UNIVERSIDAD NACIONAL
de MAR DEL PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Tesis doctoral

MÓDULOS τ-INCLINANTES, SU COMPORTAMIENTO BAJO ÁLGEBRAS EXTENDIDAS Y LA DIMENSIÓN GLOBAL DE SU ANILLO DE ENDOMORFISMOS

Lic. Pamela Y. Suarez

Diciembre de 2017

Directores:

Dra. Sonia Trepode
Dra. Claudia Chaio

Son cosas chiquitas.
No acaban con la pobreza
no nos sacan del subdesarrollo,
no socializan los medios de producción
y de cambio, no expropian las cuevas de Alí Babá.
Pero quizá desencadenen la alegría de hacer,
y la traduzcan en actos.
Y al fin y al cabo, actuar sobre la realidad
y cambiarla aunque sea un poquito,
es la única manera de probar
que la realidad es transformable.
Eduardo Galeano

Prefacio

Esta tesis se presenta como parte de los requisitos para obtener el grado académico de Doctor en Matemática, de la Universidad Nacional de Mar del Plata y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta universidad u otra. La misma contiene resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales durante el periodo comprendido entre el 15/10/2013 y el 05/12/2017, bajo la dirección de la Dra. Sonia Trepode (UNMdP) y la co-dirección de la Dra. Claudia Chaio (UNMdP).

Esta tesis fue llevada a cabo con una beca del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

Resumen

En esta tesis, consideraremos álgebras de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado.

Uno de los objetivos de este trabajo es estudiar el comportamiento de los módulos τ-inclinantes bajo ciertas extensiones de álgebras, tales como las extensiones por un punto y las extensiones escindidas por un ideal nilpotente. Otro objetivo es dar una cota para la dimensión global del álgebra de endomorfismos de un módulo τ-inclinante.

Para las álgebras extendidas por un módulo proyectivo, obtenemos que existe una inmersión plena entre los correspondientes posets de módulos τ-inclinantes. Para el caso de extensiones escindidas de álgebras por un ideal nilpotente, probamos, bajo ciertas condiciones, que es posible extender y restringir módulos τ-inclinantes soportados. Más aún, en algunos casos se puede garantizar que una flecha en el diagrama de Hasse del álgebra inicial induce una flecha en el diagrama de Hasse del álgebra extendida.

Para resolver el problema de la dimensión global, estudiamos el comportamiento del anulador de un módulo τ-inclinante. Mostramos una familia de ejemplos donde la dimensión global del álgebra de endomorfismos es infinita. Damos una condición necesaria para garantizar la finitud de la dimensión global. Probamos que para las álgebras monomiales y las álgebras biseriales especiales de dimensión global dos, la dimensión global del álgebra de endomorfismos de cualquier módulo τ-inclinante es finita.

Abstract

In this thesis, we consider finite dimensional algebras over an algebraically closed field.

The first aim of this work is to study the behavior of support τ-tilting modules over extension algebras, such as the one-point extension by a projective module and the split-by-nilpotent extension algebras. The second aim is to give a bound for the global dimension of the endomorphism algebra of a τ-tilting module.

For a one-point extension algebras by a projective module we obtain that there exists a full embedding of quivers between the poset of the algebra and the poset of its one point extension. For split by nilpotent extensions, we prove that, under some conditions, it is possible to extend and restrict support τ-tilting modules. Moreover, in some cases we can assure that an arrow in the Hasse quiver of the initial algebra induces an arrow in the Hasse quiver of the extend algebra.

To solve the problem of the global dimension, we study the annihilator of a τ-tilting module. We give a family of examples where the global dimension of the endomorphism algebra of a τ-tilting module is infinite. We give a necessary condition to ensure that the global dimension is finite. For monomial algebras and for special biserial algebras of global dimension two, we show that the global dimension of the endomorphism algebra of any τ-tilting module is finite.

Agradecimientos

Durante estos años son muchas las personas e instituciones que han participado directa o indirectamente en este trabajo y a quienes quiero expresar mi gratitud por el apoyo y la confianza que me han prestado de forma desinteresada. Aunque el hecho de exponer una lista siempre supone un riesgo de olvidar a alguna de esas personas, quisiera hacer una especial mención de agradecimientos.

A mis directoras, Claudia y Sonia, por la confianza, el apoyo brindado y, por sobre todas las cosas, por la libertad con la que siempre me permitieron trabajar.

A las personas que hacen que todo tenga sentido: a mi mamá Adriana y a mi papá Rubén. A mi mamá por su amor incondicional, por ser mi remanso, por su entrega y por recordarme siempre con su ejemplo qué es lo esencial en la vida. A mi papá, a quien admiro profundamente, por creer en mí, por darme alas y mostrarme cómo volar, por ayudarme a iluminar el camino cuando la oscuridad parece invadirme y por contenerme. A ambos por esos abrazos en los que puedo sentirme como una nena otra vez y que me permiten confiar en que todo va a estar bien y por educarme con amor, respeto, confianza y libertad.

A mi amor Iván, por ser la persona que ha compartido la mayor parte de este tiempo a mi lado, por quererme, amarme, cuidarme y por sobre todo por comprenderme y caminar a mi lado. Gracias por celebrar mis triunfos y ser mi sostén cuando las cosas no marchaban tan bien.

A todos los que en este proceso me consultaron -al menos una vez- por como iba el trabajo. En especial me refiero a mis compañeros de estudio y oficina, de los que solo coseche palabras de ánimo y estímulo: Agus, Ale, Ana, Cata, Ceci, Natty, Vicky.

A todas las personas que integran el Departamento de Matemáticas de la FCEyN-UNMdP, por formarme y brindarme su calidez. En particular, al grupo de álgebra por permitirme crecer junto a ellos.

Finalmente, al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) por financiar este doctorado.

A toda mi familia y amigos, gracias!!

Pame

Índice general

Introducción

Este trabajo se encuadra dentro de la teoría de representaciones de álgebras de dimensión finita, que consiste en el estudio de la categoría de módulos sobre álgebras de dimensión finita.

Sin pérdida de generalidad, debido a un muy conocido teorema de Morita, es posible suponer que todas las álgebras son básicas. Por tal motivo, en todo lo que sigue se consideran álgebras A básicas de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k. Bajo esta hipótesis, por el teorema de P. Gabriel, es posible describir a A como el cociente de un álgebra de caminos de un carcaj finito Q por un cierto ideal.

La teoría de inclinación ha tenido un papel central dentro de las representaciones de álgebras de dimensión finita. Recordemos que un módulo M con $\mathrm{pd}_A \leq 1$ es inclinante si $\mathrm{Ext}^1_A(M, M) = 0$ y el número de sumandos directos indescomponibles de M no isomorfos dos a dos (que notaremos por |M|) es igual al número de A-módulos simples. Es conocido que, cuando M es un módulo inclinante, existe un par de torsión asociado a M, y la relación entre los módulos inclinantes y los pares de torsión es una herramienta fundamental, ver [S]. Por ejemplo, a partir de las clases de torsión, es posible definir un orden parcial en el conjunto de módulos inclinantes. Por otro lado, otro hecho importante es que si U es un módulo inclinante casi completo, es decir, se tiene que $\mathrm{pd}_A U \leq 1$, $\mathrm{Ext}^1_A(U, U) = 0$ y $|U| = |A| - 1$, entonces U puede ser completado a lo sumo de dos maneras distintas en orden de obtener un módulo inclinante. Más aún, hay exactamente dos formas de completarlo si y sólo si U es fiel. Incluso para un álgebra hereditaria, no todos los módulos inclinantes casi completos son fieles. Cuando se tienen dos complementos, es posible definir una relación entre estos que se conoce como mutación. La mutación de módulos inclinantes tiene sus orígenes en los funtores de reflexión, introducidos por I. Berstein, I. Gelfand y V. Ponomarev en [BGP], que más tarde fueron generalizados por M. Auslander, I. Reiten y M.I. Platzeck con la noción de módulo inclinante APR en [APR]. El proceso de mutación fue introducido de manera general por C. Riedtmann y A. Schofield en [RS], en un estudio combinatorio de los módulos inclinantes. Por otra parte, D. Happel y L. Unger mostraron en [HU1] que la mutación de módulos inclinantes está íntimamente relacionada con el orden parcial de los módulos inclinantes.

Una limitación del proceso de mutación de módulos inclinantes es que no siempre es posible. En [IT], C. Ingalls y H. Thomas introducen los módulos inclinantes soportados. Un módulo M es inclinante soportado si existe un idempotente $e \in A$ tal que M es un $A/\langle e\rangle$-módulo inclinante. Los autores mencionados prueban que estos módulos tienen buenas propiedades combinatorias relacionadas con la mutación en el caso de álgebras hereditarias. Más precisamente, ellos prueban que si M es un A-módulo inclinante casi completo básico entonces existen exactamente dos módulos inclinantes soportados básicos que tienen a M como sumando directo. Notemos que este resultado no es cierto para cualquier álgebra de dimensión finita.

Con la motivación de obtener un resultado análogo al de C. Ingalls y H. Thomas para álgebras arbitrarias, T. Adachi, O. Iyama e I. Reiten introducen en [AIR] los módulos τ-inclinantes. Diremos que un módulo M es τ-inclinante si $\mathrm{Hom}_A(M, \tau M) = 0$ y $|M| = |A|$, donde τM es el trasladado de Auslander-Reiten de M. Más generalmente, un módulo M es τ-inclinante soportado si existe un idempotente $e \in A$ tal que M es un $A/\langle e\rangle$-módulo τ-inclinante. De la fórmula de Auslander-Reiten, se sigue que la clase de módulos τ-inclinantes soportados contiene a la clase de módulos inclinantes soportados; y más aún estas dos clases coinciden si A es un álgebra hereditaria.

Uno de los resultados principales de [AIR], es que los módulos τ-inclinantes soportados tienen siempre definida una mutación. Es decir, si M es un A-módulo τ- inclinante casi completo, entonces existen exactamente dos módulos τ-inclinantes soportados que tienen a M como sumando directo.

Es frecuente dentro de la teoría de representaciones de álgebras considerar el siguiente problema: dadas A y R dos álgebras tales que la categoría $\mathrm{mod}\, A$ de A-módulos finitamente generados a derecha está inmersa en la categoría $\mathrm{mod}\, R$ de R-módulos finitamente generados a derecha, quiere saberse qué propiedades de $\mathrm{mod}\, R$ hereda $\mathrm{mod}\, A$. En esta tesis estudiamos ese problema en dos contextos.

En primer lugar, nos proponemos estudiar el comportamiento de los módulos τ- inclinantes en las álgebras extendidas por un punto por un módulo proyectivo. Es conocido que si A es la extensión de B por un B-módulo proyectivo, entonces la categoría $\mathrm{mod}\, A$ tiene una descomposición por $\mathrm{mod}\, B$ y $\mathrm{mod}\, k$ como sigue

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] \mathrm{mod}\,k \arrow[r, "i_*"] & \mathrm{mod}\,A \arrow[l, bend right, "-\otimes_A k"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_A(k,-)"] \arrow[r, "\mathrm{Hom}_A(e_BA,-)"] & \mathrm{mod}\,B \arrow[l, bend right, "-\otimes_B e_BA"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_B(Ae_B,-)"] \end{tikzcd}$$

donde e_B es la identidad en B e i_* es la inclusión. Tal descomposición recibe el nombre de *recollement* (ver la Definición 2.1.1). Denotando por $\mathcal{R}$ el funtor $\mathrm{Hom}_A(e_BA, -)$ y por $\mathcal{E}$ el funtor $\mathrm{Hom}_A(Ae_B, -)$, demostramos el siguiente teorema:

Teorema A. *Sea B una k-álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k. Sea $A = B[P_0]$ la extensión por un punto de B por un B-módulo proyectivo P_0 y sea $S = i^*k$. Entonces,*

(a) si M es un B-módulo τ-inclinante soportado básico, entonces $\mathcal{E}M \oplus S$ es un A-módulo τ-inclinante soportado.

(b) Si T es un A-módulo τ-inclinante soportado básico, entonces $\mathcal{R}T$ es un B- módulo τ-inclinante soportado.

Como una consecuencia directa del Teorema A, obtenemos que los funtores $\mathcal{R}$ y $\mathcal{E}$ inducen morfismos r de $\mathrm{s}\tau-\mathrm{tilt}\,A$ a $\mathrm{s}\tau-\mathrm{tilt}\,B$ y e de $\mathrm{s}\tau-\mathrm{tilt}\,B$ a $\mathrm{s}\tau-\mathrm{tilt}\,A$ tales que $re = \mathrm{id}_{\mathrm{s}\tau-\mathrm{tilt}\,B}$, donde $\mathrm{s}\tau-\mathrm{tilt}\,B$ ($\mathrm{s}\tau-\mathrm{tilt}\,A$, respectivamente) es el conjunto de clases de isomorfismos de B-módulos (A-módulos, respectivamente) τ-inclinantes soportados.

Por otra parte, en [AHT], I. Assem, D. Happel y S. Trepode probaron que existe una inmersión plena de carcajes entre los correspondientes carcajes de módulos inclinantes. Probamos que el mismo resultado vale en el contexto de módulos τ-inclinantes soportados. Denotamos por $Q(\mathrm{s}\tau-\mathrm{tilt}\,B)$ el carcaj de módulos τ-inclinantes soportados, ver la Definición 1.5.15. Más precisamente, probamos el Teorema B.

Teorema B. *Sean B una k-álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k y $A = B[P_0]$ la extensión por un punto de B por el B-módulo proyectivo P_0. El morfismo $e : s\tau - tilt B \to s\tau - tilt A$ induce una inmersión plena $e : Q(s\tau - tilt B) \to Q(s\tau - tilt A)$.*

Una pregunta natural es si los resultados arriba mencionados pueden generalizarse al caso de un álgebra extendida $A = B[X]$ de B por un B-módulo arbitrario X. Mostramos que no es posible y, más aún, probamos el siguiente resultado:

Teorema C. *Sean B un álgebra, X un B-módulo y $A = B[X]$ la extensión por un punto de B por el B-módulo X.*

a) Si $\mathcal{E}T \oplus S$ es un A-módulo τ-inclinante soportado para todo B-módulo inclinante soportado T, entonces X es un B-módulo proyectivo.

b) Si $\mathcal{R}T$ es un B-módulo τ-inclinante soportado para todo A-módulo inclinante soportado T, entonces X es un B-módulo proyectivo.

En un contexto más general, estudiamos los módulos τ-inclinantes sobre extensiones escindidas de álgebras por un ideal nilpotente, ver la Definición 3.1.1. Analizamos bajo qué condiciones los funtores de cambio de anillo preservan módulos τ-inclinantes. Más precisamente, probamos el siguiente resultado, que es una generalización de [AM] y [AZ].

Teorema D. *Sean R una extensión escindida de A por el ideal nilpotente M, T un A-módulo y T' un R-módulo.*

a) $T \otimes_A R$ es un R-módulo τ-rígido (τ-inclinante, respectivamente) si y sólo si T_A es un A-módulo τ-rígido (τ-inclinante, respectivamente) y $\operatorname{Hom}_A(T \otimes_A M, \tau_A T) = 0$.

b) Si T' es un R-módulo τ-inclinante y $\operatorname{Tor}_1^R(T', A) = 0$, entonces $T' \otimes_R A$ es un A-módulo τ-rígido (τ-inclinante, respectivamente).

Por otra parte, dimos una condición suficiente que permite asegurar cuando el funtor $- \otimes_A R$ preserva el orden inducido en $\mathrm{s}\tau - \operatorname{tilt} A$ y más aún, cuándo una flecha en $Q(\mathrm{s}\tau - \operatorname{tilt} A)$ induce una flecha en $Q(\mathrm{s}\tau - \operatorname{tilt} R)$.

Finalmente, estudiamos qué relación existe entre la dimensión global de un álgebra A y la dimensión global de una extensión escindida de A por un ideal nilpotente. Más precisamente, obtuvimos el siguiente resultado:

Teorema E. *Sean R una extensión escindida de A por el ideal nilpotente M. Si $\operatorname{gldim} R < \infty$ entonces $\operatorname{gldim} A < \infty$. Más aún,*

$$\operatorname{gldim} A \leq \operatorname{gldim} R \leq \operatorname{gldim} A + \operatorname{pd}_R A.$$

En la segunda parte del trabajo, nos concentramos en la dimensión global del álgebra de endomorfismos de un módulo τ-inclinante.

Dada un álgebra A de dimensión global finita y un A-módulo inclinante T es sabido que existe una estrecha relación entre la dimensión global de A y la dimensión global de $\mathrm{End}_A T$. Más precisamente, tenemos que $|\mathrm{gldim}\, A - \mathrm{gldim}\, \mathrm{End}_A T| \leq 1$. En particular, $\mathrm{gldim}\, \mathrm{End}_A T < \infty$.

En un contexto más general, Y. Miyashita estudió en [M], una generalización de los módulos inclinantes, que llamó módulos inclinantes de dimensión proyectiva finita, ver la Definición 4.1.2. En ese mismo trabajo, el autor probó que si T es un módulo inclinante de dimensión proyectiva finita, entonces $\mathrm{gldim}\, \mathrm{End}_A T < \infty$ y, más aún, $|\mathrm{gldim}\, A - \mathrm{gldim}\, \mathrm{End}_A T| \leq \mathrm{pd}_A T$.

A partir de estos trabajos, nos propusimos estudiar la dimensión global del álgebra de endomorfismos de un módulo τ-inclinante y compararlos con los resultados conocidos para módulos inclinantes. El primer resultado en esta dirección relaciona la dimensión global de A con la dimensión global del álgebra de endomorfismos. Más precisamente, probamos el siguiente resultado:

Teorema F. *Sean A un álgebra de dimensión global finita, T un A-módulo τ- inclinante y $B = \mathrm{End}_A T$. Entonces*

$$\mathrm{gldim}\, A \leq \mathrm{gldim}\, B + \mathrm{pd}_A\,(A/\mathrm{ann}\, T) + 1.$$

Encontramos, para $n \geq 3$, una familia $\{(A_n, T_n)\}$ de álgebras A_n de dimensión global n y A_n-módulos τ-inclinantes T_n tales que $\mathrm{gldim}\, \mathrm{End}_{A_n} T_n = \infty$. En otras palabras, la finitud de la dimensión global no se preserva por el proceso de τ-inclinación.

Sabiendo que la dimensión global del álgebra de endomorfismos de un módulo τ- inclinante puede ser infinita, buscamos condiciones que nos permitan asegurar su finitud. Dado que si T es un A- módulo τ-inclinante entonces T es un $A/\mathrm{ann}\, T$- módulo inclinante, con $\mathrm{ann}\, T = \{a \in A \mid Ta = 0\}$, estudiar cuando $\mathrm{gldim}\, B$ es finita es equivalente a estudiar cuando $\mathrm{gldim}\, A/\mathrm{ann}\, T$ es finita. Para ello, fue una herramienta esencial analizar los generadores del ideal $\mathrm{ann}\, T$.

El próximo resultado establece una condición suficiente que garantiza la finitud de $\mathrm{gldim}\, B$.

Teorema G. *Sean A un álgebra de dimensión global finita, T un A-módulo τ- inclinante y $B = \mathrm{End}_A\, T$, tal que A es una extensión escindida de $A/\mathrm{ann}\, T$. Se satisfacen las siguientes condiciones:*

a) $\mathrm{gldim}\, B \leq \mathrm{gldim}\, A + 1$.

b) $\mathrm{id}_A T - \mathrm{id}_A D(A/\mathrm{ann}\, T) \leq \mathrm{gldim}\, B$.

Para este caso encontramos que las álgebras monomiales cuádraticas satisfacen las hipótesis del Teorema G, y en consecuencia, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 1. *Sean $A = kQ/I$ un álgebra monomial cuadrática de dimensión global finita, T un A-módulo τ-inclinante y $B = \mathrm{End}_A T$. Se satisfacen las siguientes condiciones:*

a) $\mathrm{gldim}\, B \leq \mathrm{gldim}\, A + 1$.

b) $\mathrm{id}_A T - \mathrm{id}_A D(A/\mathrm{ann}\, T) \leq \mathrm{gldim}\, B$.

Como la familia de álgebras A_n que encontramos es para $n \geq 3$, resulta natural analizar si partiendo de un álgebra A de dimensión global dos, la dimensión global del álgebra de endomorfismos de un A-módulo τ-inclinante siempre es finita. Abordamos este problema para dos familias distintas de álgebras: las álgebras monomiales y las álgebras biseriales especiales, probando el siguiente teorema:

Teorema H. *Sea $A = kQ/I$ un álgebra monomial o biserial especial de dimensión global 2, T un A-módulo τ-inclinante y $B = \mathrm{End}_A T$. Entonces $\mathrm{gldim}\, B < \infty$.*

Si bien probamos este resultado para estas familias particulares de álgebras, creemos que el enunciado del Teorema H vale en general para cualquier álgebra de dimensión global dos.

Finalmente, dado que sabemos que si partimos de un álgebra monomial de dimensión global dos entonces el álgebra de endomorfismos de cualquier módulo τ-inclinante tiene dimensión global finita, nos preguntamos si es posible obtener una cota explícita para estos casos. Mostramos que si suponemos que la dimensión global está acotada por un cierto número natural m, entonces existen un álgebra y un módulo τ-inclinante sobre dicha álgebra tales que el álgebra de endomorfismos tiene dimensión global más grande que m.

A continuación, indicamos la organización del presente trabajo:

El primer capítulo está destinado a introducir algunas nociones básicas y resultados que utilizaremos a lo largo de toda esta tesis.

En el segundo capítulo, recordamos la definición de álgebra extendida por un punto y presentamos algunos resultados que serán fundamentales para el desarrollo de esta tesis. Nos concentramos, en particular, en álgebras extendidas por un módulo proyectivo. Mostramos que los funtores $\mathcal{R}$ y $\mathcal{E}$ preservan módulos τ-inclinantes soportados, probando el Teorema A. Además, estudiamos los morfismos inducidos por estos funtores, probando que preservan el orden y, a partir de esto, demostramos que existe una inmersión plena de carcajes dada por el Teorema B. Finalmente, mostramos que estas construcciones son solo posibles cuando se extiende por un módulo proyectivo, probando el Teorema C.

En el tercer capítulo, presentamos la noción de extensión escindida de un álgebra por un ideal nilpotente, así como también de los funtores cambio de anillo correspondientes, recordando sus propiedades fundamentales. Estudiamos condiciones necesarias y suficientes para que los funtores cambio de anillo preserven módulos τ-inclinantes, probando el Teorema D. Más aún, analizamos qué relaciones existen entre la dimensión global de un álgebra y la dimensión global de una extensión escindida de esta por un ideal nilpotente, probando el Teorema E.

En el cuarto capítulo, nos abocamos a estudiar la dimensión global del álgebra de endomorfismos de un módulo τ-inclinante. Probamos el Teorema F, dando una cota para la dimensión global de A en función de la dimensión global del álgebra de endomorfismos de un módulo τ-inclinante, y exhibimos una familia de álgebras para las cuales existen módulos τ-inclinantes tales que su álgebra de endomorfismos tiene dimensión global infinita. Como una aplicación del Teorema E, probamos el Teorema G mostrando que, bajo ciertas hipótesis, existe una cota para la dimensión global del álgebra de endomorfismos de un módulo τ-inclinante. Analizamos los generadores del anulador de un módulo τ-inclinante. Valiéndonos de ésto, probamos que las álgebras monomiales cuadráticas se enmarcan en la hipótesis del Teorema G y, en consecuencia, obtenemos el Corolario 1.

Por último, en el quinto capítulo nos concentramos en estudiar el álgebra de endomorfismos de un módulo τ-inclinante sobre un álgebra de dimensión global 2. Analizamos dos familias de álgebras: las álgebras monomiales y las álgebras biseriales especiales. Recordamos algunos resultados sobre cómo calcular la dimensión global de álgebras monomiales, así como también la definición álgebras biseriales especiales y algunas propiedades que nos serán de utilidad. Probamos el Teorema H. Mostramos que no es posible encontrar una cota explícita para la dimensión global del álgebra de endomorfismos de un módulo τ-inclinante sobre un álgebra monomial.

Capítulo 1

Preliminares

Comenzaremos recordando algunas nociones y resultados básicos, que serán muy utilizados en esta tesis. Un tratamiento más completo de estos temas puede encontrarse en [ASS, ARS, R].

En todo este trabajo, consideraremos un cuerpo algebraicamente cerrado k y A una k-álgebra de dimensión finita sobre k. Recordemos que un A-módulo P es **proyectivo** si y sólo si es sumando directo de un módulo libre. Una k-álgebra A es **básica** si en la descomposición $A = \bigoplus e_i A$ de A como suma de A-módulos proyectivos indescomponibles, se tiene que $e_i A \cong e_j A$ sólo si $i = j$. Diremos que el álgebra A es **conexa** si no se puede escribir como suma directa de dos álgebras.

Dada A un álgebra, notaremos por $\operatorname{mod} A$ a la categoría de los A-módulos a derecha finitamente generados y por $\operatorname{ind} A$ a la subcategoría plena de $\operatorname{mod} A$ cuyos objetos forman un conjunto elegido de representantes de las clases de isomorfismos de A-módulos indescomponibles. Debido a los teoremas de Morita, para estudiar la categoría $\operatorname{mod} A$ es posible suponer, sin pérdida de generalidad, que A es básica. En este trabajo, todas las álgebras serán básicas, conexas y de dimensión finita sobre k.

Un álgebra B es una **subcategoría plena** de A si existe un idempotente e de A tal que $B = eAe$. Más aún, B se dice **convexa** en A si cada vez que existe una sucesión $e_i = e_{i_0}, e_{i_1}, \cdots e_{i_t} = e_j$ de idempotentes ortogonales primitivos tales que $e_{i_{l+1}} A e_{i_l} \neq 0$ para $0 \leq l < t$, y e_{i_0}, $e_{i_t} \in B$ entonces $e_{i_l} \in B$ para todo $l \in \{0, \ldots, t\}$.

Dada una subcategoría $\mathcal{C}$ de $\operatorname{mod} A$, definimos las subcategorías plenas de $\operatorname{mod} A$

$$\mathcal{C}^{\perp} = \{X \in \operatorname{mod} A \,|\, \operatorname{Hom}_A(\mathcal{C}, X) = 0\}$$

y

$$\mathcal{C}^{\perp_1} = \{X \in \operatorname{mod} A \,|\, \operatorname{Ext}^1_A(\mathcal{C}, X) = 0\}.$$

De manera similar se definen las subcategorías

$$^{\perp}\mathcal{C} = \{X \in \operatorname{mod} A \,|\, \operatorname{Hom}_A(X, \mathcal{C}) = 0\}$$

y

$$^{\perp_1}\mathcal{C} = \{X \in \operatorname{mod} A \,|\, \operatorname{Ext}^1_A(X, \mathcal{C}) = 0\}.$$

En particular, si X es un A-módulo, se definen dos subcategorías plenas de $\operatorname{mod} A$ relacionadas con X:

$$X^{\perp} = (\operatorname{add} X)^{\perp}$$

y

$$^{\perp}X =^{\perp} (\operatorname{add} X)$$

donde $\operatorname{add} X$ denota la subcategoría plena de $\operatorname{mod} A$ cuyos objetos son las sumas directas de sumandos directos de X. Por $\operatorname{Fac} X$ entenderemos la subcategoría plena de $\operatorname{mod} A$ cuyos objetos son cocientes de sumas directas de copias de X.

Dado un A-módulo X, notaremos por $|X|$ el número de sumandos directos indescomponibles de X no isomorfos dos a dos. Diremos que X es **básico** si los sumandos directos indescomponibles de X no son isomorfos dos a dos.

1.1. Carcaj asociado a un álgebra y álgebras de caminos

El teorema de Gabriel establece que estudiar k-álgebras de dimensión finita, básicas y conexas, es equivalente a estudiar cocientes de álgebras de caminos asociados a carcajes por ideales admisibles. En esta sección recordaremos estos resultados.

Definición 1.1.1. Un **carcaj** $Q = (Q_0, Q_1)$ es un grafo orientado. Más precisamente, un carcaj está dado por dos conjuntos Q_0 y Q_1, y un par de funciones $s, e : Q_1 \to Q_0$. Los elementos de Q_0 son los **vértices** de Q y los de Q_1 son las **flechas** entre vértices de Q. Dada una flecha $\alpha : i \to j$, $s(\alpha) = i$ es el vértice inicial y $e(\alpha) = j$ es el vértice final de α.

Un carcaj se dirá **finito**, si los conjuntos Q_0 y Q_1 son finitos. El grafo subyacente $\overline{Q}$ de un carcaj Q, se obtiene a partir de Q sin tener en cuenta la orientación de las flechas. El carcaj Q se dice **conexo** si $\overline{Q}$ es un grafo conexo.

Un **camino** en un carcaj Q es una sucesión ordenada de flechas $\gamma = \alpha_1 ... \alpha_n$ tal que $e(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ para $1 \leq i < n$, y también el símbolo e_i para $i \in Q_0$. A los caminos e_i los llamamos **caminos triviales** y definimos $s(e_i) = e(e_i) = i$. Para un camino no trivial $\gamma = \alpha_1 ... \alpha_n$, definimos $s(\gamma) = s(\alpha_1)$ y $e(\gamma) = e(\alpha_n)$.

Un camino γ de **longitud** $l \geq 1$ con origen a y final b es una sucesión de l flechas $\alpha_1, ..., \alpha_l$ tales que $s(\alpha_1) = a$, $e(\alpha_l) = b$ y $s(\alpha_{i+1}) = e(\alpha_i)$, con $1 \leq i \leq l - 1$. Si e_i es un camino trivial, entonces la longitud de e_i la definimos igual a 0.

Definición 1.1.2. Diremos que un camino no trivial $\gamma = \alpha_1 ... \alpha_n$ en un carcaj Q es un **ciclo orientado** si $s(\gamma) = e(\gamma)$.

Para una flecha α, denotamos por α^{-1} su inversa formal. Un **paseo** en Q de x a y es una composición formal $\alpha_1^{\epsilon_1} \dots \alpha_n^{\epsilon_n}$ de x a y donde $\alpha_i \in Q_1$, $\epsilon_r \in \{-1, 1\}$ para todo $1 \leq r \leq n$ y $s(\alpha_1^{\epsilon_1}) = x$, $e(\alpha_n^{\epsilon_n}) = y$, $e(\alpha_r^{\epsilon_r}) = s(\alpha_{r+1}^{\epsilon_{r+1}})$ para todo $r = 1, \dots, n-1$. Un paseo ρ se dice **cerrado** si $s(\rho) = e(\rho)$. Un paseo w se dice **reducido** si es un camino trivial o si $w = c_1 \dots c_n$ tal que $c_{i+1} \neq c_i^{-1}$ para $1 \leq i < n$.

Un carcaj Q se dice de tipo **árbol** si no contiene paseos reducidos cerrados.

Sea Q un carcaj no necesariamente finito. Un subcarcaj Q' de Q es **pleno**, si dados dos vértices $i, j \in Q'$ se tiene que toda flecha $\alpha : i \to j$ en Q es también una flecha de Q'. Un subcarcaj Q' de Q se dice **convexo**, si es pleno y satisface que si $i, j \in Q'_0$ y existe un camino en Q de i a j que pasa por un vértice x entonces $x \in Q'_0$.

Sean Q un carcaj finito. Denotaremos por kQ el k-espacio vectorial cuya base es el conjunto de todos los caminos del carcaj Q (incluso los triviales).

En kQ, daremos una estructura de k-álgebra definiendo la siguiente multiplicación: dados dos caminos $\gamma_1 = \alpha_1 ... \alpha_n$ y $\gamma_2 = \beta_1 ... \beta_m$, donde α_i y β_i son flechas se tiene que

$$\gamma_1 . \gamma_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } e(\gamma_1) \neq s(\gamma_2), \\ \alpha_1 ... \alpha_n \beta_1 ... \beta_m & \text{si } e(\gamma_1) = s(\gamma_2). \end{cases}$$

y en el caso de los caminos triviales definimos

$$\gamma_1 . \gamma_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma_1 = e_i,\ \gamma_2 = e_j \text{ con } i \neq j, \\ \gamma_2 & \text{si } \gamma_1 = e_i,\ \gamma_2 = \beta_1 ... \beta_m, \text{ con } s(\gamma_2) = i, \\ 0 & \text{si } \gamma_1 = e_i,\ \gamma_2 = \beta_1 ... \beta_m, \text{ con } s(\gamma_2) \neq i, \\ \gamma_1 & \text{si } \gamma_1 = \alpha_1 ... \alpha_n, \gamma_2 = e_i \text{ con } e(\gamma_1) = i. \\ 0 & \text{si } \gamma_1 = \alpha_1 ... \alpha_n, \gamma_2 = e_i \text{ con } e(\gamma_1) \neq i. \end{cases}$$

Este producto se extiende por linealidad a todo kQ, obteniéndose una $k-$álgebra cuya unidad es $\sum_{i\in Q_0} e_i$. Es conocido que si Q es conexo entonces kQ es un álgebra conexa, y que es de dimensión finita si y sólo si Q no tiene ciclos orientados.

Mencionaremos el siguiente resultado.

Proposición 1.1.3. *El conjunto $\{e_i \mid i \in Q_0\}$ de todos los caminos triviales, es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de kQ.*

Sea Q un carcaj finito y conexo. Un ideal bilátero I de kQ se dice **admisible** si existe $m \geq 2$ tal que $r^m \subseteq I \subseteq r^2$, donde r es el ideal de kQ generado por las flechas.

Dados dos vértices x e y en un carcaj Q, una **relación** σ en un carcaj Q, de x a y, es un elemento de kQ de la forma $\sigma = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i$ donde, para cada i, λ_i es un escalar no nulo y w_i es un camino de x a y en Q de longitud mayor o igual a 2. Si $m = 1$, la relación se dice **relación cero** o **relación monomial**. Una relación monomial ω se dice **cuadrática** si ω es un camino de longitud 2.

Si Q es un carcaj finito, existe un conjunto finito de relaciones $\rho = \{\sigma_t\}_{t\in T}$ que generan el ideal admisible I. El par (Q, I) se denomina **carcaj con relaciones** y el álgebra cociente asociada kQ/I es conocida como el **álgebra de caminos con relaciones** asociada al par (Q, I).

Dado un carcaj Q, hemos definido su álgebra asociada y los cocientes de esta por ideales admisibles. Recíprocamente, dada una k-álgebra A básica, conexa y de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k, definiremos a continuación **el carcaj ordinario** de A que denotaremos por Q_A.

Dado que, estamos considerando una k-álgebra de dimensión finita, existe un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos $\{e_1, ..., e_n\}$. Más aún, $A = e_1A \oplus ... \oplus e_nA$ es una descomposición de A como suma de A-módulos indescomponibles, donde cada e_iA es proyectivo y e_iA no es isomorfo a e_jA si $i \neq j$, pues A es básica.

El carcaj ordinario Q_A se define como sigue: los vértices de Q_A son tantos como los idempotentes del sistema, o sea n. A cada vértice i se le asocia el idempotente e_i, y el número de flechas que comienzan en el vértice i y terminan en el vértice j es:

$$\dim_k[\, e_i \,(\operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A)\, e_j \,]$$

donde la estructura del $A-A-$bimódulo del cociente $\operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A$ es la natural.

Es sabido que dada una k-álgebra A de dimensión finita, básica y conexa sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado, existe un morfismo de k-álgebras $\varphi : kQ_A \to A$ que es sobreyectivo, y cuyo núcleo I es un ideal **admisible**.

P. Gabriel probó el siguiente resultado, que muestra la importancia de la noción de álgebra de caminos.

Teorema 1.1.4. *Toda álgebra A de dimensión finita, básica y conexa sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado, es isomorfa a un cociente de un álgebra de caminos sobre un ideal admisible, es decir, $A \cong kQ/I$.*

En el caso anterior, esto es, cuando $A = kQ/I$ con I un ideal admisible de kQ, se dice que el par (Q, I) es una **presentación** de A.

Una relación $\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i \in I$ se dice **minimal** si $m \geq 2$ y, para todo subconjunto propio no vacío $J \subset \{1, 2, \ldots, m\}$, se tiene que $\sum_{j \in J} \lambda_j w_j \notin I$.

Recordemos que un álgebra $A = kQ/I$ se dice **monomial** si el ideal I puede generarse por relaciones monomiales.

1.2. Representaciones de carcajes con relaciones

Definición 1.2.1. Sea Q un carcaj finito. Una **representación k-lineal**, o más brevemente, una **representación** M de Q, se define como sigue:

1. a cada vértice $a \in Q_0$ se le asocia un k-espacio vectorial M_a.
2. Dados a y b en Q_0, a cada flecha $\alpha : a \to b$ en Q_1 se le asocia un morfismo k-lineal $\phi_\alpha : M_a \to M_b$.

Una tal representación se denota por $M = (M_a, \phi_\alpha)_{a \in Q_0, \alpha \in Q_1}$, o simplemente $M = (M_a, \phi_\alpha)$. Una representación $M = (M_a, \phi_\alpha)$ se dice de **dimensión finita** si cada espacio vectorial M_a es de dimensión finita.

Sean $M = (M_a, \phi_\alpha)$ y $M' = (M'_a, \phi'_\alpha)$ dos representaciones de Q. Un **morfismo de representaciones** $f : M \to M'$ es una familia $f = (f_a)_{a \in Q_0}$ de morfismos k-lineales $(f_a : M_a \to M'_a)_{a \in Q_0}$ que son compatibles con la estructura de los morfismos ϕ_α, esto es, para cada flecha $\alpha : a \to b$, se tiene que $\phi'_\alpha f_a = f_b \phi_\alpha$, es decir, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M_a \arrow[r, "\phi_\alpha"] \arrow[d, "f_a"] & M_b \arrow[d, "f_b"] \\ M'_a \arrow[r, "\phi'_\alpha"] & M'_b \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Dados dos morfismos de representaciones de Q, $f : M \to M'$ y $g : M' \to M''$, con $f = (f_a)_{a\in Q_0}$ y $g = (g_a)_{a\in Q_0}$, se define la **composición** $gf = (g_a f_a)_{a\in Q_0}$. No es difícil ver que, así definido, gf es un morfismo de M en M''.

Así, se define una categoría $\mathrm{Rep}_k(Q)$ de representaciones k-lineales de Q. Denotaremos por $\mathrm{rep}_k(Q)$ a la subcategoría plena de $\mathrm{Rep}_k(Q)$ de representaciones de dimensión finita de Q.

Definición 1.2.2. Sea Q un carcaj finito y sea $M = (M_a, \phi_\alpha)$ una representación de Q. Para cada camino no trivial $w = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_l$ de a a b en Q, con $a, b \in Q_0$, se define la **evaluación** de M en el camino w como el morfismo k-lineal de M_a en M_b definido por $\phi_w = \phi_{\alpha_l}\phi_{\alpha_{l-1}} \dots \phi_{\alpha_2}\phi_{\alpha_1}$.

La definición de evaluación se puede extender a combinaciones k-lineales de caminos con igual inicio y final, es decir, si $\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i$ es una combinación lineal, donde, para cada i, $\lambda_i \in k$ y w_i es un camino en Q, entonces ϕ_ρ se define como $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \phi_{w_i}$.

Vamos a recordar ahora la definición de representación de un carcaj con relaciones. Sean Q un carcaj finito e I un ideal admisible de kQ. Una representación $M = (M_a, \phi_\alpha)$ de Q se dice que satisface las relaciones en I, si se tiene que $\phi_\rho = 0$ para cada relación $\rho \in I$. Denotaremos por $\mathrm{rep}_k(Q, I)$ a la subcategoría plena de $\mathrm{rep}_k(Q)$ de representaciones de Q que satisfacen las relaciones de I.

Teorema 1.2.3. *[ASS, Capítulo III, Corolario 1.7] Sea $A = kQ_A/I_A$, donde Q_A es un carcaj finito, conexo e I_A es un ideal admisible de kQ_A. Existe una equivalencia de categorías k-lineal*

$$F : \mathrm{mod}\, A \to \mathrm{rep}_k(Q_A, I_A).$$

Observación 1.2.4. Dada una representación $M = (M_i, \phi_\alpha)_{i\in Q_0, \alpha\in Q_1}$ de un carcaj con relaciones (Q, I) se puede dotar a M de una acción de $kQ/I-$módulo. Para definir esta estructura sobre M, se define la multiplicación de un camino ω, representante de una clase en kQ/I, por un elemento $m = (m_i)_{i\in Q_0}$:

. si $\omega = e_i$, entonces $e_i m = (\delta_{ij} m_j)$,

. si $\omega = \alpha_1 \dots \alpha_r$ es un camino tal que $s(\alpha_1) = i$ y $e(\alpha_r) = j$, entonces $\omega m = (n_l)$ donde $n_l = \delta_{jl}(\phi_{\alpha_r} \ \dots \phi_{\alpha_1})(\delta_{ik} m_k)$.

donde por δ_{ab} denotamos a la delta de Kronecker, pensada como aplicación lineal de manera que $\delta_{aa} = Id$ y $\delta_{ab} = 0$ si $a \neq b$. Esta operación est́bien definida y se extiende linealmente.

Así, las representaciones de un carcaj con relaciones corresponden a módulos sobre el cociente del álgebra de caminos asociada a dicho carcaj. Obtenemos así descripciones concretas de los módulos en términos de espacios vectoriales junto con transformaciones lineales. Esto resulta muy práctico al momento de describir los módulos simples y proyectivos, así como también ciertos módulos especiales.

Dado M un A-módulo, su **radical de Jacobson** $\operatorname{rad} M$ de M es la intersección de todos los submódulos maximales de M. A cada módulo no nulo $M \in \operatorname{mod} A$ se le asignan dos A-módulos semisimples; por un lado tenemos el llamado **top** de M

$$\operatorname{top} M = M/\operatorname{rad} M$$

y, por otro lado, tenemos el **zócalo** de M

$$\operatorname{soc} M = \sum_{S \in S_M} S$$

donde S_M es el conjunto de todos los A-submódulos simples de M. El siguiente resultado de [ASS] nos da una descripción concreta de las representaciones de dichos módulos.

Lema 1.2.5. *[ASS, Capítulo III, Lema 2.2] Sea $M = (M_a, \phi_\alpha)$ una representación de (Q, I).*

1. $\operatorname{soc} M = N$*, donde* $N = (N_a, \psi_\alpha)$ *con* $N_a = M_a$ *si a es un pozo, mientras que* $N_a = \bigcap_{\alpha: a \to b} \operatorname{Ker}(\phi_\alpha : M_a \to M_b)$ *si a no es un pozo, y* $\psi_\alpha = \phi|_{N_a}$ *para cada flecha α comenzando en a.*

2. $\operatorname{rad} M = J$*, donde* $J = (J_a, \gamma_\alpha)$*, con* $J_a = \sum_{\alpha: b \to a} \operatorname{Im}(\phi_\alpha : M_b \to M_a)$ *y* $\gamma_\alpha = \phi_\alpha|_{J_a}$ *para toda flecha α comenzando en a.*

3. $\operatorname{top} M = L$*, donde* $L = (L_a, \varphi_\alpha)$ *con* $L_a = M_a$ *si a es una fuente, mientras que* $L_a = \sum_{\alpha: b \to a} \operatorname{Coker}(\phi_\alpha : M_b \to M_a)$ *si a no es una fuente, y* $\varphi_\alpha = 0$ *para toda flecha α comenzando en a.*

Sea $a \in Q_0$, denotaremos por $S(a)$ la representación $(S(a)_b, \varphi_\alpha)$ de Q definida como sigue:

$$S(a)_b = \begin{cases} 0 & \text{si } b \neq a \\ k & \text{si } b = a \end{cases}$$

$$\varphi_\alpha = 0 \quad \text{para toda} \quad \alpha \in Q_1.$$

Es sabido que, para cada $a \in Q_0$, $S(a)$, visto como A-módulo, es isomorfo al top del A-módulo proyectivo indescomponible e_aA, y en consecuencia un A-módulo simple. Más aún, el conjunto $\{S(a) \mid a \in Q_0\}$ es un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismos de A-módulos simples. A continuación, recordaremos como construir la representación de los módulos proyectivos.

Lema 1.2.6. *[ASS, Capítulo III, Lema 2.1] Sea (Q_A, I_A) un carcaj con relaciones, $A = kQ_A/I_A$, y $P(a) = e_aA$, con $a \in Q_0$. Si $P(a) = (P(a)_b, \varphi_\alpha)$, entonces $P(a)_b$ es el k-espacio vectorial con base el conjunto de todos los caminos $\overline{\omega} = \omega + I_A$, con ω un camino de a a b y, para cada flecha $\beta : b \to c$, el morfismo k-lineal $\varphi_\beta : P(a)_b \to P(a)_c$ está dado por la multiplicación a derecha por $\overline{\beta} = \beta + I_A$.*

De manera dual, se puede definir la representación del módulo inyectivo $I(a)$ correspondiente al vértice a.

Finalmente, dado un morfismo de representaciones $f : (M_i, \varphi_\alpha) \to (M'_i, \phi_\alpha)$ el **núcleo** de f está dado por $\operatorname{Ker} f = (L_i, \psi_\alpha)$ donde $L_i = \operatorname{Ker} f_i$ y ψ_α es la restricción φ_α a $L_{s(\alpha)}$.

1.3. Dimensiones homológicas

Recordemos que una sucesión

$$\cdots \to M_{i+1} \overset{f_{i+1}}{\to} M_i \overset{f_i}{\to} M_{i-1} \to \dots$$

es un **complejo** si $f_i f_{i+1} = 0$.

Una **resolución proyectiva** de un A-módulo M es un complejo

$$P_\bullet : \quad \dots P_m \overset{h_m}{\to} P_{m-1} \to \dots P_1 \overset{h_1}{\to} P_0 \to 0 \tag{1.1}$$

de A-módulos proyectivos junto con un epimorfismo $h_0 : P_0 \to M$ tales que la sucesión

$$\dots P_m \overset{h_m}{\to} P_{m-1} \to \dots P_1 \overset{h_1}{\to} P_0 \overset{h_0}{\to} M \to 0$$

es exacta.

Recordemos que, dados $M, N \in \operatorname{mod} A$, un epimorfismo $f : M \to N$ se dice **esencial** si para cada morfismo $g : X \to M$ tal que fg es un epimorfismo se tiene que g es un epimorfismo.

Definición 1.3.1. Un epimorfismo $f : P \to M$ en $\operatorname{mod} A$ es una **cubierta proyectiva** de $M \in \operatorname{mod} A$ si P es proyectivo y f es esencial.

Se puede probar que si $h : P \to M$ es una cubierta proyectiva de M en $\operatorname{mod} A$ y $f : P' \to M$ es un epimorfismo con P un A-módulo proyectivo, entonces existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & 0 & \\ P \arrow[r, "h"] & M \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\ & P' \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, "g"] & \end{tikzcd}$$

con g un epimorfismo. En particular, P es un sumando directo de P'. Como una consecuencia de este hecho, se tiene que las cubiertas proyectivas son únicas salvo isomorfismos. Notaremos por $P(M)$ a la cubierta proyectiva de M.

El próximo resultado relaciona la cubierta proyectiva de M con el morfismo inducido por el $\operatorname{top} M$.

Proposición 1.3.2. *[ASS, Capítulo 1, Lema 5.6] Un epimorfismo $f : P \to M$ con P proyectivo es una cubierta proyectiva de M si y sólo si el morfismo inducido $\operatorname{top} P \to \operatorname{top} M$ es un isomorfismo.*

La **sizigia** de un módulo M, denotada por $\Omega\, M$, es el núcleo de la cubierta proyectiva $P(M) \to M$. De manera recursiva, se define $\Omega^{n+1} M = \Omega\,(\Omega^n M)$. El siguiente lema, conocido como lema de decaimiento, da una relación funtorial entre Ω y Tor.

Lema 1.3.3. *[A, Capítulo IX, Lema 4.3] Sean M y N dos A-módulos y sea $n \geq 2$. Existen isomorfismos naturales:*

$$\operatorname{Tor}^A_{n+1}(M, N) \cong \operatorname{Tor}^A_n(\Omega(M), N) \cong \ldots \cong \operatorname{Tor}^A_1(\Omega^n(M), N)$$

Definición 1.3.4. Sea $M \in \operatorname{mod} A$.

a) Una sucesión exacta

$$P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{g} M \to 0$$

en $\operatorname{mod} A$ es una **presentación proyectiva minimal de** M si los morfismos $g : P_0 \to M$ y $f : P_1 \to \operatorname{Ker} g$ son cubiertas proyectivas.

a) Una sucesión exacta

$$P_\bullet : \quad \dots P_m \stackrel{h_m}{\to} P_{m-1} \to \dots P_1 \stackrel{h_1}{\to} P_0 \stackrel{h_0}{\to} M \to 0$$

en $\operatorname{mod} A$ es una **resolución proyectiva minimal de** M si para todo $j \geq 1$ los morfismos $h_j : P_j \to \operatorname{Im} h_j$ y $P_0 \stackrel{h_0}{\to} M$ son cubiertas proyectivas.

Sea M un A-módulo. Se llama **dimensión proyectiva** de M, que notaremos por $\mathrm{pd}_A M$, al menor número natural n tal que existe una resolución proyectiva de M de la forma:

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0 \tag{1.2}$$

Si tal resolución no existe, diremos que M tiene dimensión proyectiva infinita, y notaremos $\mathrm{pd}_A M = \infty$. Se puede ver que la dimensión proyectiva de un módulo M viene dada por una resolución proyectiva minimal de M.

Dualmente, se define la **dimensión inyectiva** de M, $\mathrm{id}_A M$.

El siguiente resultado, lista propiedades conocidas referidas a la dimensión proyectiva. Estos resultados pueden encontrarse en [ASS].

Proposición 1.3.5. *[ASS, Apéndice 4, Proposición 4.7] Sea* $0 \to L \to M \to N \to 0$ *una sucesión exacta corta en* $\operatorname{mod} A$*.*

a) $\mathrm{pd}_A N \leq \text{máx}(\mathrm{pd}_A M, 1 + \mathrm{pd}_A L)$*. Vale la igualdad si* $\mathrm{pd}_A M \neq \mathrm{pd}_A L$*.*

b) $\mathrm{pd}_A L \leq \text{máx}(\mathrm{pd}_A M, -1 + \mathrm{pd}_A N)$*. Vale la igualdad si* $\mathrm{pd}_A M \neq \mathrm{pd}_A N$*.*

c) $\mathrm{pd}_A M \leq \text{máx}(\mathrm{pd}_A L, \mathrm{pd}_A N)$*. Vale la igualdad si* $\mathrm{pd}_A N \neq 1 + \mathrm{pd}_A L$*.*

Como una consecuencia de la proposición anterior, se tiene el siguiente resultado.

Lema 1.3.6. *Sea* $0 \to L \to M \to N \to 0$ *una sucesión exacta corta en* $\operatorname{mod} A$*.*

1. Si $\mathrm{pd}_A L \leq m$ *y* $\mathrm{pd}_A M \leq m$*, entonces* $\mathrm{pd}_A N \leq m$*.*

2. Si $\mathrm{pd}_A M \leq m$ *y* $\mathrm{pd}_A N \leq m$*, entonces* $\mathrm{pd}_A L \leq m$*.*

Para un álgebra A, se define la **dimensión global** de A como el supremo de las dimensiones proyectivas de todos los A-módulos, es decir:

$$\operatorname{gldim} A = \sup \{\operatorname{dp}_A M \ \mid \ M \text{ es un } A-\text{módulo}\}.$$

M. Auslander probó que esta definición es equivalente a

$$\operatorname{gldim} A = \text{máx} \{\operatorname{dp}_A S \ \mid \ S \text{ es un } A-\text{módulo simple}\}$$

ver por ejemplo [ARS].

1.4. Teoría de Auslander-Reiten

Una propiedad de las k-álgebras es la existencia de una dualidad, esto es, de un funtor contravariante, pleno, fiel y denso $\mathrm{D} : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} A^{op}$, donde A^{op} designa el álgebra opuesta de A.

Si A es un álgebra sobre un cuerpo k entonces la **dualidad** $D : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} A^{op}$ está definida por $\mathrm{D} = \operatorname{Hom}_k(-, k)$.

Recordemos la noción de traspuesta de un A-módulo M.

Sea A un álgebra sobre un cuerpo k. Consideremos el funtor $\operatorname{Hom}_A(-, A) : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} A^{op}$. Dado un módulo a derecha $M \in \operatorname{mod} A$ entonces $M^* = \operatorname{Hom}_A(M, A)$ es un módulo a izquierda con la operación

$$(\lambda f)(m) = f(m\lambda)$$

para todo $\lambda \in A$, f en $\operatorname{Hom}_A(M, A)$ y $m \in M$.

Observemos además que si P es un A-módulo proyectivo a derecha, entonces $P^* = \operatorname{Hom}_A(P, A)$ es un módulo proyectivo a izquierda.

Consideremos $M \in \operatorname{mod} A$ y $P_1 \to P_0 \to M \to 0$ una presentación proyectiva minimal de M. Aplicando $\operatorname{Hom}_A(-, A)$ a esta sucesión obtenemos la sucesión exacta

$$P_0^* \xrightarrow{f^*} P_1^* \to \operatorname{Coker} f^* \to 0.$$

Definimos **la traspuesta** de M como $\operatorname{Tr} M = \operatorname{Coker} f^*$. Como las presentaciones proyectivas minimales son únicas a menos de isomorfismos, entonces $\operatorname{Tr} M$ es un módulo a izquierda unívocamente definido a menos de isomorfismos.

Valen las siguientes propiedades de la traspuesta:

(a) $\mathrm{Tr}(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Tr}(M_i)$ donde $M_i \in \mathrm{mod}A$, para $i = 1, ..., n$.

(b) $\mathrm{Tr}(M) = 0$ si y sólo si M es un módulo proyectivo.

(c) Si M y N están en mod$A$ y no tienen sumandos proyectivos no nulos, entonces $\mathrm{Tr}(M) \simeq \mathrm{Tr}(N)$ si y sólo si $M \simeq N$.

Proposición 1.4.1. *[ARS, Capítulo IV, Proposición 4.2] Sean X un A-módulo y $P_1 \to P_0 \to X \to 0$ una presentación proyectiva minimal para X. Para cada $Z \in \mathrm{mod}\, A$, existe una sucesión exacta*

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(X, Z) \to \mathrm{Hom}_A(P_0, Z) \to \mathrm{Hom}_A(P_1, Z) \to \mathrm{Tr}\,(X) \otimes_A Z \to 0$$

Sea $\underline{\mathrm{mod}}A$ la categoría cuyos objetos son los A-módulos y el conjunto de morfismos entre dos A-módulos M y N es:

$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(M, N) = \mathrm{Hom}_A(M, N)/P(M, N)$$

donde $P(M, N)$ es el subgrupo de $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ de los morfismos $f : M \to N$ que se factorizan a través de un módulo proyectivo, es decir, los morfismos $f : M \to N$ tales que existen morfismos $g : M \to P$ y $h : P \to N$, con P un módulo proyectivo, tales que $hg = f$. Entonces Tr: $\underline{\mathrm{mod}}A \to \underline{\mathrm{mod}}A^{op}$ es un funtor. Más aún, Tr es una dualidad cuya inversa que denotaremos también por Tr, es $\mathrm{Tr} : \underline{\mathrm{mod}}\, A^{op} \to \underline{\mathrm{mod}}\, A$

En forma similar tenemos la categoría $\overline{\mathrm{mod}}A$ cuyos objetos son los A-módulos y el conjunto de morfismos entre dos A-módulos M y N es

$$\overline{\mathrm{Hom}}_A(M, N) = \mathrm{Hom}_A(M, N)/I(M, N)$$

donde $I(M, N)$ es el subgrupo de $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ de los morfismos $f : M \to N$ que se factorizan a través de un módulo inyectivo.

La dualidad $D : \mathrm{mod}\, A \to \mathrm{mod}, A^{op}$ induce una dualidad $\mathrm{D} : \underline{\mathrm{mod}}\, A \to \overline{\mathrm{mod}}A^{op}$ y la composición $\mathrm{DTr} : \underline{\mathrm{mod}}A \to \overline{\mathrm{mod}}A$ es una equivalencia de categorías cuya inversa es $\mathrm{TrD} : \overline{\mathrm{mod}}A \to \underline{\mathrm{mod}}A$.

Esta equivalencia se llama traslación de Auslander-Reiten y para un módulo $M \in \mathrm{ind}\, A$ que no es proyectivo, el módulo $\mathrm{DTr}(M)$ se denomina **el trasladado de Auslander-Reiten** de M. Notaremos al trasladado de Auslander-Reiten de M por $\tau_A M = \mathrm{DTr}M$ y a su inversa por $\tau^{-1}M = \mathrm{TrD}M$.

Lema 1.4.2. *Sean A un álgebra, J un ideal de A y M un A-módulo tal que $MJ = 0$. Entonces $\tau_{A/J}M$ es un submódulo de $\tau_A M$.*

El siguiente teorema establece una relación muy útil para el trasladado de Auslander-Reiten. Dicha relación es conocida como **fórmula de Auslander-Reiten**.

Teorema 1.4.3. *[ASS, Capítulo IV, Teorema 2.13] Sean M y N A-módulos. Existen isomorfismos naturales*

$$\mathrm{Ext}^1_A(M,N) \cong D\underline{\mathrm{Hom}}_A(\tau^{-1}N, M) \cong D\overline{\mathrm{Hom}}_A(N, \tau M). \tag{1.3}$$

Más aún, si $\mathrm{pd}_A M \leq 1$ entonces $\mathrm{Ext}^1_A(M,N) \cong D\mathrm{Hom}_A(N, \tau M)$, y si $\mathrm{id}_A N \leq 1$ entonces $\mathrm{Ext}^1_A(M,N) \cong D\mathrm{Hom}_A(\tau^{-1}N, M)$.

Recordaremos a continuación la definición del funtor de Nakayama.

Definición 1.4.4. El funtor $\nu = D\mathrm{Hom}_A(-, A)$ es llamado el **funtor de Nakayama** para $\operatorname{mod} A$.

Es sabido que el funtor de Nakayama define una equivalencia entre las subcategorías plenas de $\operatorname{mod} A$ formadas por los módulos proyectivos y los módulos inyectivos, respectivamente.

Proposición 1.4.5. *[ASS, Capítulo IV, Proposición 2.4] Sean $M \in \operatorname{mod} A$ y $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \to 0$ una presentación proyectiva minimal de M. Entonces existe una sucesión exacta*

$$0 \to \tau_A M \to \nu P_1 \xrightarrow{\nu p_1} \nu P_0 \xrightarrow{\nu p_0} \nu M \to 0$$

Recordaremos la definición de morfismo irreducible.

Definición 1.4.6. Un morfismo $f : X \to Y$ en $\operatorname{mod} A$ se dice **irreducible** si

1. f no es una sección ni una retracción.

2. Si $f = f_1 f_2$ entonces o bien f_1 es una retracción o f_2 es una sección.

Lema 1.4.7. *[ASS, Capítulo IV, Corolario 3.9]*

a) Sea S un A-módulo simple proyectivo no inyectivo. Si $f : S \to M$ es irreducible, entonces M es proyectivo.

b) Sea S un A-módulo simple inyectivo no proyectivo. Si $g : M \to S$ es irreducible, entonces M es inyectivo.

Una sucesión exacta $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ es una **sucesión de Auslander-Reiten o sucesión que casi se parte** si L y N son módulos indescomponibles y f y g son morfismos irreducibles.

Finalmente, recordemos el siguiente resultado de [ASS], que establece la existencia de sucesiones de Auslander-Reiten.

Teorema 1.4.8. *[ASS, Capítulo IV, Teorema 3.1]*

a) Para cada A-módulo indescomponible no proyectivo M, existe una sucesión de Auslander-Reiten $0 \to \tau_A M \to E \to M \to 0$.

b) Para cada A-módulo indescomponible no inyectivo N, existe una sucesión de Auslander-Reiten $0 \to N \to F \to \tau_A^{-1} N \to 0$.

El lector interesado puede consultar el Capítulo IV de [ASS] ó el Capítulo IV de [ARS] para tener una mayor información sobre estos temas.

1.5. Teoría de τ-inclinación

La teoría de τ-inclinación fue introducida por T. Adachi, O. Iyama e I. Reiten, en [AIR], como una generalización de la teoría de inclinación. Comenzaremos recordando la definición de módulos inclinantes y luego daremos su generalización. Para un tratamiento más detallado sobre estos temas, remitimos al lector a [AIR], [IR], [ASS], [ACPV].

1.5.1. Teoría de Inclinación

La teoría inclinante juega un papel central dentro de la teoría de representaciones de álgebras. Esencialmente, la teoría de inclinación consiste en comparar la categoría de módulos sobre un álgebra dada A y sobre el álgebra de endomorfismos de un módulo T, donde T se construye de un modo apropiado a efecto de que ambas categorías estén estrechamente relacionadas.

Definición 1.5.1. Un A-módulo T se dice **inclinante** si satisface las siguientes condiciones:

i) $\mathrm{pd}_A T \leq 1$.

ii) $\mathrm{Ext}^1_A(T,T) = 0$.

iii) Existe una sucesión exacta corta $0 \to A \to T' \to T'' \to 0$ con $T', T'' \in \operatorname{add} T$.

Se puede ver que la condición *iii*) de la Definición 1.5.1 es equivalente a $|T| = |A|$, ver por ejemplo [ACPV, Capítulo 2, Corolario 3.8]. Recordemos que un par $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de subcategorías aditivas plenas de $\operatorname{mod} A$ es un **par de torsión** si:

1. $\mathrm{Hom}_A(M,N) = 0$ para todo $M \in \mathcal{T}$ y $N \in \mathcal{F}$.

2. Si $\mathrm{Hom}_A(M,F) = 0$ para todo $F \in \mathcal{F}$, entonces $M \in \mathcal{T}$.

3. Si $\mathrm{Hom}_A(T,N) = 0$ para todo $T \in \mathcal{T}$, entonces $N \in \mathcal{F}$.

La categoría $\mathcal{T}$ se conoce como **clase de torsión** y $\mathcal{F}$ como **clase sin torsión**.

Es conocido que dado un módulo inclinante T en $\operatorname{mod} A$, éste induce un par de torsión en $\operatorname{mod} A$ dado por $(\operatorname{Fac} T, T^{\perp})$. Se sabe además que, si $M \in \operatorname{Fac} T$ y $\mathrm{pd}_A\, M < \infty$, entonces M admite una T-resolución finita, es decir, existe una sucesión exacta de la forma

$$0 \to T_n \to T_{n-1} \to \cdots \to T_1 \to T_0 \to M \to 0$$

donde $T_i \in \operatorname{add} T$ para todo i y $n \leq \mathrm{pd}_A M$, ver [ACPV].

El teorema de inclinación, debido a Brenner y Butler, compara las categorías de módulos sobre A y sobre $B = \operatorname{End}_A T$, donde T es un A-módulo inclinante. Más precisamente, establece que T es un B-módulo inclinante, y que hay una equivalencia entre los pares de torsión respectivos. Para más detalles sobre este teorema, el lector puede consultar [ASS] o [ACPV].

Una de las consecuencias importantes del Teorema de Inclinanción es la relación entre las dimensiónes globales del álgebra de partida y del álgebra de endomorfismos de un módulo inclinante como detallamos en el próximo teorema.

Teorema 1.5.2. *[ASS, Capítulo VI, Teorema 4.2] Sean A un álgebra, T un módulo inclinante y $B = \operatorname{End}_A T$. Entonces*

$$|\operatorname{gldim} A - \operatorname{gldim} B| \leq 1.$$

Se dice que un A-módulo U es **inclinante casi completo** si se satisfacen *i*), *ii*) de la Definición 1.5.1 y si además $|U| = |A| - 1$. Un A-módulo inclinante casi completo U es sumando directo de a lo sumo dos módulos inclinantes. Más aún, es sumando directo de exactamente dos módulos inclinantes si y sólo si U es **fiel**, es decir, el anulador $\operatorname{ann} U = \{a \in A \mid Ua = 0\}$ es cero. Cuando U es sumando directo de exactamente dos módulos inclinantes T_1 y T_2, se dice que T_1 es una mutación de T_2 y viceversa. Así, la mutación de módulos inclinantes no está siempre definida.

1.5.2. Módulos τ-inclinantes soportados

Los módulos τ-inclinantes soportados surgen como una generalización de los módulos inclinantes desde el punto de vista de las mutaciones, [AIR]. Recordaremos aquí la definición, así como las propiedades de esta nueva clase de módulos.

Definición 1.5.3. Sea M un A-módulo, se dice que:

(a) M es **τ-rígido** si $\operatorname{Hom}_A(M, \tau M) = 0$.

(b) M es **τ-inclinante** (τ-inclinante casi completo , respectivamente) si M es τ-rígido y $|M| = |A|$ ($|M| = |A| - 1$, respectivamente).

(c) M es **τ-inclinante soportado** si existe un idempotente e de A tal que M es un $A/\langle e\rangle$-módulo τ-inclinante.

Recordemos que un A-módulo M se dice **sincero** si $\operatorname{Hom}_A(P, M) \neq 0$, para todo A-módulo proyectivo P. El siguiente resultado de [AIR], muestra la estrecha relación entre los módulos inclinantes y los módulos τ-inclinantes.

Proposición 1.5.4. *[AIR, Proposición 2.2]*

a) Los módulos τ-inclinantes son exactamente los módulos τ-inclinantes soportados sinceros.

b) Los módulos inclinantes son exactamente los módulos τ-inclinantes fieles.

c) Cada A-módulo τ-inclinante T es un $A/\operatorname{ann} T$-módulo inclinante.

Dada $\mathcal{C}$ una subcategoría plena de $\operatorname{mod} A$, $X \in \mathcal{C}$ es **Ext-proyectivo** en $\mathcal{C}$ si $\operatorname{Ext}^1_A(X, C) = 0$, para todo $C \in \mathcal{C}$.

A continuación transcribiremos un resultado de Auslander y Smalø, en [AS], que caracteriza los módulos τ-rígidos en términos de clases de torsión.

Proposición 1.5.5. *[AS, Proposición 5.8] Sean $X, Y \in \operatorname{mod} A$.*

a) $\operatorname{Hom}_A(X, \tau Y) = 0$ *si y sólo si* $\operatorname{Ext}_A(Y, \operatorname{Fac} X) = 0$.

b) X es un A-módulo τ-rígido si y sólo si X es Ext*-proyectivo en* $\operatorname{Fac} X$.

Recordemos que una subcategoría $\mathcal{X}$ de una categoría aditiva $\mathcal{C}$ se dice **contravariantemente finita** en $\mathcal{C}$, si para cada objeto M en $\mathcal{C}$, existen $X \in \mathcal{X}$ y un morfismo $f : X \to M$ tales que, para cada $X' \in \mathcal{X}$ la sucesión $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X) \xrightarrow{f} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X', M) \to 0$ es exacta, es decir, M tiene una $\mathcal{X}$-aproximación a derecha. Dualmente, se definen las subcategorías **covariantemente finitas** en $\mathcal{C}$. Más aún, una subcategoría de $\mathcal{C}$ se dice **funtorialmente finita** en $\mathcal{C}$ si es covariante y contravariantemente finita en $\mathcal{C}$.

Si $\mathcal{X}$ es una subcategoría funtorialmente finita en $\operatorname{mod} A$, entonces existen un número finito de clases de isomorfismo de módulos indescomponibles que son Ext-proyectivos en $\mathcal{X}$ a menos de isomorfismo. Denotaremos por $P(\mathcal{X})$ a la suma directa de un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfimos de los módulos Ext-proyectivos de $\mathcal{X}$ salvo isomorfismo.

Los siguientes resultados pueden verse en [AIR]. El primero de ellos establece una relación entre las clases de torsión y los módulos τ-inclinantes soportados. Denotaremos por $\mathrm{s}\tau - \operatorname{tilt} A$ el conjunto de clases de isomorfismos de A-módulos τ-inclinantes soportados y por $f - \operatorname{tors} A$ el conjunto de clases de torsión funtorialmente finitas en $\operatorname{mod} A$.

Teorema 1.5.6. *Existe una biyección entre $f - \operatorname{tors} A$ y $\mathrm{s}\tau - \operatorname{tilt} A$ dada por $\mathcal{T} \to P(\mathcal{T})$ con inversa $M \to \operatorname{Fac} M$.*

Observación 1.5.7. Notemos que la inclusión en $f - \operatorname{tors} A$ nos proporciona un orden parcial en $\mathrm{s}\tau - \operatorname{tilt} A$. Más precisamente, "$U \leq T$ si y sólo si $\operatorname{Fac} U \subset \operatorname{Fac} T$". Entonces, $\mathrm{s}\tau - \operatorname{tilt} A$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Para los módulos τ-inclinantes, se tiene un resultado que es análogo al lema de Bongartz para módulos inclinantes. Más precisamente,

Teorema 1.5.8. *Sea U un A-módulo τ-rígido. Entonces, $\mathcal{T} = {}^{\perp}(\tau U)$ es una clase de torsión funtorialmente finita sincera y $T = P(\mathcal{T})$ es un A-módulo τ-inclinante tal que $U \in \operatorname{add} T$ y ${}^{\perp}(\tau U) = \operatorname{Fac} T$.*

El módulo $P(^{\perp}(\tau U))$ es llamado **complemento de Bongartz** de U.

A continuación presentaremos una caracterización para decidir cuando un módulo τ-rígido es τ-inclinante. Este resultado puede encontrarse en [AIR].

Teorema 1.5.9. *[AIR, Teorema 2.12] Sea T un A-módulo τ-rígido. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) T es un A-módulo τ-inclinante.

(b) T es τ-rígido maximal, es decir, si $T \oplus X$ es τ-rígido para algún A-módulo X, entonces $X \in \operatorname{add} T$.

(c) $^{\perp}(\tau T) = \operatorname{Fac} T$.

Proposición 1.5.10. *[AIR, Proposición 2.4] Sea $X \in \operatorname{mod} A$ y $P_1 \overset{d_1}{\to} P_0 \overset{d_0}{\to} X \to 0$ una presentación proyectiva minimal para X. Entonces $\operatorname{Hom}_A(Y, \tau_A X) = 0$ si y sólo si el morfismo $\operatorname{Hom}_A(P_0, Y) \overset{(d_1,Y)}{\longrightarrow} \operatorname{Hom}_A(P_1, Y)$ es sobreyectivo.*

En algunas situaciones, es conveniente ver a los módulos τ-inclinantes soportados y a los módulos τ-rígidos, como ciertos pares de A-módulos. Más precisamente,

Definición 1.5.11. Sea (M, P) un par con $M \in \operatorname{mod} A$ y P un A-módulo proyectivo.

(a) Si M es τ-rígido y $\operatorname{Hom}_A(P, M) = 0$ entonces (M, P) es un **par τ-rígido** para $\operatorname{mod} A$.

(b) Si (M, P) es τ-rígido y $|M| + |P| = |A|$ ($|M| + |P| = |A| - 1$, respectivamente) entonces (M, P) es un **par τ-inclinante soportado** (τ-inclinante soportado casi completo , respectivamente) para $\operatorname{mod} A$.

Sigue de [AIR, Proposición 2.3], que la noción de módulo τ -inclinante soportado y la noción de par τ -inclinante soportado son esencialmente las mismas. Con esta nueva definición, podemos enunciar el Teorema 1.5.9 para el caso de pares τ-rígidos soportados.

Proposición 1.5.12. *[AIR, Corolario 2.13] Sea (T, P) un par τ-rígido para $\operatorname{mod} A$. Son equivalentes:*

(a) (T, P) es un par τ-inclinante para $\operatorname{mod} A$.

(b) Si $(T \oplus X, P)$ es un par τ-rígido para algún A-módulo X, entonces $X \in \operatorname{add} T$.

(c) ${}^{\perp}(\tau T) \cap P^{\perp} = \operatorname{Fac} T$.

Dado $X \in \operatorname{ind} A$, diremos que $(X, 0)$ ($(0, X)$, respectivamente) es un **complemento** de un par τ-inclinante soportado casi completo (U, Q) si $(U \oplus X, Q)$ ($(U, Q \oplus X)$, respectivamente) es un par τ-inclinante soportado. El par τ-inclinante soportado $(U \oplus X, Q)$ ($(U, Q \oplus X)$) es una **completación** para (U, Q).

Teorema 1.5.13. *[AIR, Teorema 2.18] Cada par τ-inclinante soportado casi completo tiene exactamente dos complementos.*

Dos completaciones (T, P) y (T', P') de un par τ-inclinante soportado (U, Q) se llaman **mutaciones** una de la otra. Notaremos $(T', P') = \mu_{(X,0)}(T, P)$ ($(T', P') = \mu_{(0,X)}(T, P)$, respectivamente) si $(X, 0)$ ($(0, X)$, respectivamente) es un complemento de (U, Q) que da (T, P). El Teorema 1.5.13 establece que dado (T, P) un módulo τ-inclinante soportado y X un sumando directo de T (P, respectivamente) siempre es posible realizar la mutación $\mu_{(X,0)}(T, P)$ ($\mu_{(0,X)}(T, P)$, respectivamente) de (T, P). En otras palabras, la mutación de módulos τ-inclinantes soportados es siempre posible.

Definición 1.5.14. Sean $T = X \oplus U$ y T' A-módulos τ-inclinantes soportados tales que $T' = \mu_X T$ para algún A-módulo indescomponible X. Diremos que T' es una **mutación a izquierda** (mutación a derecha, respectivamente) de T y notaremos $T' = \mu_X^- T$ ($T' = \mu_X^+ T$, respectivamente) si se satisfacen las siguientes condiciones equivalentes:

(a) $T > T'$ ($T < T'$, respectivamente).

(b) $X \notin \operatorname{Fac} U$ ($X \in \operatorname{Fac} U$, respectivamente).

(c) ${}^{\perp}(\tau U) \subseteq {}^{\perp}(\tau X)$ (${}^{\perp}(\tau U) \nsubseteq {}^{\perp}(\tau X)$), respectivamente.

Definición 1.5.15. **El carcaj de módulos τ-inclinantes soportados** $Q(\mathrm{s}\tau - \operatorname{tilt} A)$ se define como sigue:

I) El conjunto de vértices consiste en las clases de isomorfismos de A-módulos τ-inclinantes básicos.

II) Hay una flecha de T a U si U es una mutación a izquierda de T.

Observación 1.5.16. Observemos que este grafo de intercambio es n-regular, donde $n = |A|$ es el número de A-módulos simples.

En [AIR], los autores probaron que el carcaj de intercambio $Q(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}\, A)$ coincide con el diagrama de Hasse asociado al conjunto parcialmente ordenado $\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}\, A$.

Capítulo 2

Módulos τ-inclinantes soportados sobre álgebras extendidas por un módulo proyectivo

Sea A la extensión de B por un B-módulo proyectivo. En [AHT], los autores probaron que dado un A-módulo inclinante es posible obtener a partir de este un B-módulo que resulta ser inclinante. Recíprocamente, dado un B-módulo inclinante cualquiera definieron una manera de extender dicho módulo de manera tal de obtener un A-módulo inclinante. En este capítulo nos proponemos realizar un estudio similar pero con una clase de módulos más general: "los módulos τ-inclinantes soportados".

En este contexto, probaremos en el Teorema 2.2.9 que es posible extender y restringir módulos τ-inclinantes soportados. Más aún, mostraremos que existe un morfismo pleno entre los carcajes correspondientes a los posets de módulos τ-inclinantes soportados. De esta manera, obtendremos una inmersión plena de $Q(\mathrm{s}\tau - \operatorname{tilt} B)$ en $Q(\mathrm{s}\tau - \operatorname{tilt} A)$. Por último, veremos que ésta construcción es posible si y sólo si se extiende por un módulo proyectivo. Estos resultados pueden encontrarse en [Su].

Comenzaremos recordando algunas nociones y resultados básicos sobre este tipo de extensiones, que serán muy utilizados a lo largo del capítulo. El lector interesado puede remitirse a [SS].

2.1. Álgebras extendidas por un módulo X

Sea B un álgebra y X un B-módulo fijo. Denotaremos por $A = B[X]$ la **extensión por un punto** de B por X, es decir, el álgebra matricial

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ X & k \end{pmatrix}$$

con la suma habitual de matrices y el producto inducido por la estructura de módulo de X.

El carcaj Q_B de B es un subcarcaj pleno y convexo del carcaj Q_A de A, y hay solamente un vértice adicional en Q_A que es una fuente. Asociado a este nuevo vértice, se tiene un A-módulo proyectivo indescomponible $\widetilde{P}$ que satisface $\operatorname{rad}\widetilde{P} \cong X$. El simple $S = \operatorname{top} P$ es un A-módulo inyectivo y se tiene que $\operatorname{pd}_A S \leq \operatorname{pd}_B X + 1$. Como $\operatorname{mod} B$ es una subcategoría plena de $\operatorname{mod} A$, los B-módulos proyectivos son A-módulos proyectivos. Más aún, se tiene que $(\operatorname{mod} B, \operatorname{add} S)$ es un par de torsión para $\operatorname{mod} A$.

Es conocido que la categoría de módulos $\operatorname{mod} A$ admite una descomposición en términos de $\operatorname{mod} B$ y $\operatorname{mod} k$, que resulta ser lo que se denomina un recollement (ver, por ejemplo, [PV]).

Definición 2.1.1. Un **recollement** de una categoría abeliana $\mathcal{A}$ por categorías abelianas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, denotado por $\mathrm{R}(\mathcal{B}, \mathcal{A}, \mathcal{C})$, es un diagrama de funtores aditivos:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, "i_*"] & \mathcal{A} \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "j^*"] & \mathcal{C} \arrow[l, bend right, "j_!"'] \arrow[l, bend left, "j_*"]
\end{tikzcd}$$

que satisfacen las siguientes condiciones:

1. $(j_!, j^*, j_*)$ y $(i^*, i_*, i^!)$ son tres-uplas adjuntas.

2. Los funtores $i_*, j_!$ y j_* son fieles y plenos.

3. $\operatorname{Im} i_* = \ker j^*$.

En nuestro contexto, si e_B la identidad en B, es sabido que $e_B A e_B \cong B$ y $A/Ae_B A \cong k$. Así, se tiene el siguiente recollement (ver [PV]):

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{mod} k \arrow[r, "i_*"] & \operatorname{mod} A \arrow[l, bend right, "-\otimes_A k"'] \arrow[l, bend left, "\operatorname{Hom}_{A(k,-)}"] \arrow[r, "\operatorname{Hom}_{A(e_B A,-)}"] & \operatorname{mod} B \arrow[l, bend right, "-\otimes_B e_B A"'] \arrow[l, bend left, "\operatorname{Hom}_{B(Ae_B,-)}"]
\end{tikzcd}$$

Llamaremos al funtor $\mathrm{Hom}_A(e_B A, -)$ **funtor de restricción** y lo notaremos por $\mathcal{R}$. Análogamente, llamaremos **funtor de extensión** al funtor $\mathrm{Hom}_B(Ae_B, -)$ y lo notaremos por $\mathcal{E}$. De la definición de recollement tenemos que el par $(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ es un par de funtores adjuntos. Teniendo en cuenta que $Xe_B \cong X \otimes_A Ae_B$, el funtor $\mathcal{R}$ puede ser expresado también de la siguiente manera $\mathcal{R} \cong - \otimes_A Ae_B$.

Como $e_B A \cong B$ y B es un A-módulo proyectivo, tenemos que $\mathcal{R}$ es un funtor exacto. Además, se tiene que para $M \in \operatorname{mod} A$, $\mathcal{R}M$ es un submódulo de M. Notemos que $Ae_B \cong B \oplus X$ y así, como k-espacio vectorial, $\mathcal{E}M \cong M \oplus \mathrm{Hom}_B(X, M)$. En consecuencia, la dimensión del k-espacio vectorial correspondiente al nuevo vértice en la representación de M es igual a $\dim_k \mathrm{Hom}_B(X, M)$.

A continuación mostraremos un ejemplo para visualizar como actúan estos funtores.

Ejemplo 2.1.2. Consideremos B el álgebra dada por el siguiente carcaj:

$$\begin{tikzcd}
1 & & \\
& 3 \arrow[ul, "\beta"'] \arrow[dl, "\gamma"] & 4 \arrow[l, "\alpha"] \\
2 & &
\end{tikzcd}$$

con la relación $\alpha\beta = 0$. Entonces, el carcaj con relaciones de $B[P_3]$ tiene la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd}
1 & & 4 \arrow[dl, "\alpha"'] \\
& 3 \arrow[ul, "\beta"'] \arrow[dl, "\gamma"] & \\
2 & & 5 \arrow[ul, "\delta"]
\end{tikzcd}$$

con la relación $\alpha\beta = 0$. Notaremos a los módulos por sus factores de composición.

Como k-espacio vectorial, $\mathcal{E}M \cong M \oplus \mathrm{Hom}_A(P_3, M)$. Más aún, $\dim_k M_5 = \dim_k \mathrm{Hom}_A(P_3, M)$. Así, dado $M = {\begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix}} \in \operatorname{mod} B$, se tiene que $\mathcal{E}M = {\begin{smallmatrix} & 5 & \\ & 3 & \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix}}$, pues $\dim_k \mathrm{Hom}_A(P_3, M) = 1$.

Por otra parte, aplicar el funtor $\mathcal{R}$ actúa como la restricción por ceros, es decir, a los efectos de los factores de composición significa eliminar el factor de composición correspondiente al nuevo vértice.

Si consideramos $N = {\begin{smallmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}} \in \operatorname{mod} B[P_0]$, entonces $\mathcal{R}N = {\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}} \oplus {\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix}}$. Notemos que, en general, el funtor $\mathcal{R}$ no preserva módulos indescomponibles.

Asociado a este par adjunto se tiene una unidad $\delta : \mathrm{id}_{\mathrm{mod}\, A} \to \mathcal{E}\mathcal{R}$ y una co-unidad $\epsilon : \mathcal{R}\mathcal{E} \to \mathrm{id}_{\mathrm{mod}\, B}$ definidas como sigue:

dado un A-módulo X, el funtor

$$\delta_X : \quad X \quad \to \mathrm{Hom}_B(Ae_B, X \otimes_A Ae_B)$$

es tal que transforma x en $u \to x \otimes u$, para $x \in X$ y $u \in Ae_B$. Recíprocamente, dado M un B-módulo, se tiene que

$$\epsilon_M : \quad \mathrm{Hom}_A(Ae_B, M) \otimes_A Ae_B \quad \to M$$

transforma $f \otimes u$ en $f(u)$, para $u \in Ae_B$ y $f \in \mathrm{Hom}_B(Ae_B, M)$.

2.1.1. Algebras extendidas por un módulo proyectivo

Ahora, nos concentraremos en un caso particular de álgebras extendidas por un punto. Más precisamente, en aquellas que se extienden por un módulo proyectivo. Si bien algunas de las propiedades que vamos a mencionar, valen en un contexto más general, por simplicidad solo las vamos a enunciar en el contexto de módulos proyectivos. Para su estudio, el lector puede remitirse a [AHT].

Sea B un álgebra y fijemos un B-módulo proyectivo P_0. Consideremos $A = B[P_0]$. Para este caso, se tiene que $\mathrm{pd}_A S \leq 1$, donde S es el A-módulo simple correspondiente al nuevo vértice. Además, como $Ae_B \cong B \oplus P_0$ es un B-módulo proyectivo a derecha tenemos que el funtor de extensión $\mathcal{E}$ es exacto.

Lema 2.1.3. *[AHT, Lema 4.5] Sean B un álgebra, P_0 un B-módulo proyectivo fijo y $A = B[P_0]$.*

a) Si P es un A-módulo proyectivo, entonces $\mathcal{R}P$ es un B-módulo proyectivo.

b) Si I es un B-módulo inyectivo, entonces $\mathcal{E}I$ es un A-módulo inyectivo.

La siguiente proposición lista propiedades importantes y fundamentales de los funtores de extensión y restricción que usaremos a lo largo del capítulo. Previamente, recordemos que, dado un A-módulo M, la **categoría perpendicular a derecha** de M es la subcategoría plena de $\mathrm{mod}\, A$ definida como sigue

$$\begin{aligned} M^{\mathrm{perp}} &= M^{\perp} \cap M^{\perp_1} \\ &= \{X \in \mathrm{mod}\, A \,|\, \mathrm{Hom}_A(M, X) = 0 \;\text{ y }\; \mathrm{Ext}^1_A(M, X) = 0\}. \end{aligned}$$

Proposición 2.1.4. *[AHT, Proposición 2.5, Lema 3.1] El par de funtores adjuntos $(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ satisface las siguientes propiedades:*

(a) La co-unidad ϵ es un isomorfismo funtorial.

(b) Dado X un A-módulo, las siguientes condiciones son equivalentes.

i) δ_X es monomorfismo.

ii) S no es sumando directo de X.

iii) $\mathrm{Hom}_A(S, X) = 0$.

(c) Si $X \in S^{\text{perp}}$, entonces $\delta_X : X \to \mathcal{E}\mathcal{R}X$ es un isomorfismo funtorial.

(d) Dado M un B-módulo, entonces se tiene que $\mathcal{E}M \in S^{\text{perp}}$.

Como una consecuencia de la proposición anterior, se desprende que $\mathrm{mod}\, B$ y S^{perp} son categorías equivalentes. Además, resulta que el funtor $\mathcal{E}$ es fiel y pleno. En particular, preserva indescomponibles, es decir, si X es un B-módulo indescomponible entonces $\mathcal{E}X$ es un A-módulo indescomponible.

Finalmente, el siguiente resultado de [AHT], es fundamental para poder probar que tanto $\mathcal{E}$ como $\mathcal{R}$ transforman módulos τ-rígidos en módulos τ-rígidos.

Proposición 2.1.5. *[AHT, Corolario 3.4, Proposición 3.6] Sean X, Y A-módulos y M un B-módulo. Entonces,*

(a) $\mathrm{Ext}^1_A(X, \mathcal{E}M) \cong \mathrm{Ext}^1_B(\mathcal{R}X, M)$.

(b) Si $X \in S^{\text{perp}}$, entonces $\mathrm{Ext}^1_A(\mathcal{E}M, X) \cong \mathrm{Ext}^1_B(M, \mathcal{R}X)$.

(c) Existe un epimorfismo $\mathrm{Ext}^1_A(X, Y) \to \mathrm{Ext}^1_A(\mathcal{R}X, \mathcal{R}Y)$. *Más aún, si $Y \in S^{\text{perp}}$ entonces el morfismo* $\mathrm{Ext}^1_A(X, Y) \to \mathrm{Ext}^1_A(\mathcal{R}X, \mathcal{R}Y)$ *es un isomorfismo.*

2.2. Morfismos de extensión y de restricción

A lo largo de esta sección, asumiremos que A es la extensión de B por un B-módulo proyectivo P_0. Estudiaremos la relación entre los B-módulos τ-inclinantes soportados y los A-módulos τ-inclinantes soportados.

Comenzaremos con una observación que resultará muy útil a lo largo del capítulo.

Observación 2.2.1. Sea Y un A-módulo tal que $\mathrm{Ext}_A^1(S,Y)=0$. Entonces, tenemos que $Y=Y'\oplus S^r$, con $Y'\in S^{\mathrm{perp}}$ y $r\geq 0$. En efecto, supongamos que $\mathrm{Hom}_A(S,Y)=0$. Entonces, de la Proposición 2.1.4, obtenemos que $Y=Y'$ y $r=0$. Por otro lado, si $\mathrm{Hom}_A(S,Y)\neq 0$, de la Proposición 2.1.4, tenemos que S es un sumando directo de Y, es decir, $Y=S\oplus Z$. Notemos que $\mathrm{Ext}_A^1(S,Z)=0$. Si $\mathrm{Hom}_A(S,Z)=0$, obtenemos lo buscado. En caso contrario, S es un sumando directo de Z y $Z=Z_1\oplus S$. Más aun, $Y=S^2\oplus Z_1$. Iterando este argumento en cada Z_i, para $i=1\cdots r-1$, obtenemos que $Y=Y'\oplus S^r$.

El siguiente resultado nos muestra cómo extender los B-módulos τ-rígidos.

Teorema 2.2.2. *Sea T un B-módulo τ-rígido. Entonces $\mathcal{E}T\oplus S$ es un A- módulo τ-rígido.*

Demostración. Consideremos T un B-módulo τ-rígido. De la Proposición 1.5.5, tenemos que $\mathrm{Ext}_B^1(T,\mathrm{Fac}\,T)=0$. Veamos que $\mathrm{Ext}_A^1(\mathcal{E}T\oplus S,\mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}T\oplus S))=0$.

Notemos que $\mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}T\oplus S)=\mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}T)\oplus\mathrm{Fac}\,S$. Esto es, si $N\in\mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}T\oplus S)$, entonces $N=N'\oplus S^r$ con $N'\in\mathrm{Fac}\,T$ y $r\geq 0$. En efecto, si $\mathrm{Hom}_A(S,N)=0$, entonces es inmediato que $N\in\mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}T)$. En caso contrario, sigue de la Proposición 2.1.4 que S es un sumando directo de N. Luego, $N=N'\oplus S^k$ con $\mathrm{Hom}_A(S,N')=0$. Como $N\in\mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}T\oplus S)$, tenemos que $N'\in\mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}T\oplus S)$. Así, como $\mathrm{Hom}_A(S,N')=0$ entonces $N'\in\mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}T)$.

Recíprocamente, si $N\in\mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}T)\oplus\mathrm{Fac}\,S$, entonces $N=N'\oplus Z$ con $N'\in\mathrm{Fac}\,\mathcal{E}T$ y $Z\in\mathrm{Fac}\,S$. Es claro que $N\in\mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}T\oplus S)$. Luego,

$$\mathrm{Ext}_A^1(\mathcal{E}T\oplus S,\mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}T\oplus S))=\mathrm{Ext}_A^1(\mathcal{E}T\oplus S,\mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}T)\oplus\mathrm{Fac}\,S).$$

Más aún, ambas expresiones son iguales a

$$\mathrm{Ext}_A^1(\mathcal{E}T,\mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}T))\oplus\mathrm{Ext}_A^1(S,\mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}T))\oplus\mathrm{Ext}_A^1(\mathcal{E}T\oplus S,\mathrm{Fac}\,S).$$

Como $\mathrm{Fac}\,S=\mathrm{add}\,S$ y S es un A-módulo inyectivo, entonces $\mathrm{Ext}_A^1(\mathcal{E}T\oplus S,\mathrm{Fac}\,S)=0$.

Mostremos ahora que $\mathrm{Ext}_A^1(S,\mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}T))=0$. Consideremos $Y\in\mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}T)$. Entonces existe un epimorfismo $f:M\to Y$, con $M\in\mathrm{add}\,(\mathcal{E}T)$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(S,-)$ a f obtenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}_A^1(S,M)\to\mathrm{Ext}_A^1(S,Y)\to\mathrm{Ext}_A^2(S,\mathrm{Ker}\,f).$$

Como $M \in \operatorname{add}(\mathcal{E}T)$ y $\operatorname{pd}_A S \leq 1$ entonces $\operatorname{Ext}_A^1(S, M) = 0$ y $\operatorname{Ext}_A^2(S, \operatorname{Ker} f) = 0$, respectivamente. Así, $\operatorname{Ext}_A^1(S, Y) = 0$. Luego, $\operatorname{Ext}_A^1(S, \operatorname{Fac}(\mathcal{E}T)) = 0$.

Finalmente, probemos que $\operatorname{Ext}_A^1(\mathcal{E}T, \operatorname{Fac}(\mathcal{E}T)) = 0$. Sea $W \in \operatorname{Fac}(\mathcal{E}T)$. Entonces existe un epimorfismo $g : N \to W$, con $N \in \operatorname{add}(\mathcal{E}T)$. Aplicando el funtor $\mathcal{R}$ a g, obtenemos que $\mathcal{R}W \in \operatorname{Fac} T$, pues $\mathcal{R}N \in \operatorname{add} T$. Como T es un B-módulo τ-rígido, entonces $\operatorname{Ext}_B^1(T, \mathcal{R}W) = 0$.

Por otro lado, como $W \in \operatorname{Fac}(\mathcal{E}T)$ y $\mathcal{E}T \in S^{\text{perp}}$, tenemos que $\operatorname{Ext}_A^1(S, W) = 0$. De la Observación 2.2.1, sabemos que $W = S^j \oplus W'$, con $W' \in S^{\text{perp}}$ y $j \geq 0$. Así, por la Proposición 2.1.5,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ext}_A^1(\mathcal{E}T, W) &= \operatorname{Ext}_A^1(\mathcal{E}T, W') \oplus \operatorname{Ext}_A^1(\mathcal{E}T, S^j) \\
&= \operatorname{Ext}_B^1(T, \mathcal{R}W') \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Luego, $\operatorname{Ext}_A^1(\mathcal{E}T \oplus S, \operatorname{Fac}(\mathcal{E}T \oplus S)) = 0$. Más aún, sigue de la Proposición 1.5.5 que $\mathcal{E}T \oplus S$ es un A-módulo τ-rígido. $\square$

Ahora, consideraremos el problema opuesto, es decir, dado un A-módulo τ-rígido T probaremos que $\mathcal{R}T$ es un B-módulo τ-rígido. Para ello, comenzaremos estudiando que relación hay entre $\tau_B \mathcal{R}T$ y $\tau_A T$.

Teorema 2.2.3. *Sea T un A-módulo. Entonces $\tau_A \mathcal{R}T$ es isomorfo a un submódulo de $\tau_A T$.*

Demostración. Consideremos

$$P_1 \to P_0 \to T \to 0 \tag{2.1}$$

una presentación proyectiva minimal de T en $\operatorname{mod} A$. Aplicando el funtor $\mathcal{R}$ a (2.1), obtenemos la sucesión exacta

$$\mathcal{R}P_1 \to \mathcal{R}P_0 \to \mathcal{R}T \to 0 \tag{2.2}$$

que es una presentación proyectiva de $\mathcal{R}T$ en $\operatorname{mod} B$, pero que no es necesariamente minimal. Sea $Q_1 \to Q_0 \to \mathcal{R}T \to 0$ la presentación proyectiva minimal de $\mathcal{R}T$ en $\operatorname{mod} B$. De la propiedad universal de la cubierta proyectiva, tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}P_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{R}P_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{R}T \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
Q_1 \arrow[r] \arrow[d] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{R}T \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Como Q_0 es un B-módulo proyectivo, entonces Q_0 es un sumando directo de $\mathcal{R}P_0$, y luego Q_0 es un submódulo de P_0. De igual manera se tiene que Q_1 es un sumando directo de $\mathcal{R}P_1$ y un submódulo de P_1.

En consecuencia, tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
Q_1 \arrow[r] \arrow[d] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{R}T \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & T \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(-, A)$ al diagrama anterior, tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(P_0, A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(P_1, A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Tr}_A T \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\mathrm{Hom}_A(Q_0, A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(Q_1, A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Tr}_A \mathcal{R}T \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

donde el morfismo $\mathrm{Tr}_A T \to \mathrm{Tr}_A \mathcal{R}T$ es el morfismo obtenido pasando por los conúcleos. Aplicando el funtor dualidad al morfismo $\mathrm{Tr}_A T \to \mathrm{Tr}_A \mathcal{R}T$, obtenemos la expresión

$$0 \to \tau_A \mathcal{R}T \to \tau_A T.$$

Así, $\tau_A(\mathcal{R}T)$ es isomorfo a un submódulo de $\tau_A(T)$, probando el resultado. $\square$

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Teorema 2.2.3.

Corolario 2.2.4. *Sea T un A-módulo. Entonces,*

a) $\tau_B \mathcal{R}T$ es isomorfo a un submódulo de $\tau_A T$.

b) $\tau_B \mathcal{R}T$ es isomorfo a un submódulo de $\mathcal{R}(\tau_A T)$.

Demostración. *a*) Como $\mathcal{R}T$ es un B-módulo, entonces por el Lema 1.4.2 tenemos que $\tau_B\mathcal{R}T$ es isomorfo a un submódulo de $\tau_A\mathcal{R}T$. Del Teorema 2.2.3, tenemos que $\tau_A\mathcal{R}T$ es isomorfo a un submódulo de $\tau_A T$. Luego, $\tau_B\mathcal{R}T$ es isomorfo a un submódulo de $\tau_A T$.

b) Del enunciado del inciso *a*), sabemos que $\tau_B\mathcal{R}T$ es un submódulo de $\tau_A T$. Del hecho de que $\mathcal{R}$ es un funtor exacto y $\tau_B\mathcal{R}T$ es un B-módulo, concluimos que $\tau_B\mathcal{R}T$ es un submódulo de $\mathcal{R}(\tau_A T)$. $\square$

A continuación mostraremos que, en general, $\tau_B\mathcal{R}T$ es un submódulo propio de $\mathcal{R}(\tau_A(T))$.

Ejemplo 2.2.5. Consideremos B el álgebra dada por el siguiente carcaj

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 2 \arrow[l, bend right, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

con la relación $\alpha\beta = 0$.

Consideremos $A = B[P_2]$ la extensión de B por el módulo proyectivo P_2. Entonces A está dada por el siguiente carcaj

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 2 \arrow[l, bend right, "\alpha"'] & 3 \arrow[l, "\gamma"'] \end{tikzcd}, \ \ \alpha\beta = 0.$$

con la relación $\alpha\beta = 0$. Notaremos a los módulos por sus factores de composición.

Sea M el A-módulo dado por los factores de composición $\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$. Entonces tenemos que $\mathcal{R}M = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$ y $\tau_B\mathcal{R}M = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$.

Por otro lado, $\tau_A M = \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 3 & & 1 \\ & 2 & \end{smallmatrix}$ y $\mathcal{R}(\tau_A M) = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$. Es claro que $\tau_B\mathcal{R}M$ es un submódulo propio de $\mathcal{R}(\tau_A M)$, mostrando lo deseado.

El resultado anterior nos permite enunciar el siguiente teorema, que establece que el funtor de restricción mantiene la condición de τ-rigidez.

Teorema 2.2.6. *Sea T un A-módulo τ-rígido. Entonces $\mathcal{R}T$ es un A-módulo τ-rígido.*

Demostración. Consideremos T un A-módulo τ-rígido. Entonces $\mathrm{Ext}^1_A(T,T) = 0$. De la Proposición 2.1.5,(c), tenemos que $\mathrm{Ext}^1_A(\mathcal{R}T, \mathcal{R}T) = 0$. Luego,

$$D\overline{\mathrm{Hom}}_A(\mathcal{R}T, \tau_A\mathcal{R}T) = 0.$$

Veamos ahora que $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{R}T, \tau_A\mathcal{R}T) = 0$. Sea $f : \mathcal{R}T \to \tau_A\mathcal{R}T$ un morfismo no nulo. Como $D\overline{\mathrm{Hom}}_A(\mathcal{R}T, \tau_A\mathcal{R}T) = 0$, entonces f se factoriza a través de un A-módulo inyectivo I. Luego $f = hg$, con $g : \mathcal{R}T \to I$ y $h : I \to \tau_A\mathcal{R}T$. Como $\mathcal{R}T$ es un submódulo de T e I es un A-módulo inyectivo, existe un morfismo $g^* : T \to I$ tal que $g = g^*j$, donde $j : \mathcal{R}T \to T$ es la inclusión natural. A continuación, mostramos la situación con el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{R}T \arrow[dl, hook', "j"'] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"] & \tau_A(\mathcal{R}T) \arrow[r, hook, "i"] & \tau_A T \\ T \arrow[rr, dashed, "g^*"'] & & I \arrow[u, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Como $f \neq 0$, obtenemos un morfismo no nulo $ihg^* : T \to \tau_A T$, donde $i : \tau_A(\mathcal{R}T) \to \tau_A T$ es el morfismo inclusión definido en la demostración del Teorema 2.2.3. Luego, $\mathrm{Hom}_A(T, \tau_A T) \neq 0$, contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto, $\mathcal{R}T$ es un A-módulo τ-rígido. $\square$

Como una consecuencia del Teorema anterior, obtenemos que el funtor de restricción preserva módulos τ-rígidos entre $\mathrm{mod}\, A$ y $\mathrm{mod}\, B$.

Corolario 2.2.7. *Sea T un A-módulo τ-rígido. Entonces $\mathcal{R}T$ es un B-módulo τ-rígido.*

Demostración. Supongamos que $\mathrm{Hom}_B(\mathcal{R}T, \tau_B\mathcal{R}T) \neq 0$. Como $\tau_B\mathcal{R}T$ es isomorfo a un submódulo de $\tau_A\mathcal{R}T$, entonces $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{R}T, \tau_A\mathcal{R}T) \neq 0$, contradiciendo el Teorema 2.2.6. Por lo tanto, $\mathcal{R}T$ es un B-módulo τ-rígido. $\square$

El siguiente resultado es una herramienta fundamental para probar que la restricción de un A-módulo τ-inclinante soportado es un B-módulo τ-inclinante soportado.

Proposición 2.2.8. *Sean T un A-módulo τ-rígido y X un B-módulo. Si $X \in {}^{\perp}(\tau_B\mathcal{R}T)$ entonces $\mathcal{E}X \in {}^{\perp}(\tau_A T)$.*

Demostración. Sea $X \in {}^{\perp}(\tau_B\mathcal{R}T)$. Entonces, $\mathrm{Hom}_B(X, \tau_B\mathcal{R}T) = 0$. De la Proposición 1.5.5, tenemos que $\mathrm{Ext}^1_B(\mathcal{R}T, \mathrm{Fac}\, X) = 0$.

Veamos que $\mathrm{Ext}^1_A(T, \mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}X)) = 0$. Sea $Y \in \mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}X)$, entonces existe un epimorfismo $f : M \to Y$, con $M \in \mathrm{add}\,(\mathcal{E}X)$. Como $\mathcal{E}X \in S^{\mathrm{perp}}$, entonces $\mathrm{Ext}^1_A(S, Y) = 0$. Luego, de la Observación 2.2.1, tenemos que $Y = Y' \oplus S^r$, con $Y' \in S^{\mathrm{perp}}$ y $r \geq 0$.

Aplicando el funtor $\mathcal{R}$ al morfismo $f : M \to Y' \oplus S^r$, obtenemos que $\mathcal{R}Y' \in \mathrm{Fac}\, X$, y así $\mathrm{Ext}^1_B(\mathcal{R}T, \mathcal{R}Y') = 0$. Entonces, de la Proposición 2.1.5,(a), resulta que $\mathrm{Ext}^1_A(T, \mathcal{E}\mathcal{R}Y') = 0$. Como $Y' \in S^{\mathrm{perp}}$, se sigue que $\mathrm{Ext}^1_A(T, Y') = 0$. Luego,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^1_A(T, Y) &\cong \mathrm{Ext}^1_A(T, Y' \oplus S^r) \\ &\cong \mathrm{Ext}^1_A(T, Y') \oplus \mathrm{Ext}^1_A(T, S^r) \\ &\cong 0 \end{aligned}$$

pues S es un módulo inyectivo.

Por lo tanto, $\mathrm{Ext}^1_A(T, \mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}X)) = 0$. Así de la Proposición 1.5.5,(a), obtenemos el resultado. $\square$

Teorema 2.2.9. *Sea B un álgebra y consideremos $A = B[P_0]$. Entonces,*

a) Si (M, Q) es un par τ-rígido (τ-inclinante soportado, respectivamente) básico para $\mathrm{mod}\,B$*, entonces $(\mathcal{E}M \oplus S, Q)$ es un par τ-rígido (τ-inclinante soportado, respectivamente) básico para* $\mathrm{mod}\,A$*.*

b) Si (T, P) es un par τ-rígido (τ-inclinante soportado, respectivamente) básico para $\mathrm{mod}\,A$*, entonces $(\mathcal{R}T, P^*)$es un par τ-rígido (τ-inclinante soportado, respectivamente) para* $\mathrm{mod}\,B$*, donde $P^* = P$ si P es B-módulo, o $P^* = P/\widetilde{P}$ en caso contrario.*

Demostración. a) Sea (M, Q) un par τ-rígido para $\mathrm{mod}\,B$. Por el Teorema 2.2.2, sabemos que $\mathcal{E}M \oplus S$ es un A-módulo τ-rígido. Además, como $\mathcal{E}M \in S^{\mathrm{perp}}$ y $\mathcal{R}\mathcal{E} \cong \mathrm{Id}_{\mathrm{mod}\,B}$ tenemos que $\mathcal{E}M \oplus S$ es básico.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_A(Q, \mathcal{E}M \oplus S) &\cong \mathrm{Hom}_A(Q, \mathcal{E}M) \oplus \mathrm{Hom}_A(Q, S) \\ &\cong \mathrm{Hom}_B(\mathcal{R}Q, M) \\ &\cong \mathrm{Hom}_B(Q, M) \\ &\cong 0 \end{aligned}$$

donde $\mathrm{Hom}_A(Q, S) = 0$ pues Q es un B-módulo. Por lo tanto, $(\mathcal{E}M \oplus S, Q)$ es un par τ-rígido básico para $\mathrm{mod}\,A$.

Si además (M, Q) es un par τ-inclinante soportado, entonces $|M| + |Q| = |B|$. Como $\mathcal{E}$ es un funtor fiel, tenemos que $|M| = |\mathcal{E}M|$. Más aún, como $\mathcal{E}M \in S^{\mathrm{perp}}$ tenemos que S no es un sumando directo de $\mathcal{E}M$. Por lo tanto, $|\mathcal{E}M \oplus S| = |\mathcal{E}M| + 1$ y

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}M \oplus S| + |Q| &= 1 + |\mathcal{E}M| + |Q| \\ &= 1 + |B| \\ &= |A|. \end{aligned}$$

b) Sea (T, P) un par τ-rígido para $\mathrm{mod}\,A$. Por el Teorema 2.2.6, tenemos que $\mathcal{R}T$ es un B-módulo τ-rígido. Entonces solo resta probar que $\mathrm{Hom}_B(P^*, \mathcal{R}T) = 0$. Sabemos que $\mathcal{R}T$ es un submódulo de T, entonces

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(P^*, \mathcal{R}T) \to \mathrm{Hom}_A(P^*, T) = 0.$$

Así , $\mathrm{Hom}_B(P^*, \mathcal{R}T) = 0$. Por lo tanto, $(\mathcal{R}T, P^*)$ es un par τ-rígido para $\operatorname{mod} B$.

Si además (T, P) satisface la igualdad $|T| + |P| = |A|$, mostraremos que $(\mathcal{R}T, P^*)$ es un par τ-inclinante soportado para $\operatorname{mod} B$.

Primero supongamos que $\widetilde{P}$ es un sumando directo de P. Entonces T es un B-módulo, y así $\mathcal{R}T \cong T$. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}T| + |P^*| &= |T| + |P| - 1 \\ &= |A| - 1 \\ &= |B|. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que $\widetilde{P}$ no es un sumando directo de P. Entonces $P^* = P \cong \mathcal{R}P$. Por la Proposición 1.5.12, es suficiente ver que $\operatorname{Fac} \mathcal{R}T = {}^{\perp}(\tau_B \mathcal{R}T) \cap P^{\perp}$. Como $\mathrm{Hom}_B(\mathcal{R}T, \tau_B \mathcal{R}T) = 0$ y $\mathrm{Hom}_B(P, \mathcal{R}T) = 0$, entonces $\operatorname{Fac} \mathcal{R}T \subseteq {}^{\perp}(\tau_B \mathcal{R}T) \cap P^{\perp}$.

Sea $Y \in {}^{\perp}(\tau_B \mathcal{R}T) \cap P^{\perp}$. De la Proposición 2.2.8, tenemos que $\mathcal{E}Y \in {}^{\perp}(\tau_A T)$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_A(P, \mathcal{E}Y) &= \mathrm{Hom}_B(\mathcal{R}P, Y) \\ &= \mathrm{Hom}_B(P, Y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{E}Y \in {}^{\perp}(\tau_A T) \cap P^{\perp} = \operatorname{Fac} T$. Así, $Y \cong \mathcal{R}\mathcal{E}Y \in \operatorname{Fac} \mathcal{R}T$. Por lo tanto, $(\mathcal{R}T, P^*)$ es un par τ-inclinante soportado para $\operatorname{mod} B$. $\square$

Como un caso particular del resultado anterior, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.2.10. *Sea B un álgebra y $A = B[P_0]$.*

a) Si M es un B-módulo τ-inclinante básico, entonces $\mathcal{E}M \oplus S$ es un A-módulo τ-inclinante básico.

b) Si T es un A-módulo τ-inclinante básico, entonces $\mathcal{R}T$ es un B-módulo τ-inclinante.

En general, dado un A-módulo τ-inclinante soportado básico, $\mathcal{R}T$ no resulta ser básico debido a que $\mathcal{R}$ no preserva módulos indescomponibles.

Lema 2.2.11. *Sea (T, P) un par τ-inclinante soportado básico para* $\operatorname{mod} A$. *Entonces $(\mathcal{R}T, P^*)$ es básico si y sólo si, se satisfacen algunas de las siguientes condiciones:*

i) S es un sumando directo de T.

ii) $\widetilde{P}$ *es un sumando directo de* P.

Más aún, si S *es sumando directo de* T *se tiene que existe un* B*-módulo* M *tal que* $T = \mathcal{E}M \oplus S$.

Demostración. Supongamos que S no es sumando directo de T y $\widetilde{P}$ no es sumando directo de P. Si $T = \bigoplus_{i=1}^{n} T_i$, tenemos que $\mathcal{R}T_i \neq 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Entonces $\mathcal{R}T = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{R}T_i$ tiene al menos n-sumandos indescomponibles. Además, $P^* \cong P$. Luego, $n + |P^*| = |B| + 1 > |B|$ y, por lo tanto, $(\mathcal{R}T, P^*)$ no es básico.

Recíprocamente, supongamos que $\widetilde{P}$ es sumando directo de P. Entonces, de $\operatorname{Hom}_A(P, T) = 0$, tenemos que T es un B-módulo. Así, $\mathcal{R}T \cong T$ es un B-módulo básico. Más aún, P^* es básico pues es sumando directo de P. Por lo tanto, $(\mathcal{R}T, P^*)$ es un par τ-inclinante soportado básico.

Finalmente, supongamos que $(T, P) = (S \oplus X, P)$ es un par τ-inclinante soportado básico para $\operatorname{mod} A$. En particular, S no es un sumando directo de X y así $\operatorname{Hom}_A(S, X) = 0$. Entonces, $X \in S^{\text{perp}}$. Luego de la Proposición 2.1.4 $\mathcal{E}\mathcal{R}X \cong X$ y así $\mathcal{R}X$ es un B- módulo básico obteniendo el resultado. Además, considerando el B- módulo $M = \mathcal{R}X$, tenemos que $(T, P) = (S \oplus \mathcal{E}M, P)$. □

Sigue directamente del Teorema 2.2.9 que existen morfismos entre los correspondientes posets de módulos τ-inclinantes soportados, como se establece en el siguiente corolario.

Corolario 2.2.12. *Los funtores* $\mathcal{E}$ *y* $\mathcal{R}$ *inducen morfismos:*

$$\begin{aligned} e : \mathrm{s}\tau - \operatorname{tilt} B &\to \mathrm{s}\tau - \operatorname{tilt} A \\ (M, Q) &\to (\mathcal{E}M \oplus S, Q) \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} r : \mathrm{s}\tau - \operatorname{tilt} A &\to \mathrm{s}\tau - \operatorname{tilt} B \\ (T, P) &\to (\widehat{T}, P^*) \end{aligned}$$

respectivamente, donde $\widehat{T}$ *es el (único salvo isomorfismo)* B*-módulo* τ*-rígido básico tal que* $\operatorname{add} \widehat{T} = \operatorname{add} \mathcal{R}T$. *Más aún, tenemos que* $re = \mathrm{id}_{\mathrm{s}\tau - \operatorname{tilt} B}$.

Demostración. Del Teorema 2.2.9, se deduce que r y e son morfismos. Más aún, la relación $re = \mathrm{id}_{\mathrm{s}\tau - \operatorname{tilt} B}$ sigue de $\mathcal{R}\mathcal{E} \cong \mathrm{id}_{\operatorname{mod} B}$. □

Ahora estudiaremos los pares de torsión asociados a un módulo τ-inclinante T. Dado T un módulo τ-inclinante sobre un álgebra C, tenemos que T determina un par de torsión $({}^{\perp}\tau T, T^{\perp})$ en $\operatorname{mod} C$. Previamente, recordaremos las siguientes definiciones.

Sea $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ un par de torsión para $\operatorname{mod} C$. Entonces:

- Si cada C-módulo indescomponible X pertenece o bien a $\mathcal{T}$ o bien a $\mathcal{F}$, entonces $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es un **par de torsión escindido**.

- Si $\mathcal{T}$ es cerrado por submódulos, entonces $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es un **par de torsión hereditario**.

Teorema 2.2.13. *i) Sean T un B-módulo τ-inclinante y X un B-módulo. Entonces se cumplen las siguientes condiciones.*

a) $X \in^{\perp} \tau_B T$ si y sólo si $\mathcal{E}X \in^{\perp} (\tau_A \mathcal{E}T)$.

b) $X \in T^{\perp}$ si y sólo si $\mathcal{E}X \in \mathcal{E}T^{\perp}$.

ii) Sea T un A-módulo τ-inclinante. Entonces se cumplen las siguientes condiciones.

a) Si $({}^{\perp}\tau_A T, T^{\perp})$ es un par de torsión hereditario para $\operatorname{mod} A$ *entonces $({}^{\perp}(\tau_B \mathcal{R}T), (\mathcal{R}T)^{\perp})$ es un par de torsión hereditario para* $\operatorname{mod} B$.

b) Si $({}^{\perp}\tau_A T, T^{\perp})$ es un par de torsión escindido para $\operatorname{mod} A$ *entonces $({}^{\perp}(\tau_B \mathcal{R}T), (\mathcal{R}T)^{\perp})$ es un par de torsión escindido para* $\operatorname{mod} B$.

Demostración. $i)$ $a)$ Como T es un A-módulo τ-inclinante, sabemos que ${}^{\perp}\tau_A T = \operatorname{Fac} T$. Luego el resultado sigue del hecho de que $X \in \operatorname{Fac} T$ si y sólo si $\mathcal{E}X \in \operatorname{Fac} \mathcal{E}T$.

$i)$ $b)$ El resultado sigue del hecho de que

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_A(\mathcal{E}T, \mathcal{E}X) &\cong \operatorname{Hom}_B(\mathcal{R}\mathcal{E}T, X) \\ &\cong \operatorname{Hom}_B(T, X). \end{aligned}$$

$ii)$ $a)$ Supongamos que $({}^{\perp}\tau_A T, T^{\perp})$ es un par de torsión hereditario para $\operatorname{mod} A$. Sean $X \in {}^{\perp}(\tau_B \mathcal{R}T)$ e Y un submódulo de X. Debemos ver que $Y \in {}^{\perp}(\tau_B \mathcal{R}T)$.

Como $X \in {}^{\perp}(\tau_B \mathcal{R}T)$, de la Proposición 2.2.8, tenemos que $\mathcal{E}X \in {}^{\perp}\tau_A T$. Entonces $\mathcal{E}Y \in {}^{\perp}\tau_A T$, pues $\mathcal{E}Y$ es un submódulo de $\mathcal{E}X$. Como ${}^{\perp}\tau_A T = \operatorname{Fac} T$, entonces $\mathcal{E}Y \in \operatorname{Fac} T$. Luego, $Y \in \operatorname{Fac} \mathcal{R}T = {}^{\perp}(\tau_B \mathcal{R}T)$. Por lo tanto, $({}^{\perp}(\tau_B \mathcal{R}T), (\mathcal{R}T)^{\perp})$ es un par de torsión hereditario para $\operatorname{mod} B$.

ii) *b*) Supongamos que $({}^{\perp}\tau_A T, T^{\perp})$ es un par de torsión escindido para $\operatorname{mod} A$ y consideremos $X \in \operatorname{mod} B$ indescomponible. Como $\mathcal{E}X \in \operatorname{mod} A$, tenemos que $\mathcal{E}X \in {}^{\perp}\tau_A T = \operatorname{Fac} T$ o bien $\mathcal{E}X \in T^{\perp}$. Luego, $X \in^{\perp} (\tau_B \mathcal{R}T)$ ó $X \in (\mathcal{R}T)^{\perp}$ probando el enunciado. $\square$

Terminaremos esta sección calculando el álgebra de endomorfismos de eT, donde T es un B-módulo τ-inclinante. Recordemos que, dada un álgebra C, $\nu_C = DC \otimes_C \_$ es el *funtor de Nakayama* para C.

Teorema 2.2.14. *Sea T un B-módulo τ-inclinante. Entonces,* $\operatorname{End}_A eT$ *es la extensión por un punto de* $\operatorname{End}_B T$ *por el módulo* $\operatorname{Hom}_B(T, \nu_B P_0)$.

Demostración. Notemos que

$$\operatorname{End}_A eT = \operatorname{End}_A(\mathcal{E}T \oplus S) \cong \begin{pmatrix} \operatorname{End}_A(\mathcal{E}T) & \operatorname{Hom}_A(S, \mathcal{E}T) \\ \operatorname{Hom}_A(\mathcal{E}T, S) & \operatorname{End}_A S \end{pmatrix}.$$

Como $\operatorname{End}_A S \cong k$ y $\mathcal{E}T \in S^{\mathrm{perp}}$, solo resta probar que $\operatorname{Hom}_A(\mathcal{E}T, S) \cong \operatorname{Hom}_B(T, \nu_B P_0)$. Para ello, consideremos la sucesión de Auslander-Reiten

$$0 \to \tau_A S \to E \to S \to 0 \tag{2.3}$$

en $\operatorname{mod} A$. Del Lema 1.4.7, E es un módulo inyectivo. Afirmamos que $\mathcal{R}E \cong \nu_B P_0$. En efecto, aplicando $\mathcal{R}$ a la sucesión (2.3), obtenemos que $\mathcal{R}E \cong \mathcal{R}(\tau_A S)$.

Por otro lado, consideremos la resolución proyectiva minimal de S,

$$0 \to P_0 \to \widetilde{P} \to S \to 0$$

De la Proposición 1.4.5, sabemos que existe una sucesión exacta

$$0 \to \tau_A S \to \nu_A P_0 \to \nu_A \widetilde{P} \to \nu_A S \to 0 \tag{2.4}$$

donde $\nu_A \widetilde{P} \cong S$ y $\nu_A P_0 = \bigoplus\limits_x I_x^A$, si $P_0 = \bigoplus\limits_x P_x^A$ donde P_x^A es el A-módulo proyectivo indescomponible correspondiente al vértice x. Del Lema 2.1.3, $I_x^A = \mathcal{E} I_x^B$. Entonces, aplicando el funtor $\mathcal{R}$ a (2.4) obtenemos que $\mathcal{R}(\tau_A S) \cong \mathcal{R}(\nu_A P_0) \cong \nu_B P_0$. Luego,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}E &\cong \mathcal{R}(\tau_A S) \\ &\cong \nu_B P_0. \end{aligned}$$

Aplicando $\operatorname{Hom}_A(\mathcal{E}T, -)$ a la sucesión (2.3) se tiene una sucesión exacta como sigue

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(\mathcal{E}T, \tau_A S) \to \operatorname{Hom}_A(\mathcal{E}T, E) \to \operatorname{Hom}_A(\mathcal{E}T, S) \to \operatorname{Ext}^1_A(\mathcal{E}T, \tau_A S).$$

Como $\mathrm{pd}_A S \leq 1$ y $\mathcal{E}T \in S^{\mathrm{perp}}$, la fórmula de Auslander-Reiten nos dice que $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}T, \tau_A S) = 0$. Por otro lado, como $\mathrm{Ext}^1_A(\mathcal{E}T, \tau_A S) \cong D\underline{\mathrm{Hom}}_A(S, \mathcal{E}T)$ y $\mathrm{Hom}_A(S, \mathcal{E}T) = 0$, obtenemos que $\mathrm{Ext}^1_A(\mathcal{E}T, \tau_A S) = 0$. Así, $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}T, E) \cong \mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}T, S)$.

Finalmente, como $E \in S^{\mathrm{perp}}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}T, S) &\cong \mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}T, E) \\ &\cong \mathrm{Hom}_A(T, \mathcal{R}E) \\ &\cong \mathrm{Hom}_B(T, \nu_B P_0) \end{aligned}$$

probando la afirmación. □

2.3. El carcaj asociado al poset de los módulos τ-inclinantes soportados

En esta sección estudiaremos el carcaj asociado al poset de los módulos τ-inclinantes soportados. El objetivo es comparar y establecer relaciones entre $Q(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}\, B)$ y $Q(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}\, A)$. Probaremos que el morfismo e definido en el Corolario 2.2.12 es una inmersión plena entre los correspondientes posets de módulos τ-inclinantes soportados. Por otro lado, analizaremos el comportamiento local de los predecesores y sucesores de un par τ-inclinante soportado $(T, P) \in Q(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}\, A)$ que pertenece a la imagen de e.

Comenzaremos con el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1. *(a) Los morfismos* $e : \mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}\, B \to \mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}\, A$ *y* $r : \mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}\, A \to \mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}\, B$ *son morfismos de posets.*

(b) Una flecha $\alpha : (M_1, Q_1) \to (M_2, Q_2)$ *en* $Q(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}\, B)$ *induce una flecha* $e\alpha : e(M_1, Q_1) \to e(M_2, Q_2)$ *en* $Q(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}\, A)$.

Demostración. (a) Sean (M_1, Q_1) y (M_2, Q_2) pares τ-inclinantes soportados para $\mathrm{mod}\, B$ tales que $(M_1, Q_1) < (M_2, Q_2)$. Tenemos que probar que $(\mathcal{E}M_1 \oplus S, Q_1) < (\mathcal{E}M_2 \oplus S, Q_2)$, o equivalentemente, $\mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}M_1 \oplus S) \subseteq \mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}M_2 \oplus S)$. Como $\mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}M_1 \oplus S) = \mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}M_1) \oplus \mathrm{Fac}\, S$, alcanza con mostrar que $\mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}M_1) \subseteq \mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}M_2)$.

Dado que $\mathrm{Fac}\, M_1 \subseteq \mathrm{Fac}\, M_2$, existe un epimorfismo $f : Z \to M_1$, con $Z \in \mathrm{add}\, M_2$. Aplicando el funtor exacto $\mathcal{E}$ a f, obtenemos un epimorfismo $\mathcal{E}f : \mathcal{E}Z \to \mathcal{E}M_1$, donde $\mathcal{E}Z \in \mathrm{add}\, \mathcal{E}M_2$. Luego, $\mathcal{E}M_1 \in \mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}M_2)$. Por lo tanto, $\mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}M_1) \subseteq \mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}M_2)$.

Recíprocamente, sean (T_1, P_1) y (T_2, P_2) pares τ-inclinantes soportados para $\operatorname{mod} A$, tales que $(T_1, P_1) < (T_2, P_2)$. Afirmamos que $\mathcal{R}T_1 \in \operatorname{Fac} \mathcal{R}T_2$. En efecto, como $\operatorname{Fac} T_1 \subseteq \operatorname{Fac} T_2$, existe un epimorfismo $g : W \to T_1$, con $W \in \operatorname{add} T_2$. Aplicando el funtor exacto $\mathcal{R}$ a g, obtenemos un epimorfismo $\mathcal{R}g : \mathcal{R}W \to \mathcal{R}T_2$, donde $\mathcal{R}W \in \operatorname{add} \mathcal{R}T_2$. Por lo tanto, $\mathcal{R}T_1 \in \operatorname{Fac}(\mathcal{R}T_2)$.

(b) Sea $\alpha : (M_1, Q_1) \to (M_2, Q_2)$ una flecha en $Q(\mathrm{s}\tau - \operatorname{tilt} B)$. Entonces, existe un par τ-inclinante soportado casi completo para $\operatorname{mod} B$, digamos (U, P), que es sumando directo de (M_1, Q_1) y de (M_2, Q_2). Como e es un morfismo de posets, tenemos que $e(M_1, Q_1) < e(M_2, Q_2)$. Observemos que $e(U, P) = (\mathcal{E}U \oplus S, P)$ es un par τ-inclinante soportado casi completo para $\operatorname{mod} A$, pues

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{E}U \oplus S| + |Q| &= |\mathcal{E}U| + 1 + |P| \\
&= |P| + |Q| + 1 \\
&= n - 1.
\end{aligned}
$$

Más aún, $e(U, P) = (\mathcal{E}U \oplus S, P)$ es un sumando directo de $e(M_1, Q_1)$ y de $e(M_2, Q_2)$. Así, de la definición de mutación, tenemos que $e(M_2, Q_2) = \mu^{-}_{\mathcal{E}X} e(M_1, Q_1)$. Por lo tanto, existe una flecha $e\alpha : e(M_1, Q_1) \to e(M_2, Q_2)$ en $Q(\mathrm{s}\tau - \operatorname{tilt} A)$. $\square$

Observación 2.3.2. El teorema anterior establece que el funtor de extensión se comporta bien con respecto a la mutación de módulos τ-inclinantes soportados. En algún sentido, $\mathcal{E}$ conmuta con la mutación.

Ahora estamos en condiciones de probar el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.3.3. *El morfismo $e : \mathrm{s}\tau - \operatorname{tilt} B \to \mathrm{s}\tau - \operatorname{tilt} A$ induce una inmersión plena de carcajes $e : Q(\mathrm{s}\tau - \operatorname{tilt} B) \to Q(\mathrm{s}\tau - \operatorname{tilt} A)$.*

Demostración. Del Teorema 2.3.1 y de la igualdad $re = \operatorname{Id}_{\mathrm{s}\tau-\operatorname{tilt} B}$, tenemos que el morfismo e es una inmersión de carcajes. Luego, solo resta probar que si existe una flecha $e(M, P) \to e(N, Q)$ en $Q(\mathrm{s}\tau - \operatorname{tilt} A)$, entonces existe una flecha $(M, P) \to (N, Q)$ en $Q(\mathrm{s}\tau - \operatorname{tilt} B)$.

Sabemos que $e(M, P) = (\mathcal{E}M \oplus S, P)$ y que $e(N, Q) = (\mathcal{E}N \oplus S, Q)$. Como existe una flecha de $e(M, P)$ a $e(N, Q)$, entonces existe un par τ-inclinante soportado casi completo, digamos (U, L), que es sumando directo de $e(M, P)$ y de $e(N, Q)$. Dado que S es sumando directo de M y de N, entonces S es sumando directo de U. Así

$U = U' \oplus S$, con $U' \in S^{\text{perp}}$. Entonces,

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}U| + |L| &= |\mathcal{R}U'| + |L| \\ &= |U'| + |L| \\ &= n - 2. \end{aligned}$$

Notemos que L es un B-módulo proyectivo, pues $\operatorname{Hom}_A(L, S) = 0$. Luego, tenemos que (U', L) es un par τ-inclinante soportado casi completo para $\operatorname{mod} B$ que es sumando directo de (M, P) y de (N, Q). Como r es un morfismo de posets, se tiene que existe una flecha $(M, P) \to (N, Q)$ en $Q(\mathrm{s}\tau - \operatorname{tilt} B)$. $\square$

A continuación, mostraremos un ejemplo en el que se puede visualizar la inmersión plena de $Q(\mathrm{s}\tau - \operatorname{tilt} B)$ en $Q(\mathrm{s}\tau - \operatorname{tilt} A)$.

Ejemplo 2.3.4. Consideremos las siguientes álgebras dadas por sus carcajes con relaciones:

$$B:\ \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 2 \arrow[l, bend right, "\alpha"'] \end{tikzcd} \qquad y \qquad A = B[P_2]:\ \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 2 \arrow[l, bend right, "\alpha"'] & 3 \arrow[l, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

$$\alpha\beta = 0 \qquad\qquad \alpha\beta = 0$$

Denotaremos todos los módulos por sus factores de composición.

El carcaj $Q(\mathrm{s}\tau - \operatorname{tilt} A)$ es el siguiente:

(0, [illegible] P_3)

Entonces la imagen de $Q(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}\, B)$ bajo la acción del funtor e es el subcarcaj indicado con líneas punteadas.

En lo que sigue, vamos a enunciar y demostrar algunos resultados técnicos sobre el comportamiento local de $Q(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}\, A)$. Estamos interesados en poder decidir cuando la imagen de e es cerrada por sucesores. El siguiente teorema nos da una condición suficiente para determinar cuando esto sucede.

Teorema 2.3.5. *Sean (T, P) y (T', P') pares τ-inclinantes soportados básicos para* $\mathrm{mod}\, A$ *tales que existe una flecha $(T, P) \to (T', P')$ en $Q(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}\, A)$. Si $(T, P) = e(M, Q)$ y $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}M, S) \neq 0$, entonces existe un par τ-inclinante soportado (N, R) en $\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}\, B$ tal que $(T', P') = e(N, R)$.*

Demostración. Sea $(T, P) = e(M, Q)$ un par τ-inclinante soportado para $\mathrm{mod}\, A$ tal que $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}M, S) \neq 0$. Entonces, del Lema de Schur tenemos que $S \in \mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}M)$.

Afirmamos que S es un sumando directo de T' donde (T', P') un par τ-inclinante soportado tal que existe una flecha de (T, P) a (T', P') en $Q(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}\, A)$. En efecto, si no fuera el caso tendríamos que $(T', P') = \mu_S(T, P)$. Más aún, como existe una flecha de (T, P) a (T', P') en $Q(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}\, A)$, entonces tenemos que $(T', P') = \mu_S^-(T, P)$. Luego, sigue de la Definición 1.5.14 que $S \notin \mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}M)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $T' = S \oplus Y$.

Como $S \oplus Y$ es un módulo τ-rígido básico, tenemos que $\mathrm{Ext}^1_A(S, Y) = 0$ y que $\mathrm{Hom}_A(S, Y) = 0$. Entonces, $Y \in S^{perp}$. Luego, $Y \cong \mathcal{E}\mathcal{R}Y$. Además, como $\mathrm{Hom}_A(P', S \oplus Y) = 0$ tenemos que P' es un B-módulo proyectivo. Considerando el par τ-inclinante soportado $(\mathcal{R}Y, P')$ obtenemos el resultado. $\square$

En el mencionado teorema no se puede omitir la hipótesis de que $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}M, S) \neq 0$, como lo muestra nuestro próximo ejemplo.

Ejemplo 2.3.6. Consideremos las siguientes álgebras dadas por sus carcajes con relaciones:

$$B: \begin{tikzcd} 1 & & \\ & 3 \arrow[ul, "\beta"'] \arrow[dl, "\gamma"] & 4 \arrow[l, "\alpha"] \\ 2 & & \end{tikzcd} \qquad y \qquad B[P_3]: \begin{tikzcd} 1 & & 4 \arrow[dl, "\alpha"'] \\ & 3 \arrow[ul, "\beta"] \arrow[dl, "\gamma"] & \\ 2 & & 5 \arrow[ul, "\delta"'] \end{tikzcd}$$

$$\alpha\beta = 0 \qquad\qquad \alpha\beta = 0$$

No es difícil ver que $(S_1 \oplus S_4, P_2 \oplus P_3)$ es un par τ-inclinante soportado casi completo para $\mathrm{mod}\, A$ y sus complementos son $(S_5, 0)$ y $(0, P_5)$. Más aún como $S_5 \notin \mathrm{Fac}\,(S_1 \oplus S_4)$, entonces existe una flecha

$$(S_1 \oplus S_5 \oplus S_4, P_2 \oplus P_3) \to (S_1 \oplus S_4, P_2 \oplus P_3 \oplus P_5)$$

en $Q(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}\, A)$.

Notemos que un par τ-inclinante soportado, digamos (U, P), pertenece a la imagen de e si y sólo si S es un sumando directo de U. Entonces, $(S_1 \oplus S_5 \oplus S_4, P_2 \oplus P_3)$ pertenece a la imagen de e, mientras que el par $(S_1 \oplus S_4, P_2 \oplus P_3 \oplus P_5)$ no pertenece a la imagen de e. Luego e no es cerrada por sucesores en este ejemplo.

Por otra parte, nos interesa estudiar los predecesores de un par τ-inclinante soportado en $Q(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}\, A)$ que pertenece a la imagen de e. El siguiente resultado nos brinda información en esta dirección.

Teorema 2.3.7. *Sea (T, P) un par τ-inclinante soportado para* $\operatorname{mod} A$ *tal que existe un par τ-inclinante soportado (M, Q) en* $\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}\, B$ *con $(T, P) = e(M, Q) = (\mathcal{E}M \oplus S, P)$. Entonces existe exactamente un predecesor inmediato de (T, P) en $Q(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}\, A)$ que no pertenece a la imagen de e si y sólo sí* $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}M, S) \neq 0$.

Demostración. Supongamos que existe exactamente un predecesor inmediato de (T, P) en $Q(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}\, A)$ que no pertenece a la imagen de e y supongamos que $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}M, S) = 0$. Entonces, $S \notin \mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}M)$. De la Definición 1.5.14, tenemos que $\mu_S(T, P)$ es una mutación a izquierda de (T, P) y, en consecuencia, existe una flecha de (T, P) a $\mu_S(T, P)$ en $Q(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}\, A)$. Luego, todos los predecesores (T', P') de (T, P) satisfacen que $T' = S \oplus M$ con $M \in S^{perp}$. Por lo tanto, todos los predecesores de (T, P) pertenecen a la imagen de e, lo que es una contradicción.

Recíprocamente, sea $(T, P) \in \mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}\, A$ tal que $(T, P) = (\mathcal{E}M \oplus S, P)$ y $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}M, S) \neq 0$. Veamos que existe sólo un predecesor inmediato de (T, P) que no tiene a S como sumando directo.

De la definición de $Q(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}\, A)$, tenemos que existe a lo sumo un predecesor inmediato de (T, P) que no tiene a S como sumando directo. Supongamos que todos los predecesores inmediatos de (T, P) tienen a S como sumando directo. Entonces existe un sucesor inmediato de (T, P), digamos (T', P') en $Q(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}\, A)$, tal que S no es un sumando directo de (T', P'). Así, por construcción, tenemos que $(T', P') = \mu_S^+(T, P)$. De la Definición 1.5.14 se sigue que $S \notin \mathrm{Fac}\,(\mathcal{E}M)$ y luego $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}M, S) = 0$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, probamos que existe solo un predecesor inmediato de (T, P) que no tiene a S como sumando directo, y en consecuencia no pertenece a la imagen de e. □

2.4. Extensiones por módulos no proyectivos

A lo largo de todo el capítulo nos concentramos en estudiar el comportamiento de los módulos τ-inclinantes soportados sobre álgebras extendidas por un módulo proyectivo. Una pregunta natural es que sucede si uno extiende por cualquier módulo, sin ser necesariamente proyectivo. En esta sección, probaremos que el Teorema 2.2.9 vale si y sólo si extendemos por un módulo proyectivo. Comenzaremos con la siguiente observación.

Observación 2.4.1. Dados M un B-módulo e y un vértice en Q_B, tenemos que si S_y es sumando directo de $\mathrm{top}\,\mathcal{E}M$, entonces S_y es sumando directo de $\mathrm{top}\,M$. En efecto, si S_y es sumando directo de $\operatorname{top}\mathcal{E}M$, entonces existe un epimorfismo $f : \mathcal{E}M \to S_y$. Aplicando $\operatorname{Hom}_A(B,-)$ a f obtenemos un epimorfismo

$$\operatorname{Hom}_A(B,\mathcal{E}M) \to \operatorname{Hom}_A(B,S_y) \to 0.$$

Como S_y es un B-módulo, tenemos que $\operatorname{Hom}_A(B,S_y) \cong S_y$. Por otra parte, de la adjunción, se obtiene que

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_A(B,\mathcal{E}M) &\cong \operatorname{Hom}_B(\mathcal{R}B,M)\\ &\cong \operatorname{Hom}_B(B,M)\\ &\cong M\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\operatorname{Hom}_B(M,S_y) \neq 0$ y en consecuencia, S_y es sumando directo de $\operatorname{top} M$.

Estamos ahora en condiciones de probar los resultados principales de la sección.

Teorema 2.4.2. *Sean B un álgebra, X un B-módulo y $A = B[X]$. Si $\mathcal{E}T \oplus S$ es un A-módulo τ-inclinante soportado, para todo B-módulo τ-inclinante soportado T, entonces X es un B-módulo proyectivo.*

Demostración. Supongamos que X no es un B- módulo proyectivo. Como B es un B-módulo τ-inclinante tenemos, por hipótesis, que $\mathcal{E}B\oplus S$ es un A-módulo τ-inclinante. En particular, $\operatorname{Hom}_A(\mathcal{E}B,\tau_A S) = 0$. Como $\mathcal{R}\tau_A S$ es un submódulo de $\tau_A S$, tenemos que $\operatorname{Hom}_A(\mathcal{E}B,\mathcal{R}\tau_A S) = 0$.

Consideremos

$$\begin{tikzcd} P(X) \arrow[r] \arrow[dr] & \widetilde{P} \arrow[r] & S \arrow[r] & 0 \\ & X \arrow[u] & & \end{tikzcd}$$

la presentación proyectiva minimal de S en $\operatorname{mod} A$, donde $P(X)$ es la cubierta proyectiva de X. De la Proposición 1.4.5, tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to \tau_A S \to \nu_A P(X) \to \nu_A \widetilde{P} \to \nu_A S \to 0 \tag{2.5}$$

Aplicando $\mathcal{R}$ a (2.5) tenemos que $\mathcal{R}(\tau_A S) \cong R(\nu_A P(X))$, pues $\nu_A\widetilde{P} \cong S$. Luego, $\operatorname{Hom}_A(\mathcal{E}B,\mathcal{R}(\nu_A P(X))) = 0$ y, en particular, $\operatorname{Hom}_A(\mathcal{E}P(X),\mathcal{R}(\nu_A P(X))) = 0$.

Ahora, queremos ver que existe al menos un sumando directo indescomponible de $P(X)$, digamos P_j (asociado al vértice j), tal que $\operatorname{Hom}_A(\mathcal{E}P_j, S_j) \neq 0$. Notemos que, como k-espacio vectorial, $\mathcal{E}M \cong M \oplus \operatorname{Hom}_B(X,M)$, para M un B-módulo cualquiera.

Si existe P_j sumando directo de $P(X)$ tal que $\mathrm{Hom}_B(X, P_j) = 0$, entonces $\mathcal{E}P_j \cong P_j$ y así $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}P_j, S_j) \neq 0$. Supongamos entonces que $\mathrm{Hom}_B(X, P_j) \neq 0$, para todo P_j sumando directo de $P(X)$. Sea $f : X \to P(X)$ morfismo no nulo. Si f es epimorfismo, entonces, por ser $P(X)$ proyectivo, tenemos que $P(X)$ es sumando directo de X y luego, $P(X) \cong X$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, debe existir P_j sumando directo de $P(X)$ tal que $\mathrm{Hom}_B(X, P_j) \neq 0$ y ningún morfismo $f : X \to P_j$ es un epimorfismo.

De la Observación 2.4.1, tenemos que $\mathrm{top}\,\mathcal{E}P_j \cong S^\alpha$, con $\alpha = \dim_k \mathrm{Hom}_B(X, P_j)$. Así,

$$\widetilde{P}^\alpha \xrightarrow{g} \mathcal{E}P_j \to 0$$

es la cubierta proyectiva de $\mathcal{E}P_j$. Luego el morfismo inducido, $\mathrm{rad}\,\widetilde{P}^\alpha \to \mathrm{rad}\,\mathcal{E}P_j$ es un epimorfismo. Por otra parte, $\mathrm{rad}\,\widetilde{P}^\alpha \cong X^\alpha$ y $\mathrm{rad}\,\mathcal{E}P_j \cong P_j$. Luego, tenemos un epimorfismo de X en P_j lo cual es una contradicción. Por lo tanto, se tiene que existe P_j sumando directo de $P(X)$ tal que $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}P_j, S_j) \neq 0$.

Como P_j es sumando directo de $P(X)$, tenemos que I_j es sumando directo de $\nu P(X)$. Además, como $\mathrm{Hom}_A(S_j, I_j) \neq 0$, entonces $\mathrm{Hom}_A(S_j, \mathcal{R}(I_j)) \neq 0$.

Luego, de $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}P_j, S_j) \neq 0$ y de $\mathrm{Hom}_A(S_j, \mathcal{R}(I_j)) \neq 0$ resulta que $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}P(X), \mathcal{R}(\nu_A P(X))) \neq 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, X es un B-módulo proyectivo. □

Recíprocamente, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.4.3. *Sean B un álgebra, X un B-módulo y $A = B[X]$. Si $\mathcal{R}T$ es un B-módulo τ-inclinante soportado, para todo A-módulo τ-inclinante soportado T, entonces X es un B-módulo proyectivo.*

Demostración. Supongamos que X no es un B-módulo proyectivo. Entonces, $\tau_B X \neq 0$. Como A es un A- módulo τ- inclinante entonces, por hipótesis, $\mathcal{R}A$ es un B- módulo τ-inclinante. Notemos que $A \cong B \oplus \widetilde{P}$, y así $\mathcal{R}A \cong B \oplus \mathcal{R}\widetilde{P}$.

Por otra parte, aplicando $\mathcal{R}$ a la sucesión exacta

$$0 \to X \to \widetilde{P} \to S \to 0$$

resulta $\mathcal{R}\widetilde{P} \cong X$. Luego, $\mathrm{Hom}_B(B, \tau_B X) = 0$ lo cual es una contradicción pues $\tau_B X \neq 0$. Por lo tanto, X es un B-módulo proyectivo. □

Finalizaremos la sección exhibiendo un ejemplo.

Ejemplo 2.4.4. Sea B el álgebra dada por el siguiente carcaj con relaciones:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, "\beta"'] & & 2 \arrow[ll, "\alpha"'] \\ & 3 \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd} \qquad \gamma\alpha\beta\gamma = 0$$

Consideremos $A = B[X]$, con $X = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}$. Entonces, el carcaj de $A = B[X]$ viene dado por:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, "\beta"'] & & 2 \arrow[ll, "\alpha"'] & \\ & 3 \arrow[ur, "\gamma"'] & & 4 \arrow[ll, "\lambda"] \end{tikzcd}$$

con relaciones $\gamma\alpha\beta\gamma = 0$ y $\lambda\gamma\alpha = 0$.

En este caso, la cubierta proyectiva de X es $P(X) = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{smallmatrix}$. Como $\dim_k \mathrm{Hom}_B(X, P(X)) = 1$, tenemos que $\mathcal{E}P(X) = \begin{smallmatrix} & 3 & \\ & 2 & \\ 1 & & 4 \\ & 3 & \end{smallmatrix}$.

Por otro lado, $\nu_A P(X) = I_3 = \begin{smallmatrix} & 3 & \\ & 2 & \\ 1 & & 4 \\ & 3 & \end{smallmatrix}$ y $\mathcal{R}(\nu_A P(X)) = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{smallmatrix}$. Es claro que $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}P(X), \mathcal{R}(\nu P(X))) \neq 0$ y así $\mathcal{E}B \oplus S$ no es un A-módulo τ-inclinante.

Capítulo 3

Extensiones escindidas por ideales nilpotentes

En este capítulo analizaremos el comportamiento de los módulos τ-inclinantes soportados sobre las extensiones escindidas de álgebras por ideales nilpotentes. Dada A un álgebra y R una extensión escindida de A por un ideal nilpotente M, daremos condiciones necesarias y suficientes que nos permitan relacionar los módulos τ-inclinantes soportados sobre A con los módulos τ-inclinantes soportados sobre R.

Por otra parte, estudiaremos la dimensión global de las extensiones escindidas por un ideal nilpotente. Daremos cotas de la dimensión global de A en función de la dimensión global de R y viceversa.

3.1. Extensiones escindidas de álgebras por ideales nilpotentes

En esta sección recordaremos algunas nociones básicas sobre extensiones escindidas de álgebras por ideales nilpotentes, así como también resultados conocidos sobre el tema en la literatura.

Recordemos que dadas A y R dos álgebras y $\pi : R \to A$ un homomorfismo de álgebras suryectivo, se dice que π es escindido si existe un homomorfismo de álgebras $\sigma : A \to R$ tal que $\pi\sigma = \mathrm{Id}_A$. En esta situación, el núcleo M de π es un ideal bilátero de R, y así se tiene la siguiente sucesión exacta de grupos:

$$0 \to M \xrightarrow{i} R \underset{\sigma}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} A \to 0 \tag{3.1}$$

donde i denota la inclusión. Como $\pi\sigma = \mathrm{Id}_A$, σ es inyectiva y en consecuencia A es isomorfa a una subálgebra de R. En particular, M hereda una estructura de $A-A-$ bimódulo mediante la restricción de escalares.

Como (3.1) es una sucesión exacta escindida, entonces hay un isomorfismo de grupos entre R y $A \oplus M$.

Definición 3.1.1. Sean A y R dos álgebras. Diremos que R es una **extensión escindida** de A por el ideal nilpotente M si existe un homomorfismo de álgebras suryectivo escindido $\pi : R \to A$ cuyo núcleo es M.

Como M es un ideal nilpotente se tiene que $M \subset \operatorname{rad} R$ y así $\operatorname{rad} A \cong \operatorname{rad} R/M$. En [AZ], I. Assem y D. Zacharia probaron que M está generado por flechas del carcaj de R. Así, el carcaj de A se obtiene a partir del carcaj de R eliminando algunas flechas, pero estas flechas no pueden ser elegidas de manera arbitraria. En [ACT], I. Assem, F. Coelho y S. Trepode dan condiciones necesarias y suficientes sobre el conjunto de generadores de M de manera tal de garantizar que R sea una extensión escindida de A. Antes de transcribir este resultado, necesitamos recordar la siguiente notación: dado w un camino en Q_A y α una flecha, notaremos $\alpha|w$ si existen subcaminos w_1, w_2 tales que $w = w_1\alpha w_2$.

Teorema 3.1.2. *[ACT, Teorema 2.4] Sean $\eta_R : kQ_R \to R$ una presentación de R, M un ideal de R generado por las clases módulo I_R de un conjunto de flechas S, donde I_R es el* $\ker(\eta_R)$. *Sea $\pi : R \to A$ la proyección. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) La sucesión exacta $0 \to M \to R \xrightarrow{\pi} A \to 0$ es una sucesión escindida y R es una extensión escindida de A por M.

ii) Sean $\widetilde{\sigma} : kQ_A \to kQ_R$ el morfismo inducido por la inclusión, e I_A el núcleo de la presentación inducida $\eta_A : kQ_A \to A$. Entonces $\widetilde{\sigma}(I_A) \subset I_R$.

iii) Sea $\widetilde{\pi} : kQ_R \to kQ_A$ el morfismo inducido por la proyección. Entonces, para cada relación $\rho \in I_R$, se tiene que $\widetilde{\pi}(\rho) = \rho$ ó $\widetilde{\pi}(\rho) = 0$.

iv) Si $\rho = \sum_{i=1}^{m} c_i w_i$ es una relación minimal en I_R tal que existe i y $\alpha_i \in S$ con $\alpha_i|w_i$, entonces para cada $j \neq i$, existe $\alpha_j \in S$ tal que $\alpha_j|w_j$.

Como una consecuencia del teorema anterior, se tiene que si R es una extensión escindida de A, entonces $I_A = I_R \cap kQ_A$, ver [ACT, Corolario 2.5].

Las categorías de módulos sobre A y R están relacionadas por los clásicos funtores de cambio de escalares:

$$-\otimes_A R_R : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} R$$

y

$$-\otimes_R A_A : \operatorname{mod} R \to \operatorname{mod} A$$

Estos funtores satisfacen la siguiente relación de adjunción $-\otimes_A R_R \otimes_R A_A \cong \mathrm{Id}_{\operatorname{mod} A}$. En general, la composición inversa no es igual a la identidad en $\operatorname{mod} R$. Sin embargo funciona para módulos proyectivos (ver [AZ, 1.2], [AM, 1.2]), es decir, se tiene que un R-módulo X es proyectivo indescomponible si y sólo si

i) $X \otimes_R A$ es un proyectivo indescomponible en $\operatorname{mod} A$, y

ii) $X \otimes_R A \otimes_A R \cong X$ en $\operatorname{mod} R$.

En algunos casos, nos será de utilidad otra expresión del funtor $-\otimes_R A_A$: sigue de [AM, 1.1], que para cada R-módulo X existe un isomorfismo funtorial entre $X \otimes_R A_A$ y X/XM.

El siguiente resultado nos dice que el funtor $-\otimes_A R$ preserva módulos indescomponibles.

Lema 3.1.3. *[AM, Lema 1.2] Sea L un A-módulo. Existe una correspondencia biyectiva entre las clases de isomorfismo de sumandos directos indescomponibles de L en $\operatorname{mod} A$, y las clases de isomorfismos de sumandos directos indescomponibles de $L \otimes_A R$ en $\operatorname{mod} R$, dada por $N \to N \otimes_A R$.*

Los funtores $-\otimes_A R$ y $-\otimes_R A$ preservan ciertas propiedades homológicas, como establece el siguiente resultado.

Lema 3.1.4. *a) [AM, Corolario 1.3] Si $P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} N \to 0$ es una presentación proyectiva minimal de N en $\operatorname{mod} A$, entonces*

$$P_1 \otimes_A R \xrightarrow{f_1 \otimes 1_R} P_0 \otimes_A R \xrightarrow{f_0 \otimes 1_R} N \otimes_A R \longrightarrow 0$$

es una presentación proyectiva minimal de $N \otimes_A R$ en $\operatorname{mod} R$.

b) [AZ, Lemma 3.1] Si $f : P \to X$ es una cubierta proyectiva en $\operatorname{mod} R$*, entonces $f \otimes 1_A : P \otimes_R A \to X \otimes_R A$ es una cubierta proyectiva en* $\operatorname{mod} A$*.*

Terminaremos esta sección con un ejemplo.

Ejemplo 3.1.5. Consideremos $A = kQ_A/I_A$ el álgebra dada por el siguiente carcaj:

$$Q_A : \quad \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & 2 \arrow[dl, "\beta"'] & \\ 1 & & 3 \arrow[ul, "\alpha"'] \\ & 4 \arrow[ul, "\delta"] & \end{tikzcd}$$

con $I_A =< \alpha\beta >$ y $R = kQ_R/I_R$ el álgebra dada por el siguiente carcaj:

$$Q_R : \quad \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & 2 \arrow[dl, "\beta"'] & \\ 1 & & 3 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\ & 4 \arrow[ul, "\delta"] \arrow[loop left, "\rho"] & \end{tikzcd}$$

con $I_R =< \alpha\beta,\ \gamma\delta,\ \rho^3 >$.

Sigue del Teorema 3.1.2 que R es una extensión escindida de A por el ideal nilpotente $M =< \gamma, \rho >$. Se puede ver que, como A-módulo, M es isomorfo a $(S_4)^5$, donde S_4 denota el simple en el vértice 4.

Sea $N = S_3 \in \operatorname{mod} A$. Para calcular $S_3 \otimes_A R$, consideremos

$$\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \to 3 \to 0 \tag{3.2}$$

la presentación proyectiva minimal de S_3 en $\operatorname{mod} A$. Aplicando $- \otimes_A R$ a (3.2), como el funtor $- \otimes_A R$ transforma proyectivos en proyectivos, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 2 & & 4 \\ & & 4 \\ & & 4\end{smallmatrix} \to 3 \otimes_A R \to 0 \tag{3.3}$$

Sigue del Lema 3.1.4, que (3.3) es una presentación proyectiva minimal de $S_3 \otimes_A R$, y en consecuencia $S_3 \otimes_A R \cong \begin{smallmatrix}3\\4\\4\\4\end{smallmatrix}$.

Recíprocamente, consideremos $X = \begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix} \in \operatorname{mod} R$ y

$$\begin{smallmatrix} & 4 & \\ 1 & & 4 \\ & 4 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 2 & & 4 \\ & 4 & \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix} \to 0 \tag{3.4}$$

una presentación proyectiva minimal de X en $\operatorname{mod} R$. Aplicando el funtor $- \otimes_R A$, obtenemos

$$\begin{smallmatrix}4\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix} \otimes_R A \to 0 \tag{3.5}$$

que es una presentación proyectiva de $X \otimes_R A$, pero no minimal. Se obtiene que $X \otimes_R A \cong S_3$.

3.2. Módulos τ-inclinantes sobre extensiones escindidas por ideales nilpotentes

A lo largo de esta sección, R será una extensión escindida de A por el ideal nilpotente M. Estudiaremos el comportamiento de los funtores $- \otimes_A R$ y $- \otimes_R A$ en las subcategorías $\operatorname{s\tau-tilt} A$ y $\operatorname{s\tau-tilt} R$, respectivamente.

Comenzaremos recordando el siguiente lema de [AM].

Lema 3.2.1. *[AM, Lema 2.1] Sea L un A-módulo. Entonces*

$$\tau_R(L \otimes_A R) \cong \operatorname{Hom}_A(R, \tau_A L).$$

El próximo teorema es una consecuencia inmediata de [AM, Teorema 2.3]. Para conveniencia del lector, incluiremos aquí la demostración.

Teorema 3.2.2. *Sean R una extensión escindida de A por el ideal nilpotente M y T_A un A-módulo. Entonces, $T \otimes_A R$ es un R-módulo τ-rígido (τ-inclinante, respectivamente) si y sólo si T_A es un A-módulo τ-rígido (τ-inclinante, respectivamente) y* $\operatorname{Hom}_A(T \otimes_A M, \tau_A T) = 0$.

Demostración. Sea T un A-módulo. Tenemos los siguientes isomorfismos de k-espacios vectoriales:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_R(T \otimes_A R, \tau_R(T \otimes_A R)) &\cong \operatorname{Hom}_R(T \otimes_A R, \operatorname{Hom}_A(R, \tau_A T)) \\
&\cong \operatorname{Hom}_A(T \otimes_A R \otimes_R R, \tau_A T) \\
&\cong \operatorname{Hom}_A(T \otimes_A R, \tau_A T) \\
&\cong \operatorname{Hom}_A(T \otimes_A (A \oplus M), \tau_A T) \\
&\cong \operatorname{Hom}_A(T, \tau_A T) \oplus \operatorname{Hom}_A(T \otimes_A M, \tau_A T).
\end{aligned}$$

Así, $T \otimes_A R$ es τ-rígido si y sólo si T es τ-rígido y $\mathrm{Hom}_A(T \otimes_A M, \tau_A T) = 0$. Más aún, sigue del Lema 3.1.3, que el número de sumandos indescomponibles no isomorfos dos a dos de T_A es igual al número de sumandos indescomponibles no isomorfos dos a dos de $T \otimes_A R$. Luego, queda demostrada la afirmación. $\square$

Una observación interesante es que el funtor $- \otimes_A R$ puede transformar módulos inclinantes en módulos τ-inclinantes no inclinantes como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.3. Consideremos $A = kQ_A$ el álgebra dada por el siguiente carcaj

$$A: \ 1 \xleftarrow{\ \beta\ } 2 \xleftarrow{\ \alpha\ } 3$$

y $R = kQ_R/I_R$ el álgebra dada por el siguiente carcaj

$$\begin{tikzcd} Q_R: \ 1 & 2 \arrow[l, "\beta"'] & 3 \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[from=1-1, to=1-3, bend right, "\eta"'] \end{tikzcd}$$

con la relación $\alpha\beta\eta = 0$.

Es claro que R es la extensión escindida de A por el ideal nilpotente $M =< \eta >$. Consideremos el A-módulo inclinante $T = 1 \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$.

Si consideramos

$$0 \to \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \to 3 \to 0$$

la presentación proyectiva minimal de S_3 y le aplicamos el funtor $- \otimes_A R$ obtenemos la presentación proyectiva minimal de $3 \otimes_A R$:

$$\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \to 3 \otimes_A R \to 0$$

de donde se desprende que $3 \otimes_A R \cong 3$. Por otra parte, como el funtor $- \otimes_A R$ transforma el A-módulo proyectivo $e_i A$ en el R-módulo proyectivo $e_i R$, con e_i el idempotente correspondiente al vértice i, tenemos que $T \otimes_A R = \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus 3$. En consecuencia, como $R \cong A \oplus M$, obtenemos que $T \otimes_A M \cong \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$. Así, como T es inclinante y $T \otimes_A M$ es sumando directo de T tenemos que $\mathrm{Hom}_A(T \otimes_A M, \tau_A T) = 0$. Luego, por el Teorema 3.2.2, podemos concluir que $T \otimes_A R$ es un R-módulo τ-inclinante. Veamos que $\mathrm{pd}_R(T \otimes_A R) > 1$.

La presentación proyectiva minimal de S_3 en $\operatorname{mod} R$ es

$$0 \to \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \to 3 \to 0$$

y entonces, $\mathrm{pd}_R S_3 = 2$. Por lo tanto, $\mathrm{pd}_R(T \otimes_A R) = 2$ y en consecuencia $T \otimes_A R$ es un R-módulo τ-inclinante no inclinante.

A continuación, daremos una condición suficiente para decidir cuando $T \otimes_A R$ es un R-módulo τ-inclinante. Más aún, en este caso se puede ver que el funtor $- \otimes_A R$ preserva el orden definido en $Q(\mathrm{s}\tau - \operatorname{tilt} A)$.

Teorema 3.2.4. *Sea R una extensión escindida de A por el ideal nilpotente M. Consideremos T un A-módulo τ-inclinante tal que $M \in \operatorname{Fac} T$. Entonces $T \otimes_A R$ es un R-módulo τ-inclinante. Más aún, si T' es un A-módulo τ-inclinante tal que $T < T'$, entonces $T' \otimes_A R$ es un R-módulo τ-inclinante tal que $T \otimes_A R < T' \otimes_A R$.*

Demostración. Sea T un A-módulo τ-inclinante tal que $M \in \operatorname{Fac} T$. Como $\operatorname{Fac} T = {}^{\perp}(\tau_A T)$, se tiene que $\operatorname{Hom}_A(M, \tau_A T) = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_A(T \otimes_A M, \tau_A T) &\cong \operatorname{Hom}_A(T, \operatorname{Hom}_A(M, \tau_A T)) \\ &\cong 0. \end{aligned}$$

Luego, por el Teorema 3.2.2, tenemos que $T \otimes_A R$ es un R-módulo τ-inclinante.

Por otra parte, sea T' un A-módulo τ-inclinante tal que $T < T'$. Como $\operatorname{Fac} T \subset \operatorname{Fac} T'$, tenemos que $M \in \operatorname{Fac} T'$. Luego, $T' \otimes_A R$ es un R-módulo τ-inclinante.

Veamos ahora que $\operatorname{Fac}(T \otimes_A R) \subset \operatorname{Fac}(T' \otimes_A R)$. Como $\operatorname{Fac} T \subset \operatorname{Fac} T'$, tenemos que existe un epimorfismo $f : N \to T$ con $N \in \operatorname{add} T'$. Aplicando el funtor $- \otimes_A R$ a f, obtenemos un epimorfismo $f \otimes_A R : N \otimes_A R \to T \otimes_A R$ con $N \otimes_A R \in \operatorname{add}(T' \otimes_A R)$. Por lo tanto, $T \otimes_A R \in \operatorname{Fac}(T' \otimes_A R)$ y, en consecuencia, $\operatorname{Fac}(T \otimes_A R) \subset \operatorname{Fac}(T' \otimes_A R)$. $\square$

Corolario 3.2.5. *Sean $T = X \oplus U$ y T' A-módulos τ-inclinantes con X un A-módulo indescomponible tales que $M \in \operatorname{Fac} T$. Si $T' = \mu_X^+ T$ entonces $T' \otimes_A R = \mu^+_{X \otimes_A R}(T \otimes_A R)$.*

Demostración. Como $T' = \mu_X^+ T$, tenemos que $T < T'$. Así, por el Teorema 3.2.4 tenemos que $T \otimes_A R$ y $T' \otimes_A R$ son R-módulos τ-inclinantes tales que $T \otimes_A R < T' \otimes_A R$. Resta ver que $T' \otimes_A R = \mu_{X \otimes_A R}(T \otimes_A R)$.

Como $T' = \mu_X^+ T$, sabemos que el A-módulo τ-inclinante casi completo U es sumando de T y de T'. Por el Lema 3.1.3, sabemos que $|U \otimes_A R| = |U| = |A| - 1$. Como $|A| = |R|$, tenemos que $U \otimes_A R$ es un A-módulo τ-inclinante casi completo que es sumando directo de $T' \otimes_A R$ y $T \otimes_A R$ y, por lo tanto, $T' \otimes_A R = \mu^+_{X \otimes_A R}(T \otimes_A R)$. □

El corolario anterior establece que, bajo ciertas hipótesis, una flecha en $Q(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}\, A)$ induce una flecha en $Q(\mathrm{s}\tau - \mathrm{tilt}\, R)$.

El siguiente resultado nos dice que si $T \otimes_A R$ es un A-módulo τ-inclinante, entonces $\mathrm{End}_R(T \otimes_A R)$ es una extensión escindida de $\mathrm{End}_A T$. La demostración es análoga a [AM, Proposición 2.5].

Proposición 3.2.6. *Sea R una extensión escindida de A por el ideal nilpotente M. Consideremos T un A-módulo τ-inclinante tal que $\mathrm{Hom}_A(T \otimes_A M, \tau_A T) = 0$. Entonces $E = \mathrm{End}_R\,(T \otimes_A R)$ es una extensión escindida de $B = \mathrm{End}_A\, T$ por el ideal nilpotente $W = \mathrm{Hom}_A(T, T \otimes M)$.*

Demostración. Tenemos la siguiente secuencia de isomorfismos de k-espacios vectoriales

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_A(T \otimes_A R, T \otimes_A R) &\cong \mathrm{Hom}_A(T, \mathrm{Hom}_R(R, T \otimes_A R)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_A(T, T \otimes_A R) \\ &\cong \mathrm{Hom}_A(T, T) \oplus \mathrm{Hom}_A(T, T \otimes_A M). \end{aligned}$$

Así, obtenemos una sucesión exacta

$$0 \to W \to E \xrightarrow{\phi} B \to 0$$

donde $\phi : E \to B$ es un morfismo de álgebras y la estructura de ideal de W es inducida de la estructura de $B - B-$bimódulo canónica. Resta ver que W es nilpotente.

La multiplicación en W es inducida por la multiplicación en E, y para cada $w \in W$, la imagen de w está contenida en $T \otimes_A M$. Como M es nilpotente, existe $s \geq 0$ tal que, para cada secuencia $w_1, w_2, \cdots, w_s$ de elementos de W, tenemos que

$$\mathrm{Im}(w_1 w_2 \dots w_s) \subset T \otimes_A M^s.$$

Así $W^s = 0$. □

Por otro lado, estamos interesados en establecer condiciones que nos permitan decidir cuando $T \otimes_R A$ es un A-módulo τ-inclinante. Es importante para ello tener una buena descripción de $\tau_A(T \otimes_R A)$. El siguiente teorema, que resulta una generalización de [AZ, Lema 3.2], es una herramienta fundamental para ello.

Teorema 3.2.7. *Sea R una extensión escindida de A por el ideal nilpotente M. Consideremos T un R-módulo tal que $\operatorname{Tor}_1^R(T, A) = 0$. Entonces $\tau_A(T \otimes_R A) = \operatorname{Hom}_R(A, \tau_R T)$.*

Demostración. Sea $P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} T \to 0$ una presentación proyectiva minimal de T en $\operatorname{mod} R$. Por el Lema 3.1.4, tenemos que $f_0 \otimes_R 1_A : P_0 \otimes_R A \to T \otimes_R A$ y $f_1 \otimes_R 1_A : P_1 \otimes_R A \to \operatorname{Ker} f_0 \otimes_R A$ son cubiertas proyectivas en $\operatorname{mod} A$. Como $\operatorname{Tor}_1^R(T, A) = 0$, entonces $(\operatorname{Ker} f_0) \otimes_R A \cong \operatorname{Ker}(f_0 \otimes_R 1_A)$. Luego,

$$P_1 \otimes_R A \xrightarrow{f_1 \otimes_R 1_A} P_0 \otimes_R A \xrightarrow{f_0 \otimes_R 1_A} T \otimes_R A \longrightarrow 0 \tag{3.6}$$

es una presentación proyectiva minimal de $T \otimes_R A$ en $\operatorname{mod} A$. Aplicando $\operatorname{Hom}_A(-, A)$ a (3.6), obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_A(P_0 \otimes_R A, A) \arrow[r] \arrow[d, "\approx"] & \operatorname{Hom}_A(P_1 \otimes_R A, A) \arrow[r] \arrow[d, "\approx"] & \operatorname{Tr}_A(T \otimes_R A) \arrow[r] & 0 \\
\operatorname{Hom}_R(P_0, \operatorname{Hom}_A(A, A)) \arrow[r] \arrow[d, "\approx"] & \operatorname{Hom}_R(P_1, \operatorname{Hom}_A(A, A)) \arrow[d, "\approx"] & & \\
\operatorname{Hom}_R(P_0, A) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_R(P_1, A) \arrow[r] & \operatorname{Tr}_R T \otimes_R A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde la última fila se obtiene aplicando $\operatorname{Hom}_R(-, A)$ a la presentación proyectiva de T dada y aplicando la Proposición 1.4.1. Así tenemos un isomorfismo de A-módulos $\operatorname{Tr}_A(T \otimes_R A) \cong \operatorname{Tr}_R T \otimes_A A$. Luego,

$$\begin{aligned}
\tau_A(T \otimes_R A) &\cong D\operatorname{Tr}_A(T \otimes_R A) \\
&\cong D(\operatorname{Tr}_R T \otimes_R A) \\
&\cong \operatorname{Hom}_k(\operatorname{Tr}_R T \otimes_R A, k) \\
&\cong \operatorname{Hom}_R(A, \operatorname{Hom}_k(\operatorname{Tr}_R T, k)) \\
&\cong \operatorname{Hom}_R(A, \mathrm{D}\operatorname{Tr}_R T) \\
&\cong \operatorname{Hom}_R(A, \tau_R T)
\end{aligned}$$

donde k denota al cuerpo. $\square$

El teorema anterior nos permite dar una condición suficiente para obtener un módulo τ-rígido sobre A a partir de un módulo τ-rígido sobre R, como queda establecido en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.8. *Sea R una extensión escindida de A por el ideal nilpotente M. Sea T un R-módulo τ-rígido (τ-inclinante, respectivamente) tal que* $\mathrm{Tor}_1^R(T, A) = 0$. *Entonces $T \otimes_R A$ es un A-módulo τ-rígido (τ-inclinante, respectivamente).*

Demostración. Debemos ver que $\mathrm{Hom}_A(T \otimes_A R, \tau_A(T \otimes_R A)) = 0$. Para ello, tenemos la siguiente secuencia de isomorfismos de k-módulos:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_A(T \otimes_R A, \tau_A(T \otimes_R A)) &\cong \mathrm{Hom}_R(T, \mathrm{Hom}_A(A, \tau_A(T \otimes_R A))) \\ &\cong \mathrm{Hom}_R(T, \mathrm{Hom}_A(A, \mathrm{Hom}_R(A, \tau_R T))) \\ &\cong \mathrm{Hom}_R(T, \mathrm{Hom}_R(A \otimes_A A, \tau_R T)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_R(T, \mathrm{Hom}_R(A, \tau_R T)) \end{aligned}$$

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_R(-, \tau_R T)$ a la sucesión exacta de $R - R-$ bimódulos $0 \to M \to R \to A \to 0$, obtenemos el siguiente morfismo de R-módulos:

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(A, \tau_R T) \to \mathrm{Hom}_R(R, \tau_R T). \tag{3.7}$$

Luego, como $\mathrm{Hom}_R(R, \tau_R T) \cong \tau_R T$, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_R(T, -)$ a (3.7), obtenemos el siguiente morfismo:

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(T, \mathrm{Hom}_R(A, \tau_R T)) \to \mathrm{Hom}_R(T, \tau_R T).$$

Así, como T es un R-módulo τ-rígido tenemos que $\mathrm{Hom}_R(T, \mathrm{Hom}_R(A, \tau_R T)) = 0$ y en consecuencia $T \otimes_R A$ es un A-módulo τ-rígido.

Si además $|T| = |R|$, veamos que $T \otimes_R A$ es τ-inclinante. Por el Teorema 1.5.9, debemos ver que ${}^{\perp}\tau_A(T \otimes_R A) \subset \mathrm{Fac}\,(T \otimes_R A)$.

Sea $X \in^{\perp} \tau_A(T \otimes_R A)$. Entonces $\mathrm{Hom}_A(X, \tau_A(T \otimes_R A)) = 0$. Tenemos la siguiente secuencia de isomorfismos de k-módulos:

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{Hom}_A(X, \tau_A(T \otimes_R A)) &\cong \mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{Hom}_R(A, \tau_R T)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_R(X \otimes_A A, \tau_R T) \\ &\cong \mathrm{Hom}_R(X, \tau_R T) \end{aligned}$$

Luego, tenemos que $X \in^{\perp} \tau_R T = \mathrm{Fac}\, T$ y, en consecuencia, existe un epimorfismo $f : T' \to X$ con $T' \in \mathrm{add}\, T$. Aplicando $- \otimes_R A$ a f, obtenemos el epimorfismo $f \otimes 1_A : T' \otimes_R A \to X \otimes_R A$, con $T' \otimes_R A \in \mathrm{add}\,(T \otimes_R A)$. Como $X \otimes_R A \cong \frac{X}{XM} \cong X$, entonces $X \in \mathrm{Fac}\,(T \otimes_R A)$. Por lo tanto, $T \otimes_R A$ es un A-módulo τ-inclinante. $\square$

Proposición 3.2.9. *Sea R una extensión escindida de A por el ideal nilpotente M. Los funtores $-\otimes_A R$ y $-\otimes_R A$ inducen biyecciones mutuamente inversas entre la clase de R-módulos τ-inclinantes inducidos, digamos T, tales que* $\mathrm{Tor}_1^R(T,A)=0$, *y la clase de A-módulos τ-inclinantes N tales que* $\mathrm{Hom}_A(N\otimes_A M,\tau_A N)=0$.

Demostración. Sea T un R-módulo τ-inclinante inducido tal que $\mathrm{Tor}_1^R(T,A)=0$. Entonces del Teorema 3.2.8, tenemos que $T\otimes_R A$ es un A-módulo τ-inclinante. Por otro lado, como T es inducido, sabemos que existe un A-módulo U tal que $T\cong U\otimes_A R$. Así, tenemos que $T\otimes_R A\cong U\otimes_A R\otimes_R A\cong U$. Luego, U es un A-módulo τ-inclinante y por construcción resulta que $\mathrm{Hom}_A(T\otimes_A M,\tau_A T)=0$.

Recíprocamente, sea N un A-módulo τ-inclinante tal que $\mathrm{Hom}_A(N\otimes_A M,\tau_A N)=0$. Por el Teorema 3.2.2, sabemos que $N\otimes_A R$ es un R-módulo τ-inclinante. Resta probar que $\mathrm{Tor}_1^R(N\otimes_A R,A)=0$. Consideremos

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dr] & & P_0 \arrow[r, "f_0"] & N \arrow[r] & 0 \\ & \mathrm{Im}(f_1) \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

la presentación proyectiva minimal de N en $\mathrm{mod}\,A$. Del Lema 3.1.4, sabemos que $f_1(P_1)\otimes_A R\cong \mathrm{Ker}(f_0\otimes 1_R)$, con lo cual tenemos la siguiente sucesión exacta corta:

$$0\to f_1(P_1)\otimes_A R\to P_0\otimes_A R\to N\otimes_A R\to 0 \tag{3.8}$$

Aplicando $-\otimes_R A$ a (3.8), obtenemos el siguiente diagrama con filas exactas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^R(N\otimes_A R,A) \arrow[r] & \mathrm{Im}(f_1)\otimes_A R\otimes_R A \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & P_0\otimes_A R\otimes_R A \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & N\otimes_A R\otimes_R A \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\ & 0 \arrow[r] & \mathrm{Im}(f_1) \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\mathrm{Tor}_1^R(N\otimes_A R,A)=0$. □

Ahora centraremos nuestra atención en los pares τ-inclinantes soportados.

Ejemplo 3.2.10. Consideremos $A=kQ_A/I_A$ el álgebra dada por el siguiente carcaj:

$$Q_A:\ 1 \xleftarrow{\beta} 2 \xleftarrow{\alpha} 3$$

con $I_A=<\alpha\beta>$ y $R=kQ_R/I_R$ el álgebra dada por el siguiente carcaj

$$\begin{tikzcd} Q_R:\ 1 & 2 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r, bend right, "\gamma"'] & 3 \arrow[l, bend right, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

con $I_R =< \alpha\beta,\ \gamma\alpha\gamma\alpha >$.

Entonces tenemos que R es una extensión escindida de A por el ideal nilpotente M generado por γ. Como A-módulo, M es isomorfo a $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}^2 \oplus 3^2$.

Consideremos el par τ-rígido $(N,P) = \left(2,\ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}\right) \in \operatorname{mod} A$. Como $2 \otimes M \cong \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \oplus 3$ y $\tau_A S_2 = 1$, tenemos que $\operatorname{Hom}_A(2 \otimes M, \tau_A 2) = 0$ y así S_2 satisface la condición del Teorema 3.2.2. Luego, $2 \otimes_A R$ es un R-módulo τ-rígido.

Por otro lado, tenemos que $2 \otimes_A R \cong \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$ y $\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \otimes R \cong \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$. Luego $\left(\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{matrix},\ \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\right)$ no es un par τ-rígido para $\operatorname{mod} R$ pues $\operatorname{Hom}_R\left(\begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{matrix},\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\right) \neq 0$.

En general, el funtor $- \otimes_A R$ no preserva pares τ-inclinantes soportados. El siguiente resultado nos da una condición necesaria y suficiente que garantice este hecho.

Proposición 3.2.11. *Sea (T,P) un par τ-rígido (τ-inclinante soportado, respectivamente) para* $\operatorname{mod} A$. *Entonces $(T \otimes_A R, P \otimes_A R)$ es un par τ-rígido (τ-inclinante soportado, respectivamente) para* $\operatorname{mod} R$ *si y sólo si* $\operatorname{Hom}_A(T \otimes_A M, \tau_A T) = 0$ *y* $\operatorname{Hom}_A(P, T \otimes_A M) = 0$.

Demostración. Supongamos que (T,P) es un par τ-rígido. Por el Teorema 3.2.2, tenemos que $T \otimes_A R$ es un R-módulo τ-rígido si y sólo si T es un A-módulo τ-rígido y $\operatorname{Hom}_A(T \otimes_A M, \tau_A T) = 0$.

Por otro lado, tenemos la siguiente secuencia de isomorfismos de k-espacios vectoriales:

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_R(P \otimes_A R, T \otimes_A R) &\cong \operatorname{Hom}_A(P, \operatorname{Hom}_R(R, T \otimes_A R)) \\ &\cong \operatorname{Hom}_A(P, (T \otimes_A R)_A) \\ &\cong \operatorname{Hom}_A(P, T \otimes_A (A \oplus M)) \\ &\cong \operatorname{Hom}_A(P, T \otimes_A A \oplus T \otimes_A M) \\ &\cong \operatorname{Hom}_A(P, T) \oplus \operatorname{Hom}_A(P, T \otimes_A M) \end{aligned}$$

Luego, $(T \otimes_A R, P \otimes_A R)$ es un par τ-rígido si y sólo si $\operatorname{Hom}_A(T \otimes_A M, \tau_A T) = 0$ y $\operatorname{Hom}_A(P, T \otimes_A M) = 0$.

Si además, $|T|+|P|=|A|$, entonces del Lema 3.1.3 tenemos que

$$\begin{aligned} |T\otimes_A R|+|P\otimes_A R| &= |T|+|P| \\ &= |A| \\ &= |R|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(T\otimes_A R, P\otimes_A R)$ es un par τ-inclinante soportado. $\square$

Por otra parte, si comenzamos con un par τ-rígido (τ-inclinante soportado, respectivamente) (T,P) en $\operatorname{mod} R$ tal que $\operatorname{Tor}_R^1(T,A)=0$, la proposición que sigue muestra que $(T\otimes_R A, P\otimes_R A)$ siempre es un par τ-rígido (τ-inclinante soportado, respectivamente) para $\operatorname{mod} A$.

Proposición 3.2.12. *Sea (T,P) un par τ-inclinante soportado (τ-rígido, respectivamente) para* $\operatorname{mod} R$ *tal que* $\operatorname{Tor}_1^R(T,A)=0$*. Entonces $(T\otimes_R A, P\otimes_R A)$ es un par τ-inclinante soportado (τ-rígido, respectivamente) para* $\operatorname{mod} A$*.*

Demostración. Supongamos que (T,P) es un par τ-rígido para $\operatorname{mod} R$. Como $\operatorname{Tor}_1^R(T,A)=0$, sigue del Teorema 3.2.8, que $T\otimes_R A$ es un A-módulo τ-rígido. Veamos que $\operatorname{Hom}_A(P\otimes_R A, T\otimes_R A)=0$. Entonces,

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_A(P\otimes_R A, T\otimes_R A) &\cong \operatorname{Hom}_R(P, \operatorname{Hom}_A(A, T\otimes_R A)) \\ &\cong \operatorname{Hom}_R(P, (T\otimes_R A)_R) \end{aligned}$$

Aplicando $T\otimes_R -$ a la sucesión exacta de $R-R-$bimódulos

$$0\to M\to R\xrightarrow{\pi} A\to 0$$

obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0\to K\to T\otimes_R R\to T\otimes_R A\to 0 \tag{3.9}$$

donde $K=\operatorname{Ker}(1_T\otimes\pi)$.

Aplicando $\operatorname{Hom}_R(P,-)$ a (3.9), se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0\to \operatorname{Hom}_R(P,K)\to \operatorname{Hom}_R(P,T)\to \operatorname{Hom}_R(P,T\otimes_R A)\to 0 \tag{3.10}$$

Como (T,P) es un par τ-rígido, tenemos que $\operatorname{Hom}_R(P,T)=0$ y así, $\operatorname{Hom}_R(P,T\otimes_R A)=0$. Por lo tanto, $(T\otimes_R A, P\otimes_R A)$ es un par τ-rígido.

Si además (T,P) es un par τ-inclinante soportado, veamos que ${}^{\perp}\tau_A(T\otimes_R A)\cap(P\otimes_R A)^{\perp}\subset \operatorname{Fac}(T\otimes_R A)$.

Sea $X\in{}^{\perp}\tau(T\otimes_R A)\cap(P\otimes_R A)^{\perp}$. Entonces

$$\begin{aligned}0 &= \operatorname{Hom}_A(X,\tau_A(T\otimes_R A))\\ &\cong \operatorname{Hom}_A(X,\operatorname{Hom}_R(A,\tau_R T))\\ &\cong \operatorname{Hom}_R(X\otimes_A A,\tau_R T)\\ &\cong \operatorname{Hom}_R(X,\tau_R T)\end{aligned}$$

Luego, tenemos que $X\in{}^{\perp}\tau_R T$. Por otro lado tenemos que $X\in P^{\perp}$, pues

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_A(P\otimes_R A,X) &\cong \operatorname{Hom}_R(P,\operatorname{Hom}_A(A,X))\\ &\cong \operatorname{Hom}_R(P,X).\end{aligned}$$

Así $X\in{}^{\perp}\tau_R T\cap P^{\perp}$. Luego $X\in\operatorname{Fac}T$ pues (T,P) es un par τ-inclinante soportado para $\operatorname{mod}R$. Por lo tanto, tenemos que $X\in\operatorname{Fac}(T\otimes_R A)$ y en consecuencia $(T\otimes_R A, P\otimes_R A)$ es un par τ-inclinante soportado para $\operatorname{mod}A$. □

3.3. Dimensión global

En esta última sección estudiaremos relaciones homológicas entre un álgebra A y su extensión escindida R por un ideal nilpotente M. Más precisamente, probaremos que si $\operatorname{gldim}R$ es finita entonces $\operatorname{gldim}A$ es finita. Más aún, si $\operatorname{gldim}R=n$ entonces $\operatorname{gldim}A\leq n$. Además, dado $N\in\operatorname{mod}A$ daremos cotas que relacionan $\operatorname{pd}_A N$ y $\operatorname{pd}_R N$. Recíprocamente, dado $L\in\operatorname{mod}A$ daremos cotas que relacionan $\operatorname{pd}_A L$ y $\operatorname{pd}_R L$.

Recordemos que si $A=kQ/I$ es un álgebra y $\Lambda=A/\mathrm{rad}A$, entonces

$$\operatorname{gldim}A=\sup\{n\mid \operatorname{Ext}_A^n(\Lambda,\Lambda)\neq 0\}.$$

El siguiente resultado de [B] establece una relación combinatoria entre la estructura de kQ y las propiedades homológicas del álgebra.

Teorema 3.3.1. *[B, 1.1] Sean $A=kQ/I$ un álgebra, $\Lambda=A/radA$ y $\mathfrak{R}_A$ el ideal de kQ generado por todas las flechas de Q. Entonces tenemos que:*

$$Ext_A^{2n}(\Lambda,\Lambda)\cong D\left[\frac{I^n\cap\mathfrak{R}I^{n-1}\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}I^n+I^n\mathfrak{R}}\right]\quad n\geq 1;$$

$$Ext_A^{2n+1}(\Lambda,\Lambda)\cong D\left[\frac{\mathfrak{R}I^n\cap I^n\mathfrak{R}}{I^{n+1}+\mathfrak{R}I^n\mathfrak{R}}\right]\quad n\geq 0.$$

Proposición 3.3.2. *Sea R una extensión escindida de A por el ideal nilpotente M. Si* $\operatorname{gldim} R = n < \infty$ *entonces* $\operatorname{gldim} A \leq n < \infty$.

Demostración. Supongamos que $\operatorname{gldim} A > n$, entonces existe $m > n$ tal que $\operatorname{Ext}^m_A(\Lambda, \Lambda) \neq 0$, con $\Lambda = A/\operatorname{rad} A = R/\operatorname{rad} R$.

Supongamos que m es par, es decir, $m = 2n$. Por el Teorema 3.3.1, tenemos que

$$\operatorname{Ext}^{2n}_A \cong D\left[\frac{I^n_A \cap \mathfrak{R}_A I^{n-1}_A \mathfrak{R}_A}{\mathfrak{R}_A I^n_A + I^n_A \mathfrak{R}_A}\right] \neq 0$$

Entonces existe $0 \neq \rho \in I^n_A \cap \mathfrak{R}_A I^{n-1}_A \mathfrak{R}_A$ y $\rho \notin \mathfrak{R}_A I^n_A + I^n_A \mathfrak{R}_A$. Como $(Q_A)_1 \subset (Q_R)_1$ e $I_A = I_R \cap kQ_A$ tenemos que $\rho \in I^n_R \cap \mathfrak{R}_R I^{n-1}_R \mathfrak{R}_R$.

Como $m > k$, tenemos que $\operatorname{Ext}^m_R(\Lambda, \Lambda) = 0$ y en consecuencia $\rho \in \mathfrak{R}_R I^n_R + I^n_R \mathfrak{R}_R$. Luego, $\rho = \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2$ con $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathfrak{R}_R$ y $w_1, w_2 \in I^n_R$.

Consideremos $\widetilde{\pi} : kQ_R \to kQ_A$ el morfismo inducido por la proyección. Como $\rho \in I_R$ tenemos del Teorema 3.1.2 que $\widetilde{\pi}(\rho) = 0$ o $\widetilde{\pi}(\rho) = \rho$. En este caso, $\widetilde{\pi}(\rho) = \rho \neq 0$ y así:

$$\begin{aligned} \rho &= \widetilde{\pi}(\rho) \\ &= \widetilde{\pi}(\gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2) \\ &= \widetilde{\pi}(\gamma_1)\widetilde{\pi}(w_1) + \widetilde{\pi}(\gamma_2)\widetilde{\pi}(w_2) \in \mathfrak{R}_A I^n_A + I^n_A \mathfrak{R}_A \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.

De manera similar, si m es impar. Por lo tanto, $\operatorname{gldim} A \leq \operatorname{gldim} R$. □

Es posible, en algunos casos, que $\operatorname{gldim} A = \operatorname{gldim} R$ como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3.3. Consideremos $A = kQ_A/I_A$ el álgebra dada por el siguiente carcaj

$$Q_A : \; 1 \xleftarrow{\beta} 2 \xleftarrow{\alpha} 3$$

con $I_A = <\alpha\beta>$ y $R = kQ_R/I_R$ el álgebra dada por el siguiente carcaj

$$\begin{tikzcd} Q_R : \; 1 & 2 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r, bend right, "\gamma"'] & 3 \arrow[l, bend right, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

con $I_R = <\alpha\beta, \, \alpha\gamma>$.

Es claro que R es una extensión escindida de A por el ideal nilpotente $M = <\gamma>$. La dimensión global de A viene dada por la dimensión proyectiva del simple en el vértice 3, y es igual a 2. Por otro lado, tenemos que $\operatorname{gldim} R = \operatorname{pd}_R S_3 = 2$. Luego, $\operatorname{gldim} A = \operatorname{gldim} R$.

Proposición 3.3.4. *Sean A y R álgebras tales que R es una extensión escindida de A por un ideal nilpotente M.*

a) Si $L \in \operatorname{mod} A$, entonces

i) $\operatorname{pd}_A L \leq \operatorname{pd}_R L + \operatorname{pd}_A M$.

ii) $\operatorname{id}_A L \leq \operatorname{id}_R L + \operatorname{id}_A DR$.

b) Si $N \in \operatorname{mod} R$, entonces

i) $\operatorname{pd}_R N \leq \operatorname{pd}_A N + \operatorname{pd}_R A$.

ii) $\operatorname{id}_R N \leq \operatorname{id}_A N + \operatorname{id}_R DA$.

Demostración. Probaremos $a)$ $i)$ y $b)$ $i)$, ya que $a)$ $ii)$ y $b)$ $ii)$ son duales.

$a)$ $i)$ Sea $L \in \operatorname{mod} A$. Si $\operatorname{pd}_R L = \infty$, no tenemos nada que probar. Supongamos entonces que $\operatorname{pd}_R L = l < \infty$. Luego, existe una resolución proyectiva minimal de L en $\operatorname{mod} R$ de la forma

$$0 \to P_l \to P_{l-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to L \to 0 \tag{3.11}$$

Por otro lado, como A es una subálgebra de R, tenemos que cada P_i tiene una estructura de A-módulo, para $i = 1, \ldots, l$. Entonces podemos ver a (3.11) como una sucesión exacta de A-módulos. Como $\operatorname{pd}_A P_i \leq \operatorname{pd}_A R$, para $i = 1, \ldots, l$, por el Lema 1.3.6 $a)$ tenemos que $\operatorname{pd}_A L \leq l + \operatorname{pd}_A R$. Como $R \cong A \oplus M$ en $\operatorname{mod} A$, entonces $\operatorname{pd}_A R = \operatorname{pd}_A M$ y por lo tanto, $\operatorname{pd}_A L \leq \operatorname{pd}_R L + \operatorname{pd}_A M$.

$b)$ $i)$ Sea $N \in \operatorname{mod} R$. Como A es una subálgebra de R, tenemos que N tiene una estructura de A-módulo. Si $\operatorname{pd}_A N = \infty$, no hay nada que probar. Supongamos que $\operatorname{pd}_A N = t < \infty$, entonces existe una resolución proyectiva minimal en $\operatorname{mod} A$ de la forma

$$0 \to Q_t \to Q_{t-1} \to \cdots \to Q_1 \to Q_0 \to N \to 0 \tag{3.12}$$

Como cada Q_i tiene una estructura de R-módulo, para $i = 1, \ldots, t$, podemos ver a (3.12) como una sucesión exacta de R-módulos. Como $\operatorname{pd}_R Q_i \leq \operatorname{pd}_R A$, para $i = 1, \cdots, t$, sigue del Lema 1.3.6 $a)$ que $\operatorname{pd}_R N \leq \operatorname{pd}_A N + \operatorname{pd}_R A$. $\square$

Como corolario de la proposición anterior, obtenemos el siguiente resultado que relaciona $\operatorname{gldim} R$ con $\operatorname{gldim} A$.

Corolario 3.3.5. *Sean A y R álgebras tales que R es una extensión escindida de A por un ideal nilpotente M. Entonces* $\operatorname{gldim} R \leq \operatorname{gldim} A + \operatorname{pd}_R A$.

Finalmente, mostraremos un ejemplo en el que se visualiza que la cota obtenida en el Corolario 3.3.5 es mínima.

Ejemplo 3.3.6. Consideremos $A = kQ_A$ el álgebra hereditaria dada por el siguiente carcaj

$$Q_A : \ 1 \xleftarrow{\beta} 2 \xleftarrow{\alpha} 3$$

y $R = kQ_R/I_R$ el álgebra dada por el siguiente carcaj

$$\begin{tikzcd} Q_R : \ 1 & 2 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r, bend right, "\gamma"'] & 3 \arrow[l, bend right, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

con la relación $\alpha\gamma = 0$.

Entonces tenemos que R es una extensión escindida de A por el ideal nilpotente $M =< \gamma >$. Como A es un álgebra hereditaria, tenemos que $\operatorname{gldim} A = 1$. La dimensión global de R viene dada por la dimensión proyectiva del simple S_3 y, en consecuencia, tenemos que $\operatorname{gldim} R = 2$.

Por otra parte, tenemos que $\operatorname{pd}_R A = 1$, pues se tiene la siguiente resolución proyectiva minimal de A en $\operatorname{mod} R$

$$0 \to \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \to 1 \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & & 2 \\ & & 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \to 1 \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \to 0.$$

Por lo tanto, $2 = \operatorname{gldim} R = \operatorname{gldim} A + \operatorname{pd}_R A$.

Capítulo 4

Sobre la dimensión global del álgebra de endomorfismos de un módulo τ-inclinante

En este capítulo, estudiaremos la dimensión global del álgebra de endomorfismos de un módulo τ-inclinante T. En todo lo que sigue, A siempre será un álgebra de dimensión global finita, T un A-módulo τ-inclinante y $B = \operatorname{End}_A T$. Comenzaremos estableciendo una cota general que relaciona la dimensión global de A con la dimensión global de B, pero que no nos asegura que la dimensión global de B sea finita. Mostraremos una familia $\{(A_n, T_n)\}$ de álgebras A_n de dimensión global n y de A_n-módulos τ-inclinantes T_n tales que la dimensión global del álgebra de endomorfismos de T_n es infinita. Esto demuestra que la finitud de la dimensión global no es invariante bajo el proceso τ-inclinante, a diferencia de lo que ocurre bajo el proceso inclinante.

Como un caso particular, mostraremos que si el álgebra A es una extensión escindida de $A/\operatorname{ann} T$ por el ideal $\operatorname{ann} T$, entonces la dimensión global del álgebra de endomorfismos de un A-módulo τ-inclinante es siempre finita, y más aún, para éstos casos daremos una cota explícita.

4.1. Antecedentes

Dada un álgebra de dimensión global finita A y N un A-módulo inclinante es sabido que existe una estrecha relación entre la dimensión global de A y la dimensión global de $\operatorname{End}_A N$. Más precisamente, como una consecuencia del teorema de Brenner y Butler, tenemos que

Proposición 4.1.1. *Sean A un álgebra de dimensión global finita y N un A-módulo inclinante. Entonces,*

$$|\operatorname{gldim} A - \operatorname{gldim} \operatorname{End}_A N| \leq 1$$

En particular, sabemos que $\operatorname{gldim} \operatorname{End}_A N < \infty$ para cualquier módulo inclinante N.

En un contexto más general, Y. Miyashita estudia en [M], una generalización de los módulos inclinantes, los **módulos inclinantes de dimensión proyectiva finita**.

Definición 4.1.2. Un A-módulo M es **inclinante de dimensión proyectiva menor o igual que r** si

1. $\operatorname{pd}_A M < \infty$.
2. $\operatorname{Ext}^i_A(M, M) = 0$ para todo $i > 0$.
3. Existe una sucesión exacta $0 \to A \to M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_r \to 0$, donde $M_i \in \operatorname{add} M$ para $i = 1, \cdots, r$.

En ese mismo trabajo, Y. Miyashita estudia la dimensión global del álgebra de endomorfismos de esta clase de módulos y prueba el siguiente resultado, que generaliza el Teorema 4.1.1 (ver [M]).

Teorema 4.1.3. *[M, Corolario 2.4] Sean A un álgebra de dimensión global finita y M un módulo inclinante de dimensión proyectiva menor o igual que r. Entonces*

$$|\operatorname{gldim} A - \operatorname{gldim} \operatorname{End}_A M| \leq r.$$

Como consecuencia, se tiene que el álgebra de endomorfismos de un A-módulo inclinante de dimensión proyectiva finita siempre tiene dimensión global finita, si A tiene dimensión global finita.

En [GHPRU], S. Gastaminza, D. Happel, M.I. Platzeck, M.J. Redondo, L. Unger encontraron una cota más precisa para $\operatorname{gldim} \operatorname{End}_A M$, con M un módulo inclinante de dimensión proyectiva finita. Más precisamente, probaron el siguiente resultado.

Proposición 4.1.4. *[GHPRU, Proposición 2.1] Sean A un álgebra de dimensión global finita y M un A-módulo inclinante de dimensión proyectiva finita. Entonces*

$$\operatorname{id}_A M \leq \operatorname{gldim} \operatorname{End}_A M \leq \operatorname{id}_A M + \operatorname{pd}_A M$$

4.2. Una cota general

Comenzaremos nuestro estudio investigando relaciones homológicas entre A y $A/\operatorname{ann} T$, o más generalmente, entre A y A/J con J un ideal nilpotente de A.

4.2.1. Funtor cambio de escalares. Relaciones homológicas entre A y A/J

Dada A un álgebra y J un ideal nilpotente de A, se puede definir un morfismo de álgebras $\varphi : A \to A/J$ dado por $a \mapsto \overline{a} = a + J$. Este morfismo define un funtor exacto $U : \operatorname{mod} A/J \to \operatorname{mod} A$, que permite dotar a cada A/J-módulo M de una estructura de A-módulo definiendo:

$$ma := m\varphi(a) \qquad\qquad \forall a \in A, \quad \forall m \in M.$$

Luego, se tiene una inmersión natural de $\operatorname{mod} A/J$ en $\operatorname{mod} A$.

En particular, el álgebra A/J tiene una estructura de A-módulo a izquierda, y así es un $(A - A/J)-$bimódulo pues

$$r(t_1t_2) = \varphi(r)(t_1t_2) = (\varphi(r)t_1)t_2 = (rt_1)t_2.$$

En consecuencia, se puede definir un funtor $F : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} A/J$ dado por $N \mapsto F(N) = N \otimes_A A/J \cong N/NJ$. Más aún, sabemos que (F, U) es un par de funtores adjuntos. Es conocido que si P es un A-módulo proyectivo entonces $P \otimes A/J$ es un A/J-módulo proyectivo.

Como J es un ideal nilpotente, tenemos que $J \subset \operatorname{rad} A$ y así $\operatorname{rad}(A/J) \cong \operatorname{rad} A/J$.

Lema 4.2.1. *Sea $f : P \to M$ una cubierta proyectiva en* $\operatorname{mod} A$. *Entonces $f \otimes 1 : P \otimes_A A/J \to M \otimes_A A/J$ es una cubierta proyectiva en* $\operatorname{mod} A/J$.

Demostración. Es claro que $f \otimes 1$ es un epimorfismo y además $A/J \otimes_A P$ es un A/J-módulo proyectivo. Veamos que $\operatorname{top}(A/J \otimes_A P) = \operatorname{top}(A/J \otimes_A M)$.

$$\begin{aligned}\operatorname{top}(P\otimes_A A/J) &\cong \operatorname{top}(P/PJ)\\ &\cong (P/PJ)/\operatorname{rad}(P/PJ)\\ &\cong (P/PJ)/(P/PJ\operatorname{rad}(A/J))\\ &\cong (P/PJ)/((P/PJ)\operatorname{rad}A/J)\\ &\cong (P/PJ)/(P\operatorname{rad}A)/PJ)\\ &\cong P/\operatorname{rad}P\\ &\cong \operatorname{top}P\\ &\cong \operatorname{top}M\\ &\cong \operatorname{top}(M\otimes_A A/J)\end{aligned}$$

Por lo tanto, por la Proposición 1.3.2 tenemos que $1\otimes f : A/J\otimes_A P \to A/J\otimes_A M$ es una cubierta proyectiva en mod A/J. □

El siguiente lema será la herramienta principal para establecer una relación entre las dimensiones globales de A y de A/J.

Lema 4.2.2. *Sea M un A-módulo tal que $\operatorname{Tor}_m^A(A/J, M) = 0$ para todo $m > 0$. Entonces $\operatorname{pd}_A M = \operatorname{pd}_{A/J}(M/MJ)$.*

Demostración. Sea $M \in \operatorname{mod} A$ con $\operatorname{pd}_A M = n$. Entonces existe una resolución proyectiva minimal de M de la forma:

$$0 \to P_n \overset{d_n}{\to} P_{n-1} \overset{d_{n-1}}{\to} \cdots \to P_1 \overset{d_1}{\to} P_0 \overset{d_0}{\to} M \to 0. \tag{4.1}$$

Como $\operatorname{Tor}_n^A(A/J, M) = 0$ para todo $m > 0$, aplicando el funtor $-\otimes_A A/J$ a (4.1), obtenemos una sucesión exacta

$$0 \to P_n\otimes_A A/J \overset{d_n\otimes_A 1}{\to} \cdots \to P_1\otimes_A A/J \overset{d_1\otimes_A 1}{\to} P_0\otimes_A A/J \overset{d_0\otimes_A 1}{\to} M\otimes_A A/J \to 0. \tag{4.2}$$

Por otra parte, como $\operatorname{Tor}_1^A(A/J, \Omega_m(M)) \cong \operatorname{Tor}_{n+1}^A(A/J, M) = 0$ tenemos que $\Omega_m(M\otimes_A A/J) \cong \Omega_m(M)\otimes A/J$. Sigue del Lema 4.2.1, que $P_m\otimes_A A/J \to \Omega_m(M\otimes_A A/J)$ es una cubierta proyectiva, y en consecuencia la sucesión exacta (4.2) es una resolución proyectiva minimal para $M\otimes_A A/J$. Por lo tanto, $\operatorname{pd}_A M = \operatorname{pd}_{A/J}(M/MJ)$. □

Proposición 4.2.3. *Sean A un álgebra de dimensión global finita y J un ideal nilpotente de A. Entonces $\operatorname{gldim} A \leq \operatorname{gldim}(A/J) + \operatorname{pd}_A(A/J)$.*

Demostración. Sean $M \in \operatorname{mod} A$ y $n = \mathrm{pd}_A(A/J)$. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \to M_n \to P_{n-1} \stackrel{d_{n-1}}{\to} \cdots \to P_1 \stackrel{d_1}{\to} P_0 \stackrel{d_0}{\to} M \to 0$$

con P_i A-módulos proyectivos para $i = 1, \ldots, n-1$ y $M_n = \ker d_{n-1}$.

Entonces, se tiene que $\mathrm{Tor}_k^A(A/J, M_n) \cong \mathrm{Tor}_{k+n}^A(A/J, M) = 0$ pues $n = \mathrm{pd}_A(A/J)$. Por el Lema 4.2.2, sabemos que $\mathrm{pd}_A M_n = \mathrm{pd}_{A/J}(M_n/M_nJ)$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{pd}_A M &\leq n + \mathrm{pd}_{A/J}(M_n/M_nJ) \\ &\leq \mathrm{pd}_A(A/J) + \mathrm{gldim}(A/J). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathrm{gldim}\, A \leq \mathrm{gldim}\,(A/J) + \mathrm{pd}_A(A/J)$. □

4.2.2. Aplicación a los módulos τ-inclinantes

Dado T un A-módulo τ-inclinante, de la Proposición 1.5.4, sabemos que T es un A-módulo sincero, y en consecuencia $\mathrm{ann}\, T$ es un ideal nilpotente. Luego, como una aplicación de la Proposición 4.2.3 se obtiene una relación entre $\mathrm{gldim}\, A$ y $\mathrm{gldim}\, B$, siendo $B = \mathrm{End}_A T$. Comenzaremos con la siguiente observación.

Observación 4.2.4. Dado T un A-módulo τ-inclinante, notemos que, como T es un $(A/\mathrm{ann}\, T)$- módulo, entonces $B = \mathrm{End}_A T \cong \mathrm{End}_{A/\mathrm{ann}\, T} T$. Más aún, como T es un $(A/\mathrm{ann}\, T)$-módulo inclinante es sabido que

$$|\mathrm{gldim}\, A/\mathrm{ann}\, T - \mathrm{gldim}\, B| \leq 1$$

siempre que $\mathrm{gldim}\, A/\mathrm{ann}\, T < \infty$. Luego, $\mathrm{gldim}\, B = \infty$ si y sólo si $\mathrm{gldim}\, A/\mathrm{ann}\, T = \infty$.

Proposición 4.2.5. *Sean A un álgebra de dimensión global finita, T un A-módulo τ-inclinante y $B = \mathrm{End}_A T$. Entonces*

$$\mathrm{gldim}\, A \leq \mathrm{gldim}\, B + \mathrm{pd}_A(A/\mathrm{ann}\, T) + 1.$$

Demostración. Como $\mathrm{ann}\, T$ es un ideal nilpotente, sigue del Lema 4.2.3 que $\mathrm{gldim}\, A \leq \mathrm{gldim}\, A/\mathrm{ann}\, T + \mathrm{pd}_A(A/\mathrm{ann}\, T)$. Si $\mathrm{gldim}\, A/\mathrm{ann}\, T = \infty$, entonces $\mathrm{gldim}\, B = \infty$ y no hay nada que probar. En caso contrario, $\mathrm{gldim}\, A/\mathrm{ann}\, T \leq \mathrm{gldim}\, B + 1$. Luego,

$$\begin{aligned} \mathrm{gldim}\, A &\leq \mathrm{gldim}\, A/\mathrm{ann}\, T + \mathrm{pd}_A\,(A/\mathrm{ann}\, T) \\ &\leq \mathrm{gldim}\, B + 1 + \mathrm{pd}_A\,(A/\mathrm{ann}\, T). \end{aligned}$$

□

Observación 4.2.6. Notemos que

$$\mathrm{pd}_A\,(A/\mathrm{ann}\,T) \leq \mathrm{pd}_A\,T \leq \mathrm{pd}_A\,(A/\mathrm{ann}\,T) + 1.$$

En efecto, como T es un $(A/\mathrm{ann}\,T)$-módulo inclinante tenemos que $\mathrm{pd}_{A/\mathrm{ann}\,T} T \leq 1$ y, en consecuencia, existe una sucesión exacta corta de la forma

$$0 \to P_1 \to P_0 \to T \to 0 \tag{4.3}$$

con $P_0, P_1 \in \mathrm{add}\,(A/\mathrm{ann}\,T)$. Como $\mathrm{pd}_A\,P_i \leq \mathrm{pd}_A\,(A/\mathrm{ann}\,T)$, para $i = 0, 1$, por el Lema 1.3.6 tenemos que $\mathrm{pd}_A\,T \leq \mathrm{pd}_A\,(A/\mathrm{ann}\,T) + 1$.

Por otra parte, existe una sucesión exacta corta de la forma

$$0 \to A/\mathrm{ann}\,T \to T_0 \to T_1 \to 0 \tag{4.4}$$

con $T_0, T_1 \in \mathrm{add}\,T$. Nuevamente del Lema 1.3.6, se desprende que $\mathrm{pd}_A\,(A/\mathrm{ann}\,T) \leq \mathrm{pd}_A\,T$, pues $\mathrm{pd}_A\,T_i \leq \mathrm{pd}_A\,T$ para $i = 0, 1$.

Esto nos dice que la cota hallada en la Proposición 4.2.5 está íntimamente relacionada con la cota que se conoce para los módulos inclinantes de dimensión proyectiva finita introducidos por Y. Miyashita.

El siguiente ejemplo nos muestra que la cota hallada en la Proposición 4.2.5 para la dimensión global del álgebra de endomorfismos de un módulo τ-inclinante es óptima.

Ejemplo 4.2.7. Sea $A = kQ/I$ el álgebra dada por el siguiente carcaj:

$$Q: \quad \begin{tikzcd} & & & 5 \arrow[dl, "\alpha"'] & \\ 1 & 3 \arrow[l, "\delta"'] \arrow[dl, "\epsilon"] & 4 \arrow[l, "\gamma"] & & 7 \arrow[ul, "\theta"'] \arrow[dl, "\omega"] \\ 2 & & & 6 \arrow[ul, "\beta"] & \end{tikzcd}$$

con $I = <\alpha\gamma, \beta\gamma, \gamma\delta, \theta\alpha - \omega\beta>$. Notemos que $\mathrm{gldim}\,A = 4$.

Consideremos el A-módulo τ-inclinante $T = 6 \oplus \begin{smallmatrix} & 7 & \\ 5 & & 6 \end{smallmatrix} \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 7 & \\ 5 & & 6 \\ & 4 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 7 \\ 6 \end{smallmatrix}$.

En este caso, $\mathrm{ann}\,T = <\gamma>$ y en consecuencia $A/\mathrm{ann}\,T$ esta dada por el siguiente carcaj disconexo:

$$Q': \quad \begin{tikzcd} & & & & 5 \arrow[dl, "\alpha"'] & \\ 1 & 3 \arrow[l, "\delta"'] \arrow[dl, "\epsilon"] & & 4 & & 7 \arrow[ul, "\theta"'] \arrow[dl, "\omega"] \\ 2 & & & & 6 \arrow[ul, "\beta"] & \end{tikzcd}$$

con $I' = < \theta\alpha - \omega\beta >$.

Tenemos que $A/\operatorname{ann} T \cong 1 \oplus 2 \oplus \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \oplus 4 \oplus \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 6 \\ 4 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 7 & \\ 5 & & 6 \\ & 4 & \end{smallmatrix}$. Todos los sumandos directos indescomponibles de $A/\operatorname{ann} T$ son A-módulos proyectivos excepto el sumando directo S_4. Luego, $\operatorname{pd}_A(A/\operatorname{ann}T) = \operatorname{pd}_A S_4 = 2$.

El álgebra de endomorfismos $B = \operatorname{End}_A T$ es hereditaria y está dada por el siguiente carcaj disconexo:

$$Q'': \quad \begin{tikzcd} & & & 5 & & \\ 1 & 3 \arrow[l, "\delta"'] \arrow[dl, "\epsilon"] & & & 6 \arrow[ul] \arrow[dl] & 7 \arrow[l] \\ 2 & & & 4 & & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\operatorname{gldim} B = 1$ y así tenemos que

$$4 = \operatorname{gldim} A \leq \operatorname{gldim} B + \operatorname{pd}_A (A/\operatorname{ann} T) + 1 = 4.$$

En la Proposición 4.2.5, obtuvimos una relación entre $\operatorname{gldim} A$ y $\operatorname{gldim} B$ que no nos asegura que $\operatorname{gldim} B$ sea finita. El siguiente ejemplo muestra que la dimensión global de B puede ser infinita.

Ejemplo 4.2.8. Consideremos $A = kQ/I$ el álgebra dada por el siguiente carcaj con relaciones:

$$Q: \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\alpha"] & 2 \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[dr, "\theta"'] & & 4 \arrow[ll, "\lambda"'] \arrow[dl, "\omega"] \\ & & 3 & \end{tikzcd}$$

con $I = < \lambda\theta, \alpha\beta, \lambda\beta\alpha >$.

Se puede ver que $\operatorname{gldim} A = 3$. Consideremos el A-módulo τ-inclinante

$$T = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 1 & & & & \\ 2 & & 4 & & \\ & 3 & & 2 & \\ & & & & 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 4 & \\ 2 & & 3 \\ 1 & & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 4 & & 1 \\ 3 & & 2 & \end{smallmatrix}.$$

El anulador de T está generado por el camino $\beta\alpha$, y entonces $A/\operatorname{ann} T$ está dada por el siguiente carcaj con relaciones:

$$Q: \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\alpha"] & 2 \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[dr, "\theta"'] & & 4 \arrow[ll, "\lambda"'] \arrow[dl, "\omega"] \\ & & 3 & \end{tikzcd}$$

con $I = < \lambda\theta, \alpha\beta, \beta\alpha >$.

El comienzo de la resolución proyectiva minimal de $S_1 \in A/\operatorname{ann} T$ tiene la forma

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \cdots \arrow[r] & \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}2\\1\ 3\end{smallmatrix} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix} \arrow[r] & S_1 \arrow[r] & 0 \\ & & S_1 \arrow[ur] & & \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix} \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

En consecuencia, tenemos que $\operatorname{pd}_{A/\operatorname{ann} T} S_1 = \infty$ y, así $\operatorname{gldim}(A/\operatorname{ann} T) = \infty$. Por lo tanto, $\operatorname{gldim} \operatorname{End}_A T = \infty$.

Observación 4.2.9. En general, para todo $n = k + 3$, con $k \geq 0$, encontramos una familia de álgebras A_n de dimensión global igual a n y, para cada n, T_n un A_n-módulo τ-inclinante tal que $B_n = \operatorname{End} T_n$ tiene dimensión global infinita. Consideremos $A_n = kQ_n/I_n$, donde

$$\begin{tikzcd} Q_n: \ 1 \arrow[r, shift left, "\alpha"] & 2 \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[dr, "\theta"'] & & 4 \arrow[ll, "\lambda"'] \arrow[dl, "\omega"] & a_1 \arrow[l, "\mu_1"'] & a_2 \arrow[l, "\mu_2"'] & \cdots & a_k \arrow[l, "\mu_n"'] \\ & & 3 & & & & & \end{tikzcd}$$

e

$$I_n = < \lambda\theta, \alpha\beta, \lambda\beta\alpha, \mu_1\lambda, \mu_2\mu_1, \mu_3\mu_2, \ldots, \mu_k\mu_{k-1} >$$

para $k \geq 1$.

Consideremos $U_1 = \begin{smallmatrix}1 & & \\ 2 & 4 & \\ 3 & 2 & \\ & 1 & \end{smallmatrix}$. La presentación proyectiva minimal de U_1 (en cualquier álgebra A_n) es

$$P_3 \to P_1 \oplus P_4 \to U_1 \to 0$$

y entonces tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \tau U_1 \to I_3 \to I_1 \oplus I_4.$$

Luego, $\tau U_1 \cong \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}$. De igual manera, si consideramos $U_2 = \begin{smallmatrix}4 & 1\\ 3\ 2 & \end{smallmatrix}$, la presentación proyectiva minimal de U_2 es

$$P_2 \to P_1 \oplus P_4 \to U_2 \to 0$$

y, en consecuencia se tiene que

$$0 \to \tau U_2 \to I_2 \to I_1 \oplus I_4.$$

Luego, $\tau U_2 \cong S_2$.

Definimos $T_n = \bigoplus_{i=a_1}^{a_k} P_i \oplus U_1 \oplus U_2 \oplus P_1 \oplus P_3$. Como $\tau_{A_n} T_n \cong \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \oplus 2$, tenemos que T_n es un A_n-módulo τ-inclinante.

Al igual que en el Ejemplo 4.2.8, tenemos que $\operatorname{ann} T_n =< \beta\alpha >$ y en consecuencia, $\operatorname{gldim} A/\operatorname{ann} T = \infty$. Por lo tanto, $\operatorname{gldim} \operatorname{End} T_n = \infty$.

En virtud de los expuesto, dedicaremos el resto del capítulo a dar condiciones que nos permitan asegurar que $\operatorname{gldim} B < \infty$.

4.3. El anulador de T

Esta sección esá abocada a estudiar el anulador de un módulo τ-inclinante. Más precisamente, estamos interesados en dar condiciones sobre los generadores de este ideal.

Proposición 4.3.1. *Sean $A = kQ/I$ un álgebra, T un A-módulo τ-inclinante y $\rho \in \operatorname{ann} T$ un camino no nulo de longitud mayor o igual que 2 tal que ningún subcamino propio de ρ pertenece al $\operatorname{ann} T$. Entonces vale alguna de las siguientes condiciones:*

i) Existe un camino no nulo γ tal que $\gamma\rho$ es una relación cero en A.

ii) Existen caminos no nulos γ_i, γ y escalares no nulos $\lambda_i \in K$ tales que $\gamma\rho + \sum_{i \in I} \lambda_i \gamma_i$ es una relación minimal en A, donde I es un conjunto finito de índices.

Demostración. Supongamos por el absurdo que no se cumplen i) ni ii).

Sean $T = \bigoplus_{i=1}^{r} T_i$ un A-módulo τ-inclinante, con T_i A-módulos indescomponibles para $i = 1, \ldots, r$, y $\rho = \alpha_1 \ldots \alpha_n$ un camino en Q de a a c, con $\alpha_j \in Q_1$ para $j = 1, \ldots, n$, tales que ρ pertenece al anulador de T y ningún subcamino propio de ρ pertenece al $\operatorname{ann} T$. En particular, $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} \notin \operatorname{ann} T$ y $\alpha_2 \ldots \alpha_n \notin \operatorname{ann} T$. Como $\operatorname{ann} T = \bigcap_{j=1}^{r} \operatorname{ann} T_j$, existen $T_l = ((T_l)_i, \varphi_\lambda)_{i \in Q_0, \lambda \in Q_1}$ y $T_h = ((T_h)_i, \vartheta_\lambda)_{i \in Q_0, \lambda \in Q_1}$ sumandos directos indescomponibles de T tales que $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} \notin \operatorname{ann} T_l$ y $\alpha_2 \ldots \alpha_n \notin \operatorname{ann} T_h$.

Notemos por d_i a la dimensión como k-espacio vectorial de $(T_l)_i$, es decir, $d_i = \dim_k (T_l)_i$ y por $P(i)$ al proyectivo correspondiente al vértice i. Sea $P_0 = \bigoplus_{i \in Q_0} d_i P(i)$, donde $d_i P(i)$ representa la suma directa de d_i copias de $P(i)$. Queremos definir un morfismo $g : P_0 \to T_l$, para ello fijemos bases para cada uno de los espacios vectoriales. Sea $\{m_{i_1}, \ldots, m_{i_{d_i}}\}$ una base para $(T_l)_i$, y consideremos

$$B' = \{m_{ij} \mid i \in Q_0,\, j = 1, \ldots, d_i\}$$

una base para T_l. Para los módulos proyectivos tomamos la base definida en el Lema 1.2.6, y consideramos entonces

$$B = \{c_{ij} \mid i \in Q_0,\ c_i \text{ un camino con } s(c_i) = i,\ j = 1, \ldots, d_i\}$$

una base para P_0. Definimos $g : P_0 \to T_l$ tal que

$$g(c_{ij}) = \varphi_{c_i}(m_{ij}) \in (T_l)_{t(c_i)}.$$

Así definido, es claro que g es un epimorfismo, pero no necesariamente minimal. Si notamos por $(\widetilde{P_0}, \widetilde{g})$ la cubierta proyectiva de T_l, tenemos que existe un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
P_0 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\exists\pi"] & T_l \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\widetilde{P_0} \arrow[r, "\widetilde{g}"] & T_l \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

tal que $g = \widetilde{g}\pi$ y $\widetilde{P_0}$ es sumando directo de P_0.

Como $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} \notin \operatorname{ann} T_l$, entonces tenemos que $\varphi_{\alpha_{n-1}} \ldots \varphi_{\alpha_1} \neq 0$. Además existe un camino no nulo $\epsilon_1 \ldots \epsilon_m$ de x a a en Q tal que $S(x)$ es sumando directo del top T_l y $\varphi_{\alpha_{n-1}} \ldots \varphi_{\alpha_1}\varphi_{\epsilon_m} \ldots \varphi_{\epsilon_1} \neq 0$. Luego existe un elemento m_{xr_x} de la base de $(T_l)_x$ tal que $\varphi_\rho\varphi_{\epsilon_m} \ldots \varphi_{\epsilon_1}(m_{xr_x}) = m \neq 0$.

Como $P(x)$ es sumando directo de $\widetilde{P_0}$, y g y $\widetilde{g}$ coinciden en los elementos de $\widetilde{P_0}$, tenemos que

$$\widetilde{g}(e_x) = g(c_{xr_x}) = \varphi_{e_x}(m_{xr_x}) = m_{xr_x}.$$

Luego, $\widetilde{g}(\epsilon_1 \ldots \epsilon_m\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}) = \varphi_{\epsilon_1 \ldots \epsilon_m\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}}(m_{xr_x}) = m \neq 0$. Además, como $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}\alpha_n$ no satisface i), tenemos que el camino $\epsilon_1 \ldots \epsilon_m\alpha_1 \ldots \alpha_n$ es no nulo y $\widetilde{g}(\epsilon_1 \ldots \epsilon_m\alpha_1 \ldots \alpha_n) = \varphi_{\alpha_n} \ldots \varphi_{\alpha_1}\varphi_{\epsilon_m} \ldots \varphi_{\epsilon_1}(m_{xr_x}) = 0$, pues $\varphi_{\alpha_n} \ldots \varphi_{\alpha_1} = 0$. Por lo tanto, $0 \neq \epsilon_1 \ldots \epsilon_m\alpha_1 \ldots \alpha_n \in \ker \widetilde{g}$.

Veamos que $\epsilon_1 \ldots \epsilon_m\alpha_1 \ldots \alpha_n \notin \operatorname{rad}(\ker \widetilde{g})$ y, en consecuencia $S(c)$ es un sumando directo de $\operatorname{top}(\ker \widetilde{g})$. Como $\epsilon_1 \ldots \epsilon_m\alpha_1 \ldots \alpha_n \in (\ker g)_c$, siguiendo el Lema 1.2.5 debemos ver que

$$\epsilon_1 \ldots \epsilon_m\alpha_1 \ldots \alpha_n \notin \sum_{\lambda:\bullet\to c} \operatorname{Im}(\psi_\lambda : (\ker \widetilde{g})_\bullet \to (\ker \widetilde{g})_c).$$

De la definición de $\ker g$, sabemos que los morfismos de la representación ψ_λ son la restricción de los morfismos correspondientes en $\widetilde{P_0}$, es decir, la multiplicación por las flechas correspondientes. Si $\epsilon_1 \ldots \epsilon_m\alpha_1 \ldots \alpha_n \in \operatorname{rad}(\ker \widetilde{g})$, entonces tenemos que:

$$\epsilon_1 \ldots \epsilon_m\alpha_1 \ldots \alpha_n = \sum_{\lambda:y\to c} \lambda\eta_y.$$

con $\eta_y \in (\ker \widetilde{g})_y$, lo cual es una contradicción, ya que asumimos que ii) no se satisface. Por lo tanto, $S(c)$ es un sumando directo de $\operatorname{top}(\ker \widetilde{g})$.

Si $P_1 \xrightarrow{f} \widetilde{P_0} \xrightarrow{\widetilde{g}} T_l \to 0$ es la presentación proyectiva minimal de T_l, entonces $P(c)$ es un sumando directo de P_1 y, además por construcción, $f(e_c) = \epsilon_1 \dots \epsilon_m \alpha_1 \dots \alpha_n$.

Por otro lado, como $\alpha_2 \dots \alpha_n \notin \operatorname{ann} T_h$, tenemos que $\vartheta_{\alpha_n} \dots \vartheta_{\alpha_2} \neq 0$ y así, $S(c)$ es un factor de composición de T_h. Entonces, existe un elemento no nulo $t \in (T_h)_c$. Definimos un morfismo $\theta : P_c \to T_h$ tal que $\theta(e_c) = t \neq 0$ y si w es un camino que comienza en el vértice c, $\theta(w) = \vartheta_w(t)$. Consideremos el morfismo $\widetilde{\theta} : P_1 = P(c) \oplus P_1' \to T_h$ definido por $\widetilde{\theta} = (\theta, 0)$.

Como $\operatorname{Hom}_A(T_h, \tau_A T_l) = 0$, sabemos de la Proposición 1.5.10, que el morfismo

$$\operatorname{Hom}_A(\widetilde{P_0}, T_h) \stackrel{(f,Y)}{\to} \operatorname{Hom}_A(P_1, T_h)$$

es suryectivo. Luego, existe un morfismo $\psi : \widetilde{P_0} \to T_h$ tal que $\widetilde{\theta} = \psi f$. En particular, se tiene que $t = \widetilde{\theta}(e_c, 0) = \psi f(e_c) = \psi(\epsilon_1 \dots \epsilon_m \alpha_1 \dots \alpha_n)$.

Del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(\widetilde{P_0})_a \arrow[r, "*\alpha_1"] \arrow[d, "\psi_a"] & \dots\dots \arrow[r, "*\alpha_n"] & (\widetilde{P_0})_c \arrow[d, "\psi_c"] \\
(T_h)_a \arrow[r, "\varphi_{\alpha_1}"] & \dots\dots \arrow[r, "\varphi_{\alpha_n}"] & (T_h)_c
\end{tikzcd}$$

resulta que $\psi_c * \alpha_n \cdots * \alpha_1 = \varphi_{\alpha_n} \dots \varphi_{\alpha_1} \psi_a$, donde $*\alpha_i$ denota el morfismo de la representación de P_0 que consiste en multiplicar por α_i. Entonces,

$$\psi_c * \alpha_n \cdots * \alpha_1(\epsilon_1 \dots \epsilon_m) = \psi_c(\epsilon_1 \dots \epsilon_m \alpha_1 \dots \alpha_n) = t$$

$$\varphi_{\alpha_n} \dots \varphi_{\alpha_1} \psi_a(\epsilon_1 \dots \epsilon_m) = 0.$$

Luego $t = 0$, lo cual es una contradicción. □

A continuación, ilustraremos con un ejemplo las condiciones i) y ii) de la proposición anterior.

Ejemplo 4.3.2. Sea $A = kQ/I$ el álgebra dada por el siguiente carcaj con relaciones

$$Q: \quad \begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[r, "\gamma"] & 4 \arrow[dr, "\lambda"] & & & \\
1 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & & & 5 \arrow[r, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, "\mu"] & 7 \\
 & 3 \arrow[urr, "\delta"] & & & &
\end{tikzcd}$$

e $I =< \alpha\gamma\lambda - \beta\delta,\ \lambda\epsilon\mu >$.

Consideremos el A-módulo τ-inclinante

$$T = \begin{matrix}1\\2\\4\end{matrix} \oplus \begin{matrix}4\\5\\6\end{matrix} \oplus \begin{matrix}6\\7\end{matrix} \oplus \begin{matrix}1\\3\end{matrix} \oplus 7 \oplus 4 \oplus 1.$$

Si calculamos el anulador de T, tenemos que $\operatorname{ann} T =< \delta, \gamma\lambda, \epsilon\mu >$. Así, vemos que $\gamma\lambda$ está asociado a la relación minimal $\alpha\boldsymbol{\gamma\lambda} - \beta\delta$, y $\epsilon\mu$ está relacionado con la relación cero $\lambda\boldsymbol{\epsilon\mu}$.

4.4. El álgebra A como una extensión escindida de $A/\operatorname{ann} T$

En esta sección presentaremos una de las condiciones que nos permiten asegurar que $\operatorname{gldim} B < \infty$.

Teorema 4.4.1. *Sean A un álgebra de dimensión global finita, T un A-módulo τ-inclinante y $B = \operatorname{End}_A T$, tales que A es una extensión escindida de $A/\operatorname{ann} T$ por $\operatorname{ann} T$. Entonces se satisfacen las siguientes condiciones:*

a) $\operatorname{gldim} B \leq \operatorname{gldim} A + 1 < \infty$.

b) $\operatorname{id}_A T - \operatorname{id}_A D(A/\operatorname{ann} T) \leq \operatorname{gldim} B$.

Demostración. *a*) Como $\operatorname{gldim} A < \infty$, de la Proposición 3.3.2 tenemos que $\operatorname{gldim} A/\operatorname{ann} T < \operatorname{gldim} A$. Entonces,

$$\begin{aligned}\operatorname{gldim} B &\leq \operatorname{gldim} A/\operatorname{ann} T + 1\\ &\leq \operatorname{gldim} A + 1.\end{aligned}$$

b) De la Proposición 4.1.4, sabemos que

$$\operatorname{id}_{A/\operatorname{ann} T} T \leq \operatorname{gldim} B.$$

Por otra parte, de la Proposición 3.3.4, tenemos que

$$\operatorname{id}_A T - \operatorname{id}_A D(A/\operatorname{ann} T) \leq \operatorname{id}_{A/\operatorname{ann} T} T.$$

Luego, sigue el enunciado. □

Observación 4.4.2. Notemos que en el Teorema 4.4.1, $0 \leq \operatorname{id}_A T - \operatorname{id}_A D(A/\operatorname{ann} T)$. En efecto, como $\operatorname{gldim} A < \infty$, sabemos que $\operatorname{gldim} A/\operatorname{ann} T < \infty$ y así, todo módulo $M \in \operatorname{Fac} T$ tiene una resolución finita de la forma:

$$0 \to T_n \to \cdots \to T_0 \to M \to 0$$

con $T_i \in \operatorname{add} T$, para $i = 1, \ldots, n$, y $n \leq \operatorname{pd}_{A/\operatorname{ann} T} M < \infty$. Por otra parte, como T es un $A/\operatorname{ann} T$-módulo inclinante, $D(A/\operatorname{ann} T) \in \operatorname{Fac} T$. En consecuencia, existe una sucesión exacta en $\operatorname{mod} A/\operatorname{ann} T$

$$0 \to T_n \to \cdots \to T_0 \to D(A/\operatorname{ann} T) \to 0 \tag{4.5}$$

con $T_i \in \operatorname{add} T$, para $i = 1, \ldots, n$, y $n \leq \operatorname{pd}_{A/\operatorname{ann} T} D(A/\operatorname{ann} T) < \infty$. Observando que $\operatorname{id}_A T_i \leq \operatorname{id}_A T$ para todo $i = 1, \ldots, n$, tenemos que $\operatorname{id}_A D(A/\operatorname{ann} T) \leq \operatorname{id}_A T$.

A continuación, presentamos dos ejemplos en los que se alcanzan las cotas halladas en el Teorema 4.4.1.

Ejemplo 4.4.3. *i*) Sea $A = kQ/I$ el álgebra dada por el siguiente carcaj con relaciones:

$$Q: \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] 7 & & \\ & 2 \arrow[ul, "\theta"'] \arrow[dl, "\beta"'] & \\ 1 & & 4 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\ & 3 \arrow[ul, "\delta"] & 5 \arrow[l, "\lambda"] \\ & & 6 \arrow[ul, "\mu"] \end{tikzcd} \qquad I = < \alpha\beta - \gamma\delta, \lambda\delta, \mu\delta, \alpha\theta > .$$

Notemos que $\operatorname{gldim} A = 2$. Consideremos el A-módulo τ-inclinante

$$T = 1 \oplus \begin{smallmatrix} & 4 & \\ 2 & & 3 \\ & 1 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4\,6 \\ 2\,3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4\,5 \\ 2\,3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus 7$$

En este caso, el álgebra de endomorfismos de T, $B = \operatorname{End}_A T$, está dada por el siguiente carcaj disconexo con relaciones:

$$Q': \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & & 3' \arrow[dl, "\beta"'] & & \\ 1' & 2' \arrow[l, "\alpha"'] & 4' \arrow[l, "\gamma"'] & 6' \arrow[l, "\delta"'] \arrow[dl, "\theta"] & 7' \\ & & 5' \arrow[ul, "\epsilon"] & & \end{tikzcd} \qquad I' = < \delta\gamma - \theta\epsilon, \gamma\alpha, \epsilon\alpha, \beta\alpha > .$$

Luego, tenemos que $\operatorname{gldim} B = 3 = \operatorname{gldim} A + 1$.

ii) Sea $A = kQ/I$ donde

$$\begin{tikzcd} Q:\ 1 & 2 \arrow[l, "\alpha"'] & 3 \arrow[l, "\beta"'] & 4 \arrow[l, "\gamma"'] & 5 \arrow[l, "\delta"] \\ & & & 6 \arrow[ul, "\eta"] & \end{tikzcd} \qquad I = <\beta\alpha, \eta\beta> .$$

Consideremos el A-módulo τ-inclinante $T = 1 \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus 4 \oplus \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 5 & \\ 4 & & 6 \\ & 3 & \end{smallmatrix}$. El anulador de T está generado como ideal por β. Así, $A/\operatorname{ann} T$ es hereditaria y viene dada por el siguiente carcaj disconexo:

$$\begin{tikzcd} Q:\ 1 & 2 \arrow[l, "\alpha"'] & 3 & 4 \arrow[l, "\gamma"'] & 5 \arrow[l, "\delta"] \\ & & & 6 \arrow[ul, "\eta"] & \end{tikzcd}$$

Como A-módulo, $D(A/\operatorname{ann} T) \cong \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus 2 \oplus \begin{smallmatrix} & 5 & \\ 4 & & 6 \\ & 3 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix} \oplus 5 \oplus 6$. Luego, tenemos que $\operatorname{id}_A D(A/\operatorname{ann} T) = 2$. Además, $\operatorname{id}_A T = \operatorname{id}_A S_1 = 3$.

Por otra parte, el siguiente carcaj representa el álgebra de endomorfismos de T:

$$B = \operatorname{End}_A T:\quad 2' \longrightarrow 1' \qquad 3' \longleftarrow 4' \longleftarrow 5' \longleftarrow 6'$$

B es un álgebra hereditaria, y en consecuencia $\operatorname{gldim} B = 1$. Luego tenemos que

$$\operatorname{gldim} B = 1 = \operatorname{id}_A T - \operatorname{id}_A D(A/\operatorname{ann} T).$$

4.4.1. Algebras monomiales cuadráticas

El propósito de esta sección es mostrar que las álgebras monomiales cuadráticas satisfacen la hipótesis del Teorema 4.4.1 y, en consecuencia, se tiene una cota para la dimensión global del álgebra de endomorfismos de un módulo τ-inclinante sobre este tipo de álgebras. Recordemos que un álgebra $A = kQ/I$ se dice **monomial cuadrática** si el ideal I está generado por caminos de longitud igual a 2. Comenzaremos mostrando que el anulador de un módulo τ-inclinante sobre estas álgebras está generado por caminos.

Lema 4.4.4. *Sean $A = kQ/I$ un álgebra monomial y T un A-módulo τ-inclinante. Supongamos que $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \rho_i \in \operatorname{ann} T$, con ρ_i caminos no nulos de longitud mayor o igual que 2 y $\lambda_i \in k$ para $i = 1, \ldots, m$. Entonces $\rho_i \in \operatorname{ann} T$ para todo $i = 1, \ldots, m$.*

Demostración. Sea $T = \bigoplus_{i=1}^{n} T_i$ un A-módulo τ-inclinante, con T_i A-módulos indescomponibles, para $i = 1, \ldots, n$. Consideremos $\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \rho_i : a \to c$ en Q, con ρ_i caminos no nulos de a a c de longitud mayor o igual a 2 y $\lambda_i \in k$ para $i = 1, \ldots, m$, tal que $\rho \in \operatorname{ann} T$. Supongamos que existe $k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\rho_k \notin \operatorname{ann} T$. Entonces, existe un sumando directo indescomponible $T_h = ((T_h)_y, \varphi_\alpha)_{(y \in Q_0, \alpha \in Q_1)}$ de T tal que $\rho_k \notin \operatorname{ann} T_h$ y, en consecuencia, $\varphi_{\rho_k} \neq 0$.

Sea $S(x)$ un sumando directo de $\operatorname{top} T_h$ tal que existe un camino no nulo γ de x a a y $\varphi_{\rho_k}\varphi_\gamma \neq 0$. Sea $\{m_{x_1}, \ldots, m_{x_{d_x}}\}$ una base para $(T_h)_x$ como k-espacio vectorial. Al igual en la demostración de la Proposición 4.3.1, podemos considerar una presentación proyectiva minimal de T_h como sigue

$$P_1 \xrightarrow{g} P_0 \xrightarrow{f} T_h \to 0$$

tal que $f(e_x) = m_{x_1}$ y $f(\epsilon) = \varphi_\epsilon(m_{x_1})$ si ϵ es un camino en Q comenzando en x. Notemos que como A es un álgebra monomial y $\gamma\rho_k \neq 0$ tenemos que $\gamma \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \rho_i \neq 0$. Luego, $\gamma \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \rho_i \in \ker f$, pues $f(\gamma\rho) = \varphi_\rho \varphi_\gamma = 0\varphi_\gamma = 0$. Veamos que $\gamma\rho \notin \operatorname{rad}(\ker f)$.

Recordemos que los morfismos de la representación $\ker f$ son la restricción de los morfismos de P_0, y por lo tanto son la multiplicación por las flechas correspondientes. Entonces, si $\gamma\rho \in \operatorname{rad}(\ker f)$, tenemos que existen $\omega_y \in (\ker f)_c$ tales que

$$\gamma\rho = \sum_{\beta : y \to c} \omega_y \beta \tag{4.6}$$

La ecuación (4.6) define una relación $\gamma\rho - \sum_{\beta : y \to c} \omega_y \beta$ en I con $\gamma\rho \neq 0$ que no es monomial, lo cual es una contradición pues A es un álgebra monomial. Por lo tanto, $\gamma\rho \notin \operatorname{rad}(\ker f)$ y, en consecuencia, $S(c)$ es un sumando directo de $\operatorname{top} T_h$ y $P(c)$ es un sumando directo de P_1.

Al igual que en la demostración de la Proposición 4.3.1, si $P(c)$ es sumando directo de P_1 podemos construir un morfismo $\theta : P_1 \to T_h$ que no factoriza por g lo cual es una contradicción al hecho que T_h es un A-módulo τ-rígido. Por lo tanto, si $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \rho_i \in \operatorname{ann} T$, entonces $\rho_i \in \operatorname{ann} T$ para todo $i = 1, \ldots, m$. $\square$

Observación 4.4.5. En vista del Lema 4.4.4, tenemos que si A es un álgebra monomial y T es un A-módulo τ-inclinante (no inclinante), entonces $\operatorname{ann} T$ está generado como ideal por flechas o por caminos de longitud mayor o igual que dos.

Proposición 4.4.6. *Sean $A = kQ/I$ un álgebra monomial cuadrática y T un A-módulo τ-inclinante (no inclinante). Entonces $\operatorname{ann} T$ esta generado como ideal por flechas.*

Demostración. Del Lema 4.4.4 tenemos que $\operatorname{ann} T$ está generado como ideal por caminos de longitud mayor o igual que uno. Supongamos que existe un generador ρ del $\operatorname{ann} T$ de longitud mayor o igual a 2. Entonces, se satisface alguna de las condiciones *i)* o *ii)* de la Proposición 4.3.1. Como las relaciones de A son monomiales la condición *ii)* no es posible. Por otra parte, como A es monomial cuadrática, no existen relaciones cero de longitud mayor que 2 y, en consecuencia, la condición *i)* de la Proposición 4.3.1 tampoco se satisface. Por lo tanto, no existe ningún generador de $\operatorname{ann} T$ que tenga largo mayor o igual a 2. Como T no es inclinante, $\operatorname{ann} T \neq 0$ y, en consecuencia, está generado por flechas. □

Como una consecuencia de la Proposición 4.4.6 se desprende el siguiente corolario.

Corolario 4.4.7. *Sean $A = kQ/I$ un álgebra monomial cuadrática de dimensión global finita, T un A-módulo τ-inclinante(no inclinante) y $B = \operatorname{End}_A T$. Entonces se satisfacen las siguientes condiciones.*

a) $\operatorname{gldim} B \leq \operatorname{gldim} A + 1 < \infty$.

b) $\operatorname{id}_A T - \operatorname{id}_A D(A/\operatorname{ann} T) \leq \operatorname{gldim} B$.

Demostración. Del Lema 4.4.6 y por el Teorema 3.1.2 tenemos que A es una extensión escindida de $A/\operatorname{ann} T$ por $\operatorname{ann} T$. El resultado sigue del Teorema 4.4.1. □

Una pregunta natural es si en la Proposición 4.4.6 se puede quitar la condición de ser monomial, es decir, si permitimos que A tenga relaciones minimales del tipo $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \rho_i$ con ρ_i caminos de largo 2 para $i = 1, \ldots, m$. El siguiente ejemplo muestra que, en general, este resultado es falso.

Ejemplo 4.4.8. Consideremos $A = kQ/I$ el álgebra dada por el siguiente carcaj con relaciones:

$$Q : \begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl, "\alpha"'] & & \\ 1 & & 4 \arrow[ul, "\beta"'] \arrow[dl, "\delta"] & 5 \arrow[l, "\epsilon"] \\ & 3 \arrow[ul, "\gamma"] & & \end{tikzcd} \qquad I = <\epsilon\delta, \beta\alpha - \delta\gamma> .$$

Sea el A-módulo τ-inclinante $T = 5 \oplus 2 \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ & 1 & \end{smallmatrix}$. En este caso, $\operatorname{ann} T$ está generado por la flecha δ. Entonces $A/\operatorname{ann} T$ está dada por el siguiente carcaj con relaciones:

$$Q: \begin{tikzcd}[column sep=small] & 2 \arrow[dl, "\alpha"'] & & \\ 1 & & 4 \arrow[ul, "\beta"'] & 5 \arrow[l, "\epsilon"] \\ & 3 \arrow[ul, "\gamma"] & & \end{tikzcd} \qquad I = < \epsilon\delta, \beta\alpha > .$$

Por el Teorema 3.1.2, tenemos que A no es una extensión que se parte de $A/\operatorname{ann} T$ por el ideal nilpotente $\operatorname{ann} T$ pues $\delta \in \operatorname{ann} T$ pero ninguna flecha correspondiente al camino $\beta\alpha$ pertenece al $\operatorname{ann} T$.

Capítulo 5

Módulos τ-inclinantes sobre álgebras de dimensión global dos

En la Sección 4.2 del capítulo anterior, mostramos que existe una familia de álgebras de dimensión global n, con $n \geq 3$, y módulos τ-inclinantes sobre estas álgebras tal que sus álgebras de endomorfismos tienen dimensión global infinita. El objetivo principal de este capítulo es estudiar el caso de las álgebras de dimensión global dos. Nos concentraremos en dos familias de álgebras: las álgebras monomiales de dimensión global dos y las álgebras biseriales especiales de dimensión global dos. Para estas álgebras, probaremos que si T es un A-módulo τ-inclinante, entonces el algebra de endomorfismos de T es de dimensión global finita. Conjeturamos que este resultado vale en general, para cualquier álgebra de dimensión global dos.

Comenzaremos mostrando una presentación del álgebra $A/\operatorname{ann} T$, para T un A-módulo τ-inclinante.

5.1. Una presentación para $A/\operatorname{ann} T$

Lema 5.1.1. *Sean A un álgebra y $\eta_A : kQ_A \to A$ una presentación de A, con $I_A = \ker \eta_A$. Sea T un A-módulo τ-inclinante tal que $\operatorname{ann} T$ está generado como ideal por caminos. Entonces existe una presentación $\eta_{A/\operatorname{ann} T} : kQ_{A/\operatorname{ann} T} \to A/\operatorname{ann} T$ tal que $\eta_{A/\operatorname{ann} T}\widetilde{\pi} = \pi\eta_A$, donde $\pi : A \to A/\operatorname{ann} T$ es la proyección canónica y $\widetilde{\pi} : kQ_A \to kQ_{A/\operatorname{ann} T}$ es un morfismo suryectivo. Más aún,*

$$I_{A/\operatorname{ann} \mathrm{T}} = \ker \eta_{A/\operatorname{ann} T} = \langle I_A \cap kQ_{A/\operatorname{ann} T},\ \operatorname{ann} T \cap kQ_{A/\operatorname{ann} T} \rangle$$

Demostración. Sea Q el carcaj definido como sigue:

$$\begin{aligned} Q_0 &= (Q_A)_0. \\ Q_1 &= (Q_A)_1 \setminus \{\alpha \in (Q_A)_1 \mid \alpha \in \operatorname{ann} T\}. \end{aligned}$$

Entonces tenemos un morfismo suryectivo $\widetilde{\pi} : kQ_A \to kQ$ definido como sigue

$$\begin{aligned} \widetilde{\pi}(e_x) &= e_x \text{ para todo } x \in (Q_A)_0. \\ \widetilde{\pi}(\alpha) &= 0 \text{ si } \alpha \in \operatorname{ann} T \cap (Q_A)_1. \\ \widetilde{\pi}(\beta) &= \beta \text{ si } \beta \in (Q_A)_1 \text{ y } \beta \notin \operatorname{ann} T. \end{aligned}$$

Es claro que $\ker \widetilde{\pi} = \langle \alpha \in (Q_A)_1 \mid \alpha \in \operatorname{ann} T \rangle$. Consideremos $\pi : A \to A/\operatorname{ann} T$ la proyección canónica. Para $\alpha \in \operatorname{ann} T$ tenemos que $\pi\eta_A(\alpha) = 0$ y en consecuencia $\ker \widetilde{\pi} \subset \ker \pi\eta_A$. Luego, existe un único morfismo $\eta_{A/\operatorname{ann} T} : kQ \to A/\operatorname{ann} T$ tal que $\eta_B\widetilde{\pi} = \pi\eta_A$, como muestra el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} kQ_A \arrow[r, "\pi\eta_A"] \arrow[d, "\widetilde{\pi}"'] & A/\operatorname{ann} T \\ kQ \arrow[ur, dashed, "\eta_{A/\operatorname{ann} T}"'] & \end{tikzcd}$$

Veamos que $I_{A/\operatorname{ann} T} = \ker \eta_{A/\operatorname{ann} T}$ es un ideal admisible, es decir, que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r_Q^n \subset I_{A/\operatorname{ann} T} \subset r_Q^2$, donde r_Q es el ideal de kQ generado por las flechas.

Supongamos por el contrario que existe $\gamma \in I_{A/\operatorname{ann} T}$ y $\gamma \notin r_Q^2$. Entonces existen $\beta_1, \ldots, \beta_m$ flechas en Q, $c_1, \ldots, c_m$ escalares no nulos y $\rho \in r_Q^2$ tales que

$$\gamma = \sum_{i=1}^{m} c_i\beta_i + \rho.$$

Viendo a γ como un elemento de kQ_A tenemos que

$$\pi\eta_A(\gamma) = \eta_{A/\operatorname{ann} T}\widetilde{\pi}(\gamma) = \eta_{A/\operatorname{ann} T}(\gamma) = 0.$$

Luego, $\eta_A(\gamma) = \gamma + I_A \in \ker \pi = \operatorname{ann} T$. Entonces existen $a_1, \ldots, a_l$ escalares no nulos, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ flechas que pertenecen al $\operatorname{ann} T$ y $\lambda \in \operatorname{ann} T \cap r_{Q_A}^2$ tales que

$$\gamma + I_A = \sum_{j=1}^{l} a_j\alpha_j + \lambda + I_A.$$

Como I_A es un ideal admisible y $\rho, \lambda \in r_{Q_A}^2$ la ecuación

$$\sum_{i=1}^{m} c_i\beta_i + \rho + I_A = \sum_{j=1}^{l} a_j\alpha_j + \lambda + I_A$$

implica que $\sum_{i=1}^{m} c_i\beta_i = \sum_{j=1}^{l} a_j\alpha_j$, lo cual es una contradicción pues las flechas α_j no pertenecen a Q. Por lo tanto, $I_{A/\operatorname{ann} T} \subset r_Q^2$.

Ahora, veamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r_Q^n \subset I_{A/\operatorname{ann} T}$. Como I_A es un ideal admisible, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r_{Q_A}^n \subset I_A$. Por otra parte, como Q es un subcarcaj de Q_A tenemos que $r_Q^n \subset r_{Q_A}^n$ y en consecuencia, $r_Q^n \subset I_A$. Sea $x \in r_Q^n$, entonces tenemos que

$$\eta_{A/\operatorname{ann} T}(x) = \eta_{A/\operatorname{ann} T}\widetilde{\pi}(x) = \pi\eta_A(x) = 0$$

pues $x \in I_A$. Por lo tanto, $r_Q^n \subset I_{A/\operatorname{ann} T}$ y así, $I_{A/\operatorname{ann} T}$ es un ideal admisible.

Como el carcaj de un álgebra está unívocamente determinado, tenemos que $Q = Q_{A/\operatorname{ann} T}$ y $\eta_{A/\operatorname{ann} T} : kQ \to A/\operatorname{ann} T$ es una presentación de $A/\operatorname{ann} T$.

Veamos que $I_{A/\operatorname{ann} T} = \ker\eta_{A/\operatorname{ann} T} = \langle I_A \cap kQ_{A/\operatorname{ann} T},\ \operatorname{ann} T \cap kQ_{A/\operatorname{ann} T}\rangle$. Sea $y \in I_{A/\operatorname{ann} T}$. Entonces,

$$0 = \eta_{A/\operatorname{ann} T}(y) = \eta_{A/\operatorname{ann} T}(\widetilde{\pi}(y)) = \pi\eta_A(y).$$

Luego, $\eta_A(y) \in \ker \pi = \operatorname{ann} T$. En consecuencia, existe $z \in \operatorname{ann} T$ tal que $\eta_A(y) = y + I_A = z$. Luego, $y \in < I_A \cap kQ_{A/\operatorname{ann} T},\ \operatorname{ann} T \cap kQ_{A/\operatorname{ann} T} >$.

Recíprocamente, sea $z \in < I_A \cap kQ_{A/\operatorname{ann} T},\ \operatorname{ann} T \cap kQ_{A/\operatorname{ann} T} >$. Entonces $z = z_1 + z_2$, con $z_1 \in I_A \cap kQ_{A/\operatorname{ann} T}$ y $z_2 \in \operatorname{ann} T \cap kQ_{A/\operatorname{ann} T}$. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} \eta_{A/\operatorname{ann} T}(z) &= \eta_{A/\operatorname{ann} T}(\widetilde{\pi}(z)) \\ &= \pi\eta_A(z) \\ &= \pi(\eta_A(z_1)) + \pi(\eta_A(z_2)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $z \in I_{A/\operatorname{ann} T}$. □

5.2. Álgebras monomiales

5.2.1. Generalidades

En [GHZ], E. Green, D. Happel y D. Zacharia muestran un algoritmo para calcular las resoluciones proyectivas de módulos simples sobre álgebras monomiales. Más precisamente, los autores mencionados describen un algoritmo para calcular resoluciones proyectivas de módulos simples sobre carcajes de tipo árbol y a partir de esto, via el cubrimiento universal de carcajes, dan un método para calcular las resoluciones proyectivas de módulos simples sobre álgebras monomiales.

Comenzaremos recordando algunos resultados y definiciones que aparecen en [GHZ], que serán de gran utilidad para estudiar la dimensión global del álgebra de endomorfismos de un módulo τ-inclinante sobre álgebras monomiales.

Sea (B, ρ) un camino dirigido con conjunto de relaciones minimales ρ. Dados dos vértices u, w en B diremos que $u < w$ si existe un camino dirigido de v a w.

Definición 5.2.1. Sea v_0 un vértice del camino dirigido (B, ρ). Definimos inductivamente la **secuencia de relaciones $\mathcal{S}$ asociada a** v_0 (a lo largo de B) como sigue: si no existe ninguna relación $r \in \rho$ tal que $s(r) = v_0$, entonces $\mathcal{S} = \emptyset$. Supongamos que existe $r_1 \in \rho$ tal que $s(r_1) = v_0$. Entonces, sea r_2 una relación en ρ (si existe) tal que $s(r_1) < s(r_2) < e(r_1)$ y $s(r_2)$ minimal con esta propiedad. Asumamos que tenemos construido $r_1, r_2, \ldots, r_i$. Sea

$$R_{i+1} = \{r \in \rho \mid e(r_{i-1}) \leq s(r) < e(r_i)\}.$$

Si $R_{i+1} \neq \emptyset$, sea r_{i+1} tal que $s(r_{i+1})$ es minimal con $r_{i+1} \in R_{i+1}$. Entonces $\mathcal{S}$ es la secuencia $r_1, r_2, \ldots, r_N$ donde N es ∞ si $R_i \neq \emptyset$ para todo i, o N es tal que $R_{N+1} = \emptyset$ pero $R_i \neq \emptyset$.

A continuación, transcribiremos el Teorema 1.2 de [GHZ].

Teorema 5.2.2. *[GHZ, Teorema 1.2] Sea (B, ρ) un camino dirigido con conjunto de relaciones minimales ρ. Sean v_0, v_1 vértices de B tales que existe una flecha de v_0 a v_1, $\mathcal{S} = \{r_i\}_{i=1}^N$ la secuencia de relaciones asociada a v_0 y $x_i = e(r_i)$.*

a) Si $\mathcal{S} = \emptyset$, entonces $0 \to P(v_1) \to P(v_0) \to S(v_0) \to 0$ es la resolución proyectiva minimal de $S(v_0)$.

b) Supongamos $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Si $N < \infty$, entonces

$$0 \to P(x_N) \to P(x_{N-1}) \to \cdots \to P(x_1) \to P(v_1) \to P(v_0) \to S(v_0) \to 0$$

es la resolución proyectiva minimal de $S(v_0)$, y si $N = \infty$ entonces $\mathrm{pd}_B S(v_0) = \infty$ y su resolución proyectiva minimal es

$$\cdots \to P(x_i) \to P(x_{i-1}) \to \cdots \to P(x_1) \to P(v_1) \to P(v_0) \to S(v_0) \to 0$$

Luego, como una aplicación del teorema anterior, se obtiene un algoritmo para el cálculo de los términos de la resolución proyectiva minimal de un módulo simple sobre carcaj de tipo árbol.

Sean $A = kQ/I$ un álgebra monomial y ρ un conjunto de generadores para I. Considerando (Q,ρ) un carcaj con relaciones, como ρ consiste de caminos dirigidos, el cubrimiento universal de (Q,ρ), $\Phi : (\widetilde{Q},\widetilde{\rho}) \to (Q,\rho)$ es el cubrimiento universal topológico $\Phi : \widetilde{Q} \to Q$ junto con $\widetilde{\rho}$, que es el conjunto de todos los caminos en $\widetilde{Q}$ cuya imagen por Φ es un camino en ρ.

Recordemos que se puede definir una *relación de homotopía* en el conjunto de todos los paseos como la menor relación de equivalencia tal que:

1. Para cada flecha $\alpha : x \to y$ tenemos $\alpha\alpha^{-1} \sim e_x$ y $\alpha^{-1}\alpha \sim e_x$.

2. Si $u \sim v$, entonces $wuw' \sim wvw'$, cuando estos productos estén definidos.

Así, el **cubrimiento topólogico** $\widetilde{Q}$ de un carcaj Q con base en v_0 se define como sigue:

- El conjunto de vértices $\widetilde{Q}_0$ de $\widetilde{Q}$ es el conjunto de clases de homotopía de paseos en Q con origen en v_0.

- Dados v_1^*, v_2^* vértices en $\widetilde{Q}$, para cada flecha δ en Q, existe una flecha $\overline{\delta}_{v_1^*,v_2^*} : v_1^* \to v_2^*$ si y sólo si existen paseos representantes q_1, q_2 en Q de v_1^* y v_2^* respectivamente tales que $q_2 = \delta q_1$.

Se puede ver que el cubrimiento no depende el punto base v_0. El carcaj $\widetilde{Q}$ es un carcaj de tipo árbol que, si Q contiene ciclos (no necesariamente orientados), es infinito.

La proyección del cubrimiento $\Phi : \widetilde{Q} \to Q$ está dada de la siguiente manera: para cada vértice v_0^* de $\widetilde{Q}$, $\Phi(v_0^*) = e(\alpha)$, donde α es cualquier paseo en Q representante de v_0^* y si $\overline{\delta}$ es una flecha de $\widetilde{Q}$ de v_1^* en v_2^* originada por una flecha δ en Q tal que existen paseos q_1 y q_2 en Q representantes de v_1^* y v_2^* respectivamente, con $q_2 = \delta q_1$, entonces $\Phi(\overline{\delta}) = \delta$.

Esta proyección, induce un funtor $F : \mathrm{rep}(\widetilde{Q},\widetilde{\rho}) \to \mathrm{rep}(Q,\rho)$ que satisface que si

$$\cdots \to P_n \overset{f_n}{\to} P_{n-1} \cdots \to P_0 \overset{f_0}{\to} X \to 0$$

es una resolución proyectiva minimal de X en $\mathrm{rep}(\widetilde{Q},\widetilde{\rho})$, entonces

$$\cdots \to F(P_n) \overset{F(f_n)}{\to} F(P_{n-1}) \cdots \to F(P_0) \overset{F(f_0)}{\to} F(X) \to 0$$

es una resolución proyectiva minimal de $F(X)$ en $\mathrm{rep}(Q,\rho)$. Luego, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 5.2.3. *[GHZ, Teorema 2.3] Sea A un álgebra monomial. Entonces la construcción de la resolución proyectiva de los A-módulos simples es algorítmica. Esto es, la determinación de los A-módulos proyectivos en la resolución proyectiva minimal de un A-módulo simple se reduce a la construcción de secuencias asociadas en $\widetilde{Q}$ con relaciones $\widetilde{\rho}$.*

El cálculo de los primeros n-términos de la resolución proyectiva de un A-módulo simple $S(v_1)$ está dado por el cálculo de la $(\widetilde{Q}, \widetilde{\rho})$-resolución proyectiva de $S(v_1^*)$, donde v_1^* es tal que $\Phi(v_1^*) = v_1$. Dicha resolución en $(\widetilde{Q}, \widetilde{\rho})$ está determinada por un carcaj pleno y finito $\widetilde{Q}'$ de $\widetilde{Q}$ que se construye como sigue:

- El conjunto de vértices es

$$\{v^* \mid \operatorname{dist}(v_1^*, v^*) \leq (n-1)L)\}$$

  donde L denota la longitud del camino más largo en ρ y $\operatorname{dist}(v_1^*, v^*)$ es el número de flechas en el único camino dirigido que une v_1^* con v^*.

- el conjunto de relaciones es el conjunto de caminos en $\widetilde{\rho}$ que son caminos en $\widetilde{Q}'$.

Proposición 5.2.4. *[GHZ, Corolario 2.5] Sea A un álgebra monomial. Supongamos que S es un A-módulo simple tal que* $\operatorname{pd}_A S = \infty$*. Sea*

$$\cdots \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \to \cdots \to A_1 \xrightarrow{f_1} A_0 \xrightarrow{f_0} S \to 0$$

una resolución proyectiva minimal de S. Entonces, existe una sucesión de A-módulos indescomponibles proyectivos $P_1, P_2, \ldots, P_t$ y un entero positivo l tal que P_i es un sumando directo de A_{m+l+i} para todo $m \geq 0$ e $i = 1, \ldots, t$.

Observación 5.2.5. En la demostración de la Proposición 5.2.4, los autores muestran que si v es un vértice en Q tal que el simple correspondiente $S(v)$ tiene dimensión proyectiva infinita, entonces es posible construir una secuencia infinita de relaciones minimales $r_1^*, r_2^*, \ldots, r_n^*, \ldots$ asociada a v^* en $(\widetilde{Q}, \widetilde{\rho})$, con $\Phi(v^*) = v$ y números enteros a, b con $1 \leq a < b$, tales que $r_i^* = r_i$ para $i = 1, \ldots, b+1$ y $\Phi(r_{lb+j}^*) = \Phi(r_{a+j})$ para $l \geq 1$ y $0 \leq j \leq b-a-1$. En consecuencia, existe una secuencia de relaciones minimales asociada a v en (Q, ρ) que termina en un ciclo fijo. Además, como $e(r_{i-1}^*) < s(r_{i+1}^*) < e(r_i)$ en $(\widetilde{Q}, \widetilde{\rho})$, se tiene que existen caminos no nulos γ_j, $j = 1, \ldots, n$, tales que $r_j = \gamma_j \gamma_{j+1}$ para $j = 1, \ldots, n-1$ y $r_n = \gamma_n \widetilde{\gamma}_1$, con $\widetilde{\gamma}_1$ un subcamino de γ_1.

Observación 5.2.6. Notemos que si $A = kQ/I$ es un álgebra monomial de dimensión global 2, con $I =< \rho >$ entonces no puede existir ningún camino $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, con $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ caminos no triviales, tales que $\gamma_1\gamma_2$ y $\gamma_2\gamma_3$ son las únicas relaciones cero de A contenidas en el camino. En efecto, supongamos que existe un camino en A en esas condiciones. Notemos por $x = s(\gamma_1)$. Entonces existe en $\widetilde{Q}$ dos relaciones r_1^*, r_2^* asociadas al vértice x^*, con $\Phi(x^*) = x$, tales que $\Phi(r_1^*) = \gamma_1\gamma_2$, $\Phi(r_2^*) = \gamma_2\gamma_3$ y $s(r_1^*) < s(r_2^*) < e(r_1^*)$. Luego, del Teorema 5.2.2, tenemos que $\mathrm{pd}_{\mathrm{rep}(\widetilde{Q},\widetilde{\rho})} S(x^*) \geq 3$ y, en consecuencia $\mathrm{pd}_A S(x) \geq 3$ lo cual es una contradicción.

5.2.2. Resultado principal

Ahora, estamos en condiciones de enunciar y demostrar el resultado principal de esta sección.

Teorema 5.2.7. *Sean $A = kQ/I$ un álgebra monomial de dimensión global 2, T un A-módulo τ-inclinante y $B = \mathrm{End}_A T$. Entonces $\mathrm{gldim}\, B < \infty$.*

Demostración. Supongamos que $\mathrm{gldim}\, B = \infty$. Como T es un $A/\mathrm{ann}\, T$-módulo inclinante, tenemos que $\mathrm{gldim}\, A/\mathrm{ann}\, T = \infty$.

Por otra parte, de la Proposición 4.3.1 y el Lema 4.4.4 sabemos que $\mathrm{ann}\, T$ está generado por caminos y, en consecuencia $A/\mathrm{ann}\, T$ es un álgebra monomial. Como $\mathrm{gldim}\, A/\mathrm{ann}\, T = \infty$, existe un vértice $v_0 \in Q_0$ tal que $\mathrm{pd}_{A/\mathrm{ann}\, T} S(v_0) = \infty$. Por el Teorema 5.2.3 sabemos que existe una secuencia de relaciones asociada a v_0, $r_1, \ldots, r_k$ que termina en un ciclo $\rho = \alpha_1 \ldots \alpha_n$, con $\alpha_i \in (Q_{A/\mathrm{ann}\, T})_1$ para $i = 1, \ldots, n$ y $s(\alpha_1) = e(\alpha_n)$. Notemos por $r'_1, r'_2, \ldots, r'_h$ la subsecuencia de relaciones que recorre el ciclo, con $r'_j = \gamma_j\gamma_{j+1}$, γ_j caminos no nulos para todo $j = 1, \ldots, h$ y $r_h = \gamma_h\widetilde{\gamma}_1$, con $\widetilde{\gamma}_1$ un subcamino de γ_1.

Dado r'_j en esa subsecuencia, r'_j es una relación cero de A o bien es una relación de $A/\mathrm{ann}\, T$ que no es relación en A. Afirmamos que ninguna relación r'_j puede ser una relación en A. En efecto, supongamos que existe j tal que r'_j es una relación cero en A, entonces si r'_{j-1} es una relación cero en A, por la Observación 5.2.6 tenemos que $\mathrm{pd}_A S(x_{j-1}) \geq 3$, donde $x_{j-1} = s(r_{j-1})$, lo cual es una contradicción. Entonces, r_{j-1} no es una relación en A. Luego, de la Proposición 4.3.1 existe γ camino no nulo en A tal que $\gamma r'_{j-1}$ es una relación monomial en A. Pero entonces $\mathrm{pd}_A S(x) \geq 3$, con $x = s(\gamma)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, ningún r'_j es una relación de A.

Como A es un álgebra de dimensión finita y hay un ciclo en Q, debe existir una relación monomial $\lambda \in I$ que comience y termine en vértices del ciclo. Como la secuencia de relaciones $r'_1, \ldots, r'_h$ recorren el ciclo ρ, existe $l \in \{1, \ldots, h\}$ y ν camino no nulo tales que $r'_l = r''_1 \nu$ y $\lambda = \nu\lambda'$. Sea γ' camino no nulo en A tal que $\gamma' r_l$ es una relación monomial en A. Luego, tenemos que $\mathrm{pd}_A S(y) \geq 3$ con $y = s(\gamma')$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\operatorname{gldim} A/\operatorname{ann} T < \infty$ y en consecuencia $\operatorname{gldim} B < \infty$. $\square$

5.2.3. Una familia de ejemplos

Vimos en la sección anterior que si A es un álgebra monomial de dimensión global igual a 2, entonces $\operatorname{gldim} B < \infty$, para $B = \operatorname{End}_A T$ y T un A-módulo τ-inclinante. Una pregunta natural es si, para estos casos, es posible encontrar una cota explícita para $\operatorname{gldim} B$.

En el siguiente ejemplo mostramos que parece no ser el caso puesto que, si proponemos una cota l entonces podemos construir un álgebra y un módulo τ-inclinante tales que el álgebra de endomorfismos tiene dimensión global igual a $n > l$.

Consideremos el álgebra $A_n = kQ_n/I_n$, donde Q_n es el carcaj:

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[d, "\gamma_1"'] & & a_3 \arrow[d, "\gamma_3"'] & & & a_{n-2} \arrow[d, "\gamma_{n-2}"'] & & & \\
1 \arrow[r, "\alpha_1"] & 2 \arrow[r, "\alpha_2"] & 3 \arrow[r, "\alpha_3"] & 4 & \ldots & n-2 \arrow[r, "\alpha_{n-2}"] & n-1 \arrow[r, "\alpha_{n-1}"] & n \arrow[r, "\alpha_n"] & n+1 \\
 & a_2 \arrow[u, "\gamma_2"] & & & & & a_{n-1} \arrow[u, "\gamma_{n-1}"] & &
\end{tikzcd}$$

e $I_n =< \gamma_i\alpha_i\alpha_{i+1} \mid i = 1, \ldots, n-1 >$. Como A es un álgebra monomial, por el Teorema 5.2.2, tenemos que $\operatorname{gldim} A = 2$. Consideremos

$$T = \bigoplus_{j=1}^{n-1} T_{a_j} \oplus S(a_j) \oplus P(n) \oplus P(n+1)$$

donde $S(a_j)$ es el simple correspondiente al vértice j, $P(n)$ y $P(n+1)$ los módulos proyectivos correspondientes a los vértices n y $n+1$, respectivamente, y, $T_{a_j} = ((T_{a_j})_x, \varphi_\delta^{a_j})_{\{x \in Q_0, \delta \in Q_1\}}$, donde para cada $x \in (Q_n)_0$, los k-espacios vectoriales $(T_{a_j})_x$ vienen dados por:

$$(T_{a_j})_x = \begin{cases} k & \text{si } x \in \{a_j, a_{j+1}, j, j+1\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y, para cada $\delta \in (Q_n)_1$, los morfismos $\varphi_\delta^{a_j}$:

$$\varphi_\delta^{a_j} = \begin{cases} \mathrm{Id} & \text{si } \delta \in \{\gamma_j, \gamma_{j+1}, \alpha_j\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si consideramos $P(j) \to P(a_j) \to S(a_j) \to 0$ la presentación proyectiva minimal de $S(a_j)$, tenemos una sucesión exacta

$$0 \to \tau_A S(a_j) \to I(j) \to I(a_j) \cong S(a_j)$$

de donde se deduce que $\tau_A S(a_j) = ((\tau_A S(a_j))_x, \phi_\delta^{a_j})$ está dado por

$$(\tau_A S(a_j))_x = \begin{cases} k & \text{si } x \in \{a_{j-1}1, \dots, j\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para cada $x \in (Q_n)_0$ y, los morfismos,

$$\phi_\delta^{a_j} = \begin{cases} \mathrm{Id} & \text{si } \delta \in \{\gamma_{j-1}, \alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para cada $\delta \in (Q_n)_1$.

De manera similar, como $\operatorname{top} T_{a_j} = S(a_{j+1}) \oplus S(a_j)$, tenemos que la presentación proyectiva minimal de T_{a_j}, $P(j+1) \to P(a_{j+1}) \oplus P(a_j) \to T(a_j) \to 0$ induce una sucesión exacta

$$0 \to \tau_A T_{a_j} \to I(j+1) \to S(a_{j+1}) \oplus S(a_j)$$

de donde se deduce que $\tau_A T_{a_j} = ((\tau_A T_{a_j})_x, \psi_\delta^{a_j})$ está dado por

$$(\tau_A S(a_j))_x = \begin{cases} k & \text{si } x \in \{1, \dots, j\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para cada $x \in (Q_n)_0$ y, los morfismos,

$$\psi_\delta^{a_j} = \begin{cases} \mathrm{Id} & \text{si } \delta \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para cada $\delta \in (Q_n)_1$.

Se puede ver que $\mathrm{Hom}_A(T, \tau_A T) = 0$ y así, como $|T| = n-1+n-1+2 = n$ tenemos que T es un A-módulo τ-inclinante. Calculemos ahora $\mathrm{End}_A(T)$.

Notemos que $\dim_k \mathrm{Hom}_A(T_{a_j}, T_{a_{j-1}}) = 1$ y $\dim_k \mathrm{Hom}_A(T_{a_j}, T_{a_{j-2}}) = 0$. Por otro lado, hay un único morfismo linealmente independiente de $T(a_j)$ a $S(a_j)$, digamos f_j, y un único morfismo linealmente independiente de $T(a_j)$ a $S(a_{j-1})$ que factoriza por f_j. Por último, $\dim_k \mathrm{Hom}_A(P_n, T_{n-1}) = 1$, $\dim_k \mathrm{Hom}_A(P_{n+1}, P_n) = 1$ y $\dim_k \mathrm{Hom}_A(P_{n+1}, T_{n-1}) = 1$. Luego, $B = \mathrm{End}_A(T)$ viene dado por el carcaj Q_n'

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\beta_1"'] & 2 \arrow[r, "\beta_2"'] & 3 \arrow[r, "\beta_3"'] & 4 & \cdots & \bullet \arrow[r, "\beta_{n-2}"'] & n-1 \arrow[r, "\beta_{n-1}"'] & n \arrow[r, "\beta_n"'] & n+1 \\
b_1 \arrow[u] & b_2 \arrow[u] & b_3 \arrow[u] & b_4 \arrow[u] & & b_{n-2} \arrow[u] & b_{n-1} \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

e $I'_n =< \beta_i\beta_{i+1},\ i = 1, \dots, n-1 >$.

Luego, por el Teorema 5.2.2 tenemos que $\mathrm{pd}_B S(i) = n+1-i$, para $i = 1, \dots, n+1$ y $\mathrm{pd}_B S(b_j) = 1$, para $j = 1, \dots, n-1$. Por lo tanto, $\mathrm{gldim}\, B = n$.

5.3. Álgebras biseriales especiales

5.3.1. Preliminares

Comenzaremos recordando la definición.

Definición 5.3.1. Un álgebra A es **biserial especial** si $A \cong kQ/I$ con (Q, I) un carcaj con relaciones que satisface las siguientes condiciones:

a) Cada vértice de Q es el punto inicial o el punto final de a lo sumo dos flechas.

b) Para una flecha α hay a lo sumo una flecha β tal que $\alpha\beta \notin I$ y a lo sumo una flecha γ tal que $\gamma\alpha \notin I$.

Recordemos que, dado (Q, I) un carcaj con relaciones, un par (p, q) de caminos no nulos p, q de un vértice a a un vértice b se llama **relación binomial** de (Q, I) si $\lambda p + \mu q \in I$, con λ, μ escalares no nulos. Llamaremos a p y a q los subcaminos maximales de (p, q).

Definición 5.3.2. Sea $A = kQ/I$ un álgebra biserial especial. Un paseo reducido w en Q es llamado **cuerda** si cada camino contenido en w no es ni un camino nulo ni un subcamino maximal de una relación binomial de (Q, I).

Ejemplo 5.3.3. Consideremos el álgebra biserial especial dada por el siguiente carcaj:

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\delta"] & & \bullet \arrow[dl, "\rho"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\
\bullet \arrow[dr, "\alpha"'] & & \bullet \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[dr, "\mu"'] & & \bullet \arrow[dl, "\psi"] \\
& \bullet & & \bullet &
\end{tikzcd}$$

con relaciones $\beta\alpha - \delta\gamma$, $\delta\mu$ y $\rho\gamma$. Entonces $\rho\mu\psi^{-1}\phi^{-1}\rho\delta^{-1}\beta$ es una cuerda mientras que $\beta^{-1}\delta\mu\psi^{-1}$ y $\beta\alpha\gamma^{-1}\mu$ no lo son.

Dada w una cuerda, notaremos por $M(w)$ el módulo cuerda determinado por w. Recordemos que si w es el camino trivial en el vértice a, entonces $M(w)$ es el módulo simple correspondiente al vértice a. En caso contrario, $w = c_1c_2 \ldots c_n$, con $n \geq 1$ y c_i o c_i^{-1} una flecha. Para $1 \leq i \leq n+1$, sea $U_i = k$; y para $1 \leq i \leq n$ denotemos por U_{c_i} el morfismo que manda $x \in U_i$ a $x \in U_{i+1}$ si c_i es una flecha o el morfismo que manda $x \in U_{i+1}$ en $x \in U_i$ si c_i es la inversa de una flecha. Para un vértice a, si a aparece en w, entonces $M(w)_a$ es la suma directa de los espacios U_i con i tal que $s(c_i) = a$ o $i = n+1$ y $e(c_n) = a$; en otro caso $M(w)_a = 0$. Para una flecha α, si α aparece en w, entonces $M(w)_a$ es la suma directa de los morfismos U_{c_i} tal que $c_i = \alpha$ o $c_i^{-1} = \alpha$; en caso contrario $M(w)_\alpha$ es el morfismo nulo. En algunos casos, si se trata de un módulo proyectivo, en lugar de $M(w)$ notaremos por $P(w)$.

A continuación, transcribiremos el Lema 2.5 de [HL] que nos será de utilidad.

Lema 5.3.4. *Sean $A = kQ/I$ un álgebra biserial especial y $\omega = p_1^{-1}q_1 \ldots p_n^{-1}q_n$ una cuerda en (Q, I), donde $n \geq 1$, p_i y q_j son caminos no triviales para $1 < i \leq n$ y $1 \leq j < n$. Si la dimensión proyectiva de $M(w)$ es mayor que 1, entonces se satisface alguna de las siguientes condiciones:*

(PD1) Existe un camino p con flecha inicial α tal que $\alpha^{-1}\omega$ es un paseo reducido sin relaciones cero y p_1p admite una relación cero que contiene a p.

(PD2) Existe un camino q con flecha inicial β tal que $\omega\beta$ es un paseo reducido sin relaciones cero y q_nq admite una relación cero que contiene a q.

(PD3) Existe un camino no nulo u tal que para algún $1 < s \leq n$, $q_{s-1}u$ y p_su son caminos nulos.

(PD4) Algún $s(p_r)$ con $1 \leq r \leq n$ es el punto inicial de una relación binomial.

El siguiente teorema de [HL] nos da un criterio para decidir si un álgebra biserial especial es de dimensión global menor o igual a 2.

Teorema 5.3.5. *[HL, Teorema 3.4] Sea $A = kQ/I$ un álgebra especial biserial. Entonces* $\operatorname{gldim} A \leq 2$ *si y sólo si (Q, I) satisface las siguientes condiciones:*

(GD1) El punto inicial de una relación binomial no pertenece a otra relación binomial.

(GD2) No hay ningún camino de la forma $p_1p_2p_3$, donde p_1, p_2, p_3 son caminos no triviales tales que p_2 es una cuerda y p_1p_2, p_2p_3 son las únicas relaciones cero contenidas en el camino.

(GD3) *Sea $(\alpha p\beta, \gamma q\delta)$ una relación binomial, donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son flechas y p, q son caminos. Si u es un camino no nulo con $e(u) = s(\alpha)$, entonces o bien $u\alpha p$ es no nulo o $u\gamma q$ es no nulo. Análogamente, si v es un camino no nulo con $s(v) = e(\beta)$, entonces o bien $p\beta v$ es no nulo o $q\delta v$ es no nulo.*

En el siguiente lema, probaremos que el anulador de un módulo τ-inclinante sobre un álgebra biserial especial está generado por caminos.

Lema 5.3.6. *Sean $A = kQ/I$ un álgebra biserial especial y T un A- módulo τ- inclinante. Supongamos que $0 \neq p + q \in \operatorname{ann} T$, con p, q caminos no nulos de longitud mayor o igual que 2. Entonces $p \in \operatorname{ann} T$ y $q \in \operatorname{ann} T$.*

Demostración. Sea $T = \bigoplus_{i=1}^{n} T_i$ un A-módulo τ-inclinante, con T_i A-módulos indescomponibles, para $i = 1, \dots, n$. Consideremos $p + q$, con p, q caminos de en Q de a a b, un elemento que pertenece al anulador de T. Supongamos que $p \notin \operatorname{ann} T$. Entonces, existe $T_h = ((T_h)_y, \varphi_\alpha)_{y \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ un sumando directo de T tal que $p \notin \operatorname{ann} T_h$. Luego, como $p + q \in \operatorname{ann} T_h$ tenemos que $q \notin \operatorname{ann} T_h$.

Sea $S(x)$ un sumando directo de $\operatorname{top} T_h$ tal que existe un camino no nulo γ de x a a y $\varphi_p \varphi_\gamma \neq 0$. Entonces $\varphi_q \varphi_\gamma \neq 0$. Como A es biserial especial si $\gamma p \neq 0$ entonces $\gamma q = 0$ y así $\varphi_q \varphi_\gamma = 0$ lo cual es una contradicción. Luego, $S(a)$ es un sumando directo de $\operatorname{top} T_h$.

Sea $\{m_{a_1}, \dots, m_{a_{d_a}}\}$ una base para $(T_h)_a$ como k-espacio vectorial.Al igual en la demostración de la Proposición 4.3.1, podemos considerar $P_1 \xrightarrow{g} P_0 \xrightarrow{f} T_h \to 0$ una presentación proyectiva minimal de T_h tal que $f(e_a) = m_{a_1}$ y $f(\epsilon) = \varphi_\epsilon(m_{a_1})$ si ϵ es un camino en Q comenzando en a. Luego tenemos que $p + q \in \ker f$, pues

$$f(p+q) = \varphi_{p+q}(m_a) = (\varphi_p + \varphi_q)(m_a) = 0.$$

Veamos que $p + q \notin \operatorname{rad}(\ker f)$.

Supongamos que $p+q \in \operatorname{rad}(\ker f)$. Como los morfismos en la representación de $\ker f$ son la multiplicación por las flechas correspondientes, entonces tenemos que existen $\nu_y \in (\ker f)_b$ tales que

$$p + q = \sum_{\beta: y \to b} \nu_y \beta \tag{5.1}$$

La ecuación (5.1) define una relación en A que tiene más de tres ramas con $p + q \neq 0$, lo cual es una contradición pues A es un álgebra biserial especial. Por lo tanto, $p + q \notin \operatorname{rad}(\ker f)$ y, en consecuencia, $S(b)$ es un sumando directo de $\operatorname{top}(\ker f)$ y $P(b)$ es un sumando directo de P_1.

Al igual que en la demostración de la Proposición 4.3.1, si $P(b)$ es un sumando directo de P_1 podemos construir un morfismo $\theta : P_1 \to T_h$ que no factoriza por g lo cual es una contradicción al hecho que T_h es un A-módulo τ-rígido. Por lo tanto, si $p+q \in \operatorname{ann} T$ entonces $p \in \operatorname{ann} T$ y $q \in \operatorname{ann} T$. $\square$

Observación 5.3.7. Como una consecuencia del Lema 5.3.6, tenemos que si A es un álgebra biserial especial y T es un A-módulo τ-inclinante (no inclinante), entonces $\operatorname{ann} T$ está generado por caminos de longitud mayor o igual que 1.

Proposición 5.3.8. *Sean $A = kQ/I$ un álgebra biserial especial tal que* $\operatorname{gldim} A = 2$ *y T un A-módulo τ-inclinante. Entonces $A/\operatorname{ann} T$ satisface $(GD1)$ y $(GD3)$.*

Demostración. Del Lema 5.3.6, el $\operatorname{ann} T$ está generado por caminos. En consecuencia, $A/\operatorname{ann} T$ tiene a lo sumo las mismas relaciones binomiales que A. Del Teorema 5.3.5, tenemos que A satisface $(GD1)$ y por lo tanto, $A/\operatorname{ann} T$ satisface $(GD1)$.

Sea $(\alpha p \beta, \gamma q \delta)$ una relación binomial en $A/\operatorname{ann} T$. Consideremos u un camino no nulo en $A/\operatorname{ann} T$ tal que $e(u) = s(\alpha)$, $u\alpha p = 0$, $u\gamma q = 0$ y es minimal en el sentido de que si u' es un subcamino de u entonces $u'\alpha p \neq 0$ o $u\gamma q \neq 0$. Si notamos $u = \rho_1 \dots \rho_k$ con ρ_i flechas para todo i, como A es biserial especial tenemos que $\rho_k \alpha = 0$ o $\rho_k \gamma = 0$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\rho_k \alpha = 0$. Entonces existe una relación λ en $A/\operatorname{ann} T$ contenida en el camino $u\gamma q$. Como A satisface $(GD3)$ entonces, λ no puede ser una relación en A. Luego, como A satisface $(GD1)$, de la Proposición 4.3.1 tenemos que existe un camino no nulo λ_1 de longitud mayor o igual que 1 tal que $\widetilde{\lambda} = \lambda_1 \lambda$ es una relación cero en A.

Como $u \neq 0$ y $\gamma q \neq 0$ entonces λ contiene al menos al camino $u\gamma$ (debe contener a todo u, pues si no fuera el caso se contradice la minimalidad de u). Consideremos $\widetilde{u} = \lambda_1 u$. Como $\widetilde{\lambda}$ es una relación cero, tenemos que $\widetilde{u} \neq 0$. Luego tenemos que

$$\widetilde{u}\alpha p = 0 \text{ en } A \;\text{ y}$$

$$\widetilde{u}\gamma q = 0 \text{ en } A$$

lo cual contradice el hecho de que A satisface $(GD3)$.

Por otra parte, consideremos v un camino no nulo en $A/\operatorname{ann} T$ tal que $s(v) = e(\beta)$, $p\beta v = 0$, $q\delta v = 0$ y es minimal en el sentido de que si v' es un subcamino de v entonces $p\beta v' \neq 0$ o $q\delta v' \neq 0$. Si notamos $v = \gamma_1 \dots \gamma_m$ con γ_i flechas para todo i, como A es biserial especial tenemos que $\beta\gamma_1 = 0$ o $\delta\gamma_1 = 0$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\beta\gamma_1 = 0$. Entonces existe una relación cero η en $A/\operatorname{ann} T$ contenida en el camino $q\delta v$. Como A satisface $(GD3)$, η no es una relación en A. Entonces, sigue de la Proposición 4.3.1 que existe η_1 un camino no nulo en A de longitud mayor o igual que 1 tal que $\widetilde{\eta} = \eta_1\eta$ es una relación cero en A. Notemos que $\widetilde{\eta}$ no puede contener el subcamino maximal $\gamma q\delta$ de la relación binomial y comienza en algún vértice de la relación binomial. Luego, tenemos que

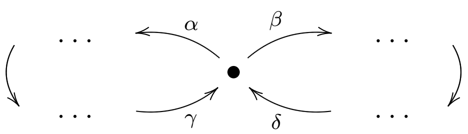
$$p\beta v = 0 \text{ en } A \quad \text{y}$$

$$q\delta v = 0 \text{ en } A$$

lo que contradice el hecho de que A satisface $(GD3)$. Por lo tanto, $A/\operatorname{ann} T$ satisface $(GD3)$. $\square$

Observación 5.3.9. Sea $A = kQ/I$ un álgebra biserial especial tal que $\operatorname{gldim} A = 2$. Los siguientes carcajes no son subcarcajes de Q.

- Una relación binomial $(\alpha p\gamma, \beta q\delta)$ tal que $s(\alpha) = e(\gamma)$.

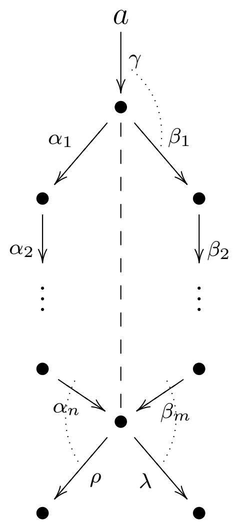


Si existe una relación binomial en estas condiciones, como A es biserial especial, debe cumplir con las condiciones:

$$\begin{aligned}
&(\delta\alpha = 0 \quad \text{o} \quad \delta\beta = 0) \;\; \text{y} \\
&(\gamma\alpha = 0 \quad \text{o} \quad \gamma\beta = 0) \;\; \text{y} \\
&(\gamma\alpha = 0 \quad \text{o} \quad \delta\alpha = 0) \;\; \text{y} \\
&(\gamma\beta = 0 \quad \text{o} \quad \delta\beta = 0).
\end{aligned}$$

Supongamos que $\gamma\alpha = 0$ y $\delta\beta = 0$. Sea $u = \alpha p'\gamma \neq 0$. Entonces tenemos que $u\alpha p' = 0$ y $u\beta q' = 0$ lo cual es una contradicción pues A satisface $(GD3)$. Análogamente, si consideramos los otros casos.

-Un subcarcaj de la forma:



Como A es biserial especial entonces $\gamma\alpha_1 = 0$ o $\gamma\beta_1 = 0$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\gamma\beta_1 = 0$. De igual manera, podemos asumir que $\alpha_n\rho = 0$ y $\beta_m\lambda = 0$. Entonces, considerando $p_1 = \gamma\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}$, $p_2 = \alpha_n$ y $p_3 = \rho$ tenemos que p_1p_2 y p_2p_3 son las únicas relaciones cero contenidas en el camino $p_1p_2p_3$, lo cual es una contradicción pues A satisface $(GD2)$.

5.3.2. Resultado principal

Presentaremos a continuación el resultado principal de esta sección.

Teorema 5.3.10. *Sean $A = kQ/I$ un álgebra biserial especial tal que* $\operatorname{gldim} A = 2$*, T un A-módulo τ-inclinante y $B = \operatorname{End}_A T$. Entonces* $\operatorname{gldim} B < \infty$.

Comenzaremos probando algunos lemas técnicos que serán la herramienta fundamental para probar el resultado principal.

Lema 5.3.11. *Sean $A = kQ/I$ un álgebra biserial especial tal que* $\operatorname{gldim} A = 2$*, T un A-módulo τ-inclinante y $a \in (Q_{A/\operatorname{ann} T})_0$. Supongamos que en el vértice a solo comienza una relación binomial. Entonces* $\operatorname{pd}_{A/\operatorname{ann} T} S(a) \leq 2$.

Demostración. Sea $a \in (Q_{A/\operatorname{ann} T})_0$ tal que solo comienza una relación binomial $(\alpha p, \beta q)$, con $\alpha, \beta \in (Q_{A/\operatorname{ann} T})_1$ y p, q caminos no triviales. La cubierta proyectiva de $S(a)$ es $P(a)$ y $\operatorname{rad} P(a) = M(pq^{-1})$. Veamos que $\operatorname{pd}_{A/\operatorname{ann} T} M(pq^{-1}) \leq 1$.

Siguiendo con el Lema 5.3.4, debemos ver que el camino pq^{-1} no satisface $(PD1)$, $(PD2)$, $(PD3)$ ni $(PD4)$. Como $A/\operatorname{ann} T$ satisface $(GD1)$ y $(GD3)$, tenemos que no se verifican $(PD4)$ ni $(PD3)$, respectivamente. Si se satisface $(PD1)$, tenemos que existe una flecha λ tal que $\lambda^{-1}pq^{-1}$ es un paseo reducido y, como A es biserial especial, implica la existencia de la relación $\alpha\lambda$ comenzando en a lo que es una contradicción. De manera similar, $(PD2)$ tampoco puede ocurrir. Por lo tanto, $\mathrm{pd}_{A/\mathrm{ann}\,T} M(pq^{-1}) \leq 1$ y, en consecuencia, $\mathrm{pd}_{A/\mathrm{ann}\,T} S(a) \leq 2$. $\square$

Lema 5.3.12. *Sean $A = kQ/I$ un álgebra biserial especial tal que* $\mathrm{gldim}\, A = 2$*, T un A-módulo τ-inclinante y $a \in (Q_{A/\mathrm{ann}\,T})_0$ con* $\mathrm{pd}_{A/\mathrm{ann}\,T} S(a) = \infty$*. Supongamos que en el vértice a no comienza una relación binomial. Entonces existe un camino $\Gamma = \epsilon_1 \ldots \epsilon_k$ que recorre un ciclo tal que, para $j = 1, \ldots, k-1$, $r_j = \epsilon_j \epsilon_{j+1}$ y $r_k = \epsilon_k \widetilde{\epsilon_1}$ son las únicas relaciones cero contenidas en el camino Γ, con $\widetilde{\epsilon_1}$ un subcamino de ϵ_1 y ϵ_j caminos no nulos.*

Demostración. Sea $a \in (Q_{A/\mathrm{ann}\,T})_0$ tal que $\mathrm{pd}_{A/\mathrm{ann}\,T} S(a) = \infty$. Supongamos que en a no comienza ninguna relación binomial. Entonces tenemos un subcarcaj de la forma:

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dl, "\alpha_1"'] \arrow[dr, "\beta_1"] & \\ \bullet \arrow[d, rightsquigarrow, "u"'] & & \bullet \arrow[d, rightsquigarrow, "v"] \\ \bullet & & \bullet \end{tikzcd}$$

con $\alpha_1, \beta_1 \in (Q_{A/\mathrm{ann}\,T})_1$, u, v caminos. Luego, la cubierta proyectiva de $S(a)$ es $P(u^{-1}\alpha_1^{-1}\beta_1 v)$ y tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to M(u) \oplus M(v) \to P(u^{-1}\alpha_1^{-1}\beta_1 v) \to S(a) \to 0.$$

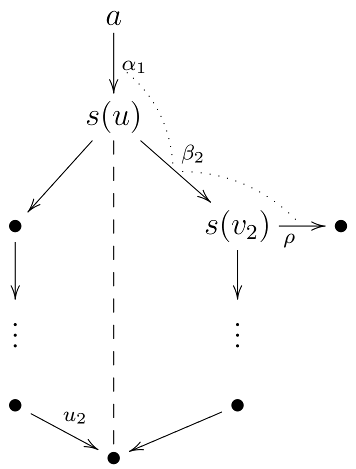
Como $\mathrm{pd}_{A/\mathrm{ann}\,T} S(a) = \infty$, tenemos que $\mathrm{pd}_{A/\mathrm{ann}\,T} M(u) = \infty$ o $\mathrm{pd}_{A/\mathrm{ann}\,T} M(v) = \infty$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\mathrm{pd}_{A/\mathrm{ann}\,T} M(u) = \infty$.

Supongamos que $s(u)$ es el comienzo de una relación binomial $(uu_2, \beta_2 v_2)$, con $\beta_2 \in (Q_{A/\mathrm{ann}\,T})_1$ y u_2, v_2 caminos. Notemos que, como $A/\mathrm{ann}\,T$ satisface $(GD3)$, u_2 debe ser una flecha. Entonces, tenemos la sucesión exacta

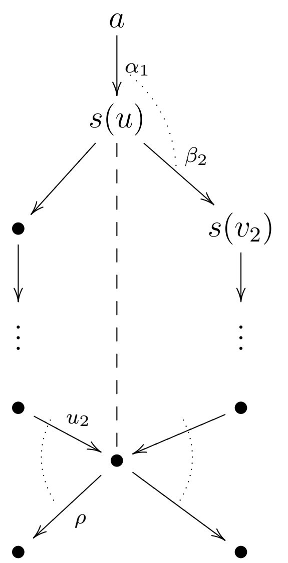
$$0 \to M(v_2) \to P(uu_2, \beta_2 v_2) \to M(u) \to 0$$

con $P(uu_2, \beta_2 v_2)$ la cubierta proyectiva de $M(u)$. Como $\mathrm{pd}_{A/\mathrm{ann}\,T} M(u) = \infty$, $M(v_2)$ no es proyectivo y entonces existe $\rho \in (Q_{A/\mathrm{ann}\,T})_1$ tal que $\rho^{-1}v_2$ es un paseo reducido o $v_2\rho$ es un camino reducido (notemos que en $s(v_2)$ no puede comenzar una relación binomial pues $A/\mathrm{ann}\,T$ satisface $(GD1)$).

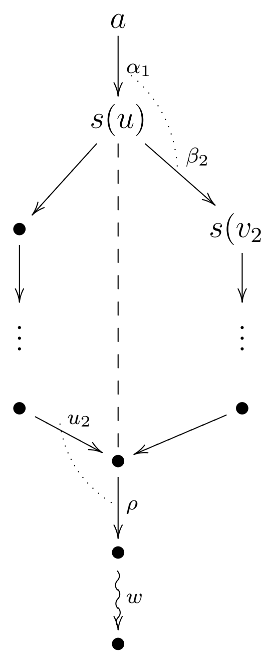
Si existe $\rho \in (Q_{A/\operatorname{ann} T})_1$ tal que $\rho^{-1}v_2$ es un paseo reducido, entonces tenemos en A el siguiente subcarcaj:



lo que es una contradicción pues $\operatorname{gldim} A = 2$. Entonces, existe $\rho \in (Q_{A/\operatorname{ann} T})_1$ tal que $v_2\rho$ es un camino reducido. En este caso, tenemos dos posibles diagramas en A. Por un lado, tenemos



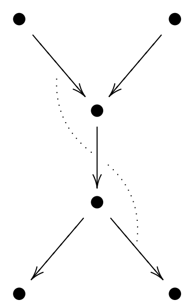
lo que es una contradicción pues A satisface $(GD2)$. Entonces, tenemos el siguiente subcarcaj en A



donde w es un camino. Luego, para este caso, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to M(w) \to P(v_2\rho w) \to M(v_2) \to 0$$

Si $e(\rho)$ es un pozo, entonces $M(w) = S(e(\rho))$ es proyectivo lo que es una contradicción pues $\mathrm{pd}_{A/\mathrm{ann}\,T} M(u) = \infty$. Luego, existe al menos un camino no trivial w comenzando en $e(\rho)$. Si suponemos que existen dos caminos no triviales w, w' en $e(\rho)$, entonces tenemos en A un subcarcaj como sigue

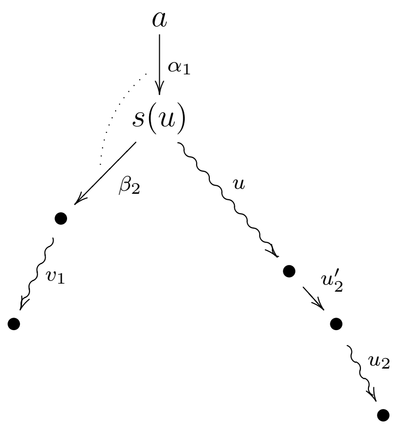


en A, lo que es una contradicción pues $\mathrm{gldim}\, A = 2$.

Por lo tanto, en $e(\rho)$ comienza solo un camino w de longitud mayor o igual que 1. Como $M(w)$ no es proyectivo, tenemos que existe un camino no trivial w_2 tal que $M(ww_2)$ es proyectivo. Luego, $v_2\rho ww_2$ es una relación cero en $A/\mathrm{ann}\, T$. Si $\rho ww_2 \neq 0$ en $A/\mathrm{ann}\, T$, entonces si consideramos $\widetilde{v} = \rho ww_2$ contradecimos $(GD3)$ para $A/\mathrm{ann}\, T$.

Luego, $\rho w w_2$ es una relación cero en $A/\operatorname{ann} T$. Notemos que $\rho w w_2$ no puede ser una relación cero en A, pues como $u_2\rho$ es una relación cero por ser A biserial especial, tenemos un camino que contradice $(GD2)$ en A. Así, siguiendo con la Proposición 4.3.1, tenemos que existe $\hat{\gamma}$ camino no nulo en A tal que $\hat{\gamma}\rho w w_2$ es una relación cero en A y, entonces contradecimos $(GD3)$ en A. Luego, $M(w)$ es proyectivo y así $\operatorname{pd}_{A/\operatorname{ann} T} M(u) < \infty$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, en $s(u)$ no comienza una relación binomial. Como $\operatorname{pd}_{A/\operatorname{ann} T} M(u) = \infty$, existe $\beta_2 \in (Q_{A/\operatorname{ann} T})_1$ tal que $\beta_2^{-1}u$ es un paseo reducido y, en tal caso, tenemos una relación cero $\alpha_1\beta_2$, o bien existe $u_2' \in (Q_{A/\operatorname{ann} T})_1$ tal que uu_2' es un camino reducido. La situación es la siguiente:



con v_1 y u_2 caminos. Entonces, tenemos una sucesión exacta de la forma:

$$0 \to M(v_1) \oplus M(u_2) \to P(v_1^{-1}\beta_2^{-1}uu_2'u_2) \to M(u) \to 0$$

con $P(v_1^{-1}\beta_2^{-1}uu_2'u_2)$ la cubierta proyectiva de $M(u)$ y $M(v_1) \neq 0$ o $M(u_2) \neq 0$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $M(u_2) \neq 0$ y $\operatorname{pd}_{A/\operatorname{ann} T} M(u_2) = \infty$. Observemos que, en este caso, existe una relación cero $\alpha_1 u u_2'$.

Un análisis similar al hecho para $s(u)$, nos lleva a concluir que $s(u_2)$ no puede ser el comienzo de una relación binomial. Como $M(u_2)$ no es proyectivo, tenemos que existe $\beta_3 \in (Q_{A/\operatorname{ann} T})_1$ tal que $\beta_3^{-1}u_2$ es un paseo reducido, y en tal caso $u_2'\beta_3 = 0$, o existe $u_3' \in (Q_{A/\operatorname{ann} T})_1$ tal que u_2u_3' es un camino reducido. Mostramos la situación con el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& & s(u_2') \arrow[d, "u_2'"] & & & \\
& & s(u_2) \arrow[dl, "\beta_3"'] \arrow[ddrr, squiggly, "u_2"] & & & \\
& \bullet \arrow[dl, squiggly, "v_2"] & & & & \\
\bullet & & & & \bullet \arrow[dr, "u_3'"] & \\
& & & & & \bullet \arrow[d, squiggly, "u_3"] \\
& & & & & \bullet
\end{tikzcd}$$

donde v_2 y u_3 son caminos. Entonces, tenemos una sucesión exacta de la forma:

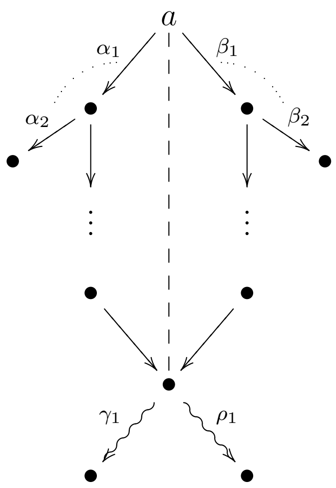
$$0 \to M(v_2) \oplus M(u_3) \to P(v_2^{-1}\beta_3^{-1}u_2u_3'u_3) \to M(u_2) \to 0$$

con $P(v_2^{-1}\beta_3^{-1}u_2u_3'u_3)$ la cubierta proyectiva de $M(u_2)$ y $M(v_2) \neq 0$ o $M(u_3) \neq 0$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $M(u_3) \neq 0$ y $\operatorname{pd}_{A/\operatorname{ann} T} M(u_3) = \infty$. Observemos que, en este caso, existe una relación cero $u_2'u_2u_3'$. Así podemos construir un camino $\Gamma_2 = \alpha_1 u u_2' u_2 u_3'$ en $Q_{A/\operatorname{ann} T}$ tal que Γ_2 contiene dos relaciones cero $r_1 = \alpha_1 u u_2'$ y $r_2 = u_2'u_2u_3'$.

Siguiendo con este proceso, en el paso n, vamos a tener un camino $\Gamma_n = \gamma_1 \dots \gamma_{n+1}$ tal que hay n relaciones cero $r_i = \gamma_i\gamma_{i+1}$ contenidas en el camino Γ_n. Como $Q_{A/\operatorname{ann} T}$ es finito, a partir de algún n, estos caminos recorren un ciclo. Entonces, podemos construir un camino $\Gamma = \epsilon_1 \dots \epsilon_k$ que recorre el ciclo tal que, para $j = 1, \dots, k-1$, $r_j' = \epsilon_j\epsilon_{j+1}$ y $r_k' = \epsilon_k\widetilde{\epsilon_1}$ son relaciones contenidas en el camino Γ, con $\widetilde{\epsilon_1}$ un subcamino de ϵ_1. □

Lema 5.3.13. *Sean $A = kQ/I$ un álgebra biserial especial tal que* $\operatorname{gldim} A = 2$*, T un A-módulo τ-inclinante y $a \in (Q_{A/\operatorname{ann} T})_0$ con* $\operatorname{pd}_{A/\operatorname{ann} T} S(a) = \infty$*. Supongamos que en a comienza una relación binomial y una relación cero. Entonces existe un camino $\Gamma = \epsilon_1 \dots \epsilon_k$ que recorre un ciclo tal que, para $j = 1, \dots, k-1$, $r_j = \epsilon_j\epsilon_{j+1}$ y $r_k = \epsilon_k\widetilde{\epsilon_1}$ son las únicas relaciones cero contenidas en el caminoΓ, con $\widetilde{\epsilon_1}$ un subcamino de ϵ_1 y ϵ_j caminos no nulos.*

Demostración. Sea $a \in (Q_{A/\operatorname{ann} T})_0$ tal que $\operatorname{pd}_{A/\operatorname{ann} T} S(a) = \infty$. Supongamos que en a comienza una relación binomial $(\alpha p_1, \beta q_1)$, con $\alpha, \beta \in (Q_{A/\operatorname{ann} T})_1$ y p, q caminos no triviales y al menos una relación cero. Entonces, tenemos un subcarcaj de la siguiente forma:

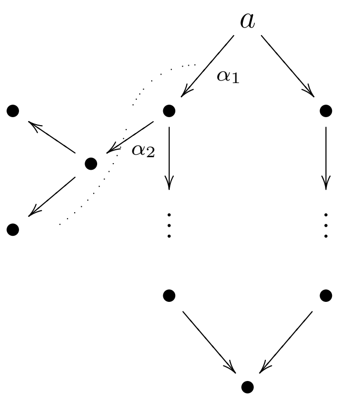


con α_2, $\beta_2 \in (Q_{A/\operatorname{ann} T})_1$ y γ_1, ρ_1 caminos. La cubierta proyectiva de $S(a)$ es $P(a)$ y $\operatorname{rad} P(a) = M(p_1 q_1^{-1})$. Entonces, tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to M(p_2) \oplus M(\gamma_1^{-1}\rho_1) \oplus M(q_2) \to P(p_2^{-1}\alpha_2^{-1}p_1\gamma_1) \oplus P(q_2^{-1}\beta_2^{-1}q_1\rho_1) \to M(p_1 q_1^{-1}) \to 0$$

con α_2, $\beta_2 \in (Q_{A/\operatorname{ann} T})_1$, $q_2, p_2, \rho_1, \gamma_1$ caminos y $P(p_2^{-1}\alpha_2^{-1}p_1\gamma_1) \oplus P(q_2^{-1}\beta_2^{-1}q_1\rho_1)$ la cubierta proyectiva de $M(p_1 q_1^{-1})$. Como $A/\operatorname{ann} T$ satisface $(GD3)$, tenemos que $M(\gamma^{-1}\rho_1)$ es proyectivo. En consecuencia, como $\operatorname{pd}_{A/\operatorname{ann} T}(P(p_2^{-1}\alpha_2^{-1}p_1\gamma_1) \oplus P(q_2^{-1}\beta_2^{-1}q_1\rho_1))$, o bien $\operatorname{pd}_{A/\operatorname{ann} T} M(p_2) = \infty$ o $\operatorname{pd}_{A/\operatorname{ann} T} M(q_2) = \infty$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\operatorname{pd}_{A/\operatorname{ann} T} M(p_2) = \infty$. Si en $s(p_2)$ comienzan dos flechas, tenemos el siguiente subcarcaj en A



lo que contradice el hecho de que $\operatorname{gldim} A = 2$. Luego, $s(p_2)$ no puede ser el comienzo de dos flechas (en particular, no puede ser el comienzo de una relación binomial).

Entonces, existen $\alpha_3 \in (Q_{A/\operatorname{ann} T})_1$ y p_3 un camino tal que $M(p_2\alpha_3 p_3)$ es la cubierta proyectiva de $M(p_2)$. Entonces, tenemos una sucesión exacta de la forma:

$$0 \to M(p_3) \to P(p_2\alpha_3 p_3) \to M(p_2) \to 0$$

Notemos que, la existencia de α_3, implica la existencia de una relación cero $\alpha_2 p_2 \alpha_3$. Luego, tenemos un camino $\Gamma_2 = \alpha_1\alpha_2 p_2 \alpha_3$ que contiene dos relaciones cero $r_1 = \alpha_1\alpha_2$ y $r_2 = \alpha_2 p_2 \alpha_3$.

Un análisis similar al hecho en la demostración del Lema 5.3.11, nos lleva a concluir que $s(p_3)$ no puede ser el comienzo de una relación binomial. Como $M(p_3)$ no es proyectivo, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to M(p_4) \oplus M(q_3) \to P(p_4^{-1}\alpha_4^{-1}p_3^{-1}\beta_4 q_4) \to M(p_3) \to 0$$

con α_4, $\beta_4 \in (Q_{A/\operatorname{ann} T})_1$, p_4, q_4 caminos y $P(p_4^{-1}\alpha_4^{-1}p_3^{-1}\beta_4 q_4)$ la cubierta proyectiva de $M(p_3)$. Notemos que o bien $\alpha_4 p_4$ es un camino no trivial, o $\beta_4 q_4$ es un camino no trivial. Si $\alpha_4 p_4$ es no trivial, entonces existe una relación cero $\alpha_3 p_3 \alpha_4$. Análogamente, si $\beta_4 q_4$ es no trivial, entonces $\alpha_3\beta_4$ es una relación cero pues A es biserial especial. En cualquier caso, podemos armar un camino Γ_3 que contiene 3 relaciones cero.

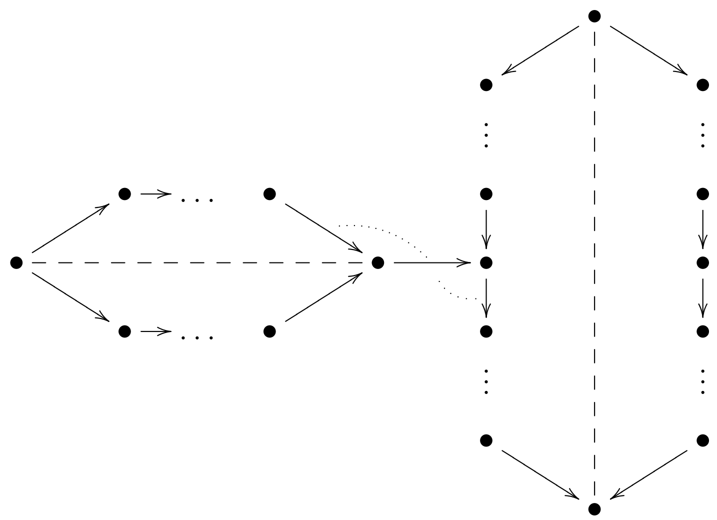
Siguiendo con este proceso, en el paso n, vamos a tener un camino $\Gamma_n = \gamma_1 \dots \gamma_{n+1}$ tal que hay n relaciones cero $r_i = \gamma_i\gamma_{i+1}$ contenidas en Γ_n. Como $Q_{A/\operatorname{ann} T}$ es finito, para algún n, estos caminos deben recorrer un ciclo. Entonces, podemos construir un camino $\Gamma = \epsilon_1 \dots \epsilon_k$ que recorre el ciclo tal que, para $i = 1, \dots, k-1$, $r_i' = \epsilon_i\epsilon_{i+1}$ y $r_k' = \epsilon_k\widetilde{\epsilon_1}$ son relaciones contenidas en Γ, con $\widetilde{\epsilon_1}$ un subcamino de ϵ_1. $\square$

Ahora estamos en condiciones de demostrar el Teorema 5.3.10.

Demostración del Teorema 5.3.10. Supongamos que $\operatorname{gldim} B = \infty$. Entonces tenemos que $\operatorname{gldim} A/\operatorname{ann} T = \infty$. En consecuencia, existe $a \in (Q_{A/\operatorname{ann} T})_0$ tal que $\operatorname{pd}_{A/\operatorname{ann} T} S(a) = \infty$.

Por el Lema 5.3.11 y el Lema 5.3.13, existe un camino $\Gamma = \epsilon_1 \dots \epsilon_k$ que recorre un ciclo tal que, para $j = 1, \dots, k-1$, $r_j = \epsilon_j\epsilon_{j+1}$ y $r_k = \epsilon_k\widetilde{\epsilon_1}$ son las únicas relaciones cero contenidas en Γ, con $\widetilde{\epsilon_1}$ un subcamino de ϵ_1 y ϵ_j caminos no nulos.

Al ser cada r_i una relación en $A/\operatorname{ann} T$, tenemos dos posibilidades: o bien r_i es una relación de A o, alguna de las dos condiciones $i)$ o $ii)$ de la Proposición 4.3.1 se cumplen. Afirmamos que ninguna de las relaciones r_i es una relación en A. Supongamos por el contrario que existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que r_j es una relación cero en A. Entonces, como A satisface $(GD2)$, r_{j-1} no es una relación en A. Si existe η camino no nulo tal que ηr_{j-1} es una relación en A, entonces tenemos un camino $\eta\epsilon_{j-1}\epsilon_j\epsilon_{j+1}$ con ϵ_j cuerda y tal que $\eta\epsilon_{j+1}\epsilon_j$ y $\epsilon_j\epsilon_{j+1}$ son las únicas relaciones cero contenidas en el camino, lo que contradice $(GD2)$ para A. Entonces, existen p, q caminos no nulos en A tales que (pr_{j-1}, q) es una relación binomial en A. Luego, como A es biserial especial y satisface $(GD3)$, r_j es una relación cero de largo 2. Ahora bien, r_{j+1} no puede ser una relación en A pues se contradice $(GD2)$. Por otra parte, como A satisface $(GD3)$, no puede existir η' camino no nulo en A tal que $\eta' r_{j+1}$ es una relación cero en A. Entonces, existen caminos no nulos u, v en A tales que (ur_{j+1}, v) es una relación binomial en A. Luego, tenemos en A un subcarcaj de la forma



y, en consecuencia es posible construir un camino que contradice $(GD2)$ en A. Por lo tanto, ninguna de las relaciones cero r_i en $A/\operatorname{ann} T$ son relaciones en A.

Como $\dim_k A < \infty$ y A tiene un ciclo, existe una relación cero r que comienza y termina en vértices del ciclo (ya que ninguna relación binomial puede tener como rama un ciclo). Entonces, como r no está contenida en ninguna relación r_i, existen $j \in \{1, \ldots, k\}$ y λ camino no nulo en A tal que $r_j = \widetilde{r_j}\lambda$ y $r = \lambda r'$. Al igual que antes, deben existir p, q caminos no nulos en A tales que (pr'_j, q) es una relación binomial en A. Luego, como A es biserial especial y satisface $(GD3)$, tenemos que r es una relación de largo 2, es decir, $r = \lambda_1\lambda_2$ con $\lambda_i \in Q_1$. Así, por construcción, r_{j+1} debe contener al camino $\lambda_1\lambda_2$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto, $\operatorname{gldim} B < \infty$. $\square$

Bibliografía

[AIR] Adachi, T., Iyama, O. y Reiten, I.; *τ-tilting theory.* Compositio Mathematica, 150(03), 415-452, 2014.

[A] Assem, I.; *Algebres et modules.* Masson. Les Presses de L'Université d'Ottawa. 1997.

[ACPV] Assem, I., Cappa, J. A., Platzeck, M. I. y Verdecchia, M.; *Módulos inclinantes y álgebras inclinadas.* Universidad Nacional del Sur. Instituto de Matemática. 2008.

[ACT] Assem, I., Coelho, F. U., and Trepode, S.; *The bound quiver of a split extension.* Journal of Algebra and Its Applications, 7(04), 405-423, 2008.

[AM] Assem,I. and Marmaridis, N.; *Tilting modules over split-by-nilpotent extensions.* Communications in Algebra, 26(05), 1547-1555, 1998.

[AHT] Assem, I., Happel, D. and Trepode, S.; *Extending tilting modules to one-point extensions by projectives.* Communications in Algebra, 35(10), 2983-3006, 2007.

[ASS] Assem, I., Simson, D. and Skowronski,A.; *Elements of the representation theory of associative algebras.* London Math. Soc. Student Texts 65. Cambridge University Press, 2006.

[AZ] Assem, I. and Zacharia, D.; *On split-by-nilpotent extensions.* Colloquium Mathematicum, 98(02), 259-275, 2003.

[APR] Auslander, M., Platzeck, M. I. and Reiten, I.; *Coxeter functors without diagrams.* Transactions of the American Mathematical Society, 250, 1-46, 1979.

[ARS] Auslander,M., Reiten,I. and Smalø, S. O.; *Representation Theory of Artin Algebras*. Cambridge Stud. in Adv. Math. 36, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[AS] Auslander, M. and Smalø, S. O.; *Almost split sequences in subcategories*. Journal of Algebra, 69(02), 426-454, 1981.

[BGP] Bernstein, I. N., Gelfand, I. M. and Ponomarev, V. A.; *Coxeter functors and Gabriels theorem*. Russian mathematical surveys, 28(02), 17-32, 1973.

[B] Bongartz, K.; *Tilted Algebras*. Proc. ICRA III (Puebla 1980), Lecture Notes in Math., Springer-Verlar, 903, 26-38, 1981.

[BB] Brenner, S. and Butler, M. C. R.; *Generalizations of Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors*. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 839, 103-169, 1980.

[GHPRU] Gastaminza, S.; Happel, D.; Platzeck, M. I.; Redondo, M. J.; and Unger, L. *Global dimensions for endomorphism algebras of tilting modules*. Archiv der Mathematik, 75(04), 247-255, 2000.

[GHZ] Green, E. L., Happel, D. and Zacharia, D.; *Projective resolutions over Artin algebras with zero relations*. Illinois Journal of Mathematics, 29(01), 180-190. 1985.

[HU] Happel, D., and Unger, L.; *Almost complete tilting modules*. Proceedings of the American Mathematical Society, 107(03), 603-610, 1989.

[HU1] Happel, D., and Unger, L.; *On a partial order of tilting modules*. Algebras and Representation Theory, 8(02), 147-156, 2005.

[HL] Huard, F. y Liu, S.; *Tilted special biserial algebras*. Journal of Algebra, 217(02), 679-700. 1999.

[IT] Ingalls,C y Thomas, H.; *Noncrossing partitions and representations of quivers*. Compositio Math., 145(06), 1533-1562, 2009.

[IR] Iyama, O. and Reiten, I.; *Introduction to τ-tilting theory*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 111(27), 9704-9711, 2014.

[J] Jasso, G.; *Reduction of τ-tilting modules and torsion pairs*. International Mathematics Research Notices, 2015(16), 7190-7237, 2014.

[M] Miyashita, Y.; *Tilting modules of finite projective dimension*. Mathematische Zeitschrift, 193(01), 113-146, 1986.

[PV] Psaroudakis, C., Vitória, J. . *Recollements of module categories*. Applied Categorical Structures, 22(04), 579-593, 2014.

[RS] Riedtmann, C., Schofield, A.; *On a simplicial complex associated with tilting modules*. Commentarii Mathematici Helvetici, 66(01), 70-78, 1991.

[R] Ringel, C. M.; *Tame algebras with integral quadratics forms*, Springer Lecture Notes in Mathematics 1099, 1984.

[S] Smalø, S. O.; *Torsion theories and tilting modules*. Bulletin of the London Mathematical Society, 16(05), 518-522, 1984.

[SS] Simson, D. and Skowronski,A.; *Elements of the representation theory of associative algebras Volume 3: Representation-infinite Tilted Algebras*. London Math. Soc. Student Texts 72. Cambridge University Press, 2007.

[Su] Suarez, P.; *τ-tilting modules over one-point extensions by a projective module*. Algebras and Representation Theory. 2017. DOI:10.1007/s10468-017-9737-5.

Índice alfabético