

Técnica de cálculo de probabilidad para la distribución de los electrones en el *experimento de la doble rendija*: análisis de la conceptualización

Probability calculation technique for the distribution of electrons in the Double Slit Experiment: conceptualization analysis

Keidy Alejandra Alvarado Puentes¹ y María de los Ángeles Fanaro²

¹Institución Educativa Distrital Friedrich Naumann. Bogotá, Colombia.

²Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Tandil, Argentina. Consejo Nacional de Investigaciones Técnicas y Científicas (Conicet).

*E-mail: palleiva1@gmail.com

Resumen

En este trabajo presentamos un conjunto de situaciones formuladas para enseñar el modelo cuántico para el electrón basado en el enfoque de Feynman y los resultados parciales de su implementación en cuatro cursos de una escuela secundaria. A partir de las resoluciones de los estudiantes y su categorización, identificamos los teoremas en acto que obstaculizaron o colaboraron en la conceptualización. Realizamos análisis univariado y bivariado, y encontramos que el trabajo con la técnica de cálculo de probabilidad está altamente correlacionado con la modelización de la curva de distribución de probabilidad de los electrones en el Experimento de la Doble Rendija con electrones, lo cual es un indicador favorable de la conceptualización esperada.

Palabras clave: Enseñanza de la mecánica cuántica; Enfoque de Feynman; Comportamiento cuántico del electrón; Conceptualización.

Abstract

In this work we present a set of situations formulated to teach the quantum model for the electron based on the Feynman approach and the partial results of its implementation in four courses of a secondary school. Based on the students' resolutions and their categorization, we identified the theorems in action that hindered or collaborated in the conceptualization. A univariate and bivariate analysis was performed, finding that the work with the probability calculation technique is highly correlated with the modeling of the probability distribution curve of the electrons in the Double Slit Experiment with electrons, which is an indicator favorable of the expected conceptualization.

Keywords: Teaching of quantum mechanics; Feynman's approach; Quantum behavior of the electron; Conceptualization.

I. INTRODUCCIÓN

La investigación en enseñanza de las ciencias reconoce la necesidad y el valor educativo de enseñar conceptos y principios de Mecánica Cuántica en el nivel secundario y medio. Asimismo, reconoce que una de las dificultades acerca de su enseñanza en todos los niveles se centra en el formalismo matemático que usualmente se emplea en desmedro de los aspectos conceptuales (Akarsu, 2010). Por eso es necesario investigar formas alternativas de enseñar los principales conceptos de Mecánica Cuántica, de forma especial en la educación secundaria.

Este trabajo busca una propuesta unificadora, con resultados que sean aceptables desde el punto de vista del aprendizaje de los estudiantes. Es parte del desarrollo de una tesis doctoral, que parte de una *estructura conceptual propuesta para enseñar* (ECPE) el comportamiento de los electrones (Fanaro, Arlego y Otero, 2012), que toma como referencia una secuencia didáctica que fue implementada y analizada inicialmente en Argentina (Fanaro, 2009). En esta investigación adaptamos la secuencia didáctica a partir de los obstáculos detectados en implementaciones previas para llevarla al contexto de la escuela secundaria colombiana, incorporamos nuevas simulaciones para una mejor comprensión de los conceptos, presentamos los procedimientos y cálculos realizados para encontrar el valor de la probabilidad, así como los resultados en forma gráfica y numérica (Alvarado y Fanaro, 2017).

Asumimos que el modelo que describe el comportamiento de los electrones (y la radiación electromagnética), es el proporcionado por la Mecánica Cuántica. Evitamos la enseñanza basada en paradojas, como usualmente se lo hace (por ejemplo, mediante la dualidad onda-partícula), ofreciendo a los estudiantes una perspectiva particular acerca de los fenómenos cuánticos. Es decir, presentamos un modelo para el comportamiento de los electrones, que es el proporcionado por la física cuántica y no el previsto por la física clásica.

En la secuencia presentamos el modelo cuántico de "*Considerar caminos alternativos*" (CCA) que es el resultado de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1998) del enfoque de la Integral de Camino, dadas sus potenciales ventajas que ya han sido detalladas (Arlego, 2008). En resumen, es su capacidad para adaptar las integrales a sumas vectoriales, y su poder explicativo de encontrar la probabilidad para diversos eventos cuánticos lo que la hace potencialmente versátil a la hora de emplearla como estrategia didáctica. Inclusive, permite la conceptualización de la universalidad de las leyes de la mecánica cuántica en la transición cuántico-clásico. Este último aspecto no será presentado en este trabajo, y solamente nos enfocaremos en la conceptualización del comportamiento cuántico mediante el modelo CCA por parte de los estudiantes, por medio de la identificación de los obstáculos y las ayudas que surgen cuando se emplea la técnica del cálculo de probabilidades de encontrar el electrón en la conocida experiencia de la doble rendija (EDR).

La conceptualización se analiza a partir de la Teoría de los Campos Conceptuales, formulada por Vergnaud (1990) focalizándonos en los teoremas en acto (considerando un teorema en acto como una proposición tenida como verdadera por el sujeto en medio de la actividad) que pudieron haber guiado la conceptualización. Estos teoremas en acto nos permiten entender los posibles obstáculos y las ayudas a la conceptualización que la secuencia hizo posible emerger en los estudiantes. A su vez, este conocimiento nos da indicios de la viabilidad de la propuesta, y de la distancia entre la conceptualización pretendida y la realmente realizada por los estudiantes.

II. SITUACIONES PARA EL COMPORTAMIENTO CUÁNTICO DEL ELECTRÓN REFORMULADAS

Presentamos a continuación las situaciones objeto de análisis de este trabajo (no son todas las situaciones de la secuencia completa), con las conceptualizaciones que se esperan que sean desarrolladas por los estudiantes. Cada situación, está compuesta por tareas para impulsar la acción de los estudiantes, ya que asumimos que la conceptualización surge a partir de la interacción de los invariantes operatorios de los estudiantes con la situación y con los sistemas de representación propios de cada concepto. Previamente se trabajó con los estudiantes situaciones para acordar con ellos que la distribución en la pantalla en el experimento de la doble rendija (EDR) evidencia diferencias según se trate de canicas o electrones, siendo notorio un patrón periódico de máximos y mínimos en el caso de electrones y sólo uno o dos máximos si se trata de canicas dependiente de la distancia de separación entre rendijas (situaciones 1 y 2).

En la situación tres (que es la que analizaremos aquí) se presenta la cuestión sobre cuál modelo permite dar cuenta de la distribución de los electrones, planteando una situación más elemental antes: el cálculo de la probabilidad de detectar una partícula que en cierto tiempo se encuentra en un lugar considerado inicial (I) y luego se encuentra en otro (F) y después volver al caso de la EDR. Este cálculo de probabilidad se conoce en la literatura científica como la "*Integral de Caminos de Feynman*" (Feynman y Hibbs, 1965), adaptada a los estudiantes como la técnica de "*Considerar los Caminos Alternativos CCA*" (puede consultarse en Fanaro y otros (2014) para los detalles de esta adaptación). El análisis de representaciones gráficas y operaciones básicas con vectores es fundamental en este enfoque porque allí se concentran los aspectos esenciales de la teoría cuántica: el principio de superposición y su validez universal. En este caso, se plantea que un indicador de la probabilidad de detectar un electrón que partiendo de I llega a F, se encuentra en la resultante de una suma vectorial, donde cada vector se considera de módulo 1 y cuya dirección se

obtiene del cociente entre la Acción física (S) y la constante de Planck (h). La Acción es aceptada en Física como el producto de la energía (solamente la cinética en este caso, puesto que no se consideran los efectos de la gravedad ni ninguna otra fuerza) por el tiempo que transcurre entre I y F. Así, para cada “posible camino” entre I y F se asocia un vector unitario cuyo ángulo respecto al eje de abscisas tiene el valor de S/h.

Como parte fundamental de la transposición didáctica realizada, el diseño de la secuencia incluye el trabajo con plantillas de cálculo diseñadas por el equipo de investigación para estos estudiantes. En ellas, se muestra un gráfico en coordenadas cartesianas (x-y) y se permite el ingreso de distintos puntos que hacen variar los caminos que conectan el inicio (I) con el final (F). El objetivo de las plantillas de cálculo es simular los resultados del cálculo y visualizar la suma de los vectores gráficamente, puesto que esta suma es un indicador de la probabilidad de detección. La figura 1 es la imagen de la plantilla de cálculo del evento libre con electrones para caminos cercanos al camino directo y el camino directo, y la figura 2 es la imagen de la plantilla de cálculo del evento libre con electrones para vectores asociados a caminos alejados al camino directo.

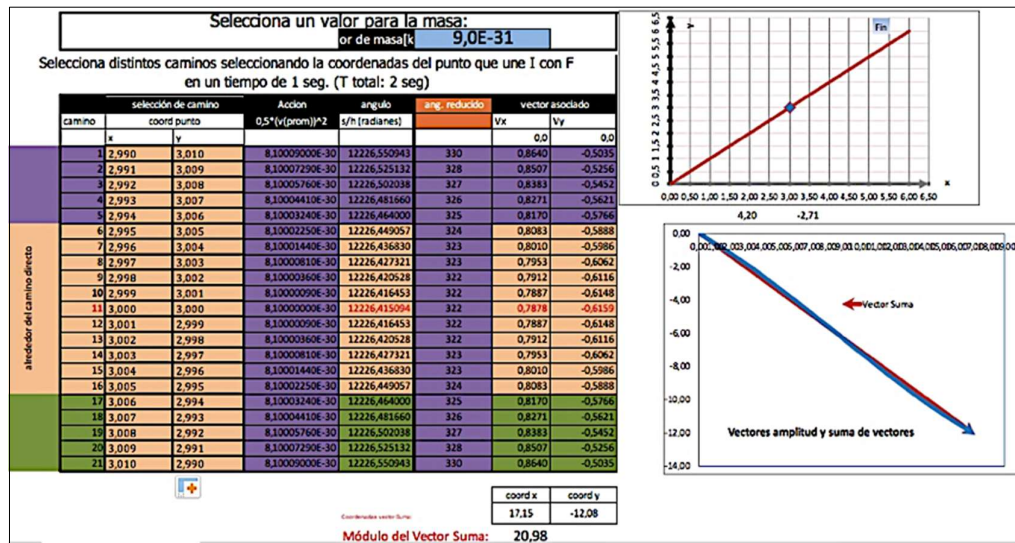


Figura 1. Imagen de la plantilla de cálculo del evento libre con electrones para veinte vectores asociados a caminos cercanos al camino directo y el camino directo, en el cual se observan los valores de las variables ángulo y acción, así como un vector unitario asociado a cada camino y el aporte a la suma de todos los vectores. Fuente: Elaboración propia.

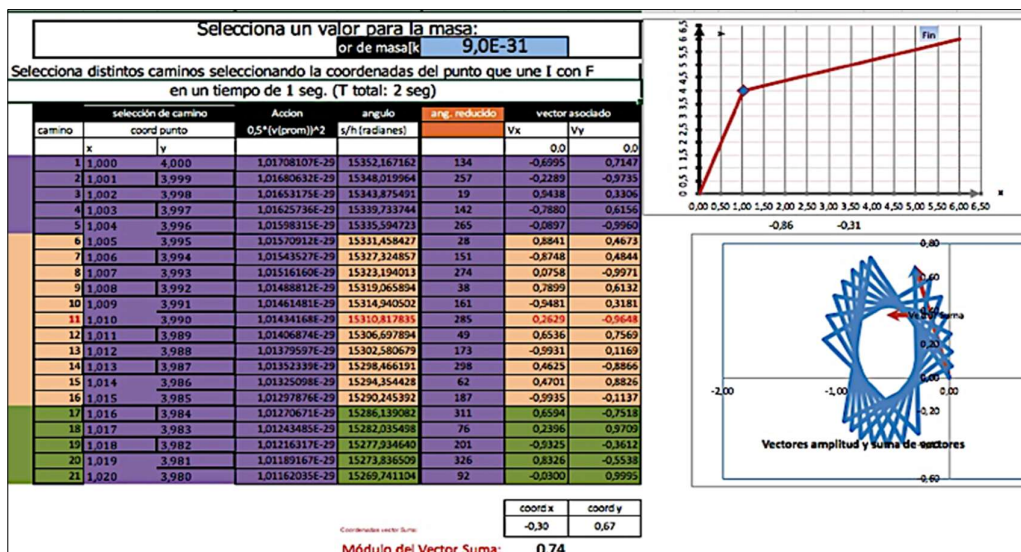


Figura 2. Imagen de la plantilla de cálculo del evento libre con electrones para veintiún vectores asociados a caminos alejados del camino directo, en el cual se observan los valores de las variables ángulo y acción, así como un vector unitario asociado a cada camino y la cancelación de estos al ser sumados. Fuente: Elaboración propia.

Así, las primeras tareas son analizar los valores de Acción (S) mostrados en la plantilla y variar las condiciones de los puntos de detección inicial y final que generan diferentes “caminos” para conectarlos. Se pretende consensuar que, para los caminos cercanos al camino directo, el ángulo es muy parecido al ángulo del camino directo y, en todos los casos, la acción es mínima en el punto de detección correspondiente con el camino directo. Al analizar los valores de la Acción y el ángulo, se espera que los estudiantes indiquen que los vectores asociados a caminos alejados del camino directo se cancelan mutuamente debido a que tienen ángulos muy distintos, lo cual implica que la magnitud de su suma es cercana a cero, mientras que al analizar el aporte a la suma de los vectores cercanos al camino directo dado que poseen ángulos similares su suma resultará casi del mismo valor a la suma de sus magnitudes, es decir que la suma de estos vectores unitarios es de magnitud casi igual al total de los vectores.

En esta adaptación de la técnica, no se calcula la probabilidad directamente, puesto que esta es proporcional al cuadrado del módulo del vector resultante en la suma, valor llamado con los estudiantes “frecuencia de ocurrencia relativa (FR)” que es calculado y mostrado en la plantilla. Correlativo al análisis previo con la suma, se pretende institucionalizar con los estudiantes que los puntos de detección correspondientes al camino directo y los que están a su alrededor, tienen mayor probabilidad de detectar electrones que en puntos de detección correspondientes a caminos alejados al camino directo. A modo de proponer una situación donde los estudiantes puedan poner en juego la idea de la contribución del camino más directo y los de su alrededor y que reforzaran la conceptualización, propusimos al final de esta situación una tarea nueva para esta implementación, el cálculo de la FR en el caso de un “billar cuántico”, donde se manifiesta un “evento rebote”, como se muestra en la Figura 3. Allí se propone analizar la probabilidad de detección de electrones en un supuesto billar en distintos puntos para concluir que el punto donde será más probable detectar un electrón que habiendo salido de una esquina realice un “rebote” y llegue a la tronera opuesta, es el punto de detección en el medio del lado donde se produce el rebote correspondiente con el camino directo y los caminos cercanos a él.

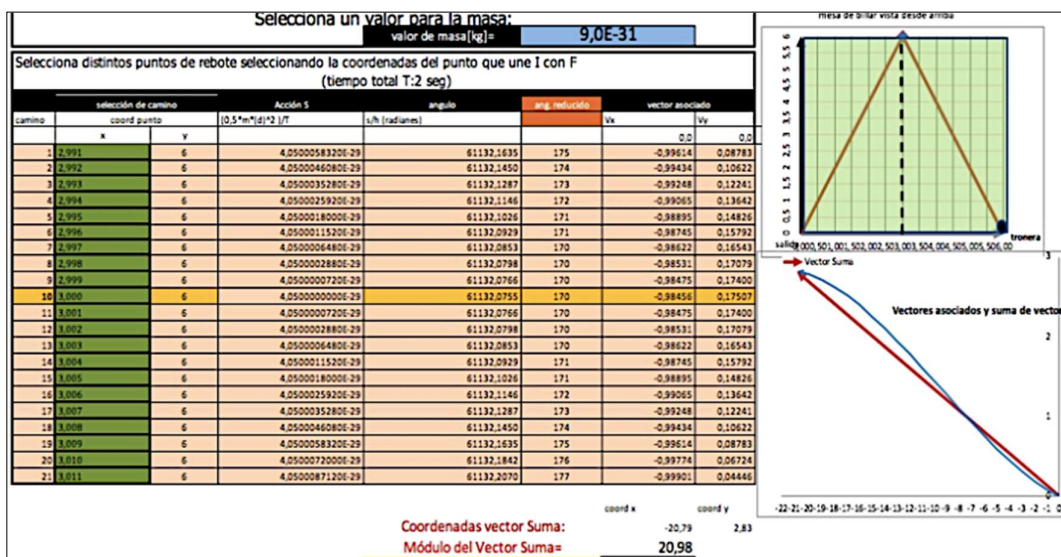


Figura 3. Imagen de la plantilla de cálculo del evento rebote con electrones para veinte vectores asociados a caminos cercanos al camino directo y el camino directo, en el cual se observan los valores de las variables ángulo y acción, así como un vector unitario asociado a cada camino y el aporte a la suma de todos los vectores. Fuente: Elaboración propia.

Luego de obtener con los estudiantes una expresión para la probabilidad en función de la posición para el caso de la EDR mediante la aplicación de la técnica CCA para el EDR (cuya expresión es $P(x) \sim \cos^2\left(\frac{m \cdot d}{2ht} x\right)$), se propuso una actividad en cierto sentido inversa, es decir se le daba la gráfica de la función para distintos valores de posición (x), y se solicitaba que ellos dibujaran los dos vectores asociados a cada camino principal, como se muestra en la Figura 4:

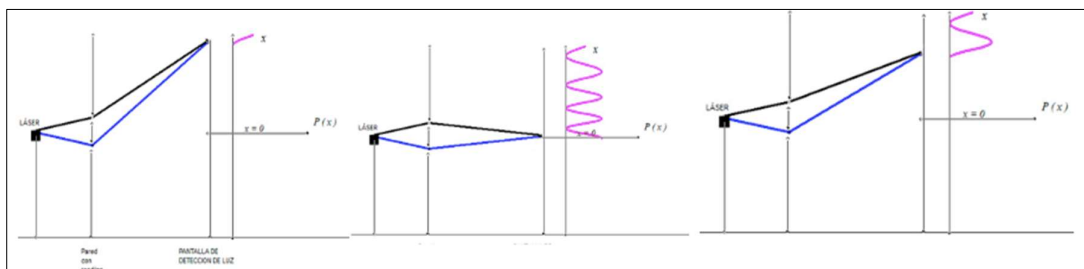


Figura 4. Mínimo o máximo de la curva de probabilidad en la gráfica de $P(x)$ (según sea el caso). Fuente: Elaboración propia.

Esperábamos que los estudiantes identifiquen que se está señalando un mínimo o un máximo (según sea el caso) de la curva de probabilidad en la gráfica de $P(x)$ y que se construyan los dos vectores asociados a los dos caminos principales, de forma que sean totalmente opuestos para que su suma sea cero (si se trata de un mínimo) o totalmente colineales para que su suma sea máxima (si se trata de un máximo), como presentamos en la figura 5.

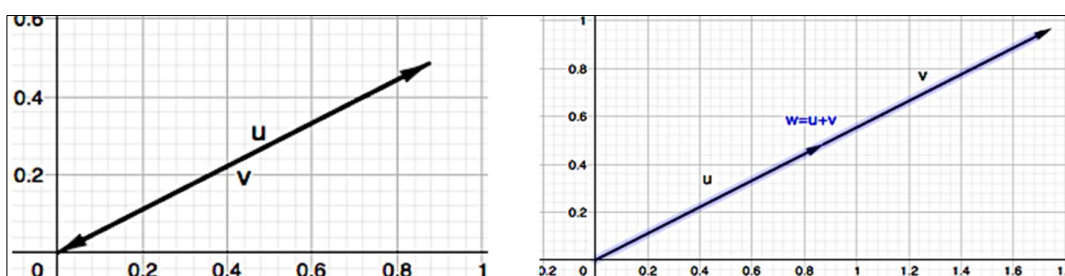


Figura 5. Posibles vectores u y v , asociados a los caminos que tienen el mismo ángulo, haciendo que la suma sea la máxima posible. Fuente: Elaboración propia.

III. METODOLOGÍA Y PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Se implementó una secuencia didáctica que consta de seis situaciones en cuatro cursos de física, en un colegio público perteneciente a la Secretaría de Educación del Distrito Bogotá, durante el tercer trimestre de los años 2016 y 2017, en cada año se trabajó con dos cursos, para un total de 118 estudiantes que pertenecían al último grado de formación del bachillerato en Colombia, llamado grado undécimo con edades entre 16 y 18 años. Se corroboró la homogeneidad previa a la implementación en los estudiantes de los cuatro cursos realizando una prueba de comparación en medias de sus desempeños en la cursada de Física previa a la implementación. Esta es una investigación cualitativa dada su naturaleza de comprender la conceptualización, aunque emplee técnicas cuantitativas para analizar los datos.

En las implementaciones el investigador adoptó el rol de profesor, con una metodología de trabajo en aula que privilegió la acción de los estudiantes, quienes en forma grupal leían, interpretaban las tareas, interactuaban con el profesor para realizar las consultas necesarias y desarrollaban las tareas propuestas. Una vez finalizada la implementación, se digitalizaron todas las resoluciones de los estudiantes y, a partir de ellas, se realizó una categorización inductiva de las respuestas de los estudiantes para interpretar los resultados a la luz de la Teoría de los Campos Conceptuales de Gerard Vergnaud. Se consideraron las acciones requeridas para la conceptualización buscada como las variables, y como modalidades de estas, los teoremas en acto identificados en las resoluciones de los estudiantes a una o varias situaciones. Es decir, el análisis no se realizó por situación, sino por los teoremas en acto que logramos identificar en las distintas fases de la conceptualización. Consideramos que esas proposiciones tenidas como verdaderas por los estudiantes son las que estarían subyaciendo y guiando cada tipo de resolución.

Se formularon categorías según las acciones requeridas para la conceptualización que pretendíamos que emergiera de las situaciones y, con base en ellas, se organizaron todas las resoluciones de los estudiantes a las situaciones. Se analizaron los tipos de soluciones encontradas en las resoluciones de los estudiantes, para inferir los teoremas en acto que representarían el tipo de resolución y se los ordenó en un gradiente hacia la mejor conceptualización lograda. Para el presente análisis, las categorías de análisis fueron las acciones requeridas en las situaciones y las modalidades de estas fueron los teoremas en acto emergentes de las resoluciones de los estudiantes. En este trabajo nos preguntamos: ¿Cómo es la relación entre la conceptualización del trabajo, con la técnica y la modelización, y la tarea inversa a la inicial (dada la gráfica, dibujar los vectores principales y su suma)?

IV. RESULTADOS

Se presentan las categorías con sus subcategorías cada una de ellas dividida de 1 a 3, correspondientes a un gradiente de conceptualización de los estudiantes en sus respuestas (las cuales se notan con este número y corresponderán a niveles de conceptualización), siendo el nivel 3 el mejor nivel de conceptualización alcanzado por los estudiantes.

Primero, se analizaron las categorías relacionadas con el desarrollo de la técnica, luego aquellas en las que se evidencia el cálculo de la probabilidad y su análisis e interpretación de los resultados del EDR con electrones. La Figura 6 presenta los resultados en cada una de las categorías, en donde el porcentaje corresponde con el número de las resoluciones de los estudiantes en cada uno de los niveles de conceptualización para cada categoría.

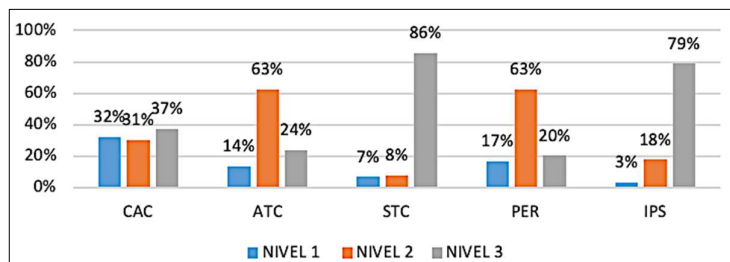


Figura 6. Distribución de las categorías analizadas en porcentajes de las resoluciones de los estudiantes en cada nivel de conceptualización. **Fuente:** Elaboración propia de los autores.

Comparar la acción para los caminos (CAC), el 32 % de los estudiantes indican que la acción es un valor que cambia en cada camino, sin embargo, no expresan dependencia entre el camino y el valor de la acción, otro 31 % de los estudiantes encontraron una asociación e indicaron que la acción es un valor que puede variar, y esta variación está asociada a cada grupo de caminos, para el último 37 % de los estudiantes la acción cambia y siempre lo hace para aumentar partiendo de un valor mínimo que corresponde con el valor de la acción del camino directo, enfatizaron que la acción es un valor que tiene un valor mínimo asociado al camino directo.

Análisis del ángulo reducido (ATC) el 13 % de los estudiantes realizaron un análisis muy limitado en relación con los valores del ángulo asociado a cada camino, más de la mitad de los estudiantes 63 % hicieron un análisis más elaborado del ángulo al indicar que es un valor que cambia, pero no lo relacionan con un camino en particular. El restante 24 % estableció que existe una relación e identificaron que el ángulo reducido es un valor que cambia, y asociaron su cambio con cada grupo de caminos.

Análisis de suma de vectores asociados para caminos cercanos y alejados al camino directo (STC), solo el 7 % de ellos no lograron una conclusión o esta fue errónea frente al aporte y comportamiento de los vectores asociados. Con un mayor grado de conceptualización se encuentran los estudiantes que indican que la suma de los caminos está afectado por el aporte de los vectores asociados al camino directo, correspondiente al 8 % y la mayoría, el 85 %, afirmaron que los vectores asociados a los caminos cercanos al camino directo aportan a la suma gracias a que tienen el mismo ángulo o ángulo parecido al del vector asociado al camino directo, los vectores asociados a los caminos alejados al camino directo no aportan a la suma debido a que tienen ángulos muy distintos.

Analizar la probabilidad para evento electrón rebote (PER), el 17% de los estudiantes hacen el cálculo de la probabilidad, pero no realizan conclusión. La mayor parte de los estudiantes el 63%, realizan una conclusión parcial, únicamente en términos de la influencia de los caminos cercanos al camino directo y el camino directo, expresando que este grupo de caminos son los más probables. El 20% de los estudiantes indican que debido a que los caminos alejados se cancelan, el aporte a la suma corresponde únicamente al camino directo y los caminos cercanos a este.

Interpretar la suma de los vectores asociados a cada camino con los resultados de la EDR en términos de $P(x)$ (IPS), En esta categoría se hace la reconstrucción de tres situaciones con electrones que son, los resultados de la Experiencia de la Doble Rendija (EDR), la gráfica de la función de probabilidad y el aporte a la suma de los vectores asociados a cada grupo de caminos en función de su probabilidad de ocurrencia; por lo que se constituye en una etapa de elaboración con un nivel de máxima estructuración conceptual. En el desarrollo de las resoluciones se evidencia que una muy pequeña parte de los estudiantes, el 3% de ellos, no logra relacionar el vector resultante con la curva de probabilidad. Por otra parte el 18%, aunque inicia el proceso de construcción de vectores, tiene problemas en encontrar el ángulo de los vectores asociados a los caminos para que su suma sea coherente con el resultado de $P(x)$, tanto para zonas de mayor probabilidad como en zonas de probabilidad mínima, sin embargo la mayoría, el 79%, eligen de manera correcta los ángulos de los dos vectores asociados, logrando hacer una suma que relacione asertivamente el vector resultante con lo modelado en la curva probabilidad $P(x)$ y con los resultados de EDR tanto para máximos de probabilidad como para sus mínimos.

También realizamos un análisis bivariado para conocer la asociación entre las categorías, calculando la medida de asociación Chi-cuadrado de Pearson, para valores de significación menores a 0,001, dado a que las categorías son cualitativas con escala ordinal, se buscó el grado de asociación usando el estadístico Gamma. Entre las categorías *Analizar la probabilidad para evento electrón rebote (PER)* e *Interpretar la suma de los vectores asociados a cada camino con los resultados de la EDR en términos de $P(x)$ (IPS)*, se establece una asociación positiva muy fuerte por su valor de Gamma de 0,860. En la figura 7 se presenta en porcentaje los resultados de esta asociación.

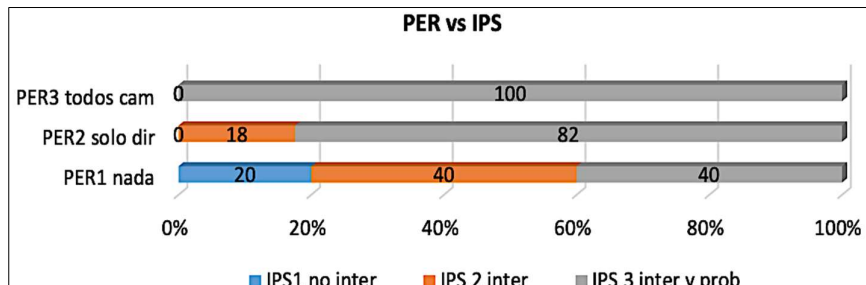


Figura 7. Distribución en frecuencias bivariadas para las categorías *Analizar la probabilidad evento electrón rebote (PER)* e *Interpretar la suma de los vectores, relación entre los vectores asociados a cada camino, vector suma y construcción en términos de $P(x)$ (IPS)*. **Fuente:** Elaboración propia.

La asociación encontrada indica que en el momento de establecer la relación entre el cálculo y el análisis de la probabilidad para el evento electrón rebote (PER), la totalidad de los estudiantes que habían expresado correctamente la influencia de todos los grupos de caminos en el cálculo de la probabilidad para electrón en evento rebote (PER3) lograron luego también establecer la relación correcta entre los vectores asociados a cada camino, el vector suma y la construcción en términos de $P(x)$ (IPS3). Esto se evidencia en la adecuada selección de los vectores asociados a las zonas de máximos y mínimos en la gráfica de probabilidad. Un ejemplo que representa esta asociación se presenta en las figuras 8 y 9.

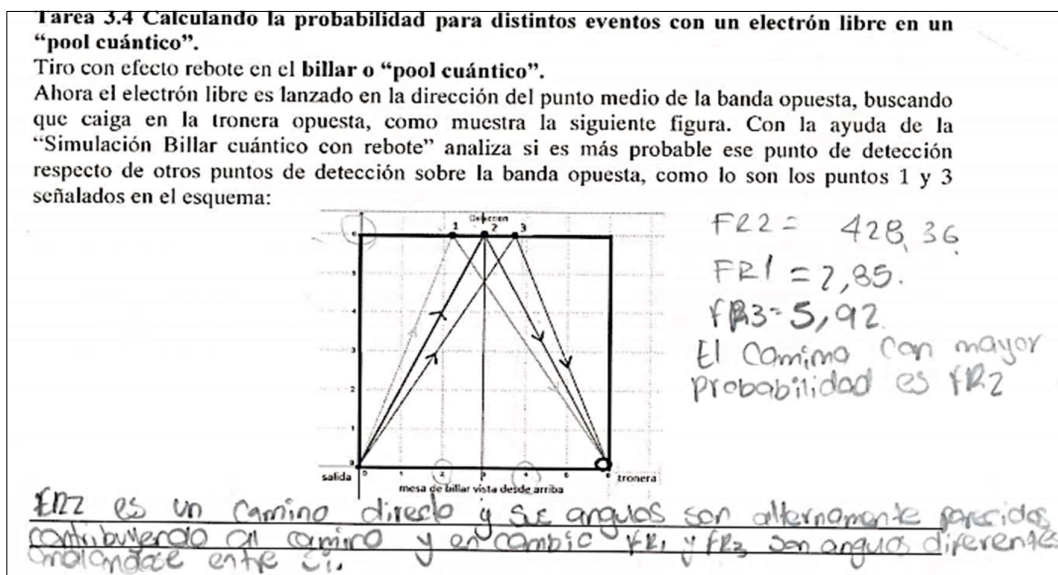


Figura 8. Se puede apreciar cómo los estudiantes además de realizar correctamente el cálculo de la probabilidad (ver la parte derecha de la figura), hacen una conclusión adecuada sobre el aporte de cada grupo de caminos (PER3). **Fuente:** Elaboración propia.

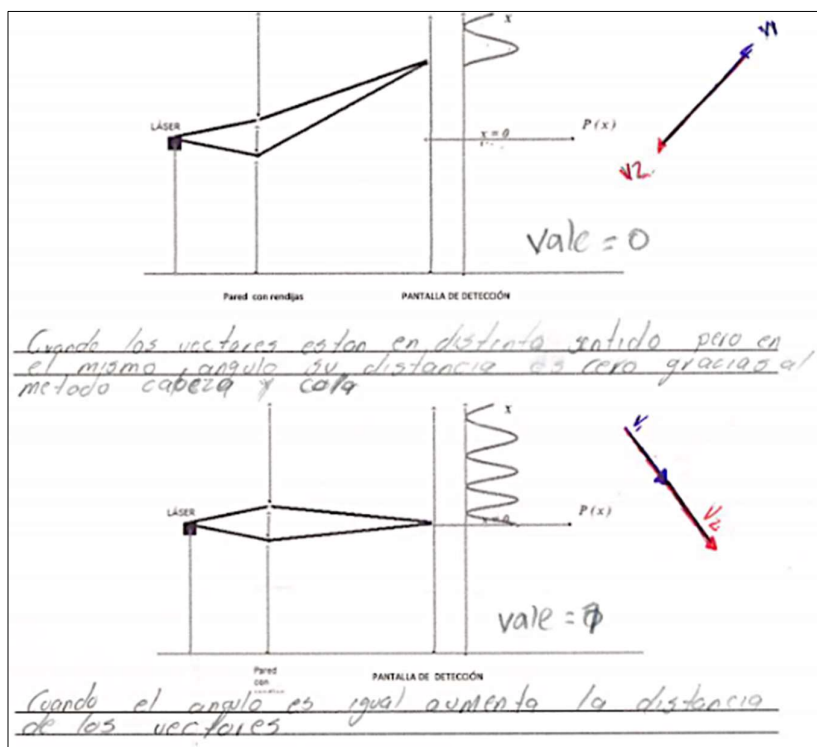


Figura 9. Respuesta del mismo grupo de estudiantes, en la cual los estudiantes relacionan correctamente los vectores asociados para la construcción de máximos y mínimos como lo muestran los vectores que ellos dibujan y que se observan en la parte derecha de la figura tanto para un mínimo como para un máximo de probabilidad (IPS3). **Fuente:** Elaboración propia.

Por el contrario, de quienes solamente realizaron el cálculo (numérico concreto) de la probabilidad sin formular conclusiones ni relacionando este valor con cada camino (PER1), luego, solo 20% de ellos tampoco logró relacionar el vector resultante con la curva de probabilidad (IPS1), EL 40% evidenció un nivel intermedio de la conceptualización (IPS2), y un último 40% superó sus obstáculos y logró un nivel alto en la conceptualización (IPS3).

IX. CONCLUSIONES

Como se puede notar, se presentaron algunas dificultades en la conceptualización de las nociones cuánticas presentadas en el modelo CCA, aunque la matemática y la modelación gráfica utilizada (en menor medida sabiendo que este es un punto a trabajar en la enseñanza de la Física escolar) en principio deberían resultar familiar y accesible a los conocimientos de los estudiantes. Sin embargo, los resultados del análisis bivariado muestran que, en el momento de aplicar el modelo para describir resultados de la EDR, estos obstáculos fueron siendo superados de forma paulatina.

Como consecuencia de la asociación PER – IPS, podemos decir que, aunque la situación IPS fue bastante bien conceptualizada por la mayoría de los estudiantes, el éxito en buena parte de los procesos de conceptualización se da al garantizar la conceptualización previa, pues solo dentro de los grupos que no lograron una conceptualización acertada frente a la probabilidad electrón rebote (PER) están aquellos que tampoco lograron la interpretación de la suma de los vectores relación entre los vectores asociados, vector suma y construcción en términos de $P(x)$ (IPS), pues *"la dificultad de una tarea no es ni la suma ni el producto de la dificultad de las diferentes subtareas, pero está claro que el fracaso en una subtarea implica el fracaso global"* (Vergnaud, 1990).

En busca de mejorar el nivel de la conceptualización evidenciado y en concordancia con nuestro marco teórico, una solución para la superación de los obstáculos viene de la mano de la propuesta de nuevas tareas que ayuden a la conceptualización en todas las etapas de la implementación y que a su vez den tiempo para el proceso de conceptualización, como lo indica Vergnaud (1990), el conocimiento racional es operatorio, y necesita de tiempo para lograrse; en medio de una situación se activa un abanico de teoremas y conceptos en acto que el estudiante adecúa a cada situación, haciéndose necesario tiempo de reflexión, de exploración, de dudas, de aciertos, y luego eventualmente el estudiante conceptualizará y alcanzará el éxito o el fracaso, por lo cual resulta necesario dar mas tiempo a los estudiantes para que se enfrenten a la solución de las tareas en medio de las situaciones.

REFERENCIAS

Akarsu, B. (2010). Einstein's redundant triumph "quantum physics": An extensive study of teaching/learning quantum mechanics in college. *Lat. Am. J. Phys. Educ.*, 3(2), 273-285.

Alvarado, K. y Fanaro, M. (2017). Enseñanza y aprendizaje de aspectos fundamentales de mecánica cuántica en la escuela secundaria colombiana a partir del enfoque de Feynman. Presentado en el *III Coloquio Nacional y I Internacional de Estudiantes de Doctorado en Educación*. Universidad Santo Tomás, Bogotá, Colombia.

Arlego, M. (2008). Los fundamentos de la mecánica cuántica en la escuela secundaria utilizando el concepto de integral de camino. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 3(1), 59-66. Recuperado de http://www.exa.unicen.edu.ar/reiec/?q=es/anio3_num1

Chevallard, Y. (1998). *La Transposición Didáctica. Del saber sabio al Saber enseñado (3a ed.)*. Buenos Aires: Aique.

Fanaro, M. (2009). *La enseñanza de la Mecánica Cuántica en la Escuela Media*. Tesis doctoral. Universidad de Burgos. Recuperado de https://riubu.ubu.es/bitstream/handle/10259/109/Fanaro_Cavalli.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Fanaro, M; Arlego, M. y Otero, M. R. (2012). Teaching Basic Quantum Mechanics in Secondary School Using Concepts of Feynman Path Integrals Method. *The Physics Teacher*, 50, 156. Recuperado de <https://doi.org/10.1119/1.3685112>

Fanaro, M, Otero, M.R y Arlego, M. (2014). The double slit experience with light from Feynman's Sum of Multiple Paths viewpoint. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 36(2). Recuperado de <https://doi.org/10.1590/S1806-11172014000200008>

Feynman, R y Hibbs A (1965). *Quantum Mechanics and Path Integrals*. New York: McGraw-Hill.

Vergnaud. G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(23), 133-170.