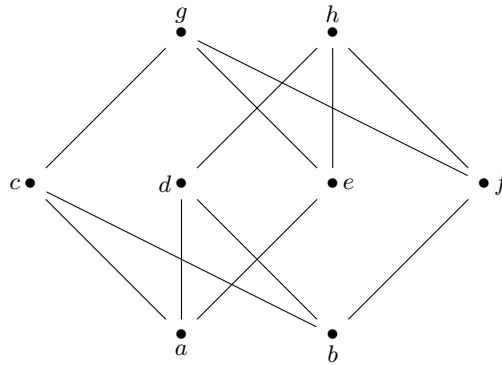
*Observación 3.2.22.* Sea  $X$  un espacio topológico finito  $T_0$  y sea  $A$  un subespacio de  $X$ . La proposición 3.2.19 implica que  $A$  es un dbp–retracto de  $X$  si y sólo si  $A$  es el mínimo de  $\Omega(X, A)$ . De 3.2.9 se sigue que  $A$  es un dbp–retracto de  $X$  si y sólo si cualquier sucesión de espacios que se obtengan eliminando sucesivamente down beat points de  $X$  que no pertenezcan a  $A$ , acaba en el subespacio  $A$  cuando todos estos beat points han sido

### 3 Cofibraciones entre espacios finitos

eliminados. Por consiguiente, este procedimiento da un algoritmo eficiente para decidir cuando un subespacio de un espacio topológico finito  $T_0 X$  es un dbp-retracto de  $X$ .

Observemos que el teorema 3.2.8 nos da otro algoritmo eficiente para determinar esto mismo. Estos dos algoritmos son esencialmente equivalentes dado que, considerando una extensión lineal del orden parcial de  $X - A$ , el algoritmo dado por 3.2.8 es equivalente a la identificación (y eliminación), en orden creciente, de down beat points de  $X$  que no están en  $A$ .

**Ejemplo 3.2.23.** Sea  $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$  el espacio  $T_0$  que corresponde al siguiente diagrama de Hasse:



Sea  $A = \{a, b, c, d\}$  y sea  $B = \{a, b, d, g\}$ , ambos de ellos considerados como subespacios de  $X$ . Podemos obtener el subespacio  $A$  de  $X$  por eliminación sucesiva de los down beat points  $e, f, g$  y  $h$ . Por lo tanto,  $A$  es un dbp-retracto de  $X$ .

Ahora, podemos obtener  $B$  por eliminación sucesiva de los beat points  $e, f, h$  y  $c$ . Así,  $B$  es un retracto por deformación fuerte de  $X$ . Sin embargo, el conjunto  $\{a, b, c, d, g\}$  es minimal, con respecto a la inclusión, entre todos los dbp-retractos de  $X$  que contienen a  $B$ . Este dbp-retracto no es igual a  $B$ , y por lo tanto  $B$  no es un dbp-retracto de  $X$ . Observemos que la misma conclusión se obtiene aplicando 3.2.8 y notando que el conjunto  $U_c^X \cap B$  no tiene máximo.

### 3.3 Caracterización de cofibraciones entre espacios topológicos finitos

En esta sección, obtendremos una caracterización combinatoria simple de cofibraciones entre espacios topológicos finitos y mostraremos como se relaciona con la noción de dbp-retractos de la sección 3.2.

El lema 3.3.1 y su prueba, que desarrollamos a continuación, están fuertemente inspirados en el lema 1.3.12 de Strøm ([70, Lema 3]). Como anunciamos antes, hemos cambiado la hipótesis de que  $X \times \{0\} \cup A \times I$  sea un retracto de  $X \times I$  de 1.3.12, por una mucho más conveniente en el contexto de nuestro trabajo: que  $A$  sea un espacio topológico finito.

Más aún, por 1.3.13, la hipótesis original de Strøm vale si y sólo si la función inclusión  $A \hookrightarrow X$  es una cofibración. Así, de la caracterización de cofibraciones entre espacios

### 3.3 Caracterización de cofibraciones entre espacios finitos

---

finitos que daremos en esta sección, podemos construir numerosos ejemplos de inclusiones  $A \hookrightarrow X$  para las cuales puede aplicarse 3.3.1 pero no 1.3.12.

**Lema 3.3.1.** *Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $A$  un subespacio finito de  $X$ . Entonces, un subconjunto  $C$  de  $X \times \{0\} \cup A \times I$  es abierto en  $X \times \{0\} \cup A \times I$  si y sólo si  $C \cap X \times \{0\}$  es abierto en  $X \times \{0\}$  y  $C \cap A \times I$  es abierto en  $A \times I$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $C \cap X \times \{0\}$  es abierto en  $X \times \{0\}$  y que  $C \cap A \times I$  es abierto en  $A \times I$ . Sea  $Y = X \times \{0\} \cup A \times I$ . Sea  $U = \{x \in X : (x, 0) \in C\}$ . Es claro que  $U$  es abierto en  $X$ . Dado que  $U \cap A$  es finito y que  $C \cap A \times I$  es abierto en  $A \times I$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $(U \cap A) \times [0, \varepsilon) \subseteq C$ .

Es fácil ver que  $C = ((U \times [0, \varepsilon)) \cap Y) \cup (C \cap (A \times (0, 1]))$ .

Más aún,  $(U \times [0, \varepsilon)) \cap Y$  es claramente abierto en  $Y$ . Por otro lado, dado que  $C \cap (A \times (0, 1])$  es abierto en  $A \times (0, 1]$  y  $A \times (0, 1]$  es abierto en  $Y$ , se sigue que  $C \cap (A \times (0, 1])$  es abierto en  $Y$ . Así,  $C$  es abierto en  $Y$ .

La recíproca es clara. □

La siguiente proposición se sigue fácilmente del lema previo.

**Proposición 3.3.2.** *Sean  $X$  y  $Z$  espacios topológicos y sea  $A$  un subespacio finito de  $X$ . Sean  $f: X \rightarrow Z$  y  $H: A \times I \rightarrow Z$  dos funciones continuas tales que  $H(a, 0) = f(a)$  para todo  $a \in A$ . Entonces, la función  $\phi: X \times \{0\} \cup A \times I \rightarrow Z$  definida por*

$$\phi(x, t) = \begin{cases} f(x) & \text{si } t = 0, \\ H(x, t) & \text{si } x \in A \end{cases}$$

*es continua.*

*Equivalentemente,  $X \times \{0\} \cup A \times I$  es el cilindro mapeante de la función inclusión  $A \hookrightarrow X$ .*

De las proposiciones 1.3.7 y 3.3.2 obtenemos de manera inmediata el siguiente corolario.

**Corolario 3.3.3.** *Sea  $X$  un espacio topológico, sea  $A$  un subespacio finito de  $X$  y sea  $i: X \times \{0\} \cup A \times I \rightarrow X \times I$  la función inclusión. Entonces la inclusión  $A \hookrightarrow X$  es una cofibración si y sólo si existe una retracción  $r$  de  $i$ .*

*Observación 3.3.4.* El corolario anterior es un caso particular de 1.3.13. Aquí ha sido obtenido de manera considerablemente más simple que en [70].

Necesitaremos el siguiente resultado (cf. [5, Observación 2.3.3]), cuya demostración es muy simple y por lo tanto será omitida.

**Lema 3.3.5.** *Sea  $X$  un espacio de Alexandroff conexo, sea  $Y$  un espacio  $T_1$  y sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua. Entonces  $f$  es una función constante.*

El siguiente es uno de los resultados principales de esta sección.

**Teorema 3.3.6.** *Sea  $X$  un espacio topológico finito conexo y sea  $A$  un subespacio no vacío de  $X$ . Entonces, la inclusión  $i: A \hookrightarrow X$  es una cofibración si y sólo si existe una retracción  $r: X \rightarrow A$  de  $i$  tal que  $ir \leq \text{Id}_X$ .*

### 3 Cofibraciones entre espacios finitos

---

*Demostración.* Sea  $Y = X \times \{0\} \cup A \times I$  y sea  $\iota: Y \rightarrow X \times I$  la inclusión. Probaremos que  $\iota$  tiene una retracción si y sólo si  $i$  tiene una retracción  $r$  tal que  $ir \leq \text{Id}_X$ . El teorema se seguirá entonces de 3.3.3.

Supongamos que  $\iota$  tiene una retracción  $\rho$ . Sean  $p_X: X \times I \rightarrow X$  y  $p_I: X \times I \rightarrow I$  las proyecciones canónicas. Recordemos que, para cada  $t \in I$ , tenemos una función continua  $i_t: X \rightarrow X \times I$  definida por  $i_t(x) = (x, t)$  para todo  $x \in X$  (ver subsección 1.1.2). Notemos que  $p_I \rho i_t$  es una función continua de  $X$  a  $I$ , y por lo tanto, es una función constante (3.3.5). Ahora, si  $a \in A$ ,  $p_I \rho i_t(a) = p_I \rho(a, t) = p_I(a, t) = t$ . Se sigue que  $p_I \rho i_t(x) = t$  para todo  $x \in X$ . En particular, la función  $\iota \rho$  respeta la segunda coordenada.

Sea  $\phi = (p_X \iota \rho)^\sharp: I \rightarrow X^X$  la función inducida por la función  $p_X \iota \rho: X \times I \rightarrow X$  por la ley exponencial. Es claro que  $\phi$  es continua y que  $\phi(0) = \text{Id}_X$ . Por lo tanto,  $0 \in \phi^{-1}(U_{\text{Id}_X})$  y así, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\phi(\varepsilon) \leq \text{Id}_X$ . Dado que  $\iota \rho$  respeta la segunda coordenada, es evidente que  $\phi(\varepsilon)(x) \in A$  para todo  $x \in X$ . Por lo tanto, podemos restringir  $\phi(\varepsilon)$  a una función  $r: X \rightarrow A$ , y es claro que  $ir = \phi(\varepsilon) \leq \text{Id}_X$ . Dado que  $\iota \rho$  es la identidad en  $A \times I$ , se sigue que  $ri = \text{Id}_A$ .

Para la recíproca, supongamos que existe una retracción  $r$  de  $i$  tal que  $ir \leq \text{Id}_X$ . Sea  $\alpha: I \rightarrow X^X$  el camino en  $X^X$  definido por

$$\alpha(t) = \begin{cases} \text{Id}_X & \text{si } t = 0, \\ ir & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Sea  $\alpha^\flat: X \times I \rightarrow X$  la función inducida por  $\alpha$  y la ley exponencial.

Como antes, sea  $p_I: X \times I \rightarrow I$  la proyección canónica y sea  $\beta: X \times I \rightarrow X \times I$  la función inducida por  $\alpha^\flat$  y  $p_I$ . Es fácil verificar que  $\text{Im } \beta \subseteq Y$ . No es difícil ver que la correstricción  $\rho: X \times I \rightarrow Y$  de  $\beta$  a  $Y$  es una retracción de  $\iota$ .  $\square$

*Observación 3.3.7.* Sea  $X$  un espacio topológico finito y sea  $A$  un subespacio de  $X$ . Observemos que, para determinar si la función inclusión  $A \hookrightarrow X$  es una cofibración, siempre podemos reducir nuestro análisis al caso en que se satisfacen las hipótesis del teorema anterior. En efecto, dado que un espacio topológico finito es el coproducto de sus componentes conexas, se sigue que la función inclusión  $A \hookrightarrow X$  es una cofibración si y sólo si la función inclusión  $A \cap C \hookrightarrow C$  es una cofibración para cada componente conexa  $C$  de  $X$ . Dado que la inclusión del espacio vacío en cualquier espacio topológico es una cofibración, obtenemos que la función inclusión  $A \hookrightarrow X$  es una cofibración si y sólo si la función inclusión  $A \cap C \hookrightarrow C$  es una cofibración para cada componente conexa  $C$  de  $X$  tal que  $C \cap A \neq \emptyset$ .

El teorema 3.3.6 tiene como consecuencia los resultados 3.3.8, 3.3.9 y 3.3.10.

**Corolario 3.3.8.** *Sea  $X$  un espacio finito conexo y sea  $A$  un subespacio no vacío de  $X$ . Si la inclusión  $i: A \rightarrow X$  es una cofibración, entonces  $A$  es un retracto por deformación fuerte de  $X$ .*

**Proposición 3.3.9.** *Sea  $X$  un espacio finito conexo y sea  $A$  un subespacio cerrado no vacío de  $X$ . Si la inclusión  $i: A \rightarrow X$  es una cofibración, entonces  $A = X$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $i$  es una cofibración. Por 3.3.6, existe  $r: X \rightarrow A$  tal que  $ri = \text{Id}_A$  y  $ir \leq \text{Id}_X$ . Ahora sea  $x \in X$ . Tenemos que  $x \geq r(x) \in A$ . Dado que  $A$  es cerrado,  $x \in A$ . El resultado se sigue.  $\square$

### 3.3 Caracterización de cofibraciones entre espacios finitos

---

**Corolario 3.3.10.** *Una cofibración cerrada entre espacios finitos conexos no vacíos es un homeomorfismo.*

Recordemos que un espacio punteado  $(X, x_0)$  se dice *bien punteado* si la inclusión  $\{x_0\} \hookrightarrow X$  es una cofibración.

**Proposición 3.3.11.** *Sea  $(X, x_0)$  un espacio topológico punteado finito conexo. Entonces  $(X, x_0)$  está bien punteado si y sólo si  $x_0 \leq x$  para todo  $x \in X$ .*

*En particular, si  $X$  es un espacio  $T_0$ , el espacio punteado  $(X, x_0)$  está bien punteado si y sólo si  $x_0$  es el mínimo de  $X$ .*

*Demostración.* Por 3.3.6, el espacio  $(X, x_0)$  es bien punteado si y sólo si la única función  $r: X \rightarrow \{x_0\}$  satisface que  $r(x) \leq x$  para todo  $x \in X$ . □

Para espacios topológicos finitos  $T_0$  conexos no vacíos, las cofibraciones no triviales son esencialmente dbp-retractos, como muestran el siguiente resultado y su corolario.

**Proposición 3.3.12.** *Sea  $X$  un espacio topológico finito  $T_0$  conexo y sea  $A$  un subespacio no vacío de  $X$ . Entonces, la inclusión  $i: A \rightarrow X$  es una cofibración si y sólo si  $A$  es un dbp-retracto de  $X$ .*

*Demostración.* Inmediato de 3.2.6 y 3.3.6. □

**Corolario 3.3.13.** *Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos finitos  $T_0$  tales que  $Y$  es conexo y  $X \neq \emptyset$ . Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función. Entonces  $f$  es una cofibración si y sólo si  $f$  es un homeomorfismo en su imagen y  $f(X)$  es un dbp-retracto de  $Y$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $f$  es una cofibración. De 1.3.9 se sigue que la correstricción  $f|: X \rightarrow f(X)$  de  $f$  es un homeomorfismo. La inclusión  $i: f(X) \rightarrow Y$  es igual a la composición  $f(f|)^{-1}$  y es, por lo tanto, una cofibración. Se sigue de 3.3.12 que  $f(X)$  es un dbp-retracto de  $Y$ .

Supongamos ahora que la correstricción  $f|: X \rightarrow f(X)$  de  $f$  es un homeomorfismo y que  $f(X)$  es un dbp-retracto de  $Y$ . Por 3.3.12, la inclusión  $i: f(X) \rightarrow Y$  es una cofibración y por lo tanto  $f = i(f|)$  también lo es. □

**Corolario 3.3.14.** *Sea  $X$  un espacio topológico finito conexo  $T_0$ . Son equivalentes:*

- (1) *Toda cofibración  $f: A \rightarrow X$  con  $A \neq \emptyset$  es un homeomorfismo.*
- (2)  *$X$  no tiene down beat points.*

Probaremos ahora que para determinar si una función entre espacios finitos es una cofibración podemos siempre reducir nuestro análisis a funciones entre espacios topológicos finitos  $T_0$ . Recomendamos al lector recordar las definiciones y notación introducidas en la primera parte de la subsección 1.2.5 en relación al cociente de Kolmogorov de espacios de Alexandroff.

**Proposición 3.3.15.** *Sea  $X$  un espacio topológico finito y sea  $A$  un subespacio de  $X$ . Entonces, la inclusión  $i: A \rightarrow X$  es una cofibración si y sólo si la función  $\mathbf{K}(i): \mathbf{K}(A) \rightarrow \mathbf{K}(X)$  es una cofibración.*



### 3 Cofibraciones entre espacios finitos

---

*Demostración.* Es fácil probar que la función  $\mathbf{K}(i): \mathbf{K}(A) \rightarrow \mathbf{K}(X)$  es un retracto de la inclusión  $i: A \rightarrow X$ . Por 1.3.3, si  $i$  es una cofibración entonces  $\mathbf{K}(i)$  también lo será.

Para la recíproca, supongamos primero que  $X$  es conexo y  $A \neq \emptyset$ .

Sean  $q_A: A \rightarrow \mathbf{K}(A)$  y  $q_X: X \rightarrow \mathbf{K}(X)$  las funciones cociente canónicas (cf. subsección 1.2.5) y sea  $j_A: \mathbf{K}(A) \rightarrow A$  una sección de  $q_A$ . Por 3.3.6, existe una retracción  $\rho$  de  $\mathbf{K}(i)$  tal que  $\mathbf{K}(i)\rho \leq \text{Id}_{\mathbf{K}(X)}$ . Definimos  $r: X \rightarrow A$  por

$$r(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in A, \\ j_A \rho q_X(x) & \text{si } x \in X - A. \end{cases}$$

Observemos que

$$j_A \rho q_X(a) = j_A \rho q_X i(a) = j_A \rho \mathbf{K}(i) q_A(a) = j_A q_A(a) \sim a$$

para todo  $a \in A$ . Se sigue que para cualesquiera  $a \in A$  y  $x \in X - A$  tales que  $a \leq x$ , vale que

$$r(a) = a \leq j_A \rho q_X(a) \leq j_A \rho q_X(x) = r(x)$$

y que para cualesquiera  $x \in X - A$  y  $a \in A$  tales que  $x \leq a$ , vale que

$$r(x) = j_A \rho q_X(x) \leq j_A \rho q_X(a) \leq a = r(a).$$

Por lo tanto,  $r$  es continua.

Es claro que  $ri = \text{Id}_A$ . Por otro lado,  $ir(x) = x$  para todo  $x \in A$  y, dado que  $q_X i = \mathbf{K}(i) q_A$ , tenemos que para todo  $x \in X - A$

$$q_X ir(x) = q_X i j_A \rho q_X(x) = \mathbf{K}(i) q_A j_A \rho q_X(x) = \mathbf{K}(i) \rho q_X(x) \leq q_X(x).$$

Por lo tanto,  $ir \leq \text{Id}_X$ . Luego,  $i$  es una cofibración por 3.3.6.

No es difícil concluir el caso general a partir de 3.3.7 y 1.2.23. □

El siguiente resultado se obtiene fácilmente a partir de 3.3.15

**Proposición 3.3.16.** *Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos finitos y sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua. Entonces  $f$  es una cofibración si y sólo si  $f$  es una función subespacio y  $\mathbf{K}(f): \mathbf{K}(X) \rightarrow \mathbf{K}(Y)$  es una cofibración.*

Notemos que una función  $f: X \rightarrow Y$  entre espacios finitos puede no ser una cofibración aún si  $\mathbf{K}(f): \mathbf{K}(X) \rightarrow \mathbf{K}(Y)$  lo es. Consideremos, por ejemplo, el espacio  $X = \{0, 1\}$  con la topología indiscreta y la única función  $f: X \rightarrow *$  posible. La función  $\mathbf{K}(f)$  es un homeomorfismo y por lo tanto, una cofibración; sin embargo, la función  $f: X \rightarrow Y$  no es una cofibración puesto que no es inyectiva y por lo tanto no puede ser subespacio.

*Observación 3.3.17.* Combinando algunos de los resultados desarrollados hasta ahora, obtenemos un algoritmo simple para determinar si una función entre espacios topológicos finitos es una cofibración, el cual describimos a continuación.

Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos finitos y sea  $f: X \rightarrow Y$  una función. Claramente  $f$  es una cofibración si y sólo si la correstricción  $f|^{f(X)}: X \rightarrow f(X)$  es un homeomorfismo

### 3.3 Caracterización de cofibraciones entre espacios finitos

y la función inclusión  $f(X) \hookrightarrow Y$  es una cofibración. Observemos que  $f|^{f(X)}$  es un homeomorfismo si y sólo si para cualesquiera  $x_1, x_2 \in X$ ,  $x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ .

Sea  $A = f(X)$ . Por 1.2.23 y 3.3.15 la función inclusión  $A \hookrightarrow Y$  es una cofibración si y sólo si la función inclusión  $q_Y(A) \hookrightarrow \mathbf{K}(Y)$  es una cofibración. Por 3.3.7, esto vale si y sólo si la función inclusión  $q_Y(A) \cap C \hookrightarrow C$  es una cofibración para cada componente conexa  $C$  de  $\mathbf{K}(Y)$  tal que  $q_Y(A) \cap C \neq \emptyset$ . Ahora, para cada componente conexa  $C$  de  $\mathbf{K}(Y)$  tal que  $q_Y(A) \cap C \neq \emptyset$ , la función inclusión  $q_Y(A) \cap C \hookrightarrow C$  es una cofibración si y sólo si  $q_Y(A) \cap C$  es un dbp-retracto de  $C$  por 3.3.12.

Por consiguiente, obtenemos que la función inclusión  $A \hookrightarrow Y$  es una cofibración si y sólo si  $q_Y(A) \cap C$  es un dbp-retracto de  $C$  para cada componente conexa  $C$  de  $\mathbf{K}(Y)$  tal que  $q_Y(A) \cap C \neq \emptyset$ . Esta condición puede ser verificada algorítmicamente, como hemos notado en 3.2.22.

Como ejemplo de aplicación de los resultados anteriores, determinaremos bajo qué condiciones las inclusiones asociadas a cilindros mapeantes no Hausdorff (definición 1.2.13) son cofibraciones. Recordemos que si  $X$  e  $Y$  son espacios topológicos y  $f: X \rightarrow Y$  es una función continua entonces las funciones inclusión de  $X$  e  $Y$  en el cilindro mapeante clásico de  $f$  son cofibraciones.

*Observación 3.3.18.* Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre espacios topológicos finitos  $T_0$  no vacíos. Dado que  $Y$  es cerrado en  $\mathbb{B}(f)$ , de 3.3.10 se sigue que  $j_Y$  no es una cofibración.

**Proposición 3.3.19.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos finitos  $T_0$  y sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua. Entonces  $j_Y^{\text{op}}: Y^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{B}(f)^{\text{op}}$  es una cofibración.

*Demostración.* Como en la prueba de [5, Lema 2.8.2], sea  $j = j_Y: Y \rightarrow \mathbb{B}(f)$  la función inclusión y sea  $r: \mathbb{B}(f) \rightarrow Y$  la función definida por

$$r(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in X, \\ z & \text{si } z \in Y. \end{cases}$$

Si  $x \in X$  e  $y \in Y$  son tales que  $x \leq y$  en  $\mathbb{B}(f)$ , entonces  $f(x) \leq y$  y por lo tanto  $r(x) = f(x) \leq y = r(y)$ . Por consiguiente,  $r$  es continua. Es claro que  $rj = \text{Id}_Y$ .

Ahora,  $jr(x) = f(x) \geq x$  en  $\mathbb{B}(f)$  para todo  $x \in X$ . Así,  $jr \geq \text{Id}_{\mathbb{B}(f)}$ . El resultado se sigue de 3.3.6.  $\square$

El siguiente resultado se encuentra presente en la prueba de [5, Proposición 4.6.6] con diferente terminología. Damos aquí una prueba utilizando nuestros resultados.

**Proposición 3.3.20.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos finitos  $T_0$  y sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua. Entonces  $X$  es un dbp-retracto de  $\mathbb{B}(f)$  si y sólo si  $f^{-1}(U_y^Y)$  tiene máximo para todo  $y \in Y$ .

*Demostración.* Notemos que  $f^{-1}(U_y^Y) = U_y^{\mathbb{B}(f)} \cap X$  para todo  $y \in Y$ . El resultado se sigue de 3.2.8.  $\square$

**Corolario 3.3.21.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos finitos  $T_0$  tales que  $Y$  es conexo y  $X \neq \emptyset$ . Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua. Entonces la función inclusión  $j_X: X \rightarrow \mathbb{B}(f)$  es una cofibración si y sólo si  $f^{-1}(U_y^Y)$  tiene máximo para todo  $y \in Y$ .

### 3 Cofibraciones entre espacios finitos

---

*Demostración.* Por 3.3.12, la función  $j_X: X \rightarrow \mathbb{B}(f)$  es una cofibración si y sólo si  $X$  es un dbp-retracto de  $\mathbb{B}(f)$ . El resultado se sigue de 3.3.20.  $\square$

## Capítulo 4

# Fibrados sobre espacios de Alexandroff

### 4.1 Introducción

En este capítulo mostramos que existe una correspondencia biyectiva canónica entre (clases de isomorfismo de) fibrados sobre espacios de Alexandroff  $B$  con fibra  $T_0 F$  y (clases de isomorfismo natural de) funtores de  $B$  a  $\mathbf{Aut}_{\mathbf{Top}}(F)$ . Esta biyección está inducida por la *construcción de Grothendieck topológica*, una construcción que permite obtener un espacio topológico a partir de un functor de un conjunto preordenado  $B$  en  $\mathbf{Top}$  que es análoga a la construcción de Grothendieck clásica para funtores en  $\mathbf{Cat}$ .

El teorema de clasificación obtenido nos permite utilizar un functor canónico asociado a cada fibrado para construir una función levantadora de caminos canónica –y que de hecho resulta ser regular– para dicho fibrado, lo que muestra que los fibrados sobre espacios de Alexandroff con fibra  $T_0$  son fibraciones de Hurewicz.

Los resultados de esta sección pueden encontrarse en [22].

### 4.2 Construcción de Grothendieck topológica

Hemos visto en la subsección 1.1.4 que para toda categoría pequeña  $B$  y todo functor  $C: B \rightarrow \mathbf{Cat}$ , la construcción de Grothendieck  $\int C$  de  $C$  es la categoría cuyos objetos son los pares  $(b, x)$  donde  $b$  es un objeto de  $B$  y  $x$  es un objeto de  $C(b)$  (cf. definición 1.1.22). Las flechas en  $\int C$  de  $(b, x)$  a  $(b', x')$  son los pares  $(f, g)$  donde  $f$  es una flecha en  $B$  de  $b$  a  $b'$  y  $g$  es una flecha en  $C(b')$  de  $C(f)(x)$  a  $x'$ . La proyección canónica  $\pi_B^C: \int C \rightarrow B$  es un functor y por lo tanto, puede ser considerada como una categoría sobre  $B$ .

No es difícil ver que una flecha  $\alpha: C \Rightarrow D$  en  $\mathbf{Cat}^B$ , es decir, una transformación natural entre funtores  $C$  y  $D$  de  $B$  en  $\mathbf{Cat}$ , induce un functor  $\alpha_*: \int C \rightarrow \int D$  en  $\mathbf{Cat}$  definido por  $\alpha_*(b, x) = (b, \alpha_b(x))$  para todo  $(b, x) \in \text{Obj}(\int C)$  y por  $\alpha_*(f, g) = (f, \alpha_{b'}(g))$  para toda flecha  $(f, g): (b, x) \rightarrow (b', x')$  en  $\int C$ . El functor  $\alpha_*$  resulta un morfismo de  $\pi_B^C$  a  $\pi_B^D$  en  $\mathbf{Cat}/B$ . Así, la construcción de Grothendieck se extiende a un functor  $\int: \mathbf{Cat}^B \rightarrow \mathbf{Cat}/B$  de la categoría  $\mathbf{Cat}^B$  de funtores de  $B$  a  $\mathbf{Cat}$  y transformaciones naturales a la categoría  $\mathbf{Cat}/B$  de categorías pequeñas sobre  $B$ .

## 4 Fibrados sobre espacios de Alexandroff

---

Ahora bien, si  $B$  es un poset y  $D: B \rightarrow \mathbf{Pos}$  es un functor (que podemos considerar con imagen en  $\mathbf{Cat}$  vía la inclusión canónica  $\mathbf{Pos} \hookrightarrow \mathbf{Cat}$ ) entonces  $\int D$  resulta un poset, donde, para cualesquiera  $(b, x), (b', x') \in \int D$ , tenemos que  $(b, x) \leq (b', x')$  si y sólo si  $b \leq b'$  en  $B$  y  $D(b \leq b')(x) \leq x'$  en  $D(b')$ . Se sigue que  $\int D$  puede ser interpretado como un espacio topológico de Alexandroff.

La construcción de Grothendieck topológica que definiremos a continuación generaliza esta situación y permite construir un espacio topológico  $\int C$  a partir de un espacio de Alexandroff  $B$  y un functor  $D: B \rightarrow \mathbf{Top}$ .

**Definición 4.2.1.** Sea  $B$  un espacio de Alexandroff considerado como un conjunto preordenado y sea  $D: B \rightarrow \mathbf{Top}$  un functor. Definimos

$$\int D = \bigcup_{b \in B} \{b\} \times D(b) = \{(b, x) : b \in B \text{ y } x \in D(b)\}.$$

Para cada  $b \in B$  y para cada  $V$  subconjunto abierto de  $D(b)$  definimos

$$J_D(b, V) = \bigcup_{v \in U_b} \{v\} \times D(v \leq b)^{-1}(V) \subseteq \int D.$$

Cuando no haya lugar a confusión, el conjunto  $J_D(b, V)$  será denotado simplemente por  $J(b, V)$ .

Es fácil ver que si  $(\beta, x) \in J(b, V) \cap J(b', V')$  donde  $b, b' \in B$  y  $V$  y  $V'$  son subconjuntos abiertos de  $D(b)$  y  $D(b')$  respectivamente, entonces

$$(\beta, x) \in J(\beta, D(\beta \leq b)^{-1}(V) \cap D(\beta \leq b')^{-1}(V')) \subseteq J(b, V) \cap J(b', V').$$

Se sigue que el conjunto  $\mathcal{B} = \{J(b, V) : b \in B \text{ y } V \text{ es un subconjunto abierto de } D(b)\}$  es una base para una topología en  $\int D$ . Consideramos  $\int D$  como un espacio topológico con la topología generada por  $\mathcal{B}$ . El espacio topológico  $\int D$  será denominado *construcción de Grothendieck topológica* de  $D$ .

Observemos que, con la notación anterior, la función  $\iota_b: D(b) \rightarrow \int D$  definida por  $\iota_b(x) = (b, x)$  es una función subespacio.

La siguiente observación establece que la definición de la construcción de Grothendieck topológica es compatible con la definición de la construcción de Grothendieck en el caso en que ambas se puedan realizar.

*Observación 4.2.2.* Sea  $B$  un espacio de Alexandroff y sea  $D: B \rightarrow \mathbf{Ord}$  un functor. El functor  $D$  puede ser considerado tanto un functor a  $\mathbf{Top}$  como un functor a  $\mathbf{Cat}$ . Más precisamente, sea  $\iota_C: \mathbf{Ord} \rightarrow \mathbf{Cat}$  el functor inclusión usual y sea  $\iota_T: \mathbf{Ord} \rightarrow \mathbf{Top}$  el functor que envía cada conjunto preordenado al espacio de Alexandroff correspondiente. Consideramos las composiciones  $D_C = \iota_C D$  y  $D_T = \iota_T D$ . Entonces, la construcción de Grothendieck  $\int D_C$  (que es un conjunto preordenado) visto como espacio de Alexandroff coincide con la construcción de Grothendieck topológica  $\int D_T$ . Esto se sigue de la observación de que para cada  $b \in B$  y  $x \in D(b)$ ,  $J(b, U_x^{D_T(b)}) = U_{(b,x)}^{\int D_C}$ .

Daremos ahora algunos ejemplos simples de la construcción de Grothendieck topológica.

**Ejemplo 4.2.3.**

(1) Sea  $X$  un espacio topológico indiscreto y sea  $B$  un espacio de Alexandroff. Sea  $D: B \rightarrow \mathbf{Top}$  un funtor tal que  $D(b) = X$  para todo  $b \in B$ . Entonces el espacio  $\int D$  es  $B \times X$  con la topología producto.

(2) Sea  $X$  el espacio topológico cuyo conjunto subyacente es  $\{a, b, c\}$  y cuya topología es  $\mathcal{T}_X = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ . Sea  $f_1: X \rightarrow X$  la función identidad, sea  $f_2: X \rightarrow X$  la función definida por  $f_2(a) = a$ ,  $f_2(b) = b$  y  $f_2(c) = b$  y sea  $f_3: X \rightarrow X$  la función constante con valor  $a$ . Sea  $\mathcal{S}$  el espacio de Sierpinski. Para  $j \in \{1, 2, 3\}$  sea  $F_j: \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{Top}$  el funtor definido por  $F_j(0) = F_j(1) = X$  y  $F_j(0 \leq 1) = f_j$ .

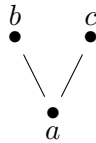
Entonces los espacios  $\int F_1$  y  $\int F_2$  coinciden con el espacio  $\mathcal{S} \times X$  con la topología producto. Por otro lado, el espacio  $\int F_3$  es el conjunto  $\mathcal{S} \times X$  con la topología

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{(0, a)\}, \{(0, a), (0, b), (0, c)\}, \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a)\}, \mathcal{S} \times X\}.$$

En particular,  $\int F_1$  y  $\int F_3$  no son homeomorfos.

(3) Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $*$  el singleton. Sea  $D: \mathcal{S} \rightarrow X$  el funtor definido por  $D(0) = X$  y  $D(1) = *$ . Entonces  $\int D$  es el cono no Hausdorff de  $X$  (cf. definición 1.2.11).

(4) Sea  $X$  un espacio topológico y, como antes, sea  $*$  el singleton. Sea  $B = \{a, b, c\}$  el poset representado por



Sea  $D: B \rightarrow \mathbf{Top}$  el funtor definido por  $D(a) = X$  y  $D(b) = D(c) = *$ . Entonces  $\int D$  es la suspensión no Hausdorff de  $X$  (cf. definición 1.2.12).

En los ejemplos (1) y (2) podemos percibir un comportamiento particular de la construcción de Grothendieck topológica de un funtor  $D: B \rightarrow \mathbf{Top}$  cuando los espacios  $D(b)$  no son espacios  $T_0$ . Hacemos explícito este hecho en el lema 4.2.4 y la proposición 4.2.5.

Recordemos que  $\mathbf{K}: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}_0$  es el funtor que envía a cada espacio  $X$  a su cociente de Kolmogorov  $\mathbf{K}(X)$  (cf. subsección 1.2.5).

**Lema 4.2.4.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos y sean  $f, g: X \rightarrow Y$  funciones continuas tales que  $\mathbf{K}(f) = \mathbf{K}(g)$ . Entonces  $f^{-1}(V) = g^{-1}(V)$  para todo subconjunto abierto  $V$  de  $Y$ .

*Demostración.* Sea  $V$  un subconjunto abierto de  $Y$ . Sean  $q_X: X \rightarrow \mathbf{K}(X)$  y  $q_Y: Y \rightarrow \mathbf{K}(Y)$  las funciones cociente canónicas. Para cada  $x \in X$  tenemos que

$$q_Y(f(x)) = \mathbf{K}(f)(q_X(x)) = \mathbf{K}(g)(q_X(x)) = q_Y(g(x)).$$

Se sigue que  $f(x) \sim g(x)$  para todo  $x \in X$ , donde  $\sim$  es la relación de equivalencia definida en el segundo párrafo de la subsección 1.2.5. Luego,

$$x \in f^{-1}(V) \Leftrightarrow f(x) \in V \Leftrightarrow g(x) \in V \Leftrightarrow x \in g^{-1}(V).$$

Así,  $f^{-1}(V) = g^{-1}(V)$ . □

## 4 Fibrados sobre espacios de Alexandroff

---

**Proposición 4.2.5.** *Sea  $B$  un espacio de Alexandroff y sean  $F, G: B \rightarrow \mathbf{Top}$  funtores tales que  $F(b) = G(b)$  para todo  $b \in B$ . Si  $\mathbf{K}F = \mathbf{K}G$  entonces  $\int F = \int G$ .*

*Demostración.* Dado que  $F(b) = G(b)$  para todo  $b \in B$ , es claro que  $\int F$  y  $\int G$  tienen los mismos elementos. Por el lema 4.2.4 se sigue además que sus topologías coinciden. Así,  $\int F = \int G$ .  $\square$

**Definición 4.2.6.** Sea  $B$  un espacio de Alexandroff considerado como un conjunto preordenado y sea  $D: B \rightarrow \mathbf{Top}$  un functor. Definimos  $\pi_B^D: \int D \rightarrow B$  como la proyección canónica dada por  $\pi_B^D(b, x) = b$ . Si no hubiera lugar a confusión, la proyección  $\pi_B^D$  será denotada por  $\pi_B$ .

*Observación 4.2.7.* Sean  $B$  y  $F$  espacios topológicos, con  $B$  espacio de Alexandroff. Sea  $C_F: B \rightarrow \mathbf{Top}$  el functor constante  $F$ . Entonces  $\int C_F = B \times F$  con la topología producto y  $\pi_B^{C_F}: B \times F \rightarrow B$  es la proyección canónica a  $B$ .

**Proposición 4.2.8.** *Sea  $B$  un espacio de Alexandroff y sea  $D: B \rightarrow \mathbf{Top}$  un functor. Entonces  $\pi_B: \int D \rightarrow B$  es continua, y por lo tanto un objeto sobre  $B$ .*

*Demostración.* Dado que  $\pi_B^{-1}(U_b) = J(b, D(b))$  para todo  $b \in B$ , el resultado se sigue.  $\square$

*Observación 4.2.9.* Sea  $B$  un espacio de Alexandroff, sean  $D, E: B \rightarrow \mathbf{Top}$  funtores y sea  $\eta: D \Rightarrow E$  una transformación natural. Si  $b \in B$  y  $V$  es un subconjunto abierto de  $E(b)$ , es fácil probar que  $(\beta, \eta_\beta(x)) \in J_E(b, V)$  si y sólo si  $(\beta, x) \in J_D(b, \eta_b^{-1}(V))$ .

Se sigue que la función  $\eta_*: \int D \rightarrow \int E$  definida por  $\eta_*(b, x) = (b, \eta_b(x))$  es continua y por lo tanto una función sobre  $B$ .

Es fácil ver entonces que la construcción  $\int$  define un functor  $\int: \mathbf{Top}^B \rightarrow \mathbf{Top}/B$ .

### 4.3 Caracterización de fibrados sobre espacios de Alexandroff con fibra $\mathbf{T}_0$

En esta sección mostraremos que las clases de isomorfismo de fibrados sobre un espacio de Alexandroff  $B$  con fibra  $\mathbf{T}_0$   $F$  están en biyección canónica con las clases de isomorfismo de funtores de  $B$  a  $\mathbf{Aut}(F)$  donde  $B$  es considerado un conjunto preordenado de la forma usual y  $\mathbf{Aut}(F)$  es el grupo de automorfismos de  $F$  en  $\mathbf{Top}$  visto como subcategoría de  $\mathbf{Top}$  cuyo único objeto es  $F$ .

**Proposición 4.3.1.** *Sea  $B$  un espacio de Alexandroff conexo y sea  $D: B \rightarrow \mathbf{Top}$  un functor que invierte morfismos. Entonces  $\pi_B: \int D \rightarrow B$  es un fibrado sobre  $B$  con fibra  $D(b_0)$  para cualquier  $b_0 \in B$ .*

*Demostración.* Sea  $b \in B$ . Consideremos la proyección canónica de  $U_b \times D(b)$  en  $U_b$  como un objeto sobre  $U_b$ . Definimos funciones  $\varphi_b: \pi_B^{-1}(U_b) \rightarrow U_b \times D(b)$  y  $\phi_b: U_b \times D(b) \rightarrow \pi_B^{-1}(U_b)$  por

$$\varphi_b(\beta, x) = (\beta, D(\beta \leq b)(x))$$

para todo  $(\beta, x) \in \pi_B^{-1}(U_b)$ , y

$$\phi_b(\beta, x) = (\beta, D(\beta \leq b)^{-1}(x))$$

para todo  $(\beta, x) \in U_b \times D(b)$  respectivamente. Es claro que  $\varphi_b$  y  $\phi_b$  son biyecciones sobre  $U_b$  mutuamente inversas. Es fácil verificar que  $\varphi_b^{-1}(U_v \times W) = J(v, D(v \leq b)^{-1}(W))$  para todo  $v \leq b$  y todo  $W$  abierto de  $D(b)$  y que  $\phi_b^{-1}(J(v, W)) = U_v \times D(v \leq b)(W)$  para todo  $v \leq b$  y todo  $W$  abierto de  $D(v)$ . Se sigue fácilmente que  $\varphi_b$  y  $\phi_b$  son homeomorfismos mutuamente inversos sobre  $U_b$ .

Por lo tanto  $\pi_B$  es un fibrado sobre  $B$ . Dado que  $B$  es conexo, se sigue que las fibras de  $\pi_B$  son homeomorfas a  $D(b_0)$  para cualquier  $b_0 \in B$  como afirmamos.  $\square$

**Lema 4.3.2.** *Sea  $X = \{0, 1\}$  considerado como un espacio topológico tal que el conjunto  $\{1\}$  no es abierto en  $X$  (explícitamente,  $X$  es o bien un espacio indiscreto o bien el espacio  $S$  de Sierpinski).*

*Sea  $Y$  un espacio  $T_0$ . Consideremos la proyección canónica  $p_X: X \times Y \rightarrow X$  como un fibrado trivial y sea  $\varphi: X \times Y \rightarrow X \times Y$  un automorfismo (de fibrados) de  $p_X$ . Entonces existe una función  $\alpha: Y \rightarrow Y$  tal que  $\varphi = \text{Id}_X \times \alpha$ . Más aún, tal función  $\alpha$  es única y resulta un homeomorfismo.*

*Demostración.* Sea  $\phi$  la inversa de  $\varphi$ . Sea  $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$  la proyección canónica, y, para  $t = 0, 1$ , sea  $j_t: Y \rightarrow X \times Y$  la inclusión definida por  $j_t(y) = (t, y)$ , sea  $\varphi_t = \pi_Y \varphi j_t$  y sea  $\phi_t = \pi_Y \phi j_t$ . Es fácil ver que  $\varphi_t$  y  $\phi_t$  son automorfismos de  $Y$  mutuamente inversos, para  $t = 0, 1$ .

Notemos que si  $\varphi = \text{Id}_X \times \alpha$  para algún  $\alpha: Y \rightarrow Y$ , entonces  $\varphi_0 = \alpha = \varphi_1$ , y por lo tanto obtenemos que  $\alpha$  es único y un homeomorfismo. Recíprocamente, si  $\varphi_0 = \varphi_1$ , entonces  $\varphi = \text{Id}_X \times \varphi_0$ . Así, basta probar que  $\varphi_0 = \varphi_1$ .

Ahora, sea  $U$  un subconjunto abierto de  $Y$ . Dado que  $\varphi(X \times U) = (\{0\} \times \varphi_0(U)) \cup (\{1\} \times \varphi_1(U))$  es abierto en  $X \times Y$ , de la observación 1.2.4 y de que el abierto minimal del elemento 1 de  $X$  es  $X$ , se sigue fácilmente que  $\varphi_1(U) \subseteq \varphi_0(U)$ . Similarmente,  $\phi_1(U) \subseteq \phi_0(U)$ . Por lo tanto, para todo subconjunto abierto  $V$  de  $Y$ ,

$$V = \phi_1 \varphi_1(V) \subseteq \phi_0 \varphi_1(V) \subseteq \phi_0 \varphi_0(V) = V.$$

Luego,  $\varphi_0(V) = \varphi_1(V)$  para todo subconjunto abierto  $V$  de  $Y$ . Dado que  $Y$  es  $T_0$ , se sigue fácilmente que  $\varphi_0 = \varphi_1$ . Por lo tanto,  $\varphi = \text{Id}_X \times \varphi_0$  como queríamos.  $\square$

La siguiente proposición se sigue inmediatamente de 1.2.17 y 4.3.2.

**Proposición 4.3.3.** *Sea  $B$  un espacio de Alexandroff conexo y sea  $Y$  un espacio  $T_0$ . Consideremos la proyección canónica  $p_B: B \times Y \rightarrow B$  como un fibrado trivial y sea  $\varphi: B \times Y \rightarrow B \times Y$  un automorfismo (de fibrados) de  $p_B$ . Entonces existe una función  $\alpha: Y \rightarrow Y$  tal que  $\varphi = \text{Id}_B \times \alpha$ . Más aún, tal función  $\alpha$  es única y resulta un homeomorfismo.*

**Teorema 4.3.4.** *Sea  $B$  un espacio de Alexandroff conexo y sea  $F$  cualquier espacio  $T_0$ . Sea  $p: E \rightarrow B$  un fibrado con fibra  $F$ . Entonces existe un functor  $\mathcal{D}_p: B \rightarrow \mathbf{Top}_0$  que invierte morfismos tal que  $\pi_B: \int \mathcal{D}_p \rightarrow B$  es un fibrado isomorfo a  $p$ .*

*Demostración.* Para cada  $U \subseteq B$ , denotamos por  $p_U: U \times F \rightarrow U$  a la proyección canónica.

Definimos el functor  $\mathcal{D}_p: B \rightarrow \mathbf{Top}$  como sigue. Para  $b \in B$ , definimos  $\mathcal{D}_p(b) = p^{-1}(b)$ . Ahora, para  $b \leq b'$ , elegimos cualquier entorno trivializante  $U$  de  $b'$  y tomamos



#### 4 Fibrados sobre espacios de Alexandroff

un morfismo trivializante  $\varphi_U: p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  de  $U$ . Observemos que  $\varphi_U$  se restringe a homeomorfismos

$$p^{-1}(b) \xrightarrow{\varphi_U} \{b\} \times F$$

y

$$p^{-1}(b') \xrightarrow{\varphi_U} \{b'\} \times F.$$

Definimos entonces  $\mathcal{D}_p(b \leq b'): p^{-1}(b) \rightarrow p^{-1}(b')$  como la composición

$$p^{-1}(b) \xrightarrow{\varphi_U} \{b\} \times F \xrightarrow{C_{b'} \times \text{Id}_F} \{b'\} \times F \xrightarrow{\varphi_U^{-1}} p^{-1}(b').$$

Tenemos que ver que  $\mathcal{D}_p$  está bien definido. Supongamos entonces que  $V$  es otro entorno trivializante de  $b'$  y sea  $\varphi_V: p^{-1}(V) \rightarrow V \times F$  un morfismo trivializante de  $V$ . Entonces, el homeomorfismo  $\varphi_V \varphi_U^{-1}: \{b, b'\} \times F \rightarrow \{b, b'\} \times F$  es un automorfismo de fibrados de la proyección  $\{b, b'\} \times F \rightarrow \{b, b'\}$ . Por el lema 4.3.2, existe un homeomorfismo  $\alpha: F \rightarrow F$  tal que  $\varphi_V \varphi_U^{-1} = \text{Id}_{\{b, b'\}} \times \alpha$ . Se sigue que

$$\begin{aligned} \varphi_V \varphi_U^{-1} \circ (C_{b'} \times \text{Id}_F) &= (\text{Id}_{\{b, b'\}} \times \alpha) \circ (C_{b'} \times \text{Id}_F) = C_{b'} \times \alpha = \\ &= (C_{b'} \times \text{Id}_F) \circ (\text{Id}_{\{b, b'\}} \times \alpha) = (C_{b'} \times \text{Id}_F) \circ \varphi_V \varphi_U^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & \{b\} \times F & \xrightarrow{C_{b'} \times \text{Id}_F} & \{b'\} \times F & & \\ & \nearrow \varphi_U & \downarrow & & \downarrow & \searrow \varphi_U^{-1} & \\ p^{-1}(b) & & & & & & p^{-1}(b') \\ & \searrow \varphi_V & \downarrow \varphi_V \varphi_U^{-1} & & \downarrow \varphi_V \varphi_U^{-1} & \nearrow \varphi_V^{-1} & \\ & & \{b\} \times F & \xrightarrow{C_{b'} \times \text{Id}_F} & \{b'\} \times F & & \end{array}$$

conmuta. Se sigue que  $\mathcal{D}_p$  está bien definido.

Es fácil probar que la asignación  $\mathcal{D}_p$  así definida resulta un funtor.

La función  $\phi: E \rightarrow \int \mathcal{D}_p$  definida por  $\phi(x) = (p(x), x)$  es claramente biyectiva con inversa  $\phi^{-1}: \int \mathcal{D}_p \rightarrow E$  definida por  $\phi^{-1}(b, x) = x$ . Es inmediato además que  $\pi_B \phi = p$ . Así, sólo necesitamos probar que  $\phi$  y su inversa son funciones continuas.

Veamos que  $\phi$  es continua. Sea  $b \in B$  y sea  $V \subseteq p^{-1}(b)$  abierto. Queremos probar que  $\phi^{-1}(J(b, V))$  es abierto en  $E$ . Tomemos un morfismo trivializante  $\varphi: p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  para algún entorno trivializante  $U$  de  $b$  y sean  $p_F: U \times F \rightarrow F$  y  $p_U: U \times F \rightarrow U$  las proyecciones. Notemos que, dado que  $\varphi$  se restringe a un homeomorfismo  $\varphi|: p^{-1}(b) \cong \{b\} \times F$ ,  $\varphi(V)$  es abierto en  $\{b\} \times F$  y por lo tanto,  $p_F \varphi(V)$  es abierto en  $F$ .

Basta probar entonces que

$$\phi^{-1}(J(b, V)) = \varphi^{-1}(U_b \times p_F \varphi(V)).$$

Observemos que  $p_U \varphi(V) \subseteq \{b\}$ , de donde se sigue que  $\varphi(V) = \{b\} \times p_F \varphi(V)$ . No es difícil ver entonces que, para todo  $x \in p^{-1}(U)$ , vale que  $(C_b \times \text{Id}_F) \varphi(x) \in \varphi(V)$  si y sólo si  $p_F(C_b \times \text{Id}_F) \varphi(x) = p_F \varphi(x) \in p_F \varphi(V)$ .

Luego, para todo  $(\beta, x) \in \int \mathcal{D}_p$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
 (\beta, x) \in J(b, V) &\Leftrightarrow \beta \in U_b \text{ y } \mathcal{D}_p(\beta \leq b)(x) \in V \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \beta \in U_b \text{ y } (C_b \times \text{Id}_F)\varphi(x) \in \varphi(V) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \beta \in U_b \text{ y } p_F\varphi(x) \in p_F\varphi(V) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow p_U\varphi(x) \in U_b \text{ y } p_F\varphi(x) \in p_F\varphi(V) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \varphi(x) \in U_b \times p_F\varphi(V) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x \in \varphi^{-1}(U_b \times p_F\varphi(V)) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \phi^{-1}(\beta, x) \in \phi^{-1}(U_b \times p_F\varphi(V)).
 \end{aligned}$$

Se sigue que  $\phi^{-1}(J(b, V)) = \phi^{-1}(U_b \times p_F\varphi(V))$  como queríamos y por lo tanto, que  $\phi$  es continua.

Veamos que  $\phi$  es abierta. Sea  $V$  un abierto de  $E$ . Probaremos que

$$\phi(x) = (p(x), x) \in J(p(x), V \cap p^{-1}(p(x))) \subseteq \phi(V)$$

para todo  $x \in V$ .

Sea  $x \in V$ . Es claro que  $\phi(x) = (p(x), x) \in J(p(x), V \cap p^{-1}(p(x)))$ . Sea entonces  $(b, y) \in J(p(x), V \cap p^{-1}(p(x)))$ . Si probamos que  $y \in V$ , tendremos que  $(b, y) = \phi(y) \in \phi(V)$  de donde se seguirá el resultado deseado.

Sea  $U$  un entorno trivializante de  $p(x)$  y sea  $\varphi: p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  un morfismo trivializante para  $U$ . Sea  $y' = \mathcal{D}_p(b \leq p(x))(y)$ . Por la definición de  $\mathcal{D}_p$ , existe  $x' \in F$  tal que  $\varphi(y) = (b, x')$  y  $\varphi(y') = (p(x), x')$ . Dado que  $(b, y) \in J(p(x), V \cap p^{-1}(p(x)))$ , entonces  $y' \in V \cap p^{-1}(p(x))$  de donde se sigue que

$$(p(x), x') = \varphi(y') \in \varphi(V \cap p^{-1}(U)).$$

Puesto que  $V \cap p^{-1}(U)$  es abierto en  $p^{-1}(U)$ , se sigue que  $\varphi(V \cap p^{-1}(U))$  es un abierto de  $U \times F$ . Por 1.2.4 tenemos que  $\varphi(y) = (b, x') \in \varphi(V \cap p^{-1}(U))$ , y así, que  $y \in V$  como queríamos.

El resultado se sigue. □

**Definición 4.3.5.** Sea  $B$  un espacio de Alexandroff conexo y sea  $F$  cualquier espacio  $T_0$ . Sea  $p: E \rightarrow B$  un fibrado con fibra  $F$ . El functor  $\mathcal{D}_p: B \rightarrow \mathbf{Top}_0$  construido en la prueba anterior será denominado *representación canónica del fibrado  $p$* .

*Observación 4.3.6.* Para que una flecha sobre una categoría pequeña  $B$  entre fibraciones de Grothendieck escindidas induzca una transformación natural entre los funtores de  $\mathbf{Cat}^B$  que representan a dichas fibraciones, es necesario, en general, que dicha flecha respete flechas cartesianas (o clivajes, en el caso de fibraciones clivadas). Esto muestra que la construcción dada en la demostración del teorema 1.1.26 no permite definir un functor  $\mathbf{Cat}/B \rightarrow \mathbf{Cat}^B$ .

La situación no es muy diferente si consideramos morfismos entre fibrados sobre un espacio de Alexandroff  $B$  con fibras  $T_0$ . Explícitamente, dados un espacio de Alexandroff  $B$ , dos fibrados  $p$  y  $q$  sobre  $B$  con fibras respectivas  $T_0$  y una flecha  $f$  sobre  $B$  de  $p$  a  $q$ , la colección  $\bar{f}$  definida por

$$\bar{f} = \{\bar{f}_b: b \in B\}$$

#### 4 Fibrados sobre espacios de Alexandroff

---

donde  $\bar{f}_b: p^{-1}(b) \rightarrow q^{-1}(b)$  es la restricción de  $f$  para cada  $b \in B$ , no resulta, en general, una transformación natural de  $\mathcal{D}_p$  a  $\mathcal{D}_q$ .

Para ver esto, supongamos que  $\mathcal{S}$  es el espacio de Sierpinski y que  $p: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  es la proyección a la primera coordenada. Claramente, la representación canónica de  $p$  es el funtor  $\mathcal{D}_p: \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{Top}_0$  definido por

$$\mathcal{D}_p(0) = \{0\} \times \mathcal{S} \text{ y}$$

$$\mathcal{D}_p(1) = \{1\} \times \mathcal{S}$$

en objetos y por

$$\mathcal{D}_p(0 \leq 1) = C_1 \times \text{Id}_{\mathcal{S}}$$

en la única flecha no trivial de  $\mathcal{S}$ , donde  $C_1: \{0\} \rightarrow \{1\}$  es la única función posible.

Sea  $\alpha: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} \times \mathcal{S}$  el morfismo de fibrados definido por  $\alpha(0, x) = (0, x)$  para todo  $x \in \mathcal{S}$  y  $\alpha(1, x) = (1, 1)$  para todo  $x \in \mathcal{S}$  (o equivalentemente,  $\alpha(b, x) = (b, \max\{b, x\})$  para todo  $(b, x) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ ). Un cálculo directo muestra que la colección  $\bar{\alpha} = \{\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1\}$  donde

$$\bar{\alpha}_0: \{0\} \times \mathcal{S} \rightarrow \{0\} \times \mathcal{S}$$

y

$$\bar{\alpha}_1: \{1\} \times \mathcal{S} \rightarrow \{1\} \times \mathcal{S}$$

son las restricciones de  $\alpha$ , no es una transformación natural de  $\mathcal{D}_p$  en sí mismo.

Así, la asignación definida por

$$p \mapsto \mathcal{D}_p$$

que asigna a cada fibrado sobre  $B$  con fibra  $T_0$  su representación canónica, no se extenderá, en general, a un funtor mediante la asignación

$$f \mapsto \bar{f}$$

que envía cada morfismo de fibrados  $f$  sobre  $B$  en la colección  $\bar{f}$  definida anteriormente.

**Corolario 4.3.7.** *Sea  $B$  un espacio de Alexandroff simplemente conexo, sea  $F$  cualquier espacio  $T_0$  y sea  $p$  un fibrado sobre  $B$  con fibra  $F$ . Entonces  $p$  es un fibrado trivial.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{D}_p: B \rightarrow \mathbf{Top}_0$  la representación canónica del fibrado  $p$  y sea el funtor  $\iota_B: B \rightarrow \mathcal{LB}$  como en la subsección 2.3.1 y las subsecciones siguientes. Dado que  $\mathcal{D}_p$  invierte morfismos, existe  $\bar{\mathcal{D}}_p: \mathcal{LB} \rightarrow \mathbf{Top}_0$  tal que  $\mathcal{D}_p = \bar{\mathcal{D}}_p \iota_B$ . Ahora bien, como  $B$  es simplemente conexo,  $\mathcal{LB}$  es una categoría indiscreta y se sigue que la identidad de  $\mathcal{LB}$  es naturalmente isomorfa a un funtor constante

$$\mathcal{LB} \rightarrow * \rightarrow \mathcal{LB}.$$

Luego, es claro que

$$\mathcal{D}_p = \bar{\mathcal{D}}_p \iota_B = \bar{\mathcal{D}}_p \text{Id}_{\mathcal{LB} \iota_B}$$

es naturalmente isomorfo a un funtor constante. De las observaciones 4.2.9 y 4.2.7 se sigue fácilmente que  $p$  es un fibrado trivial.  $\square$

**Proposición 4.3.8.** *Sea  $B$  un espacio de Alexandroff conexo y sea  $F$  cualquier espacio  $T_0$ . Sean  $p, q: E \rightarrow B$  fibrados con fibra  $F$ . Si  $p$  y  $q$  son fibrados isomorfos entonces sus representaciones canónicas  $\mathcal{D}_p$  y  $\mathcal{D}_q$  son funtores naturalmente isomorfos.*

*Demostración.* Sea  $\alpha: E \rightarrow E$  un homeomorfismo tal que  $q\alpha = p$ . Para cada  $b \in B$ , sea  $\eta_b: \mathcal{D}_p(b) \rightarrow \mathcal{D}_q(b)$  la restricción de  $\alpha$ . Es claro que  $\eta_b$  es un homeomorfismo para todo  $b \in B$ . Probaremos que las funciones  $\eta_b, b \in B$ , definen una transformación natural  $\eta: \mathcal{D}_p \Rightarrow \mathcal{D}_q$ . Sean  $b_1, b_2 \in B$  tales que  $b_1 \leq b_2$ . Sea  $U$  un entorno trivializante de  $b_2$  para el fibrado  $p$  y sea  $\varphi_U: p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  un morfismo trivializante. Se sigue que  $U$  es también un entorno trivializante para el fibrado  $q$  y que  $\psi_U = \varphi_U \alpha^{-1}|: q^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  es un morfismo trivializante para  $q$ , donde  $\alpha^{-1}|: q^{-1}(U) \rightarrow p^{-1}(U)$  es la restricción correspondiente de  $\alpha^{-1}$ . Dado que las funciones  $\mathcal{D}_p(b_1 \leq b_2)$  y  $\mathcal{D}_q(b_1 \leq b_2)$  son independientes de los morfismos trivializantes elegidos para definirlos, existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 p^{-1}(b_1) & \xrightarrow{\mathcal{D}_p(b_1 \leq b_2)} & & p^{-1}(b_2) & \\
 \downarrow \alpha| = \eta_{b_1} & \searrow \varphi_U| & & \nearrow \varphi_U^{-1}| & \downarrow \eta_{b_2} = \alpha| \\
 & & \{b_1\} \times F & \xrightarrow{C_{b_2} \times \text{Id}_F} & \{b_2\} \times F \\
 & \nearrow \psi_U| & & \searrow \psi_U^{-1}| & \\
 q^{-1}(b_1) & \xrightarrow{\mathcal{D}_q(b_1 \leq b_2)} & & q^{-1}(b_2) & 
 \end{array}$$

Así,  $\eta: \mathcal{D}_p \Rightarrow \mathcal{D}_q$  es una transformación natural. □

**Proposición 4.3.9.** *Sea  $B$  un espacio de Alexandroff conexo y sea  $C: B \rightarrow \mathbf{Top}_0$  un funtor que invierte morfismos. Sea  $\mathcal{D}_{\pi_B^C}$  la representación canónica del fibrado  $\pi_B^C: \int C \rightarrow B$ . Entonces los funtores  $C$  y  $\mathcal{D}_{\pi_B^C}$  son naturalmente isomorfos.*

*Demostración.* Por construcción de  $\mathcal{D}_{\pi_B^C}$ , tenemos que  $\mathcal{D}_{\pi_B^C}(b) = \{b\} \times C(b)$  para todo  $b \in B$ . Por lo tanto, existe un homeomorfismo  $\alpha_b: C(b) \rightarrow \mathcal{D}_{\pi_B^C}(b)$  definido por  $\alpha_b(x) = (b, x)$  para todo  $x \in C(b)$ , para todo  $b \in B$ .

Ahora, supongamos que  $b, b' \in B$  son tales que  $b \leq b'$ .

Sea  $\varphi_{b'}: (\pi_B^C)^{-1}(U_{b'}) \rightarrow U_{b'} \times C(b')$  el morfismo trivializante para  $U_{b'}$  respecto de  $\pi_B^C$  definido en la prueba de 4.3.1 y sean

$$\varphi_1: (\pi_B^C)^{-1}(b) \rightarrow \{b\} \times C(b')$$

y

$$\varphi_2: (\pi_B^C)^{-1}(b') \rightarrow \{b'\} \times C(b')$$

las restricciones de  $\varphi_{b'}$ .

Tenemos que

$$\mathcal{D}_{\pi_B^C}(b \leq b') = \varphi_2^{-1}(C_{b'} \times \text{Id}_{C(b')})\varphi_1$$

de donde se sigue fácilmente que  $\mathcal{D}_{\pi_B^C}(b \leq b')\alpha_b = \alpha_{b'}C(b \leq b')$ .

Así, la colección de flechas  $\{\alpha_b : b \in B\}$  es un isomorfismo natural de  $C$  a  $\mathcal{D}_{\pi_B^C}$ . □

#### 4 Fibrados sobre espacios de Alexandroff

---

**Corolario 4.3.10.** *Sea  $B$  un espacio de Alexandroff conexo y sean  $C_1, C_2: B \rightarrow \mathbf{Top}_0$  funtores que invierten morfismos tales que los fibrados  $\pi_B^{C_1}: \int C_1 \rightarrow B$  y  $\pi_B^{C_2}: \int C_2 \rightarrow B$  son isomorfos. Entonces, los funtores  $C_1$  y  $C_2$  son naturalmente isomorfos.*

*Demostración.* Por 4.3.8, los funtores  $\mathcal{D}_{\pi_B^{C_1}}$  y  $\mathcal{D}_{\pi_B^{C_2}}$  son naturalmente isomorfos. Por 4.3.9, existen isomorfismos naturales  $C_1 \cong \mathcal{D}_{\pi_B^{C_1}}$  y  $C_2 \cong \mathcal{D}_{\pi_B^{C_2}}$ . El resultado se sigue.  $\square$

**Teorema 4.3.11.** *Sea  $B$  un espacio de Alexandroff conexo y sea  $F$  cualquier espacio  $T_0$ . Entonces existe una biyección canónica entre clases de isomorfismo de fibrados sobre  $B$  con fibra  $F$  y clases de isomorfismo de funtores de  $B$  en  $\mathbf{Aut}(F)$ . Esta biyección está inducida por la representación canónica y su inversa está inducida por la construcción de Grothendieck topológica.*

*Demostración.* Sea  $[\mathbf{Fib}_B(F)]$  el conjunto de clases de isomorfismo de fibrados sobre  $B$  con fibra  $F$  y sea  $[B, \mathbf{Aut}(F)]$  el conjunto de clases de isomorfismo de funtores de  $B$  en  $\mathbf{Aut}(F)$ .

Sea  $p$  un fibrado sobre  $B$  con fibra  $F$  y sea  $\mathcal{D}_p: B \rightarrow \mathbf{Top}_0$  su representación canónica. Para cada  $b \in B$  elegimos un homeomorfismo  $\gamma_b: \mathcal{D}_p(b) \rightarrow F$ . Sea  $\tilde{\mathcal{D}}_p: B \rightarrow \mathbf{Aut}(F)$  definido por  $\tilde{\mathcal{D}}_p(b_1 \leq b_2) = \gamma_{b_2} \mathcal{D}_p(b_1 \leq b_2) \gamma_{b_1}^{-1}$ . Claramente,  $\tilde{\mathcal{D}}_p$  es un functor y los homeomorfismos  $\gamma_b, b \in B$ , definen un isomorfismo natural de  $\mathcal{D}_p$  en el functor

$$B \xrightarrow{\tilde{\mathcal{D}}_p} \mathbf{Aut}(F) \hookrightarrow \mathbf{Top}_0.$$

En particular, la clase de isomorfismo natural del functor  $\tilde{\mathcal{D}}_p$  no depende de los isomorfismos  $\gamma_b, b \in B$ , elegidos. Se sigue de 4.3.8 que la asignación  $p \mapsto \tilde{\mathcal{D}}_p$  induce una función canónica bien definida  $\lambda: [\mathbf{Fib}_B(F)] \rightarrow [B, \mathbf{Aut}(F)]$ .

Por otro lado, de la observación 4.2.9 se sigue que la construcción de Grothendieck topológica induce una función  $\mu: [B, \mathbf{Aut}(F)] \rightarrow [\mathbf{Fib}_B(F)]$ . Finalmente, del teorema 4.3.4, la observación 4.2.9 y la proposición 4.3.9 se sigue que las funciones  $\lambda$  y  $\mu$  son mutuamente inversas.  $\square$

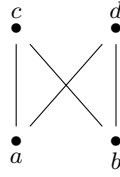
El teorema anterior motiva la siguiente definición.

**Definición 4.3.12.** *Sea  $B$  un espacio de Alexandroff, sea  $F \in \mathbf{Top}$  y sea  $D: B \rightarrow \mathbf{Aut}(F)$ . Sea  $\iota: \mathbf{Aut}(F) \rightarrow \mathbf{Top}$  el functor inclusión. Definimos el espacio  $B \times_D F$  como el espacio  $\int \iota D$ . La proyección  $\pi_B^D: B \times_D F \rightarrow B$  será denotada por  $\pi_B^D$  o por  $\pi_B$  cuando no haya riesgo de confusión.*

*Observación 4.3.13.* *Sea  $B$  un espacio de Alexandroff conexo y sea  $F \in \mathbf{Top}$ . Sean  $D, E: B \rightarrow \mathbf{Aut}(F)$  dos funtores y sea  $\eta: D \Rightarrow E$  una transformación natural. Dado que  $\mathbf{Aut}(F)$  es un grupoide, es claro que  $\eta$  es un isomorfismo natural. Se sigue de 4.2.9 que  $\eta_*: B \times_D F \rightarrow B \times_E F$  es un isomorfismo de fibrados de  $\pi_B^D$  a  $\pi_B^E$ .*

**Ejemplo 4.3.14.** *Sea  $X$  el espacio de Alexandroff  $T_0$  del ejemplo 2.3.26, representado en*

el siguiente diagrama de Hasse.



Notemos que  $X$  es homeomorfo al espacio  $\mathbb{S}S^0$  que es un modelo finito de  $S^1$ .

Por el teorema 4.3.11, las clases de isomorfismo de fibrados sobre  $X$  con fibra  $X$  están en correspondencia biunívoca con las clases de isomorfismo de funtores de  $X$  en  $\text{Aut}(X)$ .

Notemos que  $\text{Aut}(X) = \{\text{Id}_X, \tau_{ab}, \tau_{cd}, \tau_{ab}\tau_{cd}\}$ , donde  $\tau_{xy}$  denota la transposición que mapea  $x$  a  $y$  ( $e$  y a  $x$ ).

Para cada  $\alpha \in \text{Aut}(X)$  sea  $\mathcal{G}_\alpha: X \rightarrow \text{Aut}(X)$  el funtor definido por  $\mathcal{G}_\alpha(a \leq c) = \mathcal{G}_\alpha(a \leq d) = \mathcal{G}_\alpha(b \leq c) = \text{Id}_X$  y  $\mathcal{G}_\alpha(b \leq d) = \alpha$ . No es difícil verificar que para cualquier funtor  $G: X \rightarrow \text{Aut}(X)$  existe exactamente un elemento  $\alpha \in \text{Aut}(X)$  tal que  $G$  es naturalmente isomorfo a  $\mathcal{G}_\alpha$ .

Por consiguiente, existen exactamente cuatro clases de isomorfismo de fibrados sobre  $X$  con fibra  $X$  los cuales corresponden a los funtores  $\mathcal{G}_\alpha$  para  $\alpha \in \text{Aut}(X)$ .

Es interesante observar que los espacios totales de estos fibrados son homeomorfos a los espacios  $\mathbb{T}_{0,0}^2$ ,  $\mathbb{T}_{1,1}^2$ ,  $\mathbb{K}_{1,0}$  y  $\mathbb{K}_{0,1}$  de la sección 2.6, los cuales son los modelos finitos minimales del toro y la botella de Klein.

## 4.4 Otras propiedades

En [12], los autores prueban que los revestimientos de espacios de Alexandroff  $T_0$  son espacios de Alexandroff  $T_0$ . Esto puede deducirse fácilmente a partir del teorema 4.3.4.

Utilizando los teoremas 13 y 14 del mismo artículo, puede probarse que si  $X$  es un espacio topológico de Alexandroff  $T_0$  y  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  es un revestimiento de  $X$ , entonces  $p'$  es un revestimiento de  $X'$ .<sup>1</sup> Como aplicación de nuestra clasificación de fibrados, ofrecemos una prueba alternativa de este hecho a partir de los resultados de la sección anterior.

**Proposición 4.4.1.** *Sea  $X$  un espacio topológico de Alexandroff  $T_0$  conexo y sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  un revestimiento conexo correspondiente al subgrupo  $H$  de  $\pi_1(X, x)$  para algún  $x \in X$ . Entonces  $p': (\tilde{X})' \rightarrow X'$  es un revestimiento conexo correspondiente al subgrupo  $H'$  de  $\pi_1(X', \{x\})$  que es la imagen de  $H$  por el isomorfismo*

$$\pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X', \{x\})$$

*inducido por la equivalencia débil  $\max: X' \rightarrow X$ .*

*En particular, si  $p$  es el revestimiento universal de  $X$ , entonces  $p'$  es el revestimiento universal de  $X'$ .*

*Demostración.* Sea  $x \in X$ . Dado que  $p$  es un revestimiento, es un fibrado con fibra discreta  $F = p^{-1}(x)$ . Por el teorema 4.3.11, existe un funtor  $D: X \rightarrow \text{Aut}(F)$  tal que  $\tilde{X}$

<sup>1</sup>Esto también puede probarse directamente a partir de las definiciones de subdivisión baricéntrica y de revestimiento.

#### 4 Fibrados sobre espacios de Alexandroff

es homeomorfo a  $X \times_D F$  sobre  $X$ . Podemos suponer entonces que  $\tilde{X} = X \times_D F$  y que  $p: X \times_D F \rightarrow X$  es la proyección.

Consideremos el funtor  $D' = D \max: X' \rightarrow \text{Aut}(F)$ . Desde luego, la proyección  $\pi: X' \times_{D'} F \rightarrow X'$  es un fibrado con fibra  $F$  y por lo tanto, un revestimiento. Veremos que  $\pi \cong p'$ , es decir, que los espacios  $X' \times_{D'} F$  y  $(X \times_D F)'$  son homeomorfos sobre  $X'$ .

Definimos  $f: X' \times_{D'} F \rightarrow (X \times_D F)'$  por

$$f([x_0, \dots, x_n], \phi) = [(x_0, D(x_0 \leq x_n)^{-1}(\phi)), \dots, (x_j, D(x_j \leq x_n)^{-1}(\phi)), \dots, (x_n, \phi)]$$

para todo  $[x_0, \dots, x_n] \in X'$  y todo  $\phi \in F$ . Es fácil probar que  $f$  está bien definida y es continua.

Definimos además la función  $g: (X \times_D F)' \rightarrow X' \times_{D'} F$  por

$$g([(x_0, \phi_0), \dots, (x_n, \phi_n)]) = ([x_0, \dots, x_n], \phi_n).$$

Es fácil también probar que  $g$  es continua y resulta una inversa para  $f$ . Más aún,  $\pi g = p'$  y por lo tanto,  $f$  y  $g$  son homeomorfismos sobre  $X'$ . Se sigue que  $p'$  es un revestimiento.

Dado que  $\max: \text{sd} \Rightarrow \text{Id}_{\mathbf{ATop}_0}$  es una equivalencia débil natural, el resto de la proposición se sigue fácilmente.  $\square$

*Observación 4.4.2.* La subdivisión baricéntrica de un fibrado entre espacios de Alexandroff  $\mathbf{T}_0$  no es, en general, un fibrado. La subdivisión baricéntrica de  $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$  tiene once elementos mientras que la de  $\mathcal{S}$  tiene tres. Por cardinalidad, es claro que la subdivisión baricéntrica de la proyección de  $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$  a la primera coordenada no puede ser un fibrado.

**Proposición 4.4.3.** Sean  $X$  y  $B$  espacios de Alexandroff y sea  $f: X \rightarrow B$  una función continua. Sea  $D: B \rightarrow \mathbf{Top}$  un funtor. Entonces, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \int Df & \xrightarrow{g} & \int D \\ \pi_X^{Df} \downarrow & \text{pull} & \downarrow \pi_B^D \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

donde la función  $g: \int Df \rightarrow \int D$  está definida por  $g(x, y) = (f(x), y)$ , es un pullback.

*Demostración.* Es fácil verificar que

$$g^{-1}(J_D(b, V)) = \bigcup_{x \in f^{-1}(U_b)} J_{Df}(x, D(f(x) \leq b)^{-1}(V))$$

para todo  $b \in B$  y todo  $V \subseteq D(b)$  abierto. Se sigue entonces que  $g$  es una función continua.

Observemos además que  $\pi_B^D g = f \pi_X^{Df}$ .

Ahora, sea  $Z$  un espacio topológico y sean  $\alpha: Z \rightarrow X$  y  $\beta: Z \rightarrow \int D$  funciones continuas tales que  $f\alpha = \pi_B^D \beta$ . Notemos que para cada  $z \in Z$ ,  $\beta(z) = (\beta_1(z), \beta_2(z))$  con  $\beta_1(z) \in B$  y  $\beta_2(z) \in D(\beta_1(z))$ . Dado que  $f\alpha = \pi_B^D \beta$  obtenemos que  $\beta_1(z) = f(\alpha(z))$  para

todo  $z \in Z$ . Sea  $\gamma: Z \rightarrow \int Df$  definida por  $\gamma(z) = (\alpha(z), \beta_2(z))$ . Es claro que la función  $\gamma$  está bien definida y satisface  $\pi_X^{Df} \gamma = \alpha$  y  $g\gamma = \beta$ . Más aún,  $\gamma$  es la única función de  $Z$  a  $\int Df$  que satisface esta propiedad. Resta probar que  $\gamma$  es continua.

Sea  $x \in X$  y sea  $V$  un subconjunto abierto de  $Df(x)$ . No es difícil verificar que

$$\gamma^{-1}(J_{Df}(x, V)) = \alpha^{-1}(U_x) \cap \beta^{-1}(J_D(f(x), V))$$

Por consiguiente  $\gamma$  es una función continua. □

**Corolario 4.4.4.** *Sean  $B$  y  $X$  espacios de Alexandroff conexos, sea  $p: E \rightarrow B$  un fibrado con fibra  $T_0$  y sea  $f: X \rightarrow B$  una función continua. Sea  $\mathcal{D}_p: B \rightarrow \mathbf{Top}_0$  la representación canónica del fibrado  $p$ . Consideremos el pullback*

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & E \\ q \downarrow & \text{pull} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Entonces, la representación canónica  $\mathcal{D}_q$  es un funtor naturalmente isomorfo a  $\mathcal{D}_p f$ .

*Demostración.* Por 4.3.4, los fibrados  $\pi_B^{D_p}: \int \mathcal{D}_p \rightarrow B$  y  $\pi_X^{D_q}: \int \mathcal{D}_q \rightarrow X$  son isomorfos a  $p$  y a  $q$  respectivamente. Así, tenemos un pullback

$$\begin{array}{ccc} \int \mathcal{D}_q & \longrightarrow & \int \mathcal{D}_p \\ \pi_X^{D_q} \downarrow & \text{pull} & \downarrow \pi_B^{D_p} \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Ahora, los fibrados  $\pi_X^{D_q}$  y  $\pi_X^{D_p f}$  deben ser isomorfos por 4.4.3. Así, por 4.3.10, los funtores  $\mathcal{D}_q$  y  $\mathcal{D}_p f$  son naturalmente isomorfos. □

**Proposición 4.4.5.** *Sean  $X$  e  $Y$  espacios de Alexandroff conexos y sea  $F$  un espacio  $T_0$ . Sea  $p: E \rightarrow Y$  un fibrado con fibra  $F$  y sean  $f, g: X \rightarrow Y$  funciones continuas. Sea  $p_f: E_f \rightarrow X$  el pullback de  $p$  por  $f$  y sea  $p_g: E_g \rightarrow X$  el pullback de  $p$  por  $g$ .*

*Sea  $\mathcal{D}_p: Y \rightarrow \mathbf{Top}_0$  la representación canónica del fibrado  $p$ .*

*Entonces los fibrados  $p_f$  y  $p_g$  son isomorfos si y sólo si los funtores  $\mathcal{D}_p f$  y  $\mathcal{D}_p g$  son naturalmente isomorfos.*

*Demostración.* Por 4.2.9 y 4.3.8, los fibrados  $p_f$  y  $p_g$  son isomorfos si y sólo si sus representaciones canónicas  $\mathcal{D}_{p_f}$  y  $\mathcal{D}_{p_g}$  son funtores naturalmente isomorfos. Por 4.4.4 esto vale si y sólo si los funtores  $\mathcal{D}_p f$  y  $\mathcal{D}_p g$  son naturalmente isomorfos. □

**Proposición 4.4.6.** *Sean  $X$  y  $B$  espacios de Alexandroff conexos y sean  $f, g: X \rightarrow B$  funciones continuas tales que  $f \leq g$ . Sea  $D: B \rightarrow \mathbf{Top}$  un funtor que invierte morfismos. Entonces  $\pi_X^{Df}: \int Df \rightarrow X$  y  $\pi_X^{Dg}: \int Dg \rightarrow X$  son fibrados isomorfos.*



## 4 Fibrados sobre espacios de Alexandroff

---

*Demostración.* Para cada  $x \in X$ , sea  $\phi_x$  la única flecha en  $B$  de  $f(x)$  a  $g(x)$ . La colección  $\{\phi_x : x \in X\}$  define una transformación natural  $\phi: f \Rightarrow g$ . Dado que  $D$  invierte morfismos, la transformación natural  $D\phi: Df \Rightarrow Dg$  es un isomorfismo natural. El resultado entonces se sigue de 4.2.9 y 4.3.1.  $\square$

### 4.5 Los fibrados sobre A-espacios con fibra $T_0$ son fibraciones

El objetivo principal de esta sección es probar que los fibrados con fibra  $T_0$  sobre espacios de Alexandroff son fibraciones de Hurewicz. Observemos que, por el Lema 3.3.5, un espacio de Alexandroff conexo no tiene cubrimientos numerables no triviales y por lo tanto, este resultado no se deduce del Teorema 1.3.36 como en el caso de los fibrados sobre espacios paracompactos y Hausdorff.

Los fibrados sobre espacios de Alexandroff conexos con fibra  $T_0$  no tendrán, en general, la propiedad de levantamiento único de caminos que encontramos en los revestimientos sobre dichos espacios. Existe, sin embargo, una manera canónica de levantar caminos por  $p$  que resulta completamente análoga a la manera en que se levantan caminos por dichos revestimientos.

Antes, será conveniente estudiar la relación que existe entre la representación de los revestimientos regulares de espacios de Alexandroff dada por el Teorema 2.3.22 y la representación canónica de los mismos al ser considerados como fibrados con fibra discreta.

Sea  $B$  un espacio de Alexandroff conexo y sea  $G$  un grupo. Denotaremos por  $\text{Aut}(G)$  al grupo de automorfismos de  $G$  en **Top**, donde  $G$  es considerado como un espacio topológico discreto<sup>2</sup>.

Sea  $i: G \rightarrow \text{Aut}(G)$  el morfismo de grupos que representa la acción de  $G$  en sí mismo por multiplicación a izquierda y considerémoslo como un funtor entre grupoides con un objeto cada uno.

Un funtor  $C: B \rightarrow G$ , donde  $G$  es nuevamente considerado como un grupoide con un único objeto, induce un funtor  $iC: B \rightarrow \text{Aut}(G)$  y por lo tanto, un fibrado  $\pi_B: B \times_{iC} G \rightarrow B$  cuya fibra es el espacio discreto  $G$ . En particular,  $\pi_B$  es un revestimiento de  $B$ . Un cálculo directo muestra que  $B \times_{iC} G$  es naturalmente isomorfo a la categoría coma  $* \setminus C$  y por lo tanto, se sigue del teorema 2.3.22 y la observación 2.3.24 que  $\pi_1(B \times_{iC} G) \cong \ker \pi_1(C)$ . En particular,  $\pi_B$  es un revestimiento regular de  $B$ .

Veamos, por otro lado, que si  $p$  es el revestimiento conexo regular de  $B$  correspondiente al subgrupo normal  $N$  de  $\pi_1(B)$ , entonces la representación canónica de  $p$  es (naturalmente isomorfa a) un funtor que se factoriza a través de la composición

$$G \xrightarrow{i} \text{Aut}(G) \hookrightarrow \mathbf{Top}$$

donde  $G = \pi_1(B)/N$ .

Sea  $T$  un árbol maximal de  $B$ , sea  $\alpha: \pi_1(B) \rightarrow G$  la proyección canónica y sea  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{T,\alpha}$  el funtor

$$B \xrightarrow{\iota_B} \mathcal{L}B \xrightarrow{q_B} \mathcal{L}B/\mathcal{L}T \xrightarrow{\cong} \pi_1(B) \xrightarrow{\alpha} G$$

---

<sup>2</sup>Desde aquí y en lo que resta de la presente discusión, los puntos base de los espacios y las categorías involucrados serán omitidos de la notación.

## 4.5 Los fibrados sobre $A$ -espacios con fibra $T_0$ son fibraciones

como en la subsección 2.3.3, donde  $\iota_B: B \rightarrow \mathcal{L}B$  es el funtor de la definición 2.3.3,  $q_B: \mathcal{L}B \rightarrow \mathcal{L}B/\mathcal{L}T$  es el funtor cociente definido al final de la subsección 2.3.1 y  $\mathcal{L}B/\mathcal{L}T \xrightarrow{\cong} \pi_1(B)$  es la composición  $\zeta\rho_B$  de los isomorfismos  $\rho_B$  y  $\zeta$  de las subsecciones 2.3.1 y 2.3.2, respectivamente.

Del teorema 2.3.22, la observación 2.3.24 y el lema 2.3.18 se sigue que la proyección  $r: * \setminus \mathcal{F} \rightarrow B$  es un revestimiento conexo regular de  $B$  que corresponde al subgrupo  $N$  de  $\pi_1(B)$ . Por la proposición 1.3.59, es claro que  $p$  es isomorfo a  $r$ , el cual es, a su vez, isomorfo a la proyección

$$\pi_B^{i\mathcal{F}}: B \times_{i\mathcal{F}} G \rightarrow B$$

que es, por definición, la proyección

$$\pi_B^{i\mathcal{F}}: \int i\mathcal{F} \rightarrow B$$

donde, como antes,  $i: G \rightarrow \text{Aut}(G)$  es el funtor correspondiente a la acción de  $G$  sobre sí mismo por multiplicación a izquierda y  $\iota: \text{Aut}(G) \rightarrow \mathbf{Top}$  es el funtor inclusión. Se sigue de la proposición 4.3.8 que las representaciones canónicas de  $p$  y de  $\pi_B^{i\mathcal{F}}$  son naturalmente isomorfas. Por la proposición 4.3.9, por otro lado, se sigue que la representación canónica de  $\pi_B^{i\mathcal{F}}$  es naturalmente isomorfa a  $i\mathcal{F}$ . Por lo tanto, la representación canónica de  $p$  es naturalmente isomorfa al funtor  $i\mathcal{F}$ , como queríamos probar.

Así, los revestimientos regulares de  $B$  son precisamente aquellos revestimientos cuyas representaciones canónicas se factorizan, salvo isomorfismo natural, a través de  $i: G \rightarrow \text{Aut}(G)$  para algún grupo  $G$ .

Si, en particular,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$  para algún árbol maximal  $T$  en  $B$ , se sigue de la observación 2.3.23, que  $B \times_{i\mathcal{F}} G$  es el revestimiento universal de  $B$ . La única función levantadora de caminos para este revestimiento es fácil de describir, como mostramos en el próximo lema. Antes, necesitamos introducir la siguiente definición.

**Definición 4.5.1.** Sea  $X$  un espacio topológico, sea  $\gamma$  un camino en  $X$ , es decir, una función continua de  $I$  en  $X$ , y sean  $t_0, t_1$  tales que  $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq 1$ . Definimos la función  $\gamma_{[t_0, t_1]}: I \rightarrow X$  por  $\gamma_{[t_0, t_1]}(s) = \gamma(t_0 + (t_1 - t_0)s)$  para todo  $s \in I$ . Notemos que  $\gamma_{[t_0, t_1]}$  es una función continua y por lo tanto, un camino en  $X$ .

*Notación.* Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $\gamma$  un camino en  $X$ . Notaremos por  $[\gamma]$  a la clase de homotopía de  $\gamma$  como camino, es decir, a la clase de homotopía de  $\gamma$  relativa a  $\{0, 1\}$ .

Recordemos que, dados dos elementos  $x$  e  $y$  en un espacio de Alexandroff tales que  $x \leq y$ , existe un camino canónico  $\eta(x \leq y)$  que toma valor  $x$  en el intervalo  $[0, 1)$  y toma valor  $y$  en  $1$  (definición 1.2.16).

**Lema 4.5.2.** Sea  $B$  un espacio de Alexandroff conexo, sea  $b_0 \in B$ , sea  $G = \pi_1(B, b_0)$  y sea  $T$  un árbol maximal en  $B$ .

Sean  $i: G \rightarrow \text{Aut}(G)$  y  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$  los funtores considerados en la discusión precedente, es decir,  $i$  es el funtor que representa la acción de  $G$  sobre sí mismo por multiplicación a izquierda y  $\mathcal{F}$  es el funtor definido en la subsección 2.3.3 como la composición

$$B \xrightarrow{\iota_B} \mathcal{L}B \xrightarrow{q_B} \mathcal{L}B/\mathcal{L}T \xrightarrow{\cong} \pi_1(B, b_0).$$

#### 4 Fibrados sobre espacios de Alexandroff

Sea  $\tilde{B} = B \times_{i\mathcal{F}} G$  el revestimiento universal de  $B$  y sea  $r = \pi_B^{i\mathcal{F}} : \tilde{B} \rightarrow B$  la función revestimiento correspondiente.

Entonces, para todo camino  $\gamma$  en  $B$  y todo  $g \in G$ , el único levantado de  $\gamma$  por  $r$  desde  $x = (\gamma(0), g)$  es la función  $\tilde{\gamma}^x : I \rightarrow \tilde{B}$  definida por

$$\tilde{\gamma}^x(t) = (\gamma(t), q([\gamma_{[0,t]}])g)$$

para todo  $t \in I$ , donde  $q$  es la composición

$$\Pi_1 B \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}B \xrightarrow{q_B} \mathcal{L}B/\mathcal{L}T \xrightarrow{\cong} \pi_1(B, b_0)$$

y donde  $\Pi_1 B \cong \mathcal{L}B$  es el inverso del isomorfismo  $Z_B$  definido en la demostración del teorema 2.3.17.

En particular, la única función levantadora de caminos  $\lambda : \tilde{B} \times_r B^I \rightarrow \tilde{B}^I$  para  $r$  está definida por

$$\lambda(b, g, \gamma) = \tilde{\gamma}^{(b,g)}$$

para todo  $b \in B$ , todo camino  $\gamma : I \rightarrow B$  tal que  $\gamma(0) = b$  y todo  $g \in G$ .

*Demostración.* Sea  $\gamma : I \rightarrow B$  un camino en  $B$ , sea  $g \in G$ , sea  $x = (\gamma(0), g)$  y pongamos  $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}^x$ . Es claro que  $r\tilde{\gamma} = \gamma$  y que  $\tilde{\gamma}(0) = (\gamma(0), g) = x$ . Luego, basta probar que  $\tilde{\gamma}$  es continua.

Sabemos que  $\tilde{B}$  es un espacio de Alexandroff cuyo orden está definido por  $(b, g) \leq (b', g')$  si y sólo si  $b \leq b'$  y  $\mathcal{F}(b \leq b')g = g'$ . Así, sólo necesitamos probar que  $\tilde{\gamma}^{-1}(U_{(\beta,h)})$  es abierto en  $I$  para todo  $\beta \in B$  y todo  $h \in G$ .

Notemos que, para cualesquiera  $b, b' \in B$  tales que  $b \leq b'$ ,  $\iota_B(b \leq b')$  se corresponde, vía el isomorfismo  $\mathcal{L}B \cong \Pi_1(B)$ , con la clase  $[\eta(b \leq b')]$ . Se sigue que

$$\mathcal{F}(b \leq b') = q([\eta(b \leq b')])$$

para cualesquiera  $b, b' \in B$  tales que  $b \leq b'$ .

Sea  $\beta \in B$ , sea  $h \in G$ , y sea  $t_0 \in \tilde{\gamma}^{-1}(U_{(\beta,h)})$ . Entonces

$$(\gamma(t_0), q([\gamma_{[0,t_0]}])g) = \tilde{\gamma}(t_0) \leq (\beta, h)$$

y por lo tanto  $\gamma(t_0) \leq \beta$  y  $\mathcal{F}(\gamma(t_0) \leq \beta)q([\gamma_{[0,t_0]}])g = h$ .

En particular,  $t_0 \in \gamma^{-1}(U_\beta)$  y así, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap I \subseteq \gamma^{-1}(U_\beta)$ .

Sea  $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0] \cap I$ . El camino  $\gamma_{[t,t_0]} * \eta(\gamma(t_0) \leq \beta)$  es un camino en  $U_\beta$  de  $\gamma(t)$  a  $\beta$ . Por otro lado  $\eta(\gamma(t) \leq \beta)$  es también un camino en  $U_\beta$  de  $\gamma(t)$  a  $\beta$ . Dado que  $U_\beta$  es simplemente conexo, se sigue que estos dos caminos son homotópicos (como caminos). Luego,

$$\gamma_{[0,t_0]} * \eta(\gamma(t_0) \leq \beta) \stackrel{p}{\sim} \gamma_{[0,t]} * \eta(\gamma(t) \leq \beta).$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\gamma(t) \leq \beta)q([\gamma_{[0,t]}])g &= q([\gamma_{[0,t]} * \eta(\gamma(t) \leq \beta)])g = \\ &= q([\gamma_{[0,t_0]} * \eta(\gamma(t_0) \leq \beta)])g = \mathcal{F}(\gamma(t_0) \leq \beta)q([\gamma_{[0,t_0]}])g = h \end{aligned}$$

y así, que  $t \in \tilde{\gamma}^{-1}(U_{(\beta,h)})$ .

De manera similar se prueba que  $t \in \tilde{\gamma}^{-1}(U_{(\beta,h)})$  para todo  $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon) \cap I$ . Por lo tanto,  $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap I \subseteq \tilde{\gamma}^{-1}(U_{(\beta,h)})$  y el resultado se sigue.  $\square$

## 4.5 Los fibrados sobre A-espacios con fibra $T_0$ son fibraciones

*Observación 4.5.3.* En la situación del lema previo, y con la misma notación, veremos cómo utilizar  $\lambda$  para calcular explícitamente el funtor  $\mathcal{L}r: \mathcal{L}\tilde{B} \rightarrow \mathcal{L}B$ . Observemos primero que, dado que  $\tilde{B}$  es simplemente conexo, entonces  $\mathcal{L}\tilde{B} \cong \Pi_1(\tilde{B})$  es una categoría indiscreta. Así, toda flecha en  $\mathcal{L}\tilde{B}$  está determinada por su punto inicial y su punto final. En particular, es suficiente conocer, para cada  $(b, g) \in \tilde{B}$ , cómo se mapea por  $\mathcal{L}r$  la única flecha en  $\mathcal{L}\tilde{B}$  desde  $(b_0, 1_G)$  a  $(b, g)$ , donde  $1_G$  es el neutro de  $G$ .

Sean entonces  $b \in B$  y  $g \in G$  y sea  $f$  la única flecha en  $\mathcal{L}\tilde{B}$  de  $(b_0, 1_G)$  a  $(b, g)$ . Sea  $\bar{g}$  el automorfismo de  $b_0$  en  $\mathcal{L}B$  que corresponde a  $g$  vía el isomorfismo canónico  $\pi_1(B, b_0) \cong \text{Aut}_{\mathcal{L}B}(b_0)$  y sea  $\gamma_g$  un camino en  $B$  de  $b_0$  a  $b_0$  tal que  $[\gamma_g] = g$ . El punto final del único levantado de  $\gamma_g$  por  $r$  desde  $(b_0, 1_G)$  es igual a

$$\lambda(b_0, 1_G, \gamma_g)(1) = (\gamma_g(1), q([\gamma_g])) = (b_0, q(g)) = (b_0, g).$$

Así, la clase de homotopía del único levantado de  $\gamma_g$  por  $r$  desde  $(b_0, 1_G)$  corresponde a la única flecha en  $\mathcal{L}\tilde{B}$  de  $(b_0, 1_G)$  a  $(b_0, g)$ . Se sigue de la naturalidad del isomorfismo  $\mathcal{L} \cong \Pi_1$  (teorema 2.3.17) que la imagen de esta flecha por  $\mathcal{L}r$  es precisamente  $\bar{g}$ .

Por otro lado, consideremos la única flecha  $\bar{\tau}$  en  $\mathcal{L}T$  desde  $b_0$  a  $b$  y sea  $\tau$  el elemento de  $\Pi_1(B)$  correspondiente a  $\bar{\tau}$  vía el isomorfismo canónico  $\mathcal{L}B \cong \Pi_1(B)$ . Sea además  $\gamma_\tau$  un camino en  $B$  de  $b_0$  a  $b$  tal que  $[\gamma_\tau] = \tau$ . El punto final del único levantado de  $\gamma_\tau$  desde  $(b_0, g)$  es

$$\lambda(b_0, g, \gamma_\tau)(1) = (\gamma_\tau(1), q([\gamma_\tau])g) = (b, q(\tau)g) = (b, g)$$

puesto que  $q(\tau) = 1_G$ . Como antes, se sigue del teorema 2.3.17 que la imagen por  $\mathcal{L}r$  de la única flecha en  $\mathcal{L}\tilde{B}$  de  $(b_0, g)$  a  $(b, g)$  es  $\bar{\tau}$ .

Así,  $\mathcal{L}r(f) = \bar{\tau}\bar{g}$ .

Siguiendo con la notación y las definiciones del lema anterior, intentaremos interpretar la función levantadora de caminos para  $r$  en términos del funtor  $i\mathcal{F}$ .

En primer lugar, observemos que si  $\gamma$  es un camino en  $B$  y  $g \in G$ , entonces  $q([\gamma])g = iq([\gamma])(g)$ . Por otro lado,  $\mathcal{F} = qZ_B\iota_B$  de donde se sigue que  $i\mathcal{F} = iqZ_B\iota_B$  y por lo tanto, que  $\mathcal{L}(i\mathcal{F})Z_B^{-1} = iq$ . Luego,  $q([\gamma])g = iq([\gamma])(g) = \mathcal{L}(i\mathcal{F})Z_B^{-1}([\gamma])(g)$ . De esta manera, dados un camino  $\gamma$  en  $B$  y un punto  $x = (\gamma(0), g) \in r^{-1}(\gamma(0))$  podemos describir el levantado de  $\gamma$  por  $r$  desde  $x$  en términos del funtor  $i\mathcal{F}$  como

$$\tilde{\gamma}^x(t) = (\gamma(t), \mathcal{L}(i\mathcal{F})Z_B^{-1}([\gamma_{[0,t]}])(g))$$

para todo  $t \in I$ .

Así, la segunda coordenada de  $\tilde{\gamma}^x(t)$  es la imagen de  $g$  por el automorfismo de  $G$  inducido por el funtor  $\mathcal{L}(i\mathcal{F})$  actuando sobre la clase de homotopía del camino  $\gamma_{[0,t]}$ , considerada como una flecha en  $\mathcal{L}B$  de  $\gamma(0)$  a  $\gamma(t)$ .

Es claro que esta última expresión del levantado de  $\gamma$  puede generalizarse como

$$(\gamma(t), \mathcal{L}DZ_B^{-1}([\gamma_{[0,t]}])(g))$$

para cualquier funtor  $D: B \rightarrow \text{Aut}(F)$  para cualquier espacio  $F$  y, por lo tanto, sería razonable pensar que puede utilizarse para construir una función levantadora de caminos para el fibrado  $\pi_B^D: B \times_D F \rightarrow B$ . Esto es, en esencia, lo que hemos demostrado en [25, Sección 6].

#### 4 Fibrados sobre espacios de Alexandroff

En la demostración del teorema que sigue, probaremos este resultado en el caso particular en que el funtor  $\mathcal{L}D$  es trivial en  $\mathcal{L}T$ . La ventaja principal entre la prueba que exponemos aquí y la dada en [25, Sección 6], es que aquí obtenemos una función levantadora de caminos para  $\pi_B^D: B \times_D F \rightarrow B$  mediante construcciones categóricas a partir de funciones cuya continuidad ha sido probada con anterioridad. De este modo, la continuidad de la función obtenida se deduce de la de estas.

Bajo la hipótesis de que  $\mathcal{L}D$  es trivial en  $\mathcal{L}T$ , no es difícil ver que  $\mathcal{L}DZ_B^{-1} = \overline{D}q$  donde el funtor  $\overline{D}$  viene dado por la composición

$$G \hookrightarrow \Pi_1(B) \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}B \xrightarrow{\mathcal{L}D} \text{Aut}(F).$$

En efecto, si  $\mathcal{L}D$  es trivial en  $\mathcal{L}T$ , entonces existe un único funtor  $\overline{\mathcal{L}D}: \mathcal{L}B/\mathcal{L}T \rightarrow \text{Aut}(F)$  tal que  $\mathcal{L}D = \overline{\mathcal{L}D}q_B$ . De la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{L}B & \xrightarrow{q_B} & \mathcal{L}B/\mathcal{L}T & \xrightarrow{\rho_B} & \text{Aut}_{\mathcal{L}B}(b_0) & \hookrightarrow & \mathcal{L}B & \xrightarrow{q_B} & \mathcal{L}B/\mathcal{L}T & \xrightarrow{\overline{\mathcal{L}D}} & \text{Aut}(F) \\ \downarrow Z_B & & & & \downarrow Z_B & & \downarrow Z_B & & & & \\ \Pi_1(B) & \xrightarrow{q} & G & \hookrightarrow & \Pi_1(B) & & & & & & \end{array}$$

y teniendo en cuenta que la composición

$$\mathcal{L}B/\mathcal{L}T \xrightarrow{\rho_B} \text{Aut}_{\mathcal{L}B}(b_0) \hookrightarrow \mathcal{L}B \xrightarrow{q_B} \mathcal{L}B/\mathcal{L}T$$

es la identidad, se sigue fácilmente que

$$\overline{D}q = \mathcal{L}DZ_B^{-1}.$$

Así, en el teorema que sigue mostraremos que si  $\mathcal{L}D$  es trivial en  $\mathcal{L}T$  entonces la función

$$\Lambda: (B \times_D F) \times_{\pi_B^D} B^I \times I \rightarrow B \times_D F$$

definida por

$$\Lambda(b, x, \gamma, t) = (\gamma(t), \overline{D}(q([\gamma_{[0,t]}]))(x))$$

para todo  $b \in B$ , todo  $x \in F$ , todo camino  $\gamma: I \rightarrow B$  y todo  $t \in I$  tales que  $\gamma(0) = b$  resulta continua. La misma induce, mediante la ley exponencial, una función levantadora de caminos para el fibrado  $\pi_B^D: B \times_D F \rightarrow B$ .

Como veremos a continuación, este caso particular será suficiente para concluir que el fibrado  $\pi_B^D: B \times_D F \rightarrow B$  es una fibración de Hurewicz para cualquier funtor  $D: B \rightarrow \text{Aut}(F)$ .

Sea  $F$  un espacio topológico y sea  $E: B \rightarrow \text{Aut}(F)$  un funtor. Como se sigue de lo mencionado en el último párrafo de la subsección 2.3.1, la composición

$$\mathcal{L}B \xrightarrow{q_B} \mathcal{L}B/\mathcal{L}T \xrightarrow{\cong} \text{Aut}_{\mathcal{L}B}(b_0) \hookrightarrow \mathcal{L}B$$

## 4.5 Los fibrados sobre A-espacios con fibra $T_0$ son fibraciones

es un funtor naturalmente isomorfo a la identidad de  $\mathcal{L}B$ . Por lo tanto, el funtor  $E$  es naturalmente isomorfo al funtor  $D$  definido como la composición

$$B \xrightarrow{\iota_B} \mathcal{L}B \xrightarrow{q_B} \mathcal{L}B/\mathcal{L}T \rightarrow \mathcal{L}B \xrightarrow{\mathcal{L}E} \text{Aut}(F).$$

Es claro que  $\mathcal{L}D$  viene dado por la composición

$$\mathcal{L}B \xrightarrow{q_B} \mathcal{L}B/\mathcal{L}T \rightarrow \mathcal{L}B \xrightarrow{\mathcal{L}E} \text{Aut}(F).$$

Dado que  $q_B$  es trivial en  $\mathcal{L}T$ , el funtor  $\mathcal{L}D$  también lo será.

Por otro lado, puesto que  $D$  es naturalmente isomorfo a  $E$ , los fibrados  $\pi_B^D: B \times_D F \rightarrow B$  y  $\pi_B^E: B \times_E F \rightarrow B$  resultan fibrados isomorfos. Luego, uno será fibración de Hurewicz si y sólo si el otro también lo es. Se sigue que, con el propósito de demostrar que el fibrado  $\pi_B^D: B \times_D F \rightarrow B$  es una fibración de Hurewicz, podemos suponer sin pérdida de generalidad que el funtor  $\mathcal{L}D$  es trivial en  $\mathcal{L}T$  como queríamos.

**Teorema 4.5.4.** *Sea  $B$  un espacio de Alexandroff conexo, sea  $F$  un espacio  $T_0$  y sea  $D: B \rightarrow \text{Aut}(F)$  un funtor. Entonces,  $\pi_B^D: B \times_D F \rightarrow B$  es una fibración de Hurewicz.*

*Demostración.* Sea  $b_0 \in B$ , sea  $G = \pi_1(B, b_0)$ , sea  $1_G$  el neutro de  $G$  y sea  $T$  un árbol maximal en  $B$ .

Sean además  $i, q, \mathcal{F}, \tilde{B} = B \times_{i\mathcal{F}} G, r = \pi_{\tilde{B}}^{i\mathcal{F}}: \tilde{B} \rightarrow B$  y  $\lambda: \tilde{B} \times_r B^I \rightarrow \tilde{B}^I$  como en el lema 4.5.2 y sea  $\lambda^b$  la función inducida por  $\lambda$  por la ley exponencial.

Por lo desarrollado en la discusión anterior podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $\mathcal{L}D$  es trivial en  $\mathcal{L}T$ .

Como antes, sea  $\bar{D}$  la composición

$$G \hookrightarrow \Pi_1(B) \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}B \xrightarrow{\mathcal{L}D} \text{Aut}(F).$$

Por la proposición 4.4.3, tenemos un pullback

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B} \times_{D_r} F & \xrightarrow{r'} & B \times_D F \\ \downarrow & \text{pull} & \downarrow \pi_B^D \\ \tilde{B} & \xrightarrow{r} & B \end{array}$$

donde la flecha  $r': \tilde{B} \times_{D_r} F \rightarrow B \times_D F$  es la “proyección” definida por

$$r'(b, g, x) = (b, x)$$

para todo  $(b, g, x) \in \tilde{B} \times_{D_r} F$  y donde la flecha no etiquetada es la proyección obvia.

Sea ahora  $C_F: \mathcal{L}\tilde{B} \rightarrow \text{Aut}(F)$  el funtor constante  $F$ . Dado que  $\tilde{B}$  es simplemente conexo,  $\mathcal{L}\tilde{B}$  es una categoría indiscreta. Podemos definir entonces un isomorfismo natural

#### 4 Fibrados sobre espacios de Alexandroff

---

$\alpha: C_F \Rightarrow \mathcal{L}(Dr)$  por  $\alpha_{(b,g)} = \mathcal{L}(Dr)(f)$  para todo  $b \in B$  y todo  $g \in G$ , donde  $f$  es la única flecha en  $\mathcal{L}\tilde{B}$  de  $(b_0, 1_G)$  a  $(b, g)$ . De la observación 4.5.3 se sigue que

$$\alpha_{(b,g)} = \mathcal{L}(Dr)(f) = \mathcal{L}D(\mathcal{L}r(f)) = \mathcal{L}D(\bar{\tau})\mathcal{L}D(\bar{g}) = \mathcal{L}D(\bar{g}) = \bar{D}(g)$$

para todo  $b \in B$  y todo  $g \in G$ , donde como en 4.5.3,  $f$  es la única flecha en  $\mathcal{L}\tilde{B}$  de  $(b_0, 1_G)$  a  $(b, g)$ ,  $\bar{\tau}$  es la única flecha en  $\mathcal{L}T$  de  $b_0$  a  $b$  y  $\bar{g}$  es el automorfismo de  $b_0$  en  $\mathcal{L}B$  correspondiente a  $g$ .

En particular, tenemos un isomorfismo natural  $\alpha_{\tilde{B}}: C_{F\tilde{B}} \Rightarrow Dr$ , y puesto que  $C_{F\tilde{B}}$  es el funtor constante  $F$ , se sigue de 4.2.7 y 4.3.13 que este isomorfismo induce un homeomorfismo  $\tilde{B} \times F \rightarrow \tilde{B} \times_{Dr} F$  que mapea al elemento  $(b, g, x)$  de  $\tilde{B} \times F$  en el elemento  $(b, g, \bar{D}(g)(x))$  para todo  $b \in B$ , todo  $g \in G$  y todo  $x \in F$ .

Tenemos entonces un pullback

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B} \times F & \xrightarrow{e} & B \times_D F \\ p_{\tilde{B}} \downarrow & \text{pull} & \downarrow \pi_B^D \\ \tilde{B} & \xrightarrow{r} & B \end{array}$$

donde  $p_{\tilde{B}}$  es la proyección y  $e$  es la función continua definida por

$$e(b, g, x) = (b, \bar{D}(g)(x))$$

para todo  $b \in B$ , todo  $g \in G$  y todo  $x \in F$ .

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} (\tilde{B} \times F) \times_{\pi_B^D} B^I & \xrightarrow{\quad} & \tilde{B} \times F & & \\ \downarrow & \searrow e' & \downarrow e & & \\ & (B \times_D F) \times_{\pi_B^D} B^I & \longrightarrow & B \times_D F & \\ & \downarrow & & \downarrow \pi_B^D & \\ B^I & \xlongequal{\quad} & B^I & \xrightarrow{\text{ev}_0} & B \end{array}$$

## 4.5 Los fibrados sobre A-espacios con fibra $\mathbf{T}_0$ son fibraciones

donde los “cuadrados” son los pullbacks mencionados en la observación que sigue a la definición 1.3.20 y  $e'$  es la flecha canónica entre los pullbacks que hace conmutar el diagrama. Se sigue fácilmente que  $e'$  es el pullback de  $e$  por la flecha canónica

$$(B \times_D F) \times_{\pi_B^D} B^I \rightarrow B \times_D F.$$

Es fácil verificar que  $e'$  está definida por

$$e'(b, g, x, \gamma) = (b, \overline{D}(g)(x), \gamma)$$

para todo  $b \in B$ , todo  $g \in G$ , todo  $x \in F$  y todo camino  $\gamma: I \rightarrow B$  tal que  $\gamma(0) = b$ .

Notemos que permutando las coordenadas correspondientes a  $F$  y a  $B^I$ , obtenemos un homeomorfismo canónico entre los espacios  $(\tilde{B} \times_r B^I) \times F$  y  $(\tilde{B} \times F) \times_{\pi_{\tilde{B}}^D} B^I$ . Definimos  $\rho$  como la composición

$$(\tilde{B} \times F) \times_{\pi_{\tilde{B}}^D} B^I \times I \cong (\tilde{B} \times_r B^I) \times F \times I \cong (\tilde{B} \times_r B^I) \times I \times F \xrightarrow{\lambda^b \times \text{Id}_F} \tilde{B} \times F.$$

La función  $e\rho: (\tilde{B} \times F) \times_{\pi_{\tilde{B}}^D} B^I \times I \rightarrow B \times_D F$  está definida por

$$e\rho(b, g, x, \gamma, t) = (\gamma(t), \overline{D}(q([\gamma_{[0,t]}]))(x))$$

para cualesquiera  $b \in B$ ,  $g \in G$ ,  $x \in F$ ,  $\gamma \in B^I$  y  $t \in I$  tales que  $\gamma(0) = b$ .

Por otro lado, la función  $e' \times \text{Id}_I: (\tilde{B} \times F) \times_{\pi_{\tilde{B}}^D} B^I \times I \rightarrow (B \times_D F) \times_{\pi_B^D} B^I \times I$  está claramente definida por

$$e' \times \text{Id}_I(b, g, x, \gamma, t) = (b, \overline{D}(g)(x), \gamma, t)$$

para cualesquiera  $b \in B$ ,  $g \in G$ ,  $x \in F$ ,  $\gamma \in B^I$  y  $t \in I$  tales que  $\gamma(0) = b$ .

Notemos que, puesto que  $r$  es un revestimiento, también lo son  $e$  y  $e'$ . En particular,  $e'$  es cociente y por lo tanto  $e' \times \text{Id}_I$  también lo es. Por otro lado, la igualdad anterior muestra que si

$$e' \times \text{Id}_I(b, g, x, \gamma, t) = e' \times \text{Id}_I(b', g', x', \gamma', t')$$

para elementos  $(b, g, x, \gamma, t)$  y  $(b', g', x', \gamma', t')$  de  $(\tilde{B} \times F) \times_{\pi_{\tilde{B}}^D} B^I \times I$  entonces  $b = b'$ ,  $\gamma = \gamma'$ ,  $t = t'$  y  $\overline{D}(g)(x) = \overline{D}(g')(x')$  de donde se sigue fácilmente que

$$e\rho(b, g, x, \gamma, t) = e\rho(b', g', x', \gamma', t').$$

Así,  $e\rho$  se factoriza a través de  $e' \times \text{Id}_I$  induciendo una función continua

$$\Lambda: (B \times_D F) \times_{\pi_B^D} B^I \times I \rightarrow B \times_D F$$

definida por

$$\Lambda(b, x, \gamma, t) = (\gamma(t), \overline{D}(q([\gamma_{[0,t]}]))(x))$$

para todo  $b \in B$ , todo  $x \in F$ , todo  $\gamma: I \rightarrow B$  y todo  $t \in I$  tales que  $\gamma(0) = b$ . Es fácil verificar que la función  $\Lambda^\sharp$  inducida por  $\Lambda$  por la ley exponencial es una función levantadora de caminos para  $\pi_B^D$ . Se sigue que  $\pi_B^D$  es una fibración de Hurewicz.  $\square$



#### 4 Fibrados sobre espacios de Alexandroff

---

**Teorema 4.5.5.** *Sea  $B$  un espacio de Alexandroff conexo, sea  $F$  cualquier espacio  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$  un fibrado sobre  $B$  con fibra  $F$ . Entonces  $p$  es una fibración de Hurewicz.*

*Demostración.* Por el teorema 4.3.11, es claro que existe un funtor  $D: B \rightarrow \text{Aut}(F)$  tal que la proyección  $\pi_B^D: B \times_D F \rightarrow B$  es un fibrado isomorfo a  $p$ . Por el teorema 4.5.4,  $\pi_B^D$  es una fibración de Hurewicz de donde se sigue fácilmente que  $p$  también lo es.  $\square$

## Capítulo 5

# Fibraciones entre espacios finitos

### 5.1 Introducción

En este capítulo estudiamos los aspectos combinatorios de las fibraciones de Hurewicz entre espacios topológicos finitos  $T_0$ . Varios de los resultados obtenidos pueden extenderse fácilmente a fibraciones de Hurewicz entre espacios de Alexandroff  $T_0$ . No haremos, sin embargo, mención explícita de estos hechos y nos limitaremos a estudiar el problema en el contexto de los espacios finitos.

Luego de introducir dos resultados preliminares sobre continuidad de funciones cuyo codominio es un espacio de Alexandroff, extenderemos algunas de las definiciones de Stong a la categoría  $\mathbf{FinTop}_0/B$  para un espacio finito  $T_0$   $B$  fijo, y veremos que muchos de los resultados de la teoría de Stong, así como nuestros resultados sobre  $bp$ -retractos, pueden generalizarse a esta categoría.

En particular, definiremos *beat points de un objeto sobre  $B$*  lo que permite definir a su vez, la noción de  *$bp$ -retracto de un objeto sobre  $B$* , de *objeto minimal sobre  $B$*  y de *core de un objeto sobre  $B$* , (o  *$bp$ -retracto de una función*, *función minimal* y *core de una función*, respectivamente). Luego desarrollaremos resultados que relacionan *beat points* de fibraciones entre espacios topológicos finitos  $T_0$  y *beat points* de sus espacios base, total y fibras, así como comportamientos de las fibraciones ante la presencia o ausencia de los mismos.

Finalmente, estudiaremos la regularidad de fibraciones de Hurewicz entre espacios finitos  $T_0$  y deduciremos a partir de los resultados obtenidos, una fuerte relación entre fibraciones de Hurewicz y bifibraciones de Grothendieck, que, bajo condiciones específicas sobre el espacio base, alcanza para caracterizar completamente a las fibraciones de Hurewicz entre espacios finitos  $T_0$  sobre dicho espacio.

Los resultados de este capítulo pueden encontrarse en [24].

### 5.2 Resultados preliminares

A continuación, probaremos dos proposiciones que nos permitirán deducir la continuidad de una función cuyo codominio es un espacio de Alexandroff a partir de la de otra que es comparable con la primera. Estas proposiciones pueden considerarse, en algún

## 5 Fibraciones entre espacios finitos

---

sentido, como “lemas de pegado” para funciones de este tipo, y nos permitirán deducir la continuidad de funciones de levantamiento de caminos que definiremos para demostrar que ciertas funciones entre espacios topológicos finitos son fibraciones de Hurewicz.

Antes enunciaremos dos lemas cuyas demostraciones son sencillas.

**Lema 5.2.1.** *Sea  $X$  un espacio topológico, sean  $V \subseteq X$  un subespacio abierto y  $K \subseteq X$  un subespacio cerrado, y sea  $W \subseteq V$  tal que  $K \cap W$  es abierto en  $K$ . Entonces*

$$(K^c \cap V) \cup (K \cap W)$$

es abierto en  $X$ .

*Demostración.* Como  $K \cap W$  es abierto en  $K$ , entonces existe un abierto  $U$  de  $X$  tal que  $K \cap W = K \cap U$ . En particular, como  $W \subseteq V$ , tenemos que  $K \cap W = K \cap W \cap V = K \cap U \cap V$ . Luego,

$$\begin{aligned} (K^c \cap V) \cup (K \cap W) &= (K^c \cap V) \cup (K \cap U \cap V) = \\ &= (K^c \cap V) \cup (K^c \cap U \cap V) \cup (K \cap U \cap V) = (K^c \cap V) \cup (U \cap V). \end{aligned}$$

Dado que  $K^c$ ,  $U$  y  $V$  son abiertos de  $X$ , el resultado se sigue.  $\square$

**Lema 5.2.2.** *Sea  $X$  un espacio topológico, sean  $V \subseteq X$  un subespacio abierto y  $K \subseteq X$  un subespacio cerrado, y sea  $W \subseteq K$  tal que  $V \cap W$  es cerrado en  $V$ . Entonces*

$$(V^c \cap K) \cup (V \cap W)$$

es cerrado en  $X$ .

*Demostración.* La demostración de este lema es análoga a la del lema 5.2.1.  $\square$

**Proposición 5.2.3.** *Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos con  $Y$  espacio de Alexandroff, sea  $K \subseteq X$  un subespacio cerrado y sean  $f, g: X \rightarrow Y$  dos funciones. Si*

1.  $f$  es continua,
2.  $f \leq g$ ,
3.  $f|_{K^c} = g|_{K^c}$  y
4.  $g|_K$  es continua

entonces  $g$  es continua.

*Demostración.* Sea  $U \subseteq Y$  un abierto. Tenemos que

$$g^{-1}(U) = (K^c \cap g^{-1}(U)) \cup (K \cap g^{-1}(U)) = (K^c \cap f^{-1}(U)) \cup (K \cap g^{-1}(U)).$$

Es claro que  $f^{-1}(U)$  es abierto en  $X$ . Ahora bien, como  $f \leq g$  y  $U$  es abierto, entonces  $g^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(U)$ . Por otro lado,  $K \cap g^{-1}(U) = (g|_K)^{-1}(U)$  es abierto en  $K$ . Por el lema 5.2.1, se sigue que  $g^{-1}(U)$  es abierto en  $X$ . Luego,  $g$  es continua.  $\square$

**Proposición 5.2.4.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos con  $Y$  espacio de Alexandroff, sea  $V \subseteq X$  un subespacio abierto y sean  $f, g: X \rightarrow Y$  dos funciones. Si

1.  $g$  es continua,
2.  $f \leq g$ ,
3.  $f|_{V^c} = g|_{V^c}$  y
4.  $f|_V$  es continua

entonces  $f$  es continua.

*Demostración.* Esta proposición se demuestra de manera similar a 5.2.3 utilizando el lema 5.2.2. □

Notemos que 1.2.21 puede deducirse fácilmente tanto a partir de 5.2.3 como a partir de 5.2.4.

### 5.3 Beat points y bp-retractos en $\mathbf{FinTop}_0/B$

Comenzamos esta sección introduciendo definiciones de beat point y de bp-retractos en la categoría  $\mathbf{FinTop}_0/B$  de objetos sobre  $B$ , para algún  $B \in \mathbf{FinTop}_0$ , y extendiendo a esta categoría algunos resultados de la teoría clásica de Stong, así como de nuestra teoría de bp-retractos.

**Definición 5.3.1.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$  una función continua que será considerada como un objeto sobre  $B$ . Un *down beat point* de  $p$  es un punto  $e \in E$  que es down beat point de  $E$  y de  $p^{-1}(p(e))$ . Similarmente, un *up beat point* de  $p$  es un punto  $e \in E$  que es un up beat point de  $E$  y de  $p^{-1}(p(e))$ .

Diremos que  $e \in E$  es un *beat point* de  $p$  si es un down beat point de  $p$  o un up beat point de  $p$ . Si  $e$  es un beat point de  $p$ , diremos normalmente que la restricción  $p|: E - \{e\} \rightarrow B$  de  $p$  se obtuvo removiendo o eliminando el beat point  $e$  de  $p$ .

Diremos que una función  $p': E' \rightarrow B$  es un *dbp-retracto* (resp. *ubp-retracto*) de  $p$  si se puede obtener removiendo sucesivamente down beat points (resp. up beat points) de  $p$ .

Diremos que  $p$  es *minimal* si no tiene beat points. Diremos que una función continua  $p_C: E' \rightarrow B$  es un *core* de  $p$  si es minimal y retracto por deformación fuerte de  $p$  (cf. definición 1.1.8).

*Observación 5.3.2.* Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$ , sea  $p: E \rightarrow B$  una función continua y sea  $e_0 \in E$ . De la definición anterior se deduce que  $e_0$  es un down beat point de  $p$  si y sólo si  $e_0$  es un down beat point de  $E$  y  $p(e_0) = p(e_1)$  donde  $e_1 = \max(\widehat{U}_{e_0})$ . De manera similar,  $e_0$  es un up beat point de  $p$  si y sólo si  $e_0$  es un up beat point de  $E$  y  $p(e_0) = p(e_2)$  donde  $e_2 = \min(\widehat{F}_{e_0})$ .

**Proposición 5.3.3.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$ , sea  $p: E \rightarrow B$  una función continua, sea  $e$  un down beat point (up beat point) de  $E$ , sea  $i: E - \{e\} \rightarrow E$  la inclusión y sea  $r: E \rightarrow E - \{e\}$  la retracción asociada a la remoción del down beat point (up beat point)  $e$ .

## 5 Fibraciones entre espacios finitos

---

Si  $e$  es un down beat point (up beat point) de  $p$ , entonces  $r$  es una flecha sobre  $B$  y  $pi$  es un retracto por deformación fuerte de  $p$ . Recíprocamente, si  $r$  es una flecha sobre  $B$  de  $p$  a  $pi$ , entonces  $e$  es down beat point (up beat point) de  $p$ .

*Demostración.* Probaremos el caso en que  $e$  es down beat point de  $E$ . El otro caso es análogo.

Supongamos primero que  $e$  es down beat point de  $p$ . Es claro que  $i$  es una flecha sobre  $B$ , mientras que de la observación 5.3.2 se sigue que  $r$  también lo es. Más aún,  $ri = \text{Id}_{E - \{e\}}$  y la homotopía canónica  $H: ir \simeq \text{Id}_E$  es claramente una homotopía sobre  $B$  relativa a  $E - \{e\}$ . Se sigue que  $pi$  es retracto por deformación fuerte de  $p$ .

Supongamos ahora que  $r$  es una flecha sobre  $B$  y pongamos  $e' = \max(\widehat{U}_e^E)$ . Tenemos entonces que

$$p(e') = p(r(e)) = pir(e) = p(e).$$

El resultado se sigue de la observación 5.3.2. □

El siguiente corolario es inmediato.

**Corolario 5.3.4.** *Toda función continua entre espacios topológicos finitos  $T_0$  tiene un core.*

**Ejemplo 5.3.5.** Sea  $X$  un espacio topológico finito  $T_0$  y sea  $X_C$  un core de  $X$ . Sea  $i: X_C \rightarrow X$  la inclusión y sea  $r: X \rightarrow X_C$  una retracción de  $i$  obtenida eliminando sucesivamente los beat points  $x_0, x_1, \dots, x_n$  (en ese orden). Veamos que  $\text{Id}_{X_C}$  es un core de  $r$ .

Definimos  $X_0 = X$  e, inductivamente,  $X_{k+1} = X_k - \{x_k\}$  para  $k = 0, \dots, n$ . Consideramos además, para  $k = 0, \dots, n$ , la retracción  $r_k: X_k \rightarrow X_{k+1}$  correspondiente a la remoción del beat point  $x_k$  y la inclusión  $i_k: X_{k+1} \rightarrow X_k$ . Veamos que, para todo  $k = 0, \dots, n$ , el punto  $x_k$  es un beat point de la restricción

$$ri_0i_1 \dots i_{k-1}: X_k \rightarrow X_C$$

de  $r$ .

Sea  $k \in \{0, \dots, n\}$ . Entonces, dado que  $r = r_n r_{n-1} \dots r_1 r_0$ , tenemos que

$$\begin{aligned} ri_0 \dots i_k r_k &= r_n r_{n-1} \dots r_k \dots r_1 r_0 i_0 i_1 \dots i_k r_k = r_n r_{n-1} \dots r_k = \\ &= r_n r_{n-1} \dots r_0 i_0 \dots i_{k-1} = ri_0 \dots i_{k-1}. \end{aligned}$$

Así, por la proposición 5.3.3 se sigue que  $x_k$  es un beat point de la restricción  $ri_0 \dots i_{k-1}$  de  $r$ . Luego,  $ri_0 \dots i_k$  es retracto por deformación fuerte de  $ri_0 \dots i_{k-1}$ .

Inductivamente, es fácil ver que  $ri_0 \dots i_k$  es retracto por deformación fuerte de  $r$  para  $k = 0, \dots, n$ . En particular,  $\text{Id}_{X_C} = ri_0 \dots i_n$  es retracto por deformación fuerte de  $r$ . Más aún, dado que las fibras de  $\text{Id}_{X_C}$  son espacios unipuntuales, es claro que  $\text{Id}_{X_C}$  es minimal. Se sigue que  $\text{Id}_{X_C}$  es un core de  $r$ .

**Proposición 5.3.6.** *Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$ , sea  $p: E \rightarrow B$  una función continua. Si  $p$  no tiene down beat points (resp. up beat points) y  $h: p \rightarrow p$  es una flecha sobre  $B$  tal que  $h \leq \text{Id}_p$  (resp.  $h \geq \text{Id}_p$ ), entonces  $h = \text{Id}_p$ .*

*Demostración.* Probaremos el caso en que  $p$  no tiene down beat points y  $h \leq \text{Id}_p$ . El otro caso es análogo. Sea  $A = \{e \in E : h(e) < e\}$  y supongamos que  $A \neq \emptyset$ . Sea  $e_0 \in \text{mnl } A$ . Como en la demostración de 1.2.30 obtenemos que  $h(e_0) = \max \widehat{U}_{e_0}^E$  y por lo tanto  $e_0$  es down beat point de  $E$ . Más aún, como  $h$  es una flecha sobre  $B$ ,  $ph(e_0) = p(e_0)$ . Se sigue de la observación 5.3.2 que  $e_0$  es down beat point de  $p$ , lo cual es absurdo. Luego,  $A$  es vacío y por lo tanto  $h = \text{Id}_p$ .  $\square$

**Corolario 5.3.7.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$ , sea  $p: E \rightarrow B$  una función continua minimal y sea  $h: p \rightarrow p$  una flecha sobre  $B$  tal que  $h \simeq \text{Id}_p$  sobre  $B$ . Entonces  $h = \text{Id}_p$ .

*Demostración.* Se sigue fácilmente de 1.2.20 y de la proposición anterior.  $\square$

**Corolario 5.3.8.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$  una función continua. Entonces, dos cores de  $p$  son isomorfos.

Los resultados sobre bp-retractos en  $\mathbf{FinTop}_0$  pueden extenderse de manera natural a la categoría  $\mathbf{FinTop}_0/B$  para todo  $B \in \mathbf{FinTop}_0$ . A continuación mostraremos como extender algunos de estos resultados que, aunque no serán esenciales para el resto del capítulo, será conveniente tener a disposición.

El siguiente teorema es una generalización del teorema 3.2.6.

**Teorema 5.3.9.** Sean  $A, X$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$  con  $A \subseteq X$ . Sea  $i: A \rightarrow X$  la inclusión y sean  $a: A \rightarrow B$  y  $x: X \rightarrow B$  funciones continuas tales que  $xi = a$ . Consideramos  $(A, a)$  y  $(X, x)$  como objetos sobre  $B$  y a la función  $i: a \rightarrow x$  como una flecha sobre  $B$ . Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes:

- (1)  $a$  es un dbp-retracto de  $x$ .
- (2) Existe una flecha  $f: x \rightarrow x$  sobre  $B$  tal que  $f \leq \text{Id}_X$ ,  $f^2 = f$  y  $f(X) = A$ .
- (3) Existe una única flecha  $f: x \rightarrow x$  sobre  $B$  tal que  $f \leq \text{Id}_X$ ,  $f^2 = f$  y  $f(X) = A$ .
- (4) Existe una retracción  $r: x \rightarrow a$  de  $i$  tal que  $ir \leq \text{Id}_X$ .
- (5) Existe una única retracción  $r: x \rightarrow a$  de  $i$  tal que  $ir \leq \text{Id}_X$ .

*Demostración.* La proposición (1)  $\Rightarrow$  (4) se deduce de que, por definición de down beat point de  $x$ , la retracción  $r$  asociada a la remoción de un down beat point de  $x$  resulta una flecha sobre  $B$ .

La proposición (4)  $\Rightarrow$  (2) se demuestra fácilmente tomando  $f = ir$  como en 3.2.6.

Veamos (2)  $\Rightarrow$  (1). Procedemos como en la demostración de 3.2.6. Suponemos que existe una flecha  $f: x \rightarrow x$  sobre  $B$  tal que  $f \leq \text{Id}_X$ ,  $f^2 = f$  y  $f(X) = A$  y definimos  $W = \{z \in X : f(z) < z\}$ . Supongamos que  $W \neq \emptyset$  y tomemos  $z_0 \in \text{mnl } W$ . Hemos probado en 3.2.6 que  $z_0$  es down beat point de  $X$  con  $\max(\widehat{U}_{z_0}) = f(z_0)$ . Dado que  $xf = x$ , se sigue que  $xf(z_0) = x(z_0)$  y de la observación 5.3.2, que  $z_0$  es down beat point de  $x$ . La prueba se sigue como en 3.2.6.

El resto de las implicaciones puede demostrarse a partir de 3.2.6 utilizando adecuadamente el hecho de que las funciones involucradas son flechas sobre  $B$ .  $\square$

## 5 Fibraciones entre espacios finitos

---

**Proposición 5.3.10.** Sean  $A, B, X$  e  $Y$  espacios topológicos finitos  $T_0$  con  $A \subseteq X \subseteq Y$  y sea  $y: Y \rightarrow B$  una función continua. Sean  $x: X \rightarrow B$  y  $a: A \rightarrow B$  las restricciones de  $y$ . Si  $a$  es un dbp-retracto de  $y$  entonces es un dbp-retracto de  $x$ .

*Demostración.* La demostración de esta proposición es análoga a la de 3.2.9.  $\square$

La siguiente proposición resultará de utilidad en las secciones subsiguientes.

**Proposición 5.3.11.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$ . Sea  $\Omega$  el conjunto de dbp-retractos de  $p$ . Definimos en  $\Omega$  el orden siguiente: dados  $x, y \in \Omega$ , definimos  $x \leq y$  si y sólo si  $x$  es dbp-retracto de  $y$ .

Entonces  $\Omega$  tiene mínimo.

*Demostración.* La prueba de esta proposición es similar a la de la proposición 3.2.19.  $\square$

A continuación, veremos que el core de un fibrado entre espacios topológicos finitos  $T_0$  es nuevamente un fibrado.

**Proposición 5.3.12.** Sean  $E, B$  y  $F$  espacios topológicos finitos  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$  un fibrado con fibra  $F$ . Entonces el core de  $p$  es un fibrado con base  $B$  y fibra  $F_C$  donde  $F_C$  es un core de  $F$ .

*Demostración.* Por el teorema 4.3.11, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $E = B \times_D F$  y que  $p = \pi_B^D: B \times_D F \rightarrow B$  para algún funtor  $D: B \rightarrow \text{Aut}(F)$ .

Sea  $F_d$  el dbp-retracto mínimo de  $F$ . Sean  $i: F_d \rightarrow F$  y  $r: F \rightarrow F_d$  la inclusión y la retracción asociadas a  $F_d$ , respectivamente.

Sea  $\phi$  un automorfismo de  $F$ . Entonces

$$r\phi^{-1}ir\phi i \leq r\phi^{-1}\phi i = ri = \text{Id}_{F_d}$$

y dado que  $F_d$  no tiene down beat points, se sigue que  $r\phi^{-1}ir\phi i = \text{Id}_{F_d}$ . Intercambiando  $\phi$  y  $\phi^{-1}$  obtenemos que  $r\phi ir\phi^{-1}i = \text{Id}_{F_d}$  y por lo tanto,  $r\phi i$  es un automorfismo de  $F_d$  con inversa  $r\phi^{-1}i$ .

Definimos un funtor  $D': B \rightarrow \text{Aut}(F_d)$  por

$$D'(b \leq b') = rD(b \leq b')i$$

para cualesquiera  $b, b' \in B$  tales que  $b \leq b'$ .

Es claro que

$$D'(b \leq b) = rD(b \leq b)i = r\text{Id}_F i = ri = \text{Id}_{F_d}$$

para todo  $b \in B$ .

Ahora bien, dados  $b, b', b'' \in B$  tales que  $b \leq b' \leq b''$ , se tiene que

$$rD(b \leq b'')i = rD(b' \leq b'')D(b \leq b')i \geq rD(b' \leq b'')irD(b \leq b')i$$

de donde obtenemos que

$$rD(b \leq b'')i = rD(b' \leq b'')irD(b \leq b')i$$

por el lema 8.1.1 de [5]. Así,  $D'$  resulta efectivamente un funtor. Se sigue de 4.3.1 que  $\pi_B^{D'} : B \times_{D'} F_d \rightarrow B$  es un fibrado sobre  $B$  con fibra  $F_d$ .

Veamos que  $\pi_B^{D'}$  es el dbp-retracto mínimo de  $\pi_B^D$ .

Sea  $\phi$  nuevamente un automorfismo de  $F$  y sea  $f = \phi ir \phi^{-1} ir$ . Entonces

$$f^2 = \phi ir \phi^{-1} ir \phi ir \phi^{-1} ir = \phi i (r \phi i)^{-1} (r \phi i) r \phi^{-1} ir = \phi ir \phi^{-1} ir = f.$$

Además, es claro que  $f \leq ir$ . Se sigue del teorema 3.2.6 y el corolario 3.2.12 que la imagen de  $f$  es un dbp-retracto de  $F$  contenido en  $F_d$ . Dado que  $F_d$  es el dbp-retracto mínimo de  $F$ , se sigue nuevamente de 3.2.12 que  $f = ir$ . Luego,  $\phi i (r \phi i)^{-1} r = f = ir$  y dado que  $r$  es epimorfismo, se sigue que  $\phi i (r \phi i)^{-1} = i$ , o equivalentemente, que  $\phi i = ir \phi i$ .

De manera análoga, tomando  $g = ir \phi ir \phi^{-1}$  y observando que  $g^2 = g$  y que  $g \leq ir$ , se prueba que  $g = ir$  y por lo tanto, que  $r \phi = r \phi ir$ .

Esto muestra que  $i$  y  $r$  inducen transformaciones naturales  $\iota : j'D' \Rightarrow jD$  y  $\rho : jD \Rightarrow j'D'$ , respectivamente, donde  $j : \mathbf{Aut}(F) \hookrightarrow \mathbf{Top}$  y  $j' : \mathbf{Aut}(F_d) \hookrightarrow \mathbf{Top}$  son las inclusiones.

Por la observación 4.2.9,  $i$  y  $r$  inducen morfismos de fibrados sobre  $B$ ,  $i_* : \pi_B^{D'} \rightarrow \pi_B^D$  y  $r_* : \pi_B^D \rightarrow \pi_B^{D'}$ . Es claro que la función  $i_* : B \times_{D'} F_d \rightarrow B \times_D F$  es una inclusión de conjuntos.

Por funtorialidad de la construcción de Grothendieck topológica, y dado que  $\rho = \text{Id}_{j'D'}$ , se sigue que  $r_* i_* = \text{Id}_{B \times_{D'} F_d}$ . Luego, la inclusión  $i_*$  de  $B \times_{D'} F_d$  en  $B \times_D F$  es subespacio, y por lo tanto, podemos considerar a  $B \times_{D'} F_d$  como un subespacio de  $B \times_D F$ .

Por otro lado, puesto que  $(\iota \rho)_b = ir \leq \text{Id}_F$  para todo  $b \in B$ , un cálculo explícito muestra que

$$i_* r_*(b, x) = (b, ir(x)) \leq (b, x)$$

para todo  $b \in B$  y todo  $x \in F$ , de donde obtenemos que  $i_* r_* \leq \text{Id}_{B \times_D F}$ . Se sigue que  $B \times_{D'} F_d$  es un dbp-retracto de  $B \times_D F$ . Más aún, dado que  $i_*$  y  $r_*$  son flechas sobre  $B$ , se sigue del teorema 5.3.9 que  $\pi_B^{D'}$  es un dbp-retracto de  $\pi_B^D$ , y puesto que las fibras de  $\pi_B^{D'}$  no tienen down beat points, se sigue que  $\pi_B^{D'}$  es el dbp-retracto mínimo de  $\pi_B^D$ , como queríamos.

Así, hemos probado que el dbp-retracto mínimo de un fibrado entre espacios topológicos finitos  $\mathbf{T}_0$  es un fibrado cuya fibra es el dbp-retracto mínimo de las fibras del primero. El resultado análogo para ubp-retractos de fibrados se demuestra de manera similar. Mediante un argumento inductivo, se sigue que cualquier core de un fibrado entre espacios topológicos finitos  $\mathbf{T}_0$  es nuevamente un fibrado, cuyas fibras son homeomorfas al core de las fibras del fibrado original.  $\square$

La siguiente proposición es sencilla y será utilizada para probar la proposición 5.3.14 que muestra una relación entre los beat points de una función abierta o cerrada con los beat points de sus fibras y de su codominio.

**Proposición 5.3.13.** *Sean  $E$  y  $B$  espacios de Alexandroff y sea  $p : E \rightarrow B$  una función continua. Son equivalentes:*

- (1) *La función  $p$  es abierta.*
- (2) *Para todo  $e \in E$ ,  $p(U_e) = U_{p(e)}$ .*



## 5 Fibraciones entre espacios finitos

---

(3) Para todo  $e \in E$  y todo  $b \leq p(e)$ , se tiene que  $U_e \cap p^{-1}(b) \neq \emptyset$ .

De manera similar, son equivalentes:

(4) La función  $p$  es cerrada.

(5) Para todo  $e \in E$ ,  $p(F_e) = F_{p(e)}$ .

(6) Para todo  $e \in E$  y todo  $b \geq p(e)$ , se tiene que  $F_e \cap p^{-1}(b) \neq \emptyset$ .

*Demostración.* Es claro que (2)  $\Rightarrow$  (1).

Veamos que (1)  $\Rightarrow$  (3). Sea  $e \in E$  y sea  $b \leq p(e)$ . Como  $p$  es abierta,  $p(U_e)$  es un abierto de  $B$  que contiene a  $p(e)$  y por lo tanto,  $b \in U_{p(e)} \subseteq p(U_e)$ . Se sigue que existe  $e' \in U_e$  tal que  $p(e') = b$ . Es claro entonces que  $e' \in U_e \cap p^{-1}(b)$ .

Veamos (3)  $\Rightarrow$  (2). Sea  $e \in E$ . Dado que  $p$  es continua, tenemos que  $p(U_e) \subseteq U_{p(e)}$ . Falta ver entonces que  $p(U_e) \supseteq U_{p(e)}$ . Sea  $b \in U_{p(e)}$  y sea  $e' \in U_e \cap p^{-1}(b)$ . Entonces  $b = p(e') \in p(U_e)$  y el resultado se sigue.

La equivalencia (4)  $\Leftrightarrow$  (5)  $\Leftrightarrow$  (6) se prueba de manera similar.  $\square$

**Proposición 5.3.14.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$  una función continua. Si  $p$  es abierta y  $e_0$  es un down beat point de  $E$ , entonces  $p(e_0)$  es down beat point de  $B$  o  $e_0$  es down beat point de  $p$ .

De manera análoga, si  $p$  es una función cerrada y  $e_0$  es un up beat point de  $E$ , entonces  $p(e_0)$  es up beat point de  $B$  o  $e_0$  es up beat point de  $p$ .

*Demostración.* Veamos la primera parte. Supongamos que  $p$  es abierta y que  $e_0$  es un down beat point de  $E$ .

Sea  $e_1 = \max(\widehat{U}_{e_0})$ . Si  $p(e_0) = p(e_1)$  el resultado se sigue de la observación 5.3.2. Supongamos entonces que  $p(e_1) < p(e_0)$ . Veamos que  $p(e_1) = \max(\widehat{U}_{p(e_0)})$ .

Sea  $b < p(e_0)$ . Por 5.3.13 existe  $e_2 \in U_{e_0} \cap p^{-1}(b)$ . Es claro que  $e_2 \neq e_0$ , pues de lo contrario se tendría que  $p(e_0) = b$ . Luego,  $e_2 < e_0$  y por lo tanto  $e_2 \leq e_1$ . Luego  $b = p(e_2) \leq p(e_1)$  y el resultado se sigue.

La segunda parte se demuestra de manera similar.  $\square$

### 5.4 Fibraciones y beat points

En lo que sigue, todas las funciones se considerarán no vacías.

**Proposición 5.4.1.** Sean  $E$  y  $B$  dos espacios topológicos finitos  $T_0$ , sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración y sea  $e$  un beat point de  $p$ . Entonces, la restricción  $p|: E - \{e\} \rightarrow B$  de  $p$  es una fibración homotópicamente equivalente por fibras a  $p$ .

*Demostración.* Del hecho de que  $p|$  es retracto de  $p$  se sigue que  $p|$  es fibración. El resultado se sigue entonces por la proposición 5.3.3.  $\square$

**Teorema 5.4.2.** Sean  $E$  y  $B$  dos espacios topológicos finitos  $T_0$ , sea  $p: E \rightarrow B$  una función continua y sea  $e$  un down beat point de  $p$  tal que la restricción  $p|: E - \{e\} \rightarrow B$  de  $p$  es una fibración. Entonces  $p$  es una fibración.

*Demostración.* Sea  $\Lambda: (E - \{e\}) \times_{p|} B^I \rightarrow (E - \{e\})^I$  una función levantadora de caminos para  $p|$ . Consideremos la función  $\lambda = \Lambda^b: (E - \{e\}) \times_{p|} B^I \times I \rightarrow E - \{e\}$  inducida por  $\Lambda$ . Consideremos además la inclusión  $i: E - \{e\} \rightarrow E$  y la retracción  $r: E \rightarrow E - \{e\}$  asociada a la remoción del beat point  $e$ . Es fácil ver que las flechas  $r$ ,  $\text{Id}_B$  y  $\text{Id}_{B^I}$  inducen un morfismo desde el diagrama  $E \xrightarrow{p} B \xleftarrow{\text{ev}_0} B^I$  al diagrama  $E - \{e\} \xrightarrow{p|} B \xleftarrow{\text{ev}_0} B^I$  y por lo tanto, una función continua  $R: E \times_p B^I \rightarrow (E - \{e\}) \times_{p|} B^I$  que mapea el par  $(e, \gamma) \in E \times_p B^I$  en  $(r(e), \gamma)$ . La función  $i\lambda \circ (R \times \text{Id}_I): E \times_p B^I \times I \rightarrow E$ , claramente continua, mapea el elemento  $(e, \gamma, t)$  de  $E \times_p B^I \times I$  en  $\lambda(r(e), \gamma, t)$ . Definimos  $\lambda': E \times_p B^I \times I \rightarrow E$  por

$$\lambda'(e, \gamma, t) = \begin{cases} e & \text{si } t = 0, \\ \lambda(r(e), \gamma, t) & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Observemos que  $\lambda' \geq i\lambda \circ (R \times \text{Id}_I)$  y que  $\lambda'$  coincide con  $i\lambda \circ (R \times \text{Id}_I)$  sobre  $E \times_p B^I \times (0, 1]$ . Por otro lado, la restricción de  $\lambda'$  a  $E \times_p B^I \times \{0\}$  es simplemente la proyección a  $E$  y por lo tanto es continua. Por 5.2.3, se sigue que  $\lambda'$  es continua. Es fácil verificar que  $\lambda'$  induce una función levantadora de caminos  $\Lambda': E \times_p B^I \rightarrow E^I$  para  $p$ .  $\square$

Veremos en la subsección 5.6.1 que la proposición anterior no vale cambiando down beat points por up beat points.

**Corolario 5.4.3.** *Sean  $E$  y  $B$  dos espacios topológicos finitos  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$  una función continua. Son equivalentes:*

- (1)  $p$  es fibración.
- (2) Todo dbp-retracto de  $p$  es fibración.
- (3) Existe un dbp-retracto de  $p$  que es fibración.

*Demostración.* La implicación (1)  $\Rightarrow$  (2) se sigue de 5.4.1 y la implicación (2)  $\Rightarrow$  (3) es inmediata. La implicación (3)  $\Rightarrow$  (1) se deduce fácilmente a partir de 5.4.2 mediante un argumento inductivo.  $\square$

El siguiente resultado generaliza el teorema 1.2.30.

**Teorema 5.4.4.** *Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$ , sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración y sea  $q: E \rightarrow B$  una función continua homotópica a  $p$ . Si  $E$  es minimal, entonces  $q = p$ .*

*Demostración.* Sea  $H: p \simeq q: E \times I \rightarrow B$ . Entonces  $H i_0 = p = p \text{Id}_E$  y por lo tanto existe  $\tilde{H}: E \times I \rightarrow E$  tal que  $\tilde{H} i_0 = \text{Id}_E$  y  $p \tilde{H} = H$ . Como  $E$  es minimal y  $\tilde{H} i_1 \simeq \tilde{H} i_0 = \text{Id}_E$ , entonces  $\tilde{H} i_1 = \text{Id}_E$  por 1.2.30. Se sigue que  $q = H i_1 = p \tilde{H} i_1 = p \text{Id}_E = p$ .  $\square$

**Corolario 5.4.5.** *Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración. Si  $E$  es minimal y  $B$  es conexo, entonces  $B$  es minimal.*

*Demostración.* Veamos que la única función continua  $f: B \rightarrow B$  homotópica a  $\text{Id}_B$  es  $\text{Id}_B$ . Sea entonces  $f: B \rightarrow B$  con  $f \simeq \text{Id}_B$ . Tenemos que  $p \simeq fp$ , y como  $E$  es minimal, por el teorema anterior deducimos que  $p = fp$ .

## 5 Fibraciones entre espacios finitos

Es un hecho conocido que las fibraciones de Hurewicz (no vacías) sobre espacios arcoconexos son sobreyectivas. En efecto, dado  $b \in B$ , podemos tomar un elemento  $e \in E$  y un camino  $\gamma$  en  $B$  desde  $p(e)$  a  $b$  y utilizar la propiedad de levantamiento de  $p$  para obtener un levantado  $\tilde{\gamma}$  de  $\gamma$  por  $p$  desde  $e$ . Entonces  $p(\tilde{\gamma}(1)) = \gamma(1) = b$  y por lo tanto,  $b$  está en la imagen de  $p$ .

Se sigue que  $f = \text{Id}_B$  como queríamos.

Sea ahora  $B'$  un dbp-retracto de  $B$ . Por 3.2.6 (o su versión dual para up beat points), existe una función  $f$  homotópica a  $\text{Id}_B$  tal que  $f(B) = B'$ . Pero por lo que hemos probado, tenemos que  $f = \text{Id}_B$ , de donde se sigue que  $B' = B$ . Es claro entonces que  $B$  es minimal.  $\square$

**Teorema 5.4.6.** *Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración. Sean además  $e \in E$  y  $b \in U_{p(e)}$ . Entonces  $U_e \cap p^{-1}(b) \neq \emptyset$ .*

*Demostración.* Si  $p(e) = b$  el resultado se sigue, pues, en ese caso se tiene que  $e \in U_e \cap p^{-1}(p(e))$ . Supongamos entonces que  $b < p(e)$ . Sea  $\mathcal{S} = \{0, 1\}$  el espacio de Sierpinski con  $0 < 1$  y sea  $H: \mathcal{S} \times I \rightarrow B$  la función definida por

$$H(s, t) = \begin{cases} p(e) & \text{si } t = 0 \text{ o } s = 1, \\ b & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Es claro que  $H^{-1}(U_b) = \{0\} \times (0, 1]$  y por lo tanto, que  $H$  es continua. Si  $i_0: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} \times I$  es la inclusión en la coordenada  $t = 0$ , entonces  $H i_0 = C_{p(e)} = p C_e$  y por lo tanto existe una función continua  $\tilde{H}: \mathcal{S} \times I \rightarrow E$  tal que  $\tilde{H} i_0 = C_e$  y  $p \tilde{H} = H$ .

Ahora bien, como  $\tilde{H}(1, 0) = e$ , tenemos que  $(1, 0) \in \tilde{H}^{-1}(U_e)$  y por lo tanto, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\mathcal{S} \times [0, \varepsilon] \subseteq \tilde{H}^{-1}(U_e)$ . En particular,  $\tilde{H}(0, \varepsilon) \in U_e$ . Pero  $p \tilde{H}(0, \varepsilon) = H(0, \varepsilon) = b$  y entonces  $\tilde{H}(0, \varepsilon) \in p^{-1}(b)$ . Luego  $\tilde{H}(0, \varepsilon) \in U_e \cap p^{-1}(b)$ .  $\square$

**Corolario 5.4.7.** *Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración. Entonces  $p$  es abierta.*

*Si, en particular,  $B$  es conexo, entonces  $p$  es cociente.*

*Demostración.* Se sigue trivialmente de 5.4.6 y 5.3.13.  $\square$

Para probar el próximo teorema, necesitamos antes el siguiente lema.

**Lema 5.4.8.** *Sea  $X$  un espacio topológico finito  $T_0$ , sea  $A$  el dbp-retracto mínimo de  $X$  y sea  $f: X \rightarrow X$  la función asociada a  $A$  dada por el teorema 3.2.6, es decir, la única función continua de  $X$  en  $X$  tal que  $f \leq \text{Id}_X$ ,  $f^2 = f$  y  $f(X) = A$ . Entonces  $f$  es el elemento mínimo de  $U_{\text{Id}_X}$ .*

*Demostración.* Sea  $g \in U_{\text{Id}_X}$ . Por el lema 3.2.17,  $g^\infty \leq \text{Id}_X$  y  $g^\infty \circ g^\infty = g^\infty$ . Por el teorema 3.2.6, es claro que  $g^\infty(X)$  es un dbp-retracto de  $X$ , de donde se sigue que  $f(X) = A \subseteq g^\infty(X)$ . Pero por el corolario 3.2.12, es claro que  $f \leq g^\infty \leq g$ . El resultado se sigue.  $\square$

**Teorema 5.4.9.** *Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$ , con  $B$  conexo, y sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración. Sean  $E_d$  y  $B_d$  los dbp-retractos mínimos de  $E$  y  $B$  respectivamente. Entonces  $E_d$  es un dbp-retracto de  $p^{-1}(B_d)$ .*

*Demostración.* Sean  $g: E \rightarrow E$  y  $h: B \rightarrow B$  las funciones asociadas a  $E_d$  y a  $B_d$ , respectivamente, dadas por 3.2.6. Por 5.4.8,  $g$  y  $h$  son elementos mínimos de  $U_{\text{Id}_E}$  y  $U_{\text{Id}_B}$ , respectivamente.

Por la observación 1.3.16, es claro que  $p^E: E^E \rightarrow B^E$  es fibración de Hurewicz entre espacios finitos  $T_0$ . Se sigue del corolario anterior que  $p^E$  es abierta. En particular,  $p^E$  mapea elementos minimales de  $E^E$  en elementos minimales de  $B^E$ . Puesto que  $g$  es un elemento minimal de  $E^E$ , se sigue que  $pg = p^E(g)$  es un elemento minimal de  $B^E$ . Por otro lado, como  $h \leq \text{Id}_B$ , tenemos que  $hpg \leq pg$  de donde obtenemos que  $hpg = pg$ .

Luego  $p(E_d) = p(g(E)) = h(p(g(E))) \subseteq \text{Im } h = B_d$  y entonces  $E_d \subseteq p^{-1}(B_d)$ . Por 3.2.9, obtenemos que  $E_d$  es dbp-retracto de  $p^{-1}(B_d)$ .  $\square$

**Corolario 5.4.10.** *Sean  $E, B$  y  $X$  espacios topológicos finitos  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración. Sea  $f: X \rightarrow E$  una función continua y sea  $g: X \rightarrow B$  una función continua tal que  $g \leq pf$ . Entonces existe una función continua  $h: X \rightarrow E$  tal que  $h \leq f$  y  $g = ph$ .*

*Demostración.* Como  $X$  es finito,  $p^X: E^X \rightarrow B^X$  es fibración entre espacios topológicos finitos  $T_0$ . Como  $g \leq pf = p^X(f)$  por el teorema 5.4.6 obtenemos que existe  $h \in U_f \cap (p^X)^{-1}(g)$ . Es claro entonces que  $h \leq f$  y  $ph = g$ .  $\square$

Hemos probado en 5.4.5 que si  $p$  es una fibración entre espacios topológicos finitos  $T_0$  cuyo dominio no tiene beat points y cuyo codominio es conexo, entonces este último tampoco los tiene. El próximo corolario muestra que esto también es cierto si consideramos únicamente down beat points. Veremos en 5.6.1, sin embargo, que el resultado no vale si sólo consideramos up beat points.

**Corolario 5.4.11.** *Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración. Supongamos que  $E$  no tiene down beat points. Entonces  $p$  es un elemento minimal de  $B^E$ .*

*Si además,  $B$  es conexo, entonces no tiene down beat points.*

*Demostración.* Dado que  $E$  no tiene down beat points, se sigue del teorema 1.2.30 que  $\text{Id}_E$  es un elemento minimal de  $E^E$ . Como en la demostración de 5.4.9, tenemos que  $p = p\text{Id}_E = p^E(\text{Id}_E)$  es un elemento minimal de  $B^E$ .

Supongamos ahora que  $B$  es conexo. Sea  $B_d$  el dbp-retracto mínimo de  $B$  y sea  $f: B \rightarrow B$  la función asociada a  $B_d$  dada por el teorema 3.2.6. Como  $f \leq \text{Id}_B$ , tenemos como en 5.4.9 que  $fp \leq p$  y por lo tanto que  $fp = p$ . Dado que  $B$  es conexo,  $p$  resulta sobreyectiva de donde se sigue que  $f = \text{Id}_B$ . Es claro entonces que  $B_d = B$ , y por consiguiente, que  $B$  no tiene down beat points.  $\square$

Combinando la proposición 5.3.14 y el corolario 5.4.11 obtenemos de forma inmediata el siguiente resultado.

**Corolario 5.4.12.** *Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$  con  $B$  conexo y sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración sin down beat points. Entonces  $E$  tiene down beat points si y sólo si  $B$  tiene down beat points.*

El siguiente teorema es una generalización de 5.4.6.

## 5 Fibraciones entre espacios finitos

**Teorema 5.4.13.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración. Sean además  $e \in E$  y  $b \in U_{p(e)}$ . Entonces  $U_e \cap p^{-1}(b)$  es contráctil.

*Demostración.* Sea  $X = U_e \cap p^{-1}(b)$  y sea  $\tilde{X} = X \cup \{e\}$ . Sea  $i: \tilde{X} \rightarrow E$  la inclusión. Es claro que  $C_b \leq pi$  y por 5.4.10 se sigue que existe  $h: \tilde{X} \rightarrow E$  tal que  $h \leq i$  y  $ph = C_b$ . Es fácil ver entonces que la imagen de  $h$  está contenida en  $X$ .

Sea ahora  $h|: X \rightarrow X$  la restricción de  $h$ . Dado que  $h \leq i$ , es claro que  $h| \leq \text{Id}_X$ . Pero, por otro lado,  $h| \leq C_{h(e)}$ . Se sigue que  $\text{Id}_X \simeq C_{h(e)}$  y por lo tanto  $X$  es contráctil.  $\square$

El siguiente teorema se puede considerar una versión dual, notablemente más débil, del teorema 5.4.6.

**Teorema 5.4.14.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración. Sean además  $e \in E$  y  $b \in F_{p(e)}$ . Entonces existe  $e' \in U_e \cap p^{-1}(p(e))$  tal que  $F_{e'} \cap p^{-1}(b) \neq \emptyset$ .

*Demostración.* Sea  $Z = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\beta\}$ . Le damos a  $Z$  la topología generada por la subbase  $\{\{\alpha_n, \beta\} : n \in \mathbb{N}\}$ . Observemos que  $Z$  es un espacio topológico localmente finito  $T_0$ , que  $U_\beta = \{\beta\}$  y que  $U_{\alpha_n} = \{\alpha_n, \beta\}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Sea  $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{\alpha_n} \times [0, 1/n)$ . Es claro que  $U$  es un abierto de  $Z \times I$ . Definimos la función  $H: Z \times I \rightarrow B$  por

$$H(z, t) = \begin{cases} p(e) & \text{si } (z, t) \in U, \\ b & \text{si } (z, t) \notin U. \end{cases}$$

Es fácil verificar que  $H$  es continua.

Tenemos entonces que  $pC_e = Hi_0$ , donde  $C_e: Z \rightarrow E$  es la función constante  $e$ . Por lo tanto, existe una función continua  $\tilde{H}: Z \times I \rightarrow E$  tal que  $p\tilde{H} = H$  y  $\tilde{H}i_0 = C_e$ . Ahora bien,  $\tilde{H}(\beta, 0) = \tilde{H}i_0(\beta) = C_e(\beta) = e$  y, por lo tanto,  $\tilde{H}^{-1}(U_e)$  es un abierto de  $Z \times I$  que contiene a  $(\beta, 0)$ . Luego, existe  $\varepsilon \in (0, 1]$  tal que  $\{\beta\} \times [0, \varepsilon) \subseteq \tilde{H}^{-1}(U_e)$ .

Sea  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $1/n < \varepsilon$ . Entonces  $\tilde{H}(\beta, 1/n) \leq e$  y  $p\tilde{H}(\beta, 1/n) = H(\beta, 1/n) = p(e)$ . Tomando  $e' = \tilde{H}(\beta, 1/n)$  se tiene que  $e' \in U_e \cap p^{-1}(p(e))$ .

Por otro lado, puesto que  $\alpha_n \in F_\beta = \{\beta\}$ , entonces  $(\alpha_n, 1/n) \in \overline{\{(\beta, 1/n)\}}$  y por lo tanto

$$\tilde{H}(\alpha_n, 1/n) \in \tilde{H} \left( \overline{\{(\beta, 1/n)\}} \right) \subseteq \overline{\{\tilde{H}(\beta, 1/n)\}} = F_{e'}.$$

Pero  $p\tilde{H}(\alpha_n, 1/n) = H(\alpha_n, 1/n) = b$  y entonces  $\tilde{H}(\alpha_n, 1/n) \in p^{-1}(b)$ . Luego  $\tilde{H}(\alpha_n, 1/n) \in F_{e'} \cap p^{-1}(b)$  y el resultado se sigue.  $\square$

En palabras simples, el teorema anterior muestra que si  $p: E \rightarrow B$  es una fibración entre espacios finitos  $T_0$ , entonces para cualquier  $e \in E$  y para cualquier  $b \geq p(e)$ , existe un punto menor que  $e$  en la misma fibra, que es menor que algún punto de la fibra de  $b$ . En la subsección 5.6.1 desarrollaremos un ejemplo que muestra que no es cierto, en general, que  $F_e \cap p^{-1}(b) \neq \emptyset$  para cualquier  $b \geq p(e)$ .

**Corolario 5.4.15.** Sean  $E, B$  y  $X$  espacios topológicos finitos  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración. Sea  $f: X \rightarrow E$  una función continua y sea  $g: X \rightarrow B$  una función continua con  $g \geq pf$ . Entonces existen funciones continuas  $h, i: X \rightarrow E$  tales que  $i \geq h \leq f$ ,  $pf = ph$  y  $g = pi$ .

*Demostración.* La prueba es análoga a la demostración de 5.4.10.  $\square$

**Proposición 5.4.16.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración sin down beat points. Entonces  $p$  es cerrada.

*Demostración.* Por la proposición 5.3.13, basta probar que para todo  $e \in E$  y todo  $b \geq p(e)$ , existe  $e' \in F_e \cap p^{-1}(b)$ .

Sea  $e \in E$ , sea  $b \geq p(e)$  y sea  $p|: p^{-1}(U_b) \rightarrow U_b$  la restricción de  $p$ . Entonces  $p|$  es el pullback de  $p$  a lo largo de la inclusión  $U_b \hookrightarrow B$  y por lo tanto es fibración. Notemos que, dado que  $p^{-1}(U_b)$  es abierto en  $E$ , cualquier down beat point de  $p^{-1}(U_b)$  es down beat point de  $E$ . Se sigue que los down beat points de  $p|$  son down beat points de  $p$ . En particular,  $p|$  no tiene down beat points.

Ahora bien,  $p| \circ \text{Id}_{p^{-1}(U_b)} = p| \leq C_b$  y por lo tanto existen funciones continuas  $h, i: p^{-1}(U_b) \rightarrow p^{-1}(U_b)$  tales que  $i \geq h \leq \text{Id}_{p^{-1}(U_b)}$ ,  $p|i = C_b$  y  $p|h = p|$ .

En particular,  $h$  es una flecha sobre  $B$  de  $p|$  a  $p|$  y es menor o igual a la identidad de  $p^{-1}(U_b)$ . Como  $p|$  no tiene down beat points, se sigue de 5.3.6 que  $p| = \text{Id}_{p^{-1}(U_b)}$  y por lo tanto que  $i \geq \text{Id}_{p^{-1}(U_b)}$ . Dado que  $i(e) \geq e$  y que  $p(i(e)) = b$ , se sigue que  $i(e) \in F_e \cap p^{-1}(b)$ . Esto concluye la demostración.  $\square$

**Proposición 5.4.17.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración de Hurewicz.

- (1) Si  $e_0$  es un down beat point de  $E$ , entonces  $p(e_0)$  es down beat point de  $B$  o  $e_0$  es down beat point de  $p$ .
- (2) Si  $p$  no tiene down beat points y  $e_0$  es un up beat point de  $E$ , entonces  $p(e_0)$  es up beat point de  $B$  o  $e_0$  es up beat point de  $p$ .

*Demostración.* La afirmación (1) se sigue de 5.3.14 y 5.4.7. La afirmación (2) se sigue de 5.3.14 y 5.4.16.  $\square$

**Teorema 5.4.18.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$  con  $B$  conexo y sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración minimal. Entonces  $E$  es minimal si y sólo si  $B$  es minimal.

*Demostración.* En 5.4.5 hemos probado que si  $E$  es minimal entonces  $B$  también lo es. Supongamos entonces que  $B$  es minimal. Como  $p$  no tiene down beat points, se sigue de 5.4.17 que si  $e_0$  es un beat point de  $E$  entonces  $e_0$  es beat point de  $p$  o  $p(e_0)$  es beat point de  $B$ . Como  $p$  y  $B$  no tienen beat points, es claro que  $E$  tampoco los tendrá.  $\square$

Una fibración de Hurewicz  $p: E \rightarrow B$  se dice *trivial* si es homotópicamente equivalente por fibras a la proyección  $B \times F \rightarrow B$  para algún espacio  $F$  homotópicamente equivalente a las fibras de  $p$ . Si  $F'$  es un espacio homotópicamente equivalente a  $F$ , la proyección  $B \times F' \rightarrow B$  es homotópicamente equivalente por fibras a la proyección  $B \times F \rightarrow B$ . Se sigue que  $p$  es homotópicamente equivalente por fibras a la proyección  $B \times F' \rightarrow B$ .

## 5 Fibraciones entre espacios finitos

---

**Proposición 5.4.19.** *Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$  con  $B$  conexo y sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración minimal trivial. Entonces  $p$  es isomorfa a la proyección  $\pi_B: B \times F \rightarrow B$  para algún espacio finito  $T_0$  minimal  $F$ . En particular, las fibras de  $p$  son espacios minimales.*

*Demostración.* Sea  $F$  el core de alguna fibra de  $p$ . Como  $p$  es una fibración trivial y sus fibras tienen el tipo homotópico de  $F$ , entonces  $p$  es homotópicamente equivalente por fibras a la proyección  $\pi_B: B \times F \rightarrow B$ . Sea entonces  $f: p \rightarrow \pi_B$  una equivalencia homotópica sobre  $B$  con inversa  $g$ . Como  $F$  es minimal, entonces  $\pi_B$  es minimal. Y como  $p$  y  $\pi_B$  son minimales, se sigue de 5.3.7 que  $fg = \text{Id}_{\pi_B}$  y  $gf = \text{Id}_p$ . Luego  $f$  y  $g$  son isomorfismos sobre  $B$  de donde se sigue que  $p \cong \pi_B$ .

En particular, las fibras de  $p$  son todas homeomorfas a  $F$ , que es minimal. □

### 5.5 Fibraciones de Hurewicz y fibraciones de Grothendieck

Una función continua entre espacios topológicos  $T_0$  puede ser interpretada como un funtor entre posets y por lo tanto tiene sentido estudiar si es o no una fibración de Grothendieck (cf. definición 1.1.17). Dado que en todo poset las flechas sólo dependen de su dominio y de su codominio, la definición de fibración de Grothendieck entre posets adopta una forma muy simple que exponemos en el siguiente lema.

**Lema 5.5.1.** *Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos de Alexandroff  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$  una función continua. Para cada  $e \in E$  y cada  $b \leq p(e)$ , la única flecha en  $B$  de  $b$  a  $p(e)$  tiene un levantado cartesiano  $a$  a  $e$  si y sólo si existe  $e' \in p^{-1}(b)$  tal que  $e' = \max(U_e \cap p^{-1}(U_b))$ , en cuyo caso, la flecha  $e' \rightarrow e$  es el único levantado cartesiano de  $b \rightarrow p(e)$  a  $e$ .*

*En particular,  $p$  es fibración de Grothendieck si y sólo si para todo  $e \in E$  y todo  $b \leq p(e)$ , el conjunto  $U_e \cap p^{-1}(U_b)$  tiene máximo y dicho máximo pertenece a  $p^{-1}(b)$ .*

*Demostración.* El levantado cartesiano de una flecha a un objeto dado, si existe, es único salvo composición con un único isomorfismo. Dado que en un poset no existen isomorfismos no triviales, es inmediato que el levantado cartesiano de una flecha  $b \rightarrow p(e)$  para  $e \in E$  y  $b \leq p(e)$ , si existe, es único.

Sea  $e \in E$  y sea  $b \leq p(e)$ . Supongamos que existe  $e'$  tal que la única flecha  $e' \rightarrow e$  es un levantado cartesiano de  $b \rightarrow p(e)$ . Es claro que  $e' \in p^{-1}(b)$  y que  $e' \in U_e \cap p^{-1}(U_b)$ .

Sea ahora  $e'' \in U_e \cap p^{-1}(U_b)$ . Dado que la flecha  $e' \rightarrow e$  es cartesiana, debe existir una flecha  $e'' \rightarrow e'$ . Se sigue que  $e'' \leq e'$ . Luego  $e' = \max U_e \cap p^{-1}(U_b)$ .

Supongamos ahora que  $U_e \cap p^{-1}(U_b)$  tiene máximo  $e' \in p^{-1}(b)$ . Es claro que la flecha  $e' \rightarrow e$  es un levantado de  $b \rightarrow p(e)$  a  $e$ . Por otro lado, para toda flecha  $e'' \rightarrow e$  tal que  $p(e'') \leq b$ , se tiene que  $e'' \in p^{-1}(U_b)$  de donde se sigue que  $e'' \leq e'$ , esto es, existe una única flecha  $e'' \rightarrow e'$  y se cumple además que la composición  $e'' \rightarrow e' \rightarrow e$  es igual a  $e'' \rightarrow e$ . Es claro entonces que  $e' \rightarrow e$  es cartesiana.

El resultado se sigue. □

*Observación 5.5.2.* Se sigue de 5.5.1 que una función continua  $p: E \rightarrow B$  entre espacios de Alexandroff  $T_0$  es opfibración de Grothendieck si y sólo si para todo  $e \in E$  y todo  $b \geq p(e)$ , el conjunto  $F_e \cap p^{-1}(F_b)$  tiene mínimo y dicho mínimo pertenece a  $p^{-1}(b)$ .

Se observa en [37] que si una categoría  $E$  no tiene isomorfismos no triviales, el único clivaje posible para una fibración de Grothendieck  $p: E \rightarrow B$  es cerrado (esto también se menciona, por ejemplo, en la sección B1.3 de [43]). En particular,  $p$  es una fibración escindida. Probaremos el caso particular de este hecho relevante en nuestro contexto, esto es, en el caso en que  $p$  es una fibración de Grothendieck entre posets.

**Lema 5.5.3.** *Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos de Alexandroff  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración (resp. opfibración) de Grothendieck. Entonces existe un único clivaje (resp. opclivaje) para  $p$  y dicho clivaje es cerrado.*

*Demostración.* Supongamos que  $p$  es una fibración de Grothendieck.

Por el lema anterior, si  $e \in E$  y  $b \leq p(e)$  entonces existe un único levantado cartesiano  $e' \rightarrow e$  de  $b \rightarrow p(e)$  a  $e$  que es la única flecha de  $e'$  a  $e$ , donde  $e' = \max(U_e \cap p^{-1}(U_b))$  y  $e' \in p^{-1}(b)$ . Se sigue que existe un único clivaje para  $p$ . Veamos que este clivaje es cerrado.

Es claro que el levantado cartesiano de  $\text{Id}_{p(e)}$  a  $e$  es  $\text{Id}_e$ , para todo  $e \in E$ .

Supongamos que  $b' \leq b \leq p(e)$ . Queremos probar que el levantado cartesiano de  $b' \rightarrow p(e)$  a  $e$  coincide con la composición  $e'' \rightarrow e' \rightarrow e$  donde  $e' \rightarrow e$  es el levantado cartesiano de  $b \rightarrow p(e)$  a  $e$  y  $e'' \rightarrow e'$  es el levantado cartesiano de  $b' \rightarrow b$  a  $e'$ . En otras palabras, queremos probar que

$$\max(U_e \cap p^{-1}(U_{b'})) = \max(U_{e'} \cap p^{-1}(U_{b'}))$$

donde  $e' = \max(U_e \cap p^{-1}(U_b))$ .

Ahora bien, dado que  $e' \leq e$  se sigue que  $U_{e'} \subseteq U_e$ , de donde obtenemos que  $U_{e'} \cap p^{-1}(U_{b'}) \subseteq U_e \cap p^{-1}(U_{b'})$  y por lo tanto, que

$$\max(U_e \cap p^{-1}(U_{b'})) \geq \max(U_{e'} \cap p^{-1}(U_{b'})).$$

Por otro lado, como  $b' \leq b$ , entonces  $U_{b'} \subseteq U_b$  de donde obtenemos que  $p^{-1}(U_{b'}) \subseteq p^{-1}(U_b)$ . Así,

$$\max(U_e \cap p^{-1}(U_{b'})) \leq \max(U_e \cap p^{-1}(U_b)) = e'.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\max(U_e \cap p^{-1}(U_{b'})) \in U_{e'} \cap p^{-1}(U_{b'}).$$

Luego, es claro que

$$\max(U_e \cap p^{-1}(U_{b'})) \leq \max(U_{e'} \cap p^{-1}(U_{b'})).$$

El resultado se sigue.

El caso en que  $p$  es opfibración de Grothendieck se sigue aplicando el caso anterior a  $p^{\text{op}}$ . □

Hemos probado en la subsección 1.1.4 que las fibraciones de Grothendieck escindidas son aquellos funtores que se realizan como construcciones de Grothendieck sobre funtores contravariantes a  $\mathbf{Cat}$  (Teorema 1.3.5, B1.3 de [43], ver también [36]). Del mismo modo,



## 5 Fibraciones entre espacios finitos

---

las opfibraciones de Grothendieck escindidas son aquellos funtores que se realizan como construcciones de Grothendieck sobre funtores covariantes a **Cat**.

Ahora bien, es claro que si  $p: E \rightarrow B$  es una opfibración de Grothendieck entre posets, entonces las fibras de  $p$  son posets y por lo tanto  $p$  se realiza como la construcción de Grothendieck sobre un functor covariante a **Pos**, o equivalentemente, como la construcción de Grothendieck topológica que hemos definido en la sección 4.2, sobre un functor covariante a **Top**. Recíprocamente, si  $p$  se realiza como la proyección asociada a la construcción de Grothendieck topológica sobre un functor de un poset  $B$  en **Top** que mapea todo elemento de  $B$  a un espacio de Alexandroff  $T_0$ , entonces coincide con la construcción de Grothendieck clásica sobre un functor a **Cat** y por lo tanto resulta opfibración de Grothendieck. Así, las opfibraciones de Grothendieck sobre  $B$  entre posets son aquellos funtores que se realizan, de manera canónica, como proyecciones asociadas a construcciones de Grothendieck topológicas de funtores de  $B$  en **Pos**. Del mismo modo, las fibraciones de Grothendieck sobre  $B$  entre posets son aquellos funtores que se realizan como proyecciones asociadas a construcciones de Grothendieck topológicas de funtores de  $B^{\text{op}}$  en **Pos**.

**Teorema 5.5.4.** *Sean  $E$  y  $B$  espacios de Alexandroff  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$  una función continua.*

- (1) *La función  $p$  es fibración de Grothendieck si y sólo si existe un functor  $\alpha: B^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Top}$  tal que  $\pi_{B^{\text{op}}}^\alpha \cong p^{\text{op}}$ . En ese caso, el functor  $\alpha$  puede definirse canónicamente por*

$$\alpha(b) = (p^{\text{op}})^{-1}(b) = p^{-1}(b)^{\text{op}}$$

*para todo  $b \in B$  y por*

$$\alpha(b' \geq b)(e) = \max(U_e \cap p^{-1}(b))$$

*para todo  $e \in p^{-1}(b')$ , para cualesquiera  $b, b' \in B$  tales que  $b \leq b'$ .*

- (2)  *$p$  es opfibración de Grothendieck si y sólo si existe un functor  $\beta: B \rightarrow \mathbf{Top}$  tal que  $\pi_B^\beta \cong p$ . En ese caso, el functor  $\beta$  puede definirse canónicamente por*

$$\beta(b) = p^{-1}(b)$$

*para todo  $b \in B$  y por*

$$\beta(b \leq b')(e) = \min(F_e \cap p^{-1}(b'))$$

*para  $e \in p^{-1}(b)$ , para cualesquiera  $b, b' \in B$  tales que  $b \leq b'$ .*

*Demostración.* La proposición (2) se sigue de la versión para funtores covariantes del teorema 1.1.26 utilizando el único oplivaje para  $p$  que se obtiene de la observación 5.5.2 y que resulta cerrado por 5.5.3.

La proposición (1) se deduce fácilmente como sigue. Si  $p$  es fibración de Grothendieck entonces  $p^{\text{op}}$  es opfibración de Grothendieck y luego, por (2), existe un functor  $\alpha: B^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Top}$  tal que  $\pi_{B^{\text{op}}}^\alpha \cong p^{\text{op}}$ . Recíprocamente, si existe un functor  $\alpha$  tal que  $\pi_{B^{\text{op}}}^\alpha \cong p^{\text{op}}$ , dado que  $\pi_{B^{\text{op}}}^\alpha$  es opfibración de Grothendieck, tenemos que  $p^{\text{op}}$  también lo es. Es claro entonces que  $p$  es fibración de Grothendieck.  $\square$

En el siguiente lema, expondremos algunas propiedades de los funtores  $\alpha$  y  $\beta$  construidos en el teorema 5.5.4.

**Lema 5.5.5.** *Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$  una bifibración de Grothendieck. Sean  $\alpha$  y  $\beta$  los funtores definidos en el teorema 5.5.4 y sean  $b, b' \in B$  tales que  $b \leq b'$ . Entonces*

- (1)  $\alpha(b' \geq b)\beta(b \leq b') \geq \text{Id}_{p^{-1}(b)}$ .
- (2)  $\beta(b \leq b')\alpha(b' \geq b)\beta(b \leq b') = \beta(b \leq b')$ .
- (3)  $\beta(b \leq b')\alpha(b' \geq b) \leq \text{Id}_{p^{-1}(b')}$ .
- (4)  $\alpha(b' \geq b)\beta(b \leq b')\alpha(b' \geq b) = \alpha(b' \geq b)$ .

*Demostración.* Veamos (1). Sea  $e \in p^{-1}(b)$ . Entonces  $e \leq \beta(b \leq b')(e)$  y por lo tanto,  $e \in U_{\beta(b \leq b')(e)} \cap p^{-1}(b)$  de donde es claro que  $\alpha(b' \geq b)\beta(b \leq b')(e) \geq e$ .

De manera análoga se demuestra (3).

Finalmente, por (1) se tiene que

$$\alpha(b' \geq b)\beta(b \leq b')\alpha(b' \geq b) \geq \alpha(b' \geq b)$$

y que

$$\beta(b \leq b')\alpha(b' \geq b)\beta(b \leq b') \geq \beta(b \leq b'),$$

mientras que por (3) se tiene que

$$\beta(b \leq b')\alpha(b' \geq b)\beta(b \leq b') \leq \beta(b \leq b')$$

y que

$$\alpha(b' \geq b)\beta(b \leq b')\alpha(b' \geq b) \leq \alpha(b' \geq b).$$

Las proposiciones (2) y (4) se siguen. □

*Observación 5.5.6.* Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$ , sea  $p: E \rightarrow B$  una bifibración de Grothendieck y sean  $\alpha$  y  $\beta$  los funtores definidos en el teorema 5.5.4. Sean  $b, b' \in B$  tales que  $b \leq b'$ . Del lema 5.5.5 obtenemos claramente que  $\alpha(b' \geq b)$  y  $\beta(b \leq b')$  son equivalencias homotópicas. Más aún, se sigue del lema 5.5.5 y del teorema 3.2.6, que  $\alpha(b' \geq b)\beta(b \leq b')(p^{-1}(b))$  es un ubp-retracto de  $p^{-1}(b)$  que es homeomorfo al espacio  $\beta(b \leq b')\alpha(b' \geq b)(p^{-1}(b'))$ , que es a su vez, un dbp-retracto de  $p^{-1}(b')$ .

Sin embargo, como muestra el siguiente ejemplo, no es cierto en general que el ubp-retracto mínimo de  $p^{-1}(b)$  sea homeomorfo a un dbp-retracto de  $p^{-1}(b')$  ni que el dbp-retracto mínimo de  $p^{-1}(b')$  sea homeomorfo a un ubp-retracto de  $p^{-1}(b)$ .

En particular, no es cierto en general que el ubp-retracto mínimo de  $p^{-1}(b)$  sea homeomorfo al dbp-retracto mínimo de  $p^{-1}(b')$ .

**Ejemplo 5.5.7.** Sea  $\pi_{\mathcal{S}}: B \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  la proyección canónica, representada en la figura 5.1, donde  $B = \{a, b, c, d\}$  con el orden generado por  $a < b$ ,  $c < b$  y  $c < d$  y  $\mathcal{S}$  es el espacio de Sierpinski.

Es fácil ver que  $\pi_{\mathcal{S}}$  es una bifibración de Grothendieck, que el ubp-retracto mínimo de  $\pi_{\mathcal{S}}^{-1}(0)$  no es homeomorfo a ningún dbp-retracto de  $\pi_{\mathcal{S}}^{-1}(1)$  y que el dbp-retracto mínimo de  $\pi_{\mathcal{S}}^{-1}(1)$  no es homeomorfo a ningún ubp-retracto de  $\pi_{\mathcal{S}}^{-1}(0)$ .

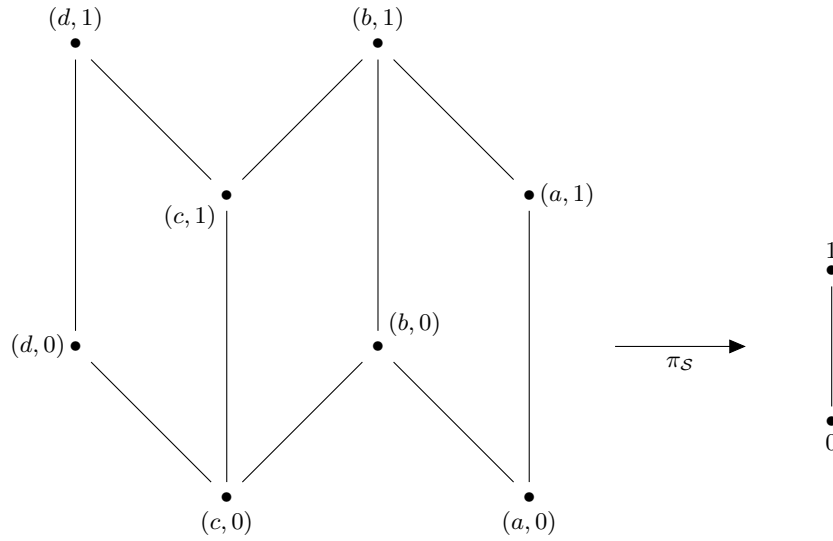


Figura 5.1: Función  $\pi_S$ .

De la observación anterior, se deduce inmediatamente el siguiente teorema.

**Teorema 5.5.8.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$  con  $B$  conexo y sea  $p: E \rightarrow B$  una bifibración de Grothendieck. Entonces las fibras de  $p$  son homotópicamente equivalentes.

**Teorema 5.5.9.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$  con  $B$  conexo y sea  $p: E \rightarrow B$  una bifibración de Grothendieck con fibras minimales. Entonces  $p$  es un fibrado.

*Demostración.* Consideremos los funtores  $\alpha$  y  $\beta$  definidos en el teorema 5.5.4. Como las fibras de  $p$  son minimales, por el teorema 1.2.30 y el lema 5.5.5, las funciones  $\alpha(b' \geq b)$  y  $\beta(b \leq b')$  son homeomorfismos mutuamente inversos para cualesquiera  $b, b' \in B$  tales que  $b \leq b'$ . En particular, el funtor  $\beta$  invierte morfismos. Se sigue de 4.3.1 que  $\pi_B^\beta$  es un fibrado. Por 5.5.4, tenemos que  $p \cong \pi_B^\beta$  de donde es claro que  $p$  también es un fibrado.  $\square$

No es cierto, sin embargo, que una bifibración de Grothendieck minimal entre espacios topológicos finitos  $T_0$  sea un fibrado, como veremos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 5.5.10.** Sean

$$B = \{a, b, c, d\} \quad \text{y} \quad E = B \times \{0, 1, 2\}$$

los espacios topológicos finitos con las topologías correspondientes a los diagramas de Hasse representados en la figura 5.2 y sea  $p: E \rightarrow B$  la proyección.

Una verificación exhaustiva permite ver que  $p$  es una bifibración de Grothendieck minimal. Puesto que las fibras de  $p$  no son homeomorfas, es claro que  $p$  no es un fibrado.

Observemos que, por 5.3.12,  $p$  no puede obtenerse a partir de un fibrado entre espacios topológicos finitos  $T_0$  eliminando beat points de dicho fibrado de forma sucesiva.

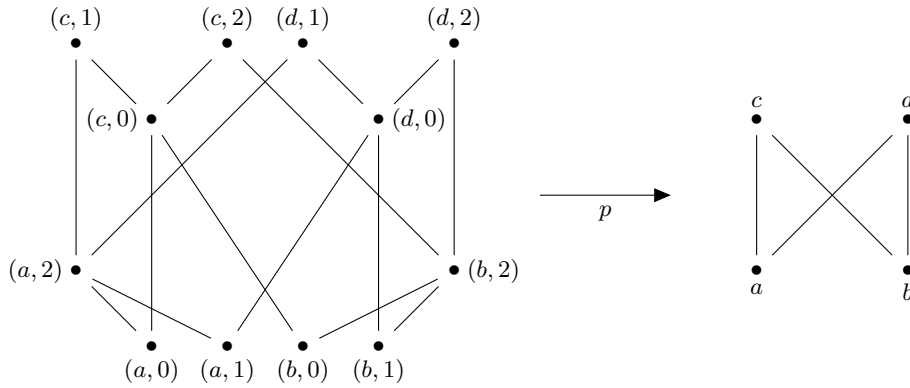


Figura 5.2: Función  $p$ .

**Lema 5.5.11.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$  una bifibración de Grothendieck. Supongamos además que  $B$  tiene máximo  $b_0$  y que  $h(B) = 1$  (en otras palabras, que  $B$  es homeomorfo al cono no Hausdorff de un espacio topológico finito discreto). Entonces  $p$  es retracts de la proyección canónica  $\pi_B: E \times B \rightarrow B$ .

*Demostración.* La idea de la demostración es la siguiente. Primero observamos que la fibra  $p^{-1}(b_0)$  es ubp-retracto de  $E$  y por lo tanto, podemos retraer  $E \times B$  a  $E \times \widehat{U}_{b_0} \cup p^{-1}(b_0) \times \{b_0\}$  quitando sucesivamente up beat points de la proyección a  $B$ . A continuación, podemos retraer cada subespacio  $E \times \{b\}$  con  $b < b_0$  a  $p^{-1}(F_b) \times \{b\}$ , nuevamente quitando up beat points. Estos dos pasos se pueden realizar simultáneamente, obteniendo así un ubp-retracto de  $\pi_B$ . Finalmente, podemos retraer cada subespacio  $p^{-1}(F_b) \times \{b\}$  con  $b < b_0$  a  $p^{-1}(b) \times \{b\}$  quitando down beat points. El espacio obtenido es homeomorfo sobre  $B$  a  $E$ , de donde se obtiene que  $p$  es retracts de  $\pi_B$ . A continuación, enunciaremos formalmente y probamos estos hechos.

Sea  $X = \bigcup_{b \in B} p^{-1}(F_b) \times \{b\}$ , sea  $i_X: X \rightarrow E \times B$  la inclusión y sea  $r_X: E \times B \rightarrow X$  la función definida por

$$r_X(e, b) = \begin{cases} (e, b) & \text{si } p(e) = b, \\ (\min(F_e \cap p^{-1}(b_0)), b) & \text{si } p(e) \neq b, \end{cases}$$

para  $(e, b) \in E \times B$ .

Es fácil ver que  $r_X$  está bien definida, que  $\pi_B i_X r_X = \pi_B$ , que  $r_X i_X = \text{Id}_X$  y que  $i_X r_X \geq \text{Id}_{E \times B}$ . Luego, si probamos la continuidad de  $r_X$ , se seguirá de la versión dual para ubp-retracts del teorema 5.3.9 que  $\pi_B i_X$  es un ubp-retracto de  $\pi_B$ .

Dado que  $i_X$  es subespacio, basta probar que  $i_X r_X$  es continua. Y dado que  $\pi_B i_X r_X = \pi_B$ , es suficiente probar que  $\phi = \pi_E i_X r_X$  es continua, donde  $\pi_E: E \times B \rightarrow E$  es la proyección canónica.

Notemos que  $\phi \geq \pi_E$ . Sea  $U = \bigcup_{b \in \text{mnl } B} (p^{-1}(b) \times \{b\})$ . Es evidente que  $U$  es abierto en  $E \times B$  y que  $\phi$  coincide con  $\pi_E$  sobre  $U$ . Por otro lado, la restricción de  $\phi$  a  $U^c$  es la función  $\phi|$  definida por

$$\phi|(e, b) = \min(F_e \cap p^{-1}(b_0))$$

## 5 Fibraciones entre espacios finitos

para todo  $(e, b) \in U^c$ . Es fácil probar entonces que  $\phi|$  resulta continua. De 5.2.3, se sigue que  $\phi$  es continua como queríamos. Así,  $X$  es ubp-retracto de  $E \times B$  y  $\pi_B i_X$  es ubp-retracto de  $\pi_B$ .

Sea ahora  $i: E \rightarrow X$  la función definida por  $i(e) = (e, p(e))$  y sea  $\rho: X \rightarrow E$  la función definida por  $\rho(e, b) = \max(U_e \cap p^{-1}(b))$  para todo  $(e, b) \in X$ . Es claro que  $i$  es continua, y puesto que  $\pi_E i_X i = \text{Id}_E$ , se sigue además que  $i$  es subespacio.

Veamos que  $\rho$  es continua. Sean  $(e, b), (e', b') \in X$  tales que  $(e, b) \leq (e', b')$ . Entonces  $U_e \subseteq U_{e'}$  y  $U_b \subseteq U_{b'}$ . Se sigue que

$$\begin{aligned} \rho(e, b) &= \max(U_e \cap p^{-1}(b)) = \max(U_e \cap p^{-1}(U_b)) \leq \\ &\leq \max(U_{e'} \cap p^{-1}(U_{b'})) = \max(U_{e'} \cap p^{-1}(b')) = \rho(e', b') \end{aligned}$$

donde las igualdades segunda y penúltima valen por el lema 5.5.1. Así,  $\rho$  es continua. Por otro lado, es fácil ver que  $\pi_B i_X i = p$ , que  $p\rho = \pi_B i_X$ , que  $\rho i = \text{Id}_E$  y que  $i\rho \leq \text{Id}_X$ . Se sigue que  $E$  es dbp-retracto de  $X$  y que  $p = \pi_B i_X i$  es dbp-retracto de  $\pi_B i_X$ . En particular,  $p$  es retracto de  $\pi_B$  como queríamos probar.  $\square$

Para establecer una relación entre fibraciones de Hurewicz entre espacios topológicos finitos  $T_0$  y fibraciones de Grothendieck, necesitamos antes estudiar la regularidad de funciones de levantamiento de caminos asociadas a las primeras y su relación con la existencia de beat points.

**Teorema 5.5.12.** *Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración. Entonces:*

- (1) *Si  $p$  es minimal, toda función levantadora de caminos para  $p$  es regular.*
- (2) *Si  $p$  no tiene down beat points, existe una función levantadora de caminos regular para  $p$ .*

*Demostración.* Para  $t \in I$ , consideramos la inclusión  $i_t: E \rightarrow E \times I$  de  $E$  en  $E \times I$  dada por  $e \mapsto (e, t)$ . Sea además  $\pi_E: E \times I \rightarrow E$  la proyección canónica.

Veamos (1). Supongamos que  $p$  es minimal y que  $\Lambda: E \times_p B^I \rightarrow E^I$  es una función levantadora de caminos para  $p$ . Tenemos que  $p\pi_E i_0 = p = p\text{Id}_E$  y por lo tanto, podemos utilizar  $\Lambda$  para levantar  $p\pi_E$  a partir de  $\text{Id}_E$ , obteniendo  $\tilde{H}: E \times I \rightarrow E$  tal que  $\tilde{H}i_0 = \text{Id}_E$  y  $p\tilde{H} = p\pi_E$ . De la demostración de 1.3.23 se sigue que  $\tilde{H}$  es igual a  $(\Lambda\phi)^b$ , la función inducida por  $\Lambda\phi$  por la ley exponencial, donde  $\phi: E \rightarrow E \times_p B^I$  es la función inducida en el pullback por  $\text{Id}_E$  y  $(p\pi_E)^\sharp$ . Explícitamente,  $\tilde{H}(e, t) = \Lambda(e, C_{p(e)})(t)$  para todos  $e \in E$  y  $t \in I$ . Luego, basta probar que  $\tilde{H}(e, t) = e$  para cualesquiera  $e \in E$  y  $t \in I$ .

Notemos que, en particular,  $p\tilde{H}i_t = p\pi_E i_t = p$  para todo  $t \in I$ . Luego,  $\tilde{H}$  es una homotopía sobre  $B$ . Por lo tanto,  $\tilde{H}i_t$  es homotópica a  $\text{Id}_p$  sobre  $B$  para todo  $t \in I$ . Como  $p$  es minimal, se sigue de 5.3.7 que  $\tilde{H}i_t = \text{Id}_p$ . Luego  $\tilde{H}(e, t) = e$  para todo  $e \in E$  y todo  $t \in I$  como queríamos. El resultado se sigue.

Veamos (2). Supongamos ahora que  $p$  no tiene down beat points y que  $\Lambda: E \times_p B^I \rightarrow E^I$  es una función levantadora de caminos para  $p$ . Como antes, utilizamos  $\Lambda$  para levantar  $p\pi_E$  a partir de  $\text{Id}_E$ , obteniendo nuevamente una homotopía  $\tilde{H}: E \times I \rightarrow E$  tal que  $\tilde{H}i_0 = \text{Id}_E$  y  $p\tilde{H} = p\pi_E$ .

Ahora bien, para cada  $e \in E$ ,  $\tilde{H}(e, 0) = e \in U_e$  y por lo tanto existe  $\varepsilon_e > 0$  tal que  $\{e\} \times [0, \varepsilon_e] \subseteq \tilde{H}^{-1}(U_e)$ . Sea  $\varepsilon = \min\{\varepsilon_e : e \in E\} > 0$ . Es claro que  $\tilde{H}i_t \leq \text{Id}_E$  para todo  $t \in [0, \varepsilon]$ . Como  $p$  no tiene down beat points, se sigue de la proposición 5.3.6 que  $\tilde{H}i_t = \text{Id}_E$  para todo  $t \in [0, \varepsilon]$ . En particular,  $\Lambda$  levanta caminos constantes a caminos que son constantes en el intervalo  $[0, \varepsilon]$ .

Dado  $\gamma: I \rightarrow B$ , definimos  $\tilde{\gamma}: I \rightarrow B$  por  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\min\{1, t/\varepsilon\})$ . Notemos que la asignación  $t \mapsto \min\{1, t/\varepsilon\}$  de  $I$  en  $I$  es continua. Es fácil probar entonces, utilizando la ley exponencial, que la función  $\Lambda_0: E \times_p B^I \rightarrow E^I$  definida por

$$\Lambda_0(e, \gamma)(t) = \Lambda(e, \tilde{\gamma})(t\varepsilon)$$

resulta continua. Un cálculo directo muestra además que  $\Lambda_0$  es una función levantadora de caminos para  $p$ .

Ahora bien, si  $\gamma$  es un camino constante en  $B$  y  $e \in p^{-1}(\gamma(0))$ , entonces  $\tilde{\gamma}$  es constante y, por lo tanto,  $\Lambda(e, \tilde{\gamma})(t) = e$  para todo  $t \in [0, \varepsilon]$ . Se sigue que  $\Lambda_0(e, \gamma)(t) = e$  para todo  $t \in I$ . Luego,  $\Lambda_0$  es una función levantadora de caminos regular para  $p$ .  $\square$

**Ejemplo 5.5.13.** En este ejemplo exhibiremos una fibración de Hurewicz entre espacios topológicos finitos  $T_0$  que no tiene down beat points y que tiene una función levantadora de caminos no regular. Esto muestra que una fibración sin down beat points puede tener en general funciones levantadoras de caminos no regulares.

Sea  $E = \{a, b, c\}$  el espacio topológico finito  $T_0$  asociado al orden generado por las relaciones  $b < a$  y  $c < a$ , sea  $B = \{*\}$  el espacio topológico con la única topología posible, y sea  $p: E \rightarrow B$  la única función posible. Es claro que  $p$  es fibración de Hurewicz y que no tiene down beat points.

Podemos definir una función  $\Lambda: E \times_p B^I \rightarrow E^I$  por

$$\Lambda(e, \gamma)(t) = \begin{cases} e & \text{si } t < 1, \\ a & \text{si } t = 1, \end{cases}$$

para todo  $e \in E$  y todo  $t \in I$ , donde  $\gamma$  es el único camino posible en  $B$ . Es fácil verificar que  $\Lambda$  es una función levantadora de caminos no regular para  $p$ .

En la subsección 5.6.1 mostraremos una fibración de Hurewicz que no tiene up beat points y que no tiene funciones levantadoras de caminos regulares.

Recordemos que si  $\gamma$  es un camino en un espacio topológico  $X$  y  $t \in I$ , la función  $\gamma_{[0,t]}$  es el camino en  $X$  definido por  $\gamma_{[0,t]}(s) = \gamma(st)$  para todo  $s \in I$  (definición 4.5.1).

**Definición 5.5.14.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos y sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración. Sea  $\Lambda$  una función levantadora de caminos regular para  $p$ . Decimos que  $\Lambda$  es una función levantadora de caminos regular *normalizada* si  $\Lambda(e, \gamma)_{[0,t]} = \Lambda(e, \gamma_{[0,t]})$  para todo  $t \in I$  y para todo  $(e, \gamma) \in E \times_p B^I$ .

Advertimos al lector que la definición anterior no es estándar.

**Lema 5.5.15.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos y sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración con función levantadora de caminos regular  $\Lambda$ . Entonces existe una función levantadora de caminos regular *normalizada*  $N(\Lambda)$  para  $p$ .

## 5 Fibraciones entre espacios finitos

---

*Demostración.* Definimos  $N(\Lambda): E \times_p B^I \rightarrow E^I$  por

$$N(\Lambda)(e, \gamma)(t) = \Lambda(e, \gamma_{[0,t]})(1)$$

para todo  $t \in I$ , para todo  $(e, \gamma) \in E \times_p B^I$ .

La asignación  $(\gamma, t, s) \mapsto \gamma(st)$  de  $B^I \times I \times I$  en  $B$  es claramente continua, pues se factoriza como

$$B^I \times I \times I \xrightarrow{\text{Id}_{B^I} \times \mu} B^I \times I \xrightarrow{\text{ev}} B$$

donde  $\mu: I \times I \rightarrow I$  es la función multiplicación. Por la ley exponencial, también lo es la asignación  $(\gamma, t) \mapsto \gamma_{[0,t]}$  de  $B^I \times I$  en  $B^I$ .

No es difícil ver que esta función induce una función continua

$$(E \times_p B^I) \times I \rightarrow E \times_p B^I$$

que mapea toda terna  $(e, \gamma, t) \in (E \times_p B^I) \times I$  en el par  $(e, \gamma_{[0,t]})$ . Componiendo esta función con

$$E \times_p B^I \xrightarrow{\Lambda} E^I \xrightarrow{\text{ev}_1} E,$$

vemos que  $N(\Lambda)^\flat$  es continua. Se sigue que  $N(\Lambda)$  también lo es.

Dado que  $\Lambda$  es regular y  $\gamma_{[0,0]} = C_{\gamma(0)}$  para todo  $\gamma \in B^I$ ,

$$N(\Lambda)(e, \gamma)(0) = \Lambda(e, \gamma_{[0,0]})(1) = \Lambda(e, C_{\gamma(0)})(1) = C_e(1) = e$$

para todo  $(e, \gamma) \in E \times_p B^I$ . Por otro lado,

$$pN(\Lambda)(e, \gamma)(t) = p\Lambda(e, \gamma_{[0,t]})(1) = \gamma_{[0,t]}(1) = \gamma(t)$$

para todos  $(e, \gamma) \in E \times_p B^I$  y  $t \in I$ . Se sigue que  $N(\Lambda)$  es una función levantadora de caminos para  $p$ .

Ahora bien, dado que para cualesquiera  $\gamma \in B^I$  y  $s, t \in I$  se tiene que  $(\gamma_{[0,t]})_{[0,s]} = \gamma_{[0,st]}$ , entonces

$$\begin{aligned} N(\Lambda)(e, \gamma)_{[0,t]}(s) &= N(\Lambda)(e, \gamma)(st) = \Lambda(e, \gamma_{[0,st]})(1) = \\ &= \Lambda\left(e, (\gamma_{[0,t]})_{[0,s]}\right)(1) = N(\Lambda)(e, \gamma_{[0,t]})(s) \end{aligned}$$

para cualesquiera  $(e, \gamma) \in E \times_p B^I$  y  $s, t \in I$ . Se sigue que  $N(\Lambda)(e, \gamma)_{[0,t]} = N(\Lambda)(e, \gamma_{[0,t]})$  para todo  $t \in I$  y para todo  $(e, \gamma) \in E \times_p B^I$  como queríamos.  $\square$

*Observación 5.5.16.* En las condiciones del lema anterior, podemos considerar la asignación  $\Lambda \mapsto N(\Lambda)$  como un operador en el conjunto de funciones levantadoras de caminos regulares de  $p$ . En ese caso, es fácil verificar que  $N^2 = N$ .

**Definición 5.5.17.** Sea  $B$  un espacio topológico finito  $T_0$  y sea  $\gamma$  un camino en  $B$ . Decimos que  $\gamma$  es un camino de *tipo D* si es constante en el intervalo  $(0, 1]$  y decimos que  $\gamma$  es un camino de *tipo U* si es constante en el intervalo  $[0, 1)$ .

En términos informales, los caminos tipo  $D$  “bajan” en tiempo  $t = 0$  y permanecen constantes en el intervalo  $(0, 1]$ , mientras que los caminos tipo  $U$  permanecen constantes en el intervalo  $[0, 1)$  y “suben” en tiempo  $t = 1$ . En la siguiente observación, hacemos precisas estas afirmaciones.

*Observación 5.5.18.* Sea  $B$  un espacio topológico finito  $T_0$  y sea  $\gamma$  un camino en  $B$ . Es fácil ver que

- (1) si  $\gamma$  es de tipo  $D$ , entonces  $\gamma(0) \geq \gamma(t) = \gamma(1)$  para todo  $t \in (0, 1]$ , y
- (2) si  $\gamma$  es de tipo  $U$ , entonces  $\gamma(0) = \gamma(t) \leq \gamma(1)$  para todo  $t \in [0, 1)$ .

Equivalentemente,  $\gamma$  es de tipo  $D$  si  $\gamma(0) \geq \gamma(1)$  y  $\gamma = \eta(\gamma(0) \geq \gamma(1))$  (cf. definición 1.2.16) y  $\gamma$  es de tipo  $U$  si  $\gamma(0) \leq \gamma(1)$  y  $\gamma = \eta(\gamma(0) \leq \gamma(1))$ .

**Lema 5.5.19.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$ , sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración y sea  $\Lambda$  una función levantadora de caminos regular normalizada para  $p$ . Sea  $\gamma$  un camino en  $B$  y sea  $e \in p^{-1}(\gamma(0))$ .

- (1) Si  $\gamma$  es de tipo  $D$ , entonces  $\Lambda(e, \gamma)$  es de tipo  $D$ .
- (2) Si  $\gamma$  es de tipo  $U$ , entonces  $\Lambda(e, \gamma)$  es de tipo  $U$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\gamma$  es de tipo  $D$ . Entonces  $\gamma = \gamma_{[0,t]}$  para todo  $t \in (0, 1]$  y por lo tanto

$$\Lambda(e, \gamma)(t) = \Lambda(e, \gamma)_{[0,t]}(1) = \Lambda(e, \gamma_{[0,t]})(1) = \Lambda(e, \gamma)(1)$$

para todo  $t \in (0, 1]$ . Luego,  $\Lambda(e, \gamma)$  es de tipo  $D$ .

Supongamos ahora que  $\gamma$  es de tipo  $U$ . Entonces  $\gamma_{[0,t]} = C_{\gamma(0)}$  para todo  $t \in [0, 1)$ . Se sigue que

$$\Lambda(e, \gamma)(t) = \Lambda(e, \gamma)_{[0,t]}(1) = \Lambda(e, \gamma_{[0,t]})(1) = \Lambda(e, C_{\gamma(0)})(1) = C_e(1) = e$$

para todo  $t \in [0, 1)$ . Luego,  $\Lambda(e, \gamma)$  es de tipo  $U$ . □

A continuación, exponemos el resultado principal de esta sección.

**Teorema 5.5.20.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración de Hurewicz para la cual existe una función levantadora de caminos regular. Entonces  $p$  es una bifibración de Grothendieck.

*Demostración.* Debemos probar que:

- (1) para todo  $e \in E$  y para todo  $b \leq p(e)$ , el conjunto  $U_e \cap p^{-1}(U_b)$  tiene un máximo que pertenece a  $p^{-1}(b)$ , y
- (2) para todo  $e \in E$  y para todo  $b \geq p(e)$ , el conjunto  $F_e \cap p^{-1}(F_b)$  tiene un mínimo que pertenece a  $p^{-1}(b)$ .



## 5 Fibraciones entre espacios finitos

---

Por 5.5.15, podemos considerar una función levantadora de caminos regular normalizada  $\Lambda$  para  $p$ .

Veamos (1). Sea  $e \in E$  y sea  $b \leq p(e)$ . Notemos que si  $p(e) = b$  el resultado se sigue trivialmente pues en ese caso  $e \in p^{-1}(b)$  y  $e = \max(U_e \cap p^{-1}(U_b))$ . Podemos suponer, entonces, que  $b < p(e)$ .

Sea  $X = \{e\} \cup (U_e \cap p^{-1}(U_b))$  y sea  $i: X \rightarrow E$  la inclusión. Sea además  $f: X \rightarrow B$  la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} p(x) & \text{si } x \neq e, \\ b & \text{si } x = e. \end{cases}$$

Es fácil ver que  $f$  es continua y que  $f \leq pi$  en  $B^X$ . El camino  $\eta(pi \geq f)$  induce una homotopía  $H: X \times I \rightarrow B$  de  $pi$  a  $f$  (cf. definición 1.2.16). Dado que  $Hi_0 = pi$ , podemos utilizar  $\Lambda$  para obtener un levantado  $\tilde{H}$  de  $H$  por  $p$  desde  $i$  que es la función  $\tilde{H} = (\Lambda\phi)^b$  inducida por  $\Lambda\phi$  por la ley exponencial, donde  $\phi: X \rightarrow E \times_p B^I$  es la función inducida en el pullback por  $i$  y  $H^\sharp: X \rightarrow B^I$ .

Notemos que, para todo  $x \in U_e \cap p^{-1}(U_b)$ , el camino  $Hi_x$  es el camino constante  $C_{p(x)}$ . Por la regularidad de  $\Lambda$  obtenemos que  $\tilde{H}i_x$  es el camino constante  $C_x$ . Por otro lado, el camino  $Hi_e$  es el camino  $\eta(p(e) \geq b)$  de tipo  $D$ . Se sigue de 5.5.19 que  $\tilde{H}i_e$  es el camino  $\eta(e \geq e')$  de tipo  $D$ , donde  $e' = \tilde{H}(e, 1)$ .

Es fácil ver que  $e' \in p^{-1}(b)$ . En efecto,

$$p(e') = p\tilde{H}(e, 1) = H(e, 1) = f(e) = b.$$

Veamos que  $e' = \max(U_e \cap p^{-1}(U_b))$ . Sea entonces  $x \in U_e \cap p^{-1}(U_b)$ . Por la continuidad de  $\tilde{H}i_1$  y dado que  $x \leq e$ , tenemos que

$$x = C_x(1) = \tilde{H}i_x(1) = \tilde{H}i_1(x) \leq \tilde{H}i_1(e) = e'.$$

El resultado se sigue.

Demostraremos ahora la afirmación (2). Sean  $e \in E$  y  $b > p(e)$ . Sea ahora  $X = \{e\} \cup (F_e \cap p^{-1}(F_b))$  y consideremos la inclusión  $i: X \rightarrow E$  y la función  $f: X \rightarrow B$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} p(x) & \text{si } x \neq e, \\ b & \text{si } x = e. \end{cases}$$

Como antes, la continuidad de  $f$  es fácil de probar. Si bien la función  $f$  que hemos definido en este caso es formalmente idéntica a la que habíamos definido en el caso anterior, tenemos ahora que  $f \geq pi$ .

Ahora bien, el camino  $\eta(pi \leq f)$  en  $B^X$  induce una homotopía  $H: X \times I \rightarrow B$  de  $pi$  a  $f$  y podemos utilizar  $\Lambda$  para obtener un levantado  $\tilde{H}$  de  $H$  por  $p$  desde  $pi$ .

Notemos que, como antes, el camino  $\tilde{H}i_x$  es el camino constante  $C_x$  para todo  $x \in F_e \cap p^{-1}(F_b)$ .

El camino  $\tilde{H}i_e$ , en cambio, es el camino  $\eta(p(e) \leq b)$  de tipo  $U$  y por lo tanto, se sigue de 5.5.19 que  $\tilde{H}i_e$  es el camino  $\eta(e \leq e')$  de tipo  $U$ , donde  $e' = \tilde{H}(e, 1)$ .

Como antes, se tiene que  $e' \in p^{-1}(b)$ . La prueba de que  $e' = \min(F_e \cap p^{-1}(F_b))$  es similar a la que presentamos para el caso anterior.  $\square$

De los resultados expuestos en esta sección, se deduce fácilmente el siguiente teorema.

**Teorema 5.5.21.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración de Hurewicz sin down beat points. Entonces:

- (1)  $p$  tiene una función levantadora de caminos regular normalizada.
- (2)  $p$  es una bifibración de Grothendieck.

*Demostración.* Como  $p$  no tiene down beat points, se deduce de 5.5.12 y de 5.5.15 que existe una función levantadora de caminos regular normalizada para  $p$ .

La proposición (2) se sigue de (1) y de 5.5.20. □

El siguiente resultado es inmediato.

**Corolario 5.5.22.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración de Hurewicz. Entonces, el dbp-retracto mínimo de  $p$  es bifibración de Grothendieck.

Como corolario de los resultados anteriores, obtenemos una demostración combinatoria del teorema 1.3.24 para la fibraciones de Hurewicz entre espacios topológicos finitos  $T_0$ .

**Corolario 5.5.23.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$  con  $B$  conexo y sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración de Hurewicz. Entonces las fibras de  $p$  son homotópicamente equivalentes.

*Demostración.* Sea  $p_0$  el dbp-retracto mínimo de  $p$ . Entonces  $p_0$  es fibración de Hurewicz sin down beat points. Se sigue del teorema 5.5.21 que  $p_0$  es bifibración de Grothendieck. Dado que  $B$  es conexo, se sigue del teorema 5.5.8 que las fibras de  $p_0$  son homotópicamente equivalentes. Pero para cada  $b \in B$ , la fibra  $p_0^{-1}(b)$  es un dbp-retracto de la fibra  $p^{-1}(b)$  puesto que se obtiene de esta eliminando sucesivamente down beat points de  $p$ . El resultado se sigue. □

**Lema 5.5.24.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$  una función continua sin down beat points. Supongamos además que  $B$  tiene máximo y que  $h(B) = 1$ . Entonces, son equivalentes:

- (1)  $p$  es fibración de Hurewicz.
- (2)  $p$  es una bifibración de Grothendieck.
- (3)  $p$  es retracto de la proyección canónica  $\pi_B: E \times B \rightarrow B$ .

*Demostración.* La proposición (1)  $\Rightarrow$  (2) se sigue de 5.5.21. Por el lema 5.5.11 se sigue que (2)  $\Rightarrow$  (3). La implicación (3)  $\Rightarrow$  (1) es clara. Así, (1), (2) y (3) son equivalentes. □

Se sigue del lema anterior y del corolario 5.4.3 que si  $E$  es un espacio topológico finito  $T_0$ ,  $\mathcal{S}$  es el espacio de Sierpinski y  $p: E \rightarrow \mathcal{S}$  es una función continua, entonces  $p$  es fibración de Hurewicz si y sólo si el dbp-retracto mínimo de  $p$  es bifibración de Grothendieck. El teorema siguiente, permite extender este resultado a otros codominios con elemento mínimo.

## 5 Fibraciones entre espacios finitos

**Teorema 5.5.25.** Sean  $E$  y  $B$  espacios topológicos finitos  $T_0$  y sea  $p: E \rightarrow B$  una función continua. Supongamos además que  $B$  tiene mínimo  $b_0$ . Entonces  $p$  es fibración de Hurewicz si y sólo si el  $\text{dbp}$ -retracto mínimo de  $p$  es una bifibración de Grothendieck.

*Demostración.* Por los corolarios 5.5.22 y 5.4.3, basta probar que si  $p$  es una bifibración de Grothendieck, entonces es una fibración de Hurewicz. Supongamos entonces que  $p$  es una bifibración de Grothendieck. Consideremos los funtores  $\alpha$  y  $\beta$  construidos en el teorema 5.5.4. Definimos la función  $s: E \rightarrow E^B$  por

$$s(e)(b) = \beta(b_0 \leq b)\alpha(p(e) \geq b_0)(e)$$

para cada  $b \in B$  y para cada  $e \in E$ .

Veamos que  $s$  está bien definida. Si  $b, b' \in B$  son tales que  $b \leq b'$ , entonces  $F_{b'} \subseteq F_b$  de donde es claro que  $\beta(b_0 \leq b)(e_0) \leq \beta(b_0 \leq b')(e_0)$  para todo  $e_0 \in p^{-1}(b_0)$  por la observación 5.5.2. Dado  $e \in E$  y tomando  $e_0 = \alpha(p(e) \geq b_0)(e)$  en la desigualdad anterior, se sigue que  $s(e)(b) \leq s(e)(b')$ . Así,  $s(e)$  es continua para todo  $e \in E$ . Se sigue que  $s$  está bien definida como queríamos.

Veamos que  $s$  es continua. Sean  $e, e' \in E$  tales que  $e \leq e'$ . Entonces  $U_e \subseteq U_{e'}$  de donde se sigue fácilmente que

$$\alpha(p(e) \geq b_0)(e) = \max(U_e \cap p^{-1}(b_0)) \leq \max(U_{e'} \cap p^{-1}(b_0)) = \alpha(p(e') \geq b_0)(e').$$

Ahora bien, si  $b \in B$ , de la continuidad de  $\beta(b_0 \leq b)$  se sigue que

$$s(e)(b) = \beta(b_0 \leq b)\alpha(p(e) \geq b_0)(e) \leq \beta(b_0 \leq b)\alpha(p(e') \geq b_0)(e') = s(e')(b).$$

Luego,  $s(e) \leq s(e')$ .

Observemos que las funciones  $s: E \rightarrow E^B$  y  $\text{ev}: B^I \times I \rightarrow B$  inducen una función continua

$$(E \times_p B^I) \times I \rightarrow E^B \times B$$

que mapea a todo elemento  $(e, \gamma, t)$  de  $(E \times_p B^I) \times I$  en el elemento  $(s(e), \gamma(t))$  de  $E^B \times B$ . Componiendo esta función con la evaluación  $\text{ev}: E^B \times B \rightarrow B$  obtenemos una función continua  $\phi: (E \times_p B^I) \times I \rightarrow E$  definida por  $\phi(e, \gamma, t) = s(e)(\gamma(t))$  para todo  $(e, \gamma) \in E \times_p B^I$  y todo  $t \in I$ .

Definimos ahora  $\lambda: (E \times_p B^I) \times I \rightarrow E$  por

$$\lambda(e, \gamma, t) = \begin{cases} e & \text{si } t = 0, \\ s(e)(\gamma(t)) & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Es claro que  $\lambda(e, \gamma, t) = \phi(e, \gamma, t)$  para todo  $(e, \gamma, t)$  en el abierto  $(E \times_p B^I) \times (0, 1]$ . Por otro lado, si  $(e, \gamma) \in E \times_p B^I$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \phi(e, \gamma, 0) &= s(e)(\gamma(0)) = \beta(b_0 \leq \gamma(0))\alpha(p(e) \geq b_0)(e) = \\ &= \beta(b_0 \leq \gamma(0))\alpha(\gamma(0) \geq b_0)(e) \leq e = \lambda(e, \gamma, 0) \end{aligned}$$

donde la desigualdad vale por (3) de 5.5.5. Así,  $\lambda \geq \phi$ .

Es claro que la restricción de  $\lambda$  al cerrado  $E \times_p B^I \times \{0\}$  es continua pues es la proyección a  $E$ . Por 5.2.3, se sigue que  $\lambda$  es continua. Por otro lado, tenemos que  $\lambda(e, \gamma, 0) = e$  para todo  $(e, \gamma) \in E \times_p B^I$  y, dado que  $s(e)$  es una sección de  $p$  para todo  $e \in E$ , se sigue que  $p\lambda(e, \gamma, t) = \gamma(t)$  para todo  $(e, \gamma) \in E \times_p B^I$  y todo  $t \in I$ . Luego,  $\lambda^\sharp: E \times_p B^I \rightarrow E^I$  es una función levantadora de caminos para  $p$ . Por lo tanto,  $p$  es fibración de Hurewicz.  $\square$

## 5.6 Ejemplos

En esta sección mostraremos ejemplos que ilustran los resultados obtenidos en las secciones anteriores.

Para cada función que sigue, representaremos su dominio y codominio mediante el diagrama de Hasse del poset correspondiente. Nombraremos los puntos del codominio mediante una letra, y para cada punto  $x$  del codominio, los puntos de su preimagen serán denotados agregando a  $x$  un subíndice numérico.

### 5.6.1 Fibración de Hurewicz que no es cerrada

En este ejemplo exhibimos una fibración de Hurewicz  $p_1$  entre espacios topológicos finitos  $T_0$  que no es cerrada y obtenemos a partir de este hecho que no es cierto en general que la función opuesta a una fibración de Hurewicz entre espacios topológicos finitos  $T_0$  sea también fibración.

Sea  $p_1: E_1 \rightarrow B_1$  la función representada en la figura 5.3. Notemos que al eliminar

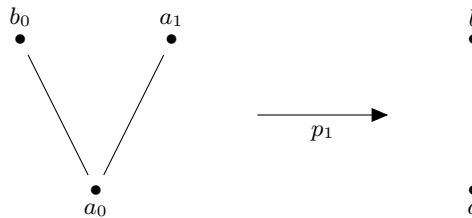


Figura 5.3: Función  $p_1$ .

el down beat point  $a_1$  de  $p_1$  se obtiene un homeomorfismo, y en particular, una fibración de Hurewicz. Del teorema 5.4.2, se sigue que  $p_1$  es fibración de Hurewicz. Notemos además que, dado que  $p_1(\{a_1\}) = \{a\}$ , entonces  $p_1$  no es cerrada. Luego, las fibraciones de Hurewicz entre espacios topológicos finitos  $T_0$  no son necesariamente cerradas.

Observemos que aunque el espacio  $E_1$  no tiene up beat points, el espacio  $B_1$  sí los tiene. Esto muestra que el corolario 5.4.11 no vale si cambiamos down beat points por up beat points.

Como  $p_1$  no es cerrada, entonces  $p_1^{\text{op}}$  no es abierta y, por 5.4.7, se deduce que  $p_1^{\text{op}}$  no es fibración.

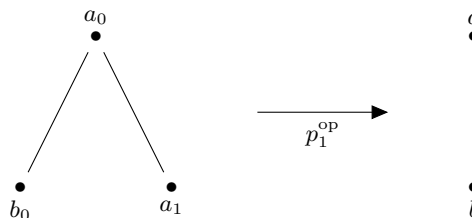


Figura 5.4: Función  $p_1^{\text{op}}$ .

## 5 Fibraciones entre espacios finitos

---

Notemos que al eliminar el up beat point  $a_1$  de  $p_1^{\text{OP}}$  se obtiene un homeomorfismo. Esto muestra que en el teorema 5.4.2 es esencial que el beat point que se elimina sea un down beat point de la función considerada.

Más aún,  $p_1$  no tiene up beat points, y como  $p_1$  no es bifibración de Grothendieck, se sigue del teorema 5.5.20 que  $p_1$  no tiene funciones levantadoras de caminos regulares. Esto muestra que la proposición (2) del teorema 5.5.12 no vale cambiando down beat points por up beat points.

### 5.6.2 Fibración de Serre que no es fibración de Hurewicz

En este ejemplo mostramos que existen funciones entre espacios topológicos finitos  $T_0$  que tienen la propiedad de levantamiento de homotopías respecto de espacios compactos, de espacios métricos y de CW-complejos y sin embargo no son fibraciones de Hurewicz.

Sea  $p_2: E_2 \rightarrow B_2$  la función definida en la figura 5.5.

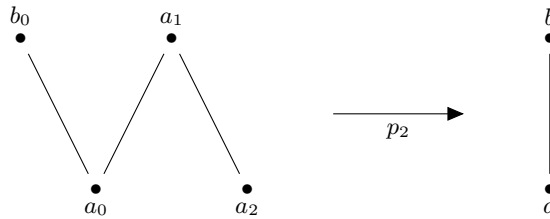


Figura 5.5: Función  $p_2$ .

Notemos que  $p_2$  no tiene down beat points. Como  $p_2(\{a_1\}) = \{a\}$ , entonces  $p_2$  no es cerrada y se sigue de 5.4.16 que  $p_2$  no es fibración de Hurewicz. Naturalmente, a la misma conclusión se puede llegar a partir del teorema 5.4.14, notando que no hay ningún punto en la fibra de  $a$  que sea menor o igual que  $a_2$  y cuya clausura interseque a la fibra de  $b$ . Veremos, sin embargo, que  $p_2$  tiene la propiedad de levantamiento de homotopías respecto de espacios métricos y respecto de espacios compactos. Esto implica que  $p_2$  tiene la propiedad de levantamiento de homotopías respecto de CW-complejos localmente finitos y respecto de espacios topológicos finitos.

**Lema 5.6.1.** *Sea  $X$  un espacio topológico. Si  $X$  es un espacio métrico o compacto, entonces la función  $p_2$  tiene la propiedad de levantamiento de homotopías respecto de  $X$ .*

*Demostración.* Sean  $f: X \rightarrow E_2$  y  $H: X \times I \rightarrow B_2$  funciones continuas tales que  $H i_0 = p_2 f$ .

Supongamos primero que  $X$  es un espacio métrico. Notemos que  $X \times I$  es también un espacio métrico y, por lo tanto, es un espacio normal.

Dado que  $f^{-1}(F_{a_2})$  es cerrado en  $X$ , tenemos que  $f^{-1}(F_{a_2}) \times \{0\}$  es un cerrado de  $X \times I$  contenido en el abierto  $H^{-1}(a)$ . Como  $X \times I$  es normal, existe un abierto  $V$  de  $X \times I$  tal que

$$f^{-1}(F_{a_2}) \times \{0\} \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq H^{-1}(a).$$

Notemos que

1. El conjunto  $H^{-1}(b)$  es cerrado en  $X \times I$ .
2. El conjunto  $(f^{-1}(a_2) \times I) \cap V$  es abierto en  $X \times I$ .
3. El conjunto  $(f^{-1}(F_{a_2}) \times I) \cap \bar{V} - (f^{-1}(a_2) \times I) \cap V$  es cerrado en  $X \times I$ .
4. El conjunto  $H^{-1}(a) - (f^{-1}(F_{a_2}) \times I) \cap \bar{V}$  es abierto en  $X \times I$ .

Más aún, estos cuatro conjuntos son disjuntos dos a dos y cubren  $X \times I$ .

Definimos entonces la función  $\tilde{H}: X \times I \rightarrow E_2$  por

$$\tilde{H}(x, t) = \begin{cases} b_0 & \text{si } (x, t) \in H^{-1}(b), \\ a_0 & \text{si } (x, t) \in H^{-1}(a) - (f^{-1}(F_{a_2}) \times I) \cap \bar{V}, \\ a_1 & \text{si } (x, t) \in (f^{-1}(F_{a_2}) \times I) \cap \bar{V} - (f^{-1}(a_2) \times I) \cap V, \text{ y} \\ a_2 & \text{si } (x, t) \in (f^{-1}(a_2) \times I) \cap V. \end{cases}$$

Es inmediato que  $\tilde{H}^{-1}(a_0)$  y  $\tilde{H}^{-1}(a_2)$  son abiertos en  $X \times I$ . Más aún, dado que  $\tilde{H}^{-1}(b_0)$  es cerrado, se sigue que  $\tilde{H}^{-1}(U_{a_1})$  es abierto. Finalmente, tenemos que  $\tilde{H}^{-1}(\{a_1, a_2\}) = (f^{-1}(F_{a_2}) \times I) \cap \bar{V}$  y, por lo tanto, es cerrado. Se sigue que  $\tilde{H}^{-1}(U_{b_0})$  es abierto. Luego,  $\tilde{H}$  es continua.

Es fácil verificar que  $\tilde{H}i_0 = f$  y que  $p_2\tilde{H} = H$ .

Supongamos ahora que  $X$  es compacto. Entonces  $f^{-1}(F_{a_2})$  es compacto. Dado que  $f^{-1}(F_{a_2}) \times \{0\} \subseteq H^{-1}(a)$ , por el Lema del Tubo existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f^{-1}(F_{a_2}) \times [0, \varepsilon] \subseteq H^{-1}(a)$ .

En este caso, definimos la función  $\tilde{H}: X \times I \rightarrow E_2$  por

$$\tilde{H}(x, t) = \begin{cases} b_0 & \text{si } (x, t) \in H^{-1}(b), \\ a_0 & \text{si } (x, t) \in H^{-1}(a) - f^{-1}(F_{a_2}) \times [0, \varepsilon], \\ a_1 & \text{si } (x, t) \in f^{-1}(F_{a_2}) \times [0, \varepsilon] - f^{-1}(a_2) \times [0, \varepsilon], \text{ y} \\ a_2 & \text{si } (x, t) \in f^{-1}(a_2) \times [0, \varepsilon]. \end{cases}$$

Como en el caso anterior, se verifica fácilmente que  $\tilde{H}$  es una función continua y que  $\tilde{H}i_0 = f$  y que  $p_2\tilde{H} = H$ . □

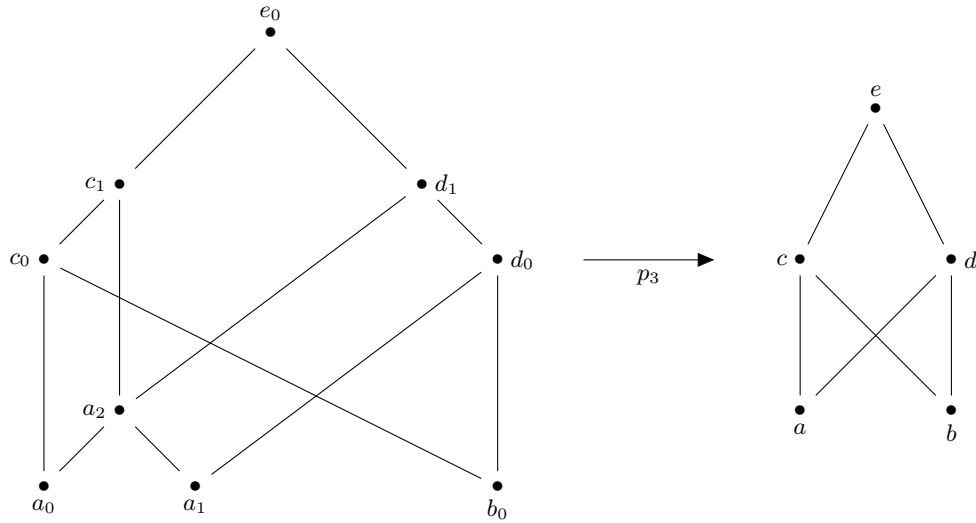
Del lema anterior, es claro que  $p_2$  tiene la propiedad de levantamiento de homotopías respecto de discos  $D^n$  y es, por lo tanto, una fibración de Serre. Se sigue que  $p_2$  tiene la propiedad de levantamiento de homotopías respecto de CW-complejos.

**Corolario 5.6.2.** *La función  $p_2$  es una fibración de Serre que no es fibración de Hurewicz.*

### 5.6.3 Bifibración de Grothendieck que no es retracts de un fibrado

En este ejemplo mostramos una bifibración de Grothendieck entre espacios finitos  $T_0$  que no es un retracts de un fibrado del mismo tipo. En particular, no puede obtenerse eliminando sucesivamente beat points de un fibrado entre espacios finitos  $T_0$ .

Sea  $p_3: E_3 \rightarrow B_3$  la función definida en la siguiente figura.



Observemos que  $p_3$  es bifibración de Grothendieck. En particular, la restricción

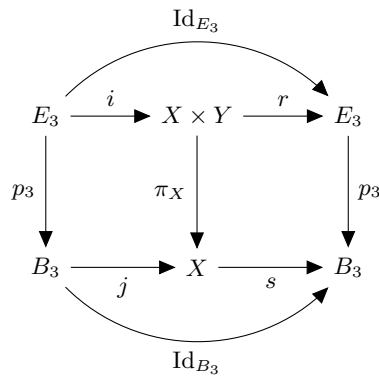
$$p_3|: p_3^{-1}(\widehat{U}_e) \rightarrow \widehat{U}_e$$

también lo es.

Veamos que  $p_3$  no es retracto de una proyección asociada a un producto de espacios topológicos finitos  $T_0$ , lo que mostrará que la hipótesis sobre la altura de la base de  $p$  en el lema 5.5.11 es esencial.

Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos finitos  $T_0$ , sean  $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$  y  $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$  las proyecciones y supongamos que  $p_3$  es retracto de  $\pi_X$ .

Tenemos entonces funciones continuas  $i: E_3 \rightarrow X \times Y$ ,  $r: X \times Y \rightarrow E_3$ ,  $j: B_3 \rightarrow X$ ,  $s: X \rightarrow B_3$  tales que  $ri = \text{Id}_{E_3}$ ,  $sj = \text{Id}_{B_3}$ ,  $\pi_X i = jp_3$  y  $p_3 r = s\pi_X$ , como muestra el siguiente diagrama conmutativo.



Ahora bien, como  $a \leq c$  entonces

$$j(a) \leq j(c) = jp_3(c_0) = \pi_X i(c_0),$$

y como  $b_0 \leq c_0$  entonces  $\pi_Y i(b_0) \leq \pi_Y i(c_0)$ . De esto se sigue que

$$(j(a), \pi_Y i(b_0)) \leq (\pi_X i(c_0), \pi_Y i(c_0)) = i(c_0).$$

Luego  $r(j(a), \pi_Y i(b_0)) \leq ri(c_0) = c_0$ . Del mismo modo se prueba que  $r(j(a), \pi_Y i(b_0)) \leq d_0$ .

Por otro lado,

$$p_3 r(j(a), \pi_Y i(b_0)) = s \pi_X(j(a), \pi_Y i(b_0)) = sj(a) = a$$

y por lo tanto,  $r(j(a), \pi_Y i(b_0)) \in p_3^{-1}(a)$ .

Pero entonces  $r(j(a), \pi_Y i(b_0)) \in U_{c_0} \cap U_{d_0} \cap p_3^{-1}(a) = \emptyset$ . Este absurdo muestra que  $p_3$  no es retracto de la proyección de un producto de espacios topológicos finitos  $T_0$ .

De manera similar se prueba que  $p_3|$  no es retracto de la proyección de un producto de espacios topológicos finitos  $T_0$ , lo que muestra que la hipótesis de que  $B$  tenga máximo en el lema 5.5.11 también es esencial.

Notemos que como  $B_3$  tiene máximo, entonces por 4.3.7, los únicos fibrados con base  $B_3$  y fibra  $T_0$  son (isomorfos a) proyecciones de productos. Luego,  $p_3$  no es un retracto de un fibrado sobre  $B_3$  con espacio total finito  $T_0$ . En particular,  $p_3$  no puede obtenerse eliminando sucesivamente beat points a un fibrado entre espacios topológicos finitos  $T_0$  como queríamos mostrar.





# Bibliografía

- [1] ADAMASZEK, M. Small flag complexes with torsion. *Canad. Math. Bull.* 57, 2 (2014), 225–230.
- [2] ADÁMEK, J., HERRLICH, H., Y STRECKER, G. E. Abstract and concrete categories. The joy of cats. Disponible en <http://katmat.math.uni-bremen.de/acc/acc.pdf>.
- [3] ALEXANDROFF, P. Diskrete Räume. *Mat. Sb.* 2 (1937), 501–518.
- [4] AWODEY, S. *Category theory*, segunda ed., vol. 52 de *Oxford Logic Guides*. Oxford University Press, Oxford, 2010.
- [5] BARMAK, J. A. *Algebraic topology of finite topological spaces and applications*, vol. 2032 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Heidelberg, 2011.
- [6] BARMAK, J. A. The fixed point property in every weak homotopy type. *Amer. J. Math.* 138, 5 (2016), 1425–1438.
- [7] BARMAK, J. A., Y MINIAN, E. G. Minimal finite models. *J. Homotopy Relat. Struct.* 2, 1 (2007), 127–140.
- [8] BARMAK, J. A., Y MINIAN, E. G. One-point reductions of finite spaces,  $h$ -regular CW-complexes and collapsibility. *Algebr. Geom. Topol.* 8, 3 (2008), 1763–1780.
- [9] BARMAK, J. A., Y MINIAN, E. G. Simple homotopy types and finite spaces. *Adv. Math.* 218, 1 (2008), 87–104.
- [10] BARMAK, J. A., Y MINIAN, E. G. Strong homotopy types, nerves and collapses. *Discrete Comput. Geom.* 47, 2 (2012), 301–328.
- [11] BARMAK, J. A., Y MINIAN, E. G.  $G$ -colorings of posets, coverings and presentations of the fundamental group. *arXiv preprint arXiv:1212.6442v2* (2014). Disponible en <https://arxiv.org/pdf/1212.6442v2.pdf>.
- [12] BARMAK, J. A., Y MINIAN, E. G. A note on coverings of posets,  $A$ -spaces and polyhedra. *Homol. Homotopy Appl.* 18, 1 (2016), 143–150.
- [13] BORCEUX, F. *Handbook of categorical algebra: volume 2, Categories and structures*, vol. 51 de *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

## Bibliografía

---

- [14] BRINKMANN, G., Y MCKAY, B. D. Posets on up to 16 points. *Order* 19, 2 (2002), 147–179.
- [15] BROWN, K. S. *Cohomology of groups*, vol. 87 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994. Reimpresión corregida del original de 1982.
- [16] BROWN, R. Groupoids and van Kampen’s theorem. *Proc. London Math. Soc. (3)* 17 (1967), 385–401.
- [17] BROWN, R. Fibrations of groupoids. *J. Algebra* 15 (1970), 103–132.
- [18] CERDEIRO, M. A., Y MINIAN, E. G. A new approach to Whitehead’s asphericity question. *J. Homotopy Relat. Struct.* 9, 2 (2014), 339–348.
- [19] CIANCI, N. Regular coverings and fundamental groupoids of Alexandroff spaces. *arXiv preprint arXiv:1907.02624v1* (2019). Disponible en <https://arxiv.org/pdf/1907.02624v1.pdf>.
- [20] CIANCI, N., Y OTTINA, M. A new spectral sequence for homology of posets. *Topology Appl.* 217 (2017), 1–19.
- [21] CIANCI, N., Y OTTINA, M. Poset splitting and minimality of finite models. *J. Combin. Theory Ser. A* 157 (2018), 120–161.
- [22] CIANCI, N., Y OTTINA, M. Classification of fiber bundles over Alexandroff spaces with  $T_0$  fiber. *arXiv preprint arXiv:1907.03614v1* (2019). Disponible en <https://arxiv.org/pdf/1907.03614v1.pdf>.
- [23] CIANCI, N., Y OTTINA, M. A combinatorial characterization of Hurewicz cofibrations between finite topological spaces. *Topology Appl.* 256 (2019), 235 – 247.
- [24] CIANCI, N., Y OTTINA, M. Fibrations between finite topological spaces. *arXiv preprint arXiv:1907.03972v1* (2019). Disponible en <https://arxiv.org/pdf/1907.03972v1.pdf>.
- [25] CIANCI, N., Y OTTINA, M. Fiber bundles over Alexandroff spaces. *arXiv preprint arXiv:1907.03614v2* (2020). Disponible en <https://arxiv.org/pdf/1907.03614v2.pdf>.
- [26] CIANCI, N., Y OTTINA, M. Smallest weakly contractible non-contractible topological spaces. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* 63, 1 (2020), 263–274.
- [27] CURTIS, E. B. Simplicial homotopy theory. *Adv. Math.* 6 (1971), 107–209.
- [28] DEL HOYO, M. Espacios clasificantes y atlas de grupoides. Tesis de Licenciatura, 2005. Disponible en <http://cms.dm.uba.ar/academico/carreras/licenciatura/tesis/delhoyo.pdf>.
- [29] FERNÁNDEZ, X., Y MINIAN, E. G. Homotopy colimits of diagrams over posets and variations on a theorem of Thomason. *Homol. Homotopy Appl.* 18, 2 (2016), 233–245.

- 
- [30] FERNÁNDEZ, X., Y MINIAN, E. G. The cylinder of a relation and generalized versions of the nerve theorem. *Discrete & Computational Geometry* 63, 3 (2020), 549–559.
- [31] FERNÁNDEZ-TERNERO, D., MACÍAS-VIRGÓS, E., MINUZ, E., Y VILCHES, J. A. Discrete topological complexity. *Proc. Amer. Math. Soc.* 146, 10 (2018), 4535–4548.
- [32] FERNÁNDEZ-TERNERO, D., MACÍAS-VIRGÓS, E., Y VILCHES, J. A. Lusternik-Schnirelmann category of simplicial complexes and finite spaces. *Topology Appl.* 194 (2015), 37–50.
- [33] FOX, R. H. On topologies for function spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.* 51 (1945), 429–432.
- [34] FREYD, P. J., Y SCEDROV, A. *Categories, allegories*, vol. 39 de *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.
- [35] GABRIEL, P., Y ZISMAN, M. *Calculus of fractions and homotopy theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 35. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967.
- [36] GRAY, J. W. Fibred and cofibred categories. In *Proc. Conf. Categorical Algebra (La Jolla, Calif., 1965)*. Springer, New York, 1966, págs. 21–83.
- [37] GROTHENDIECK, A., Y RAYNAUD, M. Revêtements étales et groupe fondamental: Séminaire de géométrie algébrique de bois-marie 1960/61. *Lecture Notes in Mathematics* 224 (1971), 176. Versión digital de 2004 disponible en <https://arxiv.org/pdf/math/0206203v2.pdf>.
- [38] HARDIE, K. A., SALBANY, S., VERMEULEN, J. J. C., Y WITBOOI, P. J. A non-Hausdorff quaternion multiplication. *Theoret. Comput. Sci.* 305, 1-3 (2003), 135–158. Topology in computer science (SchloßDagstuhl, 2000).
- [39] HARDIE, K. A., VERMEULEN, J. J. C., Y WITBOOI, P. J. A nontrivial pairing of finite  $T_0$  spaces. *Topology Appl.* 125, 3 (2002), 533–542.
- [40] HATCHER, A. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [41] HOVEY, M. *Model categories*, vol. 63 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [42] HUREWICZ, W. On the concept of fiber space. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 41 (1955), 956–961.
- [43] JOHNSTONE, P. T. *Sketches of an elephant: a topos theory compendium*. Vol. 1, vol. 43 de *Oxford Logic Guides*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2002.
- [44] KURATOWSKI, C. Sur l’opération A de l’analysis situs. *Fund. Math.* 3, 1 (1922), 182–199.
-

## Bibliografia

---

- [45] MAC LANE, S. *Categories for the working mathematician*, segunda ed., vol. 5 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [46] MAY, J. P. *A concise course in algebraic topology*. University of Chicago press, 1999. Disponible en <https://www.math.uchicago.edu/~may/CONCISE/ConciseRevised.pdf>.
- [47] MAY, J. P. Finite groups and finite spaces. *Notes for REU* (2003). Disponible en <http://www.math.uchicago.edu/~may/MISC/finitegroups.pdf>.
- [48] MAY, J. P. Finite spaces and simplicial complexes. *Notes for REU* (2003). Disponible en <http://www.math.uchicago.edu/~may/MISC/SimpCxes.pdf>.
- [49] MAY, J. P. Finite topological spaces. *Notes for REU* (2003). Disponible en <http://www.math.uchicago.edu/~may/MISC/FiniteSpaces.pdf>.
- [50] MAY, J. P. *Finite spaces and larger contexts*. 2016. Disponible en <http://math.uchicago.edu/~may/FINITE/FINITEBOOK/FINITEBOOKCollatedDraft.pdf>.
- [51] MCCORD, M. C. Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces. *Duke Math. J.* 33 (1966), 465–474.
- [52] MILNOR, J. The geometric realization of a semi-simplicial complex. *Ann. of Math.* (2) 65 (1957), 357–362.
- [53] MINIAN, E. G. Some remarks on Morse theory for posets, homological Morse theory and finite manifolds. *Topology Appl.* 159, 12 (2012), 2860–2869.
- [54] MINIAN, E. G., Y PITERMAN, K. I. The homotopy types of the posets of  $p$ -subgroups of a finite group. *Adv. Math.* 328 (2018), 1217–1233.
- [55] MITCHELL, B. *Theory of categories*. Pure and Applied Mathematics, Vol. XVII. Academic Press, New York-London, 1965.
- [56] OSAKI, T. Reduction of finite topological spaces. *Interdiscip. Inform. Sci.* 5, 2 (1999), 149–155.
- [57] PITERMAN, K. I. A stronger reformulation of Webb’s conjecture in terms of finite topological spaces. *Journal of Algebra* 527 (2019), 280–305.
- [58] QUILLEN, D. Higher algebraic  $K$ -theory. I. 85–147. *Lecture Notes in Math.*, Vol. 341.
- [59] QUILLEN, D. Homotopy properties of the poset of nontrivial  $p$ -subgroups of a group. *Adv. Math.* 28, 2 (1978), 101–128.
- [60] QUILLEN, D. G. *Homotopical algebra*. *Lecture Notes in Mathematics*, No. 43. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.
- [61] RAPTIS, G. Homotopy theory of posets. *Homol. Homotopy Appl.* 12, 2 (2010), 211–230.

- 
- [62] RIVAL, I. A fixed point theorem for finite partially ordered sets. *J. Combinatorial Theory Ser. A* 21, 3 (1976), 309–318.
- [63] SCHRÖDER, B. *Ordered sets: An introduction with connections from combinatorics to topology*, segunda ed. Birkhäuser, 2016.
- [64] SCHUBERT, H. *Topology*. Traducido del Alemán por Siegfried Moran. Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass., 1968.
- [65] SEGAL, G. Classifying spaces and spectral sequences. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 34 (1968), 105–112.
- [66] SPANIER, E. H. *Algebraic topology*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981. Reimpresión corregida.
- [67] STEENROD, N. *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton Mathematical Series, vol. 14. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1951.
- [68] STONG, R. E. Finite topological spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 123 (1966), 325–340.
- [69] STREICHER, T. Fibred categories à la Jean Bénabou. *arXiv preprint arXiv:1801.02927v8* (2020). Disponible en <https://arxiv.org/pdf/1801.02927v8.pdf>.
- [70] STRØM, A. Note on cofibrations. II. *Math. Scand.* 22 (1968), 130–142.
- [71] TANAKA, K. A combinatorial description of topological complexity for finite spaces. *arXiv preprint arXiv:1605.06755v1* (2016). Disponible en <https://arxiv.org/pdf/1605.06755v1.pdf>.
- [72] TANAKA, K. A combinatorial description of topological complexity for finite spaces. *Algebr. Geom. Topol.* 18, 2 (2018), 779–796.
- [73] THOMASON, R. W. Homotopy colimits in the category of small categories. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 85, 1 (1979), 91–109.
- [74] TOCHI, G. Quillen’s Theorem A through homology with local coefficients and Grothendieck spectral sequence. Tesis de Licenciatura, 2014. Disponible en [http://cms.dm.uba.ar/academico/carreras/licenciatura/tesis/2014/Guillermo\\_Tochi.pdf](http://cms.dm.uba.ar/academico/carreras/licenciatura/tesis/2014/Guillermo_Tochi.pdf).
- [75] TOM DIECK, T. *Algebraic topology*. EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008.
- [76] TULLEY MCAULEY, P., Y UNGAR, G. S. A local-nonglobal Hurewicz fibration. *Colloq. Math.* 41, 1 (1979), 73–77.
- [77] WITBOOI, P. Finite spaces and the universal bundle of a group. *Comment. Math. Univ. Carolin.* 38, 4 (1997), 791–799.
-