



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

---

Trabajo de Tesis Doctoral:

Estudio de problemas de reconstrucción de funciones  
en espacios de Paley Wiener asociados a medidas singulares  
o grupos localmente compactos abelianos  
Aplicaciones al estudio de núcleos positivos en el espacio de Hardy

---

Tesista: María Guadalupe García

Director: Dr. Jorge A. Antezana

2020



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>I Técnicas de espacios modelos en el estudio de desarrollos de Fourier en espacios <math>L^2</math> asociados a medidas singulares</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>7</b>
1.1. Integral de Poisson y funciones armónicas . . . . .	7
1.1.1. Teorema de Fatou sobre convergencia no tangencial . . . . .	11
1.2. Espacios de Hilbert con núcleo reproductor . . . . .	13
1.3. Los espacios de Hardy . . . . .	14
1.3.1. Espacios de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ . . . . .	14
1.3.2. Espacios de Hardy $H^p(\mathbb{T})$ . . . . .	15
1.3.3. El espacio de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ . . . . .	16
1.4. Subespacios modelo . . . . .	17
1.5. Medidas de Clark . . . . .	19
1.6. Marcos . . . . .	22
<b>2. El algoritmo de Kaczmarz</b>	<b>25</b>
2.1. Producto de proyecciones alternadas . . . . .	25
2.2. Algoritmo de Kaczmarz . . . . .	28
2.2.1. Definición y convergencia . . . . .	28
2.2.2. Velocidad de convergencia del algoritmo . . . . .	29
<b>3. Sucesiones efectivas</b>	<b>33</b>
3.1. Definición de sucesión efectiva y algunas propiedades básicas . . . . .	33
3.2. Sucesiones estacionarias . . . . .	40
3.3. Sucesiones efectivas y los espacios modelos . . . . .	45
3.4. Sucesiones casi periódicas . . . . .	49
<b>4. Matrices positivas en el espacio de Hardy</b>	<b>53</b>
<b>II Conjuntos de muestreo y de interpolación universales en grupos localmente compactos abelianos</b>	<b>63</b>
<b>5. Preliminares sobre grupos localmente compactos abelianos</b>	<b>69</b>
5.1. Definiciones y propiedades básicas . . . . .	69
5.1.1. Grupo cociente . . . . .	71

5.1.2. Grupo dual y transformada de Fourier . . . . .	72
5.2. Teoremas de estructura . . . . .	75
<b>6. Preliminares sobre muestreo e interpolación en espacios de Paley Wiener de un grupo LCA</b>	<b>77</b>
6.1. Espacios de Paley Wiener en grupos LCA . . . . .	77
6.2. Sucesiones de muestreo e interpolación . . . . .	78
6.3. Densidad de Beurling . . . . .	82
6.3.1. En $\mathbb{R}^d$ . . . . .	83
6.3.2. En grupos LCA . . . . .	84
<b>7. Bases de Riesz de caracteres</b>	<b>87</b>
7.1. Teorema de perturbación de Paley- Wiener . . . . .	87
7.2. Multiteselados y bases de Riesz . . . . .	91
<b>8. Conjuntos de muestreo e interpolación universales</b>	<b>93</b>
8.1. Cubos cuasi-diádicos . . . . .	93
8.2. Conjuntos de muestreo e interpolación estables . . . . .	94

# Introducción

Un resultado fundamental en la teoría de muestreo es el clásico Teorema de Whittaker-Shannon-Kotel'nikov. No sólo tiene gran interés en matemática aplicada, como teoría de la comunicación y procesamiento de señales, sino también en investigaciones que no están, en principio, motivadas por aplicaciones. Problemas de muestreo e interpolación forman una importante rama del análisis complejo. Dicho teorema establece que si una señal  $f$  es de banda limitada en  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , es decir, su transformada de Fourier está soportada en dicho intervalo, entonces  $f$  está completamente determinada por los valores  $f(k)$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ , y puede ser reconstruida unívocamente a partir de los mismos de la siguiente manera

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \frac{\text{sen}(\pi(x-k))}{\pi(x-k)}.$$

Por lo tanto, la sucesión  $\left\{ \frac{\text{sen}(\pi(x-k))}{\pi(x-k)} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$  forma una base ortonormal para el espacio de las funciones banda limitada, el cual se denomina espacio de Paley-Wiener. El mismo es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor  $K_k(x) = \frac{\text{sen}(\pi(x-k))}{\pi(x-k)}$  y se lo denota  $PW^2$ . Luego, por medio de la transformada de Fourier obtenemos que la sucesión de exponenciales  $\{e^{2\pi ik(\cdot)}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal para  $L^2([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$ .

La existencia de bases ortogonales de exponenciales en  $L^2(\Omega)$ , donde  $\Omega$  es un conjunto medible Borel de  $\mathbb{R}^d$ , nos permite obtener una representación en serie de Fourier no armónica de todo elemento del espacio. En [22], Fuglede demostró que  $L^2(\Omega)$  admite una base de exponenciales si y sólo si  $\Omega$  tesela a  $\mathbb{R}^d$  con traslaciones en un retículo  $\Lambda$  (ver definición 5.8). En el mismo trabajo conjeturó que la existencia de dichas bases estaba relacionada con teselados de  $\mathbb{R}^d$  por traslaciones (ver sección 7.2):  $L^2(\Omega)$  admite una base de exponenciales  $\{e^{2\pi i x \lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$  si y sólo si  $\Omega$  tesela a  $\mathbb{R}^d$  con traslaciones en  $\Lambda$ . Lo cual sugiere que la existencia de bases de exponenciales es una propiedad del conjunto. Luego, si en lugar de un intervalo consideramos un conjunto acotado y medible Borel  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$ , definimos el espacio de Paley-Wiener  $PW_\Omega$  como

$$PW_\Omega = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d) : \widehat{f}(w) = 0 \text{ en casi todo } w \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega \right\}.$$

Si lo pensamos como el espacio de funciones que admite un núcleo reproductor  $k(x, y) = \check{\chi}_\Omega(x - y)$  entonces, al igual que sucede con el Teorema de Whittaker-Shannon-Kotel'niko, si  $\{e^{2\pi i x \lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una base ortonormal de  $L^2(\Omega)$ , nuevamente por medio de la transformada de Fourier, todo elemento de  $PW_\Omega$  se puede representar de manera única como

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} f(\lambda) k_\lambda(x).$$

Sin embargo, si  $\Omega$  no es un intervalo el problema de hallar bases de exponenciales es significativamente más difícil. La conjetura de Fuglede ha motivado el trabajo de muchos matemáticos y se ha

probado que es cierta en algunos casos particulares (ver [33], [22]). Mientras que se sabe es falsa en dimensión  $d > 2$  (ver [37], [41], [69]).

Si la condición de ortogonalidad es omitida, tenemos las llamadas bases de Riesz. Una familia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\mathcal{H}$  se dice base de Riesz si es completa en  $\mathcal{H}$  y existen constantes positivas  $A$  y  $B$  tales que

$$A \sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2 \leq \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n f_n \right\|^2 \leq B \sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2,$$

para toda sucesión  $\{c_n\} \in \ell^2(\mathbb{N})$ . Si la sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  satisface dicha condición pero no es completa se dice sucesión de Riesz.

En espacios de Hilbert separables existe una generalización de familia de generadores en espacios vectoriales de dimensión finita, son los denominados marcos. Una familia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de vectores de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  se denomina marco para  $\mathcal{H}$  si existen constantes  $A, B > 0$  tales que para toda  $f \in \mathcal{H}$  se verifica

$$A \|f\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle f, f_n \rangle|^2 \leq B \|f\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Si  $A = B = 1$ , el marco se denomina marco de Parseval. En particular, si  $\mu$  es una medida finita de Borel sobre  $\mathbb{R}^d$ ,  $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$  y el marco está constituido por funciones exponenciales  $e_\lambda(x) = e^{2\pi i x \lambda}$ , con  $\lambda \in \Lambda$ , decimos que  $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es un marco de Fourier para  $L^2(\mu)$ . Esta noción fue introducida en 1952 por Duffin y Schaeffer en [18]. Si además el marco  $e_\lambda(x) = e^{2\pi i x \lambda}$  es una base, la familia se denomina base de Riesz.

Un marco en un espacio de Hilbert nos permite escribir a cada vector como combinación lineal de elementos del marco. La mayor ventaja con respecto a las bases es la redundancia. En efecto, si queremos transmitir una señal  $f$  enviando información a través de la sucesión  $\{\langle f, f_\lambda \rangle\}_{\lambda \in \Lambda}$  y alguno de los elementos está dañado o falta, podemos compensar este error con otros elementos de la sucesión y reconstruir la señal. Este hecho ha motivado su aplicación en distintas áreas a través de la matemática y la ingeniería, como las comunicaciones inalámbricas y el procesamiento de señales e imágenes.

La condición de base de Riesz y marco de Fourier puede ser reformulada en términos de sucesiones de muestreo e interpolación en el espacio  $PW_\Omega$ . En efecto, si  $\Omega$  es un conjunto acotado medible Borel de  $\mathbb{R}^d$ , un conjunto  $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$  se denomina de muestreo para  $PW_\Omega$  si existen constantes  $A, B > 0$  tales que

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)|^2 \leq B \|f\|^2,$$

para toda  $f \in PW_\Omega$ . Un conjunto  $\Gamma$  se dice de interpolación para  $PW_\Omega$  si para toda  $\{c_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \in \ell^2(\Gamma)$  existe  $f \in PW_\Omega$  tal que  $f(\gamma) = c_\gamma$ . Dado que el espacio  $PW_\Omega$  es un espacio con núcleo reproductor, la desigualdad anterior nos da una equivalencia entre la condición de ser  $\Lambda$  un conjunto de muestreo y formar la familia de núcleos reproductores  $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  un marco para  $PW_\Omega$ . Además, puesto que  $k_\lambda = (e_\lambda \chi_\Omega)^\vee$ , por medio de la transformada de Fourier y la identidad de Plancherel, obtenemos que el conjunto de exponenciales  $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es un marco de Fourier para  $L^2(\Omega)$ . Por otra parte, un conjunto  $\Lambda$  es un conjunto de muestreo e interpolación si y sólo si  $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una base de Riesz para  $L^2(\Omega)$ . Luego, mediante estas relaciones podemos estudiar sucesiones de muestreo e interpolación para entender los marcos y las bases de Riesz de exponenciales.

Intuitivamente, un conjunto de muestreo necesita tener suficiente información (en términos de número de puntos) para poder reconstruir la función muestreada, es decir, cuantos más puntos tengamos, más información obtendremos. Por otra parte, cada punto en un conjunto de interpolación impone una

restricción adicional para encontrar una función que interpole. Por lo tanto, será mejor cuantos menos puntos tengamos. Esta idea intuitiva se formaliza por medio de las denominadas densidades inferior y superior de Landau-Beurling [44]:

$$\mathcal{D}^-(\Lambda) = \lim_{r \rightarrow \infty} \inf_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{\#(\Lambda \cap Q_r(x))}{r^d} \quad \text{y} \quad \mathcal{D}^+(\Lambda) = \lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{\#(\Lambda \cap Q_r(x))}{r^d}, \quad (1.1)$$

donde  $Q_r(x)$  denota el cubo centrado en  $x$  de lado  $r$ . En términos generales, estas densidades comparan, asintóticamente, la distribución de puntos de  $\Lambda$  con respecto al conjunto  $\mathbb{Z}^d$ . En [44] Landau probó que la propiedad de un conjunto  $\Lambda$  de ser de muestreo o interpolación está relacionada con la concentración de puntos del conjunto respecto a  $\mathbb{Z}^d$ . Más precisamente, sea  $\Omega$  un conjunto de  $\mathbb{R}^d$ ,

- Si  $\Lambda$  es un conjunto de muestreo para  $PW_\Omega$  entonces  $\mathcal{D}^-(\Lambda) \geq m(\Omega)$
- Si  $\Lambda$  es un conjunto de interpolación para  $PW_\Omega$  entonces  $\mathcal{D}^+(\Lambda) \leq m(\Omega)$ .

En otras palabras, si consideramos  $m(\Omega) = 1$ , es necesario que  $\Lambda$  sea asintóticamente más denso que  $\mathbb{Z}^d$  en todo  $\mathbb{R}^d$  para ser un conjunto de muestreo, y por lo tanto la sucesión de exponenciales  $E(\Lambda)$  ser un marco. Análogamente, es condición necesaria que un conjunto  $\Lambda$  esté asintóticamente más esparcido que  $\mathbb{Z}^d$  en todo  $\mathbb{R}^d$  para ser de interpolación, y por lo tanto la sucesión de exponenciales  $E(\Lambda)$  ser una base de Riesz.

En Análisis Armónico resultan de interés los siguientes problemas:

- I) Conocer para que clase de medidas  $\mu$  en  $\mathbb{R}^d$  el espacio  $L^2(\mu)$  admite marcos de Fourier
- II) Estudiar la existencia de conjuntos de muestreo e interpolación en espacios de Paley-Wiener en grupos más generales que  $\mathbb{R}^d$ .

Se sabe que si una medida  $\mu$  admite un marco de Fourier, entonces debe ser de tipo puro, es decir, la medida  $\mu$  es discreta, absolutamente continua o singular continua respecto a la medida de Lebesgue (ver por ejemplo [26], [42]).

Si  $\mu$  es discreta, entonces tiene una cantidad finita de átomos. Por lo tanto, el análisis se reduce esencialmente a  $\mathbb{C}^d$ , donde los marcos de Fourier son sistemas de generadores que consisten de funciones exponenciales. Luego, una buena caracterización de tales marco se obtiene utilizando técnicas de álgebra lineal.

Si  $\mu$  es absolutamente continua, entonces  $\mu$  está soportada en un conjunto  $\Omega$  de medida de Lebesgue finita en  $\mathbb{R}^d$ , y su función de densidad es acotada superior e inferiormente en casi todo punto de  $\Omega$  (ver [14], [43]). Además, Nitzan, Olevskii y Ulanovskii probaron en [55] que  $L^2(\mu)$  admite un marco de Fourier. Cuando  $\Omega$  es acotado existen muchas maneras de probar la existencia de marcos de Fourier, y las demostraciones no son difíciles con las técnicas conocidas hoy en día. Sin embargo, cuando  $\Omega$  no es acotado, la existencia de marcos de Fourier es mucho más compleja, la prueba en [55] utiliza algunos resultados fuertes de Análisis Funcional tal como la solución al problema de Kadison-Singer [49].

El último caso, cuando la medida  $\mu$  es singular continua, es mucho menos conocido. Por ejemplo, no se sabe si para cualquier medida autosimilar  $\mu$  el correspondiente espacio  $L^2(\mu)$  admite un marco de Fourier. En algunos casos se puede probar que existen bases ortonormales de exponenciales (ver [11], [12], [15], [16], [34]), pero en otros, como por ejemplo la medida de Cantor ternaria, no se sabe si admite o no un marco de Fourier.

Otra posibilidad de expansiones de Fourier es en términos de las denominadas sucesiones efectivas. Sea  $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión completa de vectores unitarios en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Dado  $x \in \mathcal{H}$ , definimos de forma inductiva la siguiente sucesión:

$$\begin{aligned} x_0 &= \langle x, \varphi_0 \rangle \varphi_0, \\ x_n &= x_{n-1} + \langle x - x_{n-1}, \varphi_n \rangle \varphi_n. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = 0$  para todo  $x \in \mathcal{H}$ , entonces la sucesión  $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$  se denomina efectiva. La construcción inductiva antes mencionada que define los vectores  $x_n$  se llama algoritmo de Kaczmarz. Dicho algoritmo fue introducido en espacios de dimensión finita por Kaczmarz [35], y estudiado en espacios de Hilbert de dimensión infinita por Kwapien y Mycielski en [40] (ver también [27]). Los vectores  $x_n$  obtenidos por el algoritmo de Kaczmarz pueden ser expresados como

$$x_n = \sum_{k=0}^n \langle x, \gamma_k \rangle \varphi_k, \quad (1.3)$$

donde los vectores  $\gamma_n$  también se definen de forma recursiva:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \varphi_0 \\ \gamma_n &= \varphi_n - \sum_{k=0}^{n-1} \langle \varphi_n, \varphi_k \rangle \gamma_k. \end{aligned} \quad (1.4)$$

El hecho importante es que  $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$  es efectiva si y sólo si  $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$  es un marco de Parseval. En general, una sucesión efectiva  $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$  es sobredeterminada, y hay diferentes maneras de reconstruir un vector  $x$ . En particular, podría existir más de un marco de Parseval que satisfaga (1.3). La ventaja de  $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$  es su definición recursiva en términos de los  $\varphi_n$ .

Respecto al segundo problema, si  $G$  es un grupo localmente compacto abeliano y  $\widehat{G}$  es su grupo dual, dado un conjunto de medida de Haar positiva  $\Omega$  en  $\widehat{G}$ , utilizando ahora la transformada de Fourier para grupos, se define el espacio  $PW_\Omega$  de la siguiente manera

$$PW_\Omega = \left\{ f \in L^2(G) : \widehat{f}\chi_{\Omega^c} = 0 \text{ en } m - \text{ctp} \right\}.$$

Las definiciones de conjunto de muestreo e interpolación dadas para  $\mathbb{R}^d$  se extienden sin ningún cambio a grupos localmente compactos abelianos generales. Como mencionamos al comienzo, las densidades de Beurling-Landau comparan la distribución de puntos de  $\Lambda$  con el conjunto  $\mathbb{Z}^d$ . Considerando esta relación, Gröchening, Kutyniok y Seip en [24] generalizan la noción de densidad para grupos compactamente generados. Los teoremas de estructura implican que dichos grupos son isomorfos a  $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2} \times D$ , donde  $D$  es un grupo numerable discreto, luego  $H_0 = \mathbb{Z}^{d_1} \times \{1\} \times D$ , donde 1 denota la identidad de  $\mathbb{T}^{d_2}$ , resulta ser el retículo natural de referencia (ver sección 6.3.2). Además, los autores obtienen condiciones necesarias para conjuntos estables de muestreo e interpolación para el espacio de Paley Wiener  $PW_\Omega$ , en la misma línea que el clásico resultado de Landau:

- Un conjunto de muestreo  $\Lambda$  para  $PW_\Omega$  satisface  $\mathcal{D}^-(\Lambda) \geq m_{\widehat{G}}(\Omega)$
- Un conjunto de interpolación  $\Lambda$  para  $PW_\Omega$  satisface  $\mathcal{D}^+(\Lambda) \leq m_{\widehat{G}}(\Omega)$ ,

donde  $m_{\widehat{G}}$  denota la medida de Haar de  $\widehat{G}$ , y  $\mathcal{D}^+$ ,  $\mathcal{D}^-$  las densidades superior e inferior de Beurling, respectivamente. Si  $\mathcal{D}^+(\Lambda) = \mathcal{D}^-(\Lambda)$  decimos que el conjunto  $\Lambda$  tiene densidad uniforme y la denotamos  $\mathcal{D}(\Lambda)$ .



En [6], A. Beurling probó que si  $\Omega$  es un intervalo de la recta real entonces las condiciones de Landau también son suficientes. Más precisamente, si  $\Lambda$  es un conjunto uniformemente discreto de  $\mathbb{R}$ , es decir, la distancia entre dos puntos distintos de  $\Lambda$  es mayor que alguna cantidad positiva, se verifica

- Si  $\mathcal{D}^-(\Lambda) > m(\Omega)$  entonces  $\Lambda$  es un conjunto de muestreo estable para  $PW_\Omega$ .
- Si  $\mathcal{D}^+(\Lambda) < m(\Omega)$  entonces  $\Lambda$  es un conjunto de interpolación estable para  $PW_\Omega$ .

Este resultado no es cierto si en lugar de un intervalo se consideran conjuntos más generales, encontrar condiciones suficientes para conjuntos de muestreo y de interpolación es mucho más difícil dado que la estructura de  $\Omega$  entra en juego. En 2006, Olevskii y Ulanovskii (ver [56], [57]) hallaron conjuntos  $\Lambda \subset \mathbb{R}$  con densidad uniforme los cuales son de muestreo estables y de interpolación estables para cualquier  $PW_\Omega$ , tal que  $|\Omega| < \mathcal{D}(\Lambda)$  y  $|\Omega| > \mathcal{D}(\Lambda)$ , respectivamente. Este resultado es relevante ya que no requiere ninguna suposición sobre la estructura de  $\Omega$ . A tales conjuntos se los denomina conjuntos de muestreo estables universales y conjuntos de interpolación estables universales.

En [51] Matei y Meyer estudiaron la relación entre cuasi-cristales y los problemas de muestreo e interpolación, en particular probaron que los cuasi-cristales simples en  $\mathbb{R}^d$  son conjuntos universales de muestreo y de interpolación. Esto dio una manera muy simple de construir tales conjuntos. Desde entonces los cuasi-cristales han desempeñado un papel clave en recientes avances del Análisis de Fourier (ver [23] y [45]).

En [2] la existencia de cuasi-cristales fue estudiada para grupos localmente compactos abelianos. Como en el caso de  $\mathbb{R}^d$ , se probó que si un grupo admite un cuasi-cristal  $\Lambda$  entonces es un conjunto de muestreo universal y de interpolación universal. Sin embargo, no todo grupo admite un cuasi-cristal. En [2] se prueba que es condición necesaria y suficiente para que el grupo  $G = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2} \times D$  admita un cuasi-cristal simple que  $D$  no contenga una copia de  $\mathbb{Z}_p^{d+2}$  para cualquier primo  $p$  ( $\mathbb{Z}_p$  denota el grupo de enteros módulo  $p$ ). Esto muestra que hay grupos muy sencillos que no admiten cuasi-cristales simples, como por ejemplo  $G = \mathbb{R}^d \times \mathbb{Z}_2^3$ .

La tesis se encuentra dividida en dos partes:

- Parte I: Técnicas de espacios modelos en el estudio de desarrollos de Fourier en espacios  $L^2$  asociados a medidas singulares
- Parte II: Conjuntos de muestreo y de interpolación universales en grupos localmente compactos abelianos

Cada una de ellas trata una las dos ramificaciones mencionadas sobre el problema de desarrollo en series de Fourier.

A continuación damos una breve descripción de los problemas estudiados en cada una de las partes. Al comienzo de cada una de ellas, se encuentra una descripción más detallada de los resultados obtenidos así como también de los contenidos de cada capítulo.

En [40] (ver también [25]) los autores prueban que si  $\mu$  es una medida de probabilidad singular con respecto a la medida de Lebesgue sobre el intervalo  $[0, 1)$ , entonces la sucesión de monomios  $\{z^n\}_{n \geq 0}$  es efectiva en  $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ . Por lo tanto tiene un marco de Parseval asociado por medio del algoritmo de Kaczmarz. Nuestro principal resultado es caracterizar dicho marco de Parseval. Más precisamente probamos que se puede expresar como los valores en el borde del marco de Parseval obtenido por proyectar los monomios sobre un espacio modelo conveniente.

Por otra parte, Dutkay y Jorgensen estudiaron en [17] la conexión entre expansiones de Fourier lacunarias en espacios  $L^2$  asociados a medidas fractales y subespacios cerrados del espacio de Hardy. Este hecho los llevó a estudiar matrices positivas en el espacio de Hardy con representación de borde dada, estudio que fue continuado por Herr et. al. en [28]. En esta dirección, estudiamos y caracterizamos el conjunto de medidas que reproducen al núcleo reproductor de un espacio modelo.

Respecto al estudio de sucesiones de muestreo en interpolación universales, como hemos mencionado, no se sabe si grupos simples como  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2^3$  los poseen. Luego, es natural preguntarse si estos grupos admiten conjuntos de muestreo y de interpolación universales. En la segunda parte de la tesis se responde afirmativamente esta pregunta para grupos cuyo dual es compactamente generado y tipo Lie (ver sección 5.2), es decir, isomorfos a  $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2} \times \mathbb{Z}^{d_3} \times F$ , donde  $F$  es un grupo finito abeliano.

Cuando  $\widehat{G}$  no se supone de tipo Lie, dado un entorno  $U$  de la identidad de  $\widehat{G}$  existe un conjunto compacto  $K$  contenido en  $U$  tal que  $\widehat{G}/K$  es elemental (ver Teorema 8.1). Luego, en este caso la condición de universalidad es un poco más débil debido al factor compacto por el cual cocientamos. La universalidad de un conjunto de muestreo  $\Lambda$  para el espacio  $PW_\Omega$  será para conjuntos  $\Omega$  tales que  $m_{\widehat{G}}(\Omega + U) < \mathcal{D}(\Lambda)$ , donde  $U$  es un entorno de la identidad que contiene al grupo compacto. En el caso de interpolación, obtuvimos universalidad para el espacio  $PW_{\Omega+U}$ , donde  $\Omega$  son conjuntos tales que  $m_{\widehat{G}}(\Omega) > \mathcal{D}(\Lambda)$ .

## Parte I

# Técnicas de espacios modelos en el estudio de desarrollos de Fourier en espacios $L^2$ asociados a medidas singulares



# Introducción

Sea  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión completa de vectores unitarios en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Como vimos en la introducción general, la sucesión  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  se denomina efectiva si dado un vector  $x$  en  $\mathcal{H}$  se verifica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\|_{\mathcal{H}} = 0,$$

donde  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  es la sucesión definida por el algoritmo de Kaczmarz:

$$\begin{aligned}x_0 &= \langle x, e_0 \rangle e_0, \\x_n &= x_{n-1} + \langle x - x_{n-1}, e_n \rangle e_n.\end{aligned}$$

Kwapien y Mycielski en [40] dan otra expresión para estos vectores:

$$x_n = \sum_{k=0}^n \langle x, g_k \rangle e_k,$$

donde los vectores  $g_n$  también se definen de forma recursiva:

$$\begin{aligned}g_0 &= e_0 \\g_n &= e_n - \sum_{k=0}^{n-1} \langle e_n, e_k \rangle g_k,\end{aligned}$$

y obtienen (ver también [25]) la siguiente relación:  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es efectiva si y sólo si  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un marco de Parseval para  $\mathcal{H}$ .

Ahora, si  $\mu$  es una medida de Borel, dado que estamos interesados en representaciones en series de Fourier de los elementos de  $L^2(\mu)$ , consideremos en particular la sucesión  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definida por  $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$ . Los autores antes mencionados en el mismo trabajo (ver también [27]) prueban el siguiente resultado:

**Teorema.** Sea  $\mu$  una medida de Borel de probabilidad en el intervalo  $[0, 1)$ . La sucesión de exponenciales  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  es efectiva si y sólo si  $\mu$  es la medida de Lebesgue normalizada restringida a  $[0, 1)$ , o es singular con respecto a la medida de Lebesgue.

En consecuencia, dada una medida singular  $\mu$ , la cual puede ser cualquier medida singular de Cantor, para toda  $f \in L^2(\mu)$  tenemos la expansión de Fourier:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, g_n \rangle e^{2\pi i n t},$$

donde  $\{g_n\}_{n \geq 0}$  es el marco de Parseval asociado antes definido. En general, una sucesión efectiva no es una sucesión de Bessel. Luego, la relevancia de estas expansiones de Fourier radica en el algoritmo de Kaczmarz que está detrás de ellas y en el marco de Parseval  $\{g_n\}_{n \geq 0}$ .

Por otra parte, si  $H^2$  denota el espacio de Hardy, se sabe que la sucesión de monomios  $\{z^n\}_{n \geq 0}$  constituye una base ortonormal en el mismo. Entonces, si  $P_\varphi$  es la proyección ortogonal sobre espacio modelo  $\mathcal{H}(\varphi) := H^2 \ominus \varphi H^2$ , donde  $\varphi$  es una función interna asociada a  $\mu$  mediante las medidas de Clark (ver sección 1.5),  $\{P_\varphi(z^n)\}_{n \geq 0}$  es un marco de Parseval y se satisface

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, z^n \rangle_{H^2} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, P_\varphi z^n \rangle_{\varphi H^2} z^n, \quad \forall f \in \mathcal{H}(\varphi).$$

Luego, dada  $f^* \in L^2(\mu)$ , sea  $f \in \mathcal{H}(\varphi)$  tal que

$$f^*(w) = \lim_{\angle z \rightarrow \omega} f(z),$$

donde el límite existe en casi todo punto con respecto a  $\mu$  y a la medida de Lebesgue. Si tomamos límite no tangencial con respecto a  $\mu$ , dado que los espacios  $\mathcal{H}(\varphi)$  y  $L^2(\mu)$  son isométricos (ver [10]), obtenemos

$$f^* = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f^*, P_\varphi^* z^n \rangle_{L^2(\mu)} e_n.$$

Por lo tanto,  $\{P_\varphi^* z^n\}_{n \geq 0}$  y  $\{g_n\}_{n \geq 0}$  satisface la misma condición respecto a la representación en serie de Fourier de los elementos de  $L^2(\mu)$ .

Con el propósito de estudiar la relación entre el marco de Parseval  $\{P_\varphi^* z^n\}_{n \geq 0}$  y el obtenido a partir del algoritmo de Kaczmarz asociado a la sucesión  $\{z^n\}_{n \geq 0}$ , probamos que los vectores  $g_n$  son la extensión al borde de  $P_\varphi z^n$  con respecto a la medida  $\mu$ . La demostración se basa en mostrar que los coeficientes en el desarrollo en serie en términos de  $\{z^n\}_{n \geq 0}$  de  $\varphi$  están relacionados con los coeficiente en el desarrollo de  $g_n$  en términos de  $\{e_k\}_{k=0}^n$ . Luego, utilizando esta representación simplificamos las pruebas obtenidas por Herr y Weber en [27] respecto a la conexión entre sucesiones efectivas y la transformada de Cauchy.

Dada  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ , definimos la función  $f_r$  sobre  $\mathbb{T}$  como  $f_r(\omega) = (r\omega)$ , con  $r \in (0, 1)$ . Si  $\mu$  es una medida finita positiva de Borel, decimos que  $f^* \in L^2(\mu)$  es una extensión de  $f$  si se cumple

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \|f^* - f_r\|_{L^2(\mu)} = 0.$$

Un resultado clásico de espacios de Hardy es que toda  $f$  en  $H^2(\mathbb{D})$  admite una extensión  $f^*$  sobre  $\mathbb{T}$  con respecto a la medida de Lebesgue y dicha extensión se obtiene tomando límite no tangencial.

Dada una medida de probabilidad singular  $\mu$ , Herr et. al. [28], utilizando el algoritmo de Kaczmarz, construyen núcleos  $k$  en el espacio de Hardy  $H^2$  para los cuales existe una extensión  $k^* \in L^2(\mu)$  tal que

$$k(z, w) = \int_{\mathbb{T}} k^*(w, \xi) \overline{k^*(z, \xi)} d\mu(\xi),$$

para  $z, w \in \mathbb{D}$ , es decir, los núcleos  $k$  se reproducen a sí mismos con respecto a  $\mu$ . Más tarde, en [29] plantean el problema inverso, es decir, dado un núcleo en  $H^2$  determinar cuales son las medidas respecto a las cuales existe una representación en el borde. Siguiendo esta línea de trabajo, otro de los objetivos de la primera parte de la tesis es estudiar el conjunto de tales medidas para un núcleo contenido en un espacio modelo. En particular, si el núcleo es el núcleo reproductor de un subespacio modelo, probamos que dichas medidas coinciden con el conjunto de medidas  $\mu$  para las cuales el subespacio modelo puede ser isométricamente incluido en  $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ , el cual fue definido por Aleksandrov en [3]. Utilizando esta identificación obtuvimos que todas las medidas de Clark asociadas a la función interna que determina

el espacio modelo pertenecen al conjunto y generalizamos algunos resultados obtenidos en [28]. La mayor dificultad en la prueba son las distintas nociones consideradas para la extensión de los núcleos sobre  $\mathbb{T}$ . Por un lado se consideran límites en  $L^2(\mu)$  de las restricciones radiales  $f_r$  y por el otro la isometría mencionada es con respecto al límite no tangencial. Para obtener el resultado, basados en la idea usada por Poltoratski en [58] para medidas de Clark, probamos que la isometría definida a partir del límite no tangencial es también la extensión sobre  $\mathbb{T}$  cuando se considera el límite en  $L^2$  de las restricciones radiales. Por otra parte, usando una caracterización dada por Aleksandrov (ver [3]) del conjunto de medidas  $\mu$  para las cuales el espacio modelo es isométrico a  $L^2(\mu)$  basta probar la existencia de la extensión de los núcleos reproductores sobre  $\mathbb{T}$  en  $\mu$  casi todo punto.

Retomando las sucesiones efectivas, en [25] se da una expresión para los vectores  $x_n$  del algoritmo de Kaczmarz en término de proyecciones. En efecto, si  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  es una sucesión de vectores unitarios linealmente densa en  $\mathcal{H}$  y  $P_n$  denota la proyección ortogonal sobre el espacio  $\langle e \rangle^\perp$  entonces

$$x_n = x_{n-1} + (I - P_n)(x - x_{n-1}),$$

por lo tanto  $x - x_n = P_n \cdots P_0 x$ . Luego, la efectividad de la sucesión  $\{e_n\}$  es equivalente a la convergencia SOT a cero de los operadores  $P_n \cdots P_0$ . Utilizando esta caracterización probamos que, al igual que sucede con las sucesiones periódicas, las sucesiones casi periódicas también son efectivas en espacios de dimensión finita.

Esta primera parte de la tesis está organizada de la siguiente manera: en el capítulo 1 se encuentran algunas definiciones y propiedades básicas que necesitaremos a lo largo del trabajo. En particular, en la sección 1.1 se encuentran el Teorema de Fatou sobre la existencia del límite no tangencial y el Teorema de Herglotz, el cual es la principal herramienta para definir las medidas de Clark en la sección 1.5. Por otra parte, en la sección 1.3 se encuentra la definición de los espacios de Hardy tanto en  $\mathbb{D}$  como en  $\mathbb{T}$  y la relación que hay entre ellos.

En el capítulo 2 se define el método de Kaczmarz y se prueba la convergencia del mismo independientemente del punto inicial. Además, damos un resultado sobre la velocidad de convergencia del algoritmo establecido por de Smith, Solmon y Wagner [3]. Si bien los resultados de esta sección son clásicos, se dan con detalle las demostraciones.

El capítulo 3 contiene uno de los principales resultados del trabajo: la caracterización del marco de Parseval asociado a la sucesión efectiva de monomios. Con esta caracterización probamos de manera más simple resultados obtenidos en [27]. Por otra parte, utilizando medidas de Clark, obtenemos otra prueba de un resultado de Kwapien y Mycielski en [40] sobre sucesiones estacionarias. Finalizamos el capítulo probando la efectividad de las sucesiones casi periódicas en espacios de dimensión finita.

El capítulo 4 corresponde al estudio del conjunto de medidas positivas que reproducen a un núcleo dado contenido en un espacio modelo. En particular contiene otro resultado primordial de la tesis, la caracterización de dicho conjunto cuando se considera el núcleo reproductor de un subespacio modelo. Luego, a partir de la misma, obtenemos algunas consecuencias relacionadas a las medidas de Clark.





# Capítulo 1

## Preliminares

A lo largo del trabajo denotaremos  $\mathbb{D}$  y  $\mathbb{T}$  al disco y a la circunferencia unidad en el plano complejo respectivamente,  $\mathcal{M}(\mathbb{T})$  al espacio de Banach de las medidas finitas y complejas de Borel sobre  $\mathbb{T}$ , dotado con la norma de variación acotada y  $m$  a la medida normalizada de Lebesgue sobre  $\mathbb{T}$ . En el presente capítulo se encuentran conocidos resultados sobre funciones analíticas que necesitaremos en la primera parte del trabajo. Vamos a comenzar viendo la relación entre la integral de Poisson con respecto a una medida sobre  $\mathbb{T}$  y las funciones armónicas. Luego, recordaremos el Teorema de Fatou sobre la extensión a  $\mathbb{T}$  de una función holomorfa definida en  $\mathbb{D}$ . La relación antes mencionada será fundamental en la sección 1.5 para poder definir las medidas de Clark, una de nuestras principales herramientas. Por otra parte, en la sección 1.2 recordaremos la noción de espacios de Hilbert con núcleo reproductor, mientras que en las secciones 1.3 y 1.4 estudiaremos el caso particular del espacio de Hardy  $H^2$  y los subespacios modelo. Por último, en la sección 1.6 recordamos nociones básicas sobre marcos que utilizaremos tanto en la primera como en la segunda parte del trabajo.

### 1.1. Integral de Poisson y funciones armónicas

En la presente sección se encuentran algunos resultados sobre integrales de Poisson y comportamiento sobre  $\mathbb{T}$  de funciones holomorfas que serán necesarios en la primera parte del trabajo. Dado que son resultados preliminares no se dan en profundidad, para más detalle se puede consultar el capítulo 11 de [62] y el capítulo 1 de [8].

Sea  $u$  una función continua en  $\overline{\mathbb{D}}$ . Si  $u$  es armónica en  $\mathbb{D}$ , es decir, si

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

entonces  $u(z)$  tiene la propiedad de la media

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it}) dt = \int_{\mathbb{T}} u(\omega) dm(\omega).$$

Si  $z_0 \in \mathbb{D}$ , existe una representación similar para  $u(z_0)$  obtenida por medio de un cambio de variables usando la transformación de Möbius

$$\varphi_{z_0}(z) = \frac{z_0 - z}{1 - \overline{z_0}z}.$$

En efecto, usando que  $u \circ \varphi_{z_0}$  es otra función armónica y haciendo un cambio de variables obtenemos que:

$$\begin{aligned} u(z_0) = u(\varphi_{z_0}(0)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\varphi_{z_0}(e^{it})) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it}) \frac{1 - |z_0|^2}{|e^{it} - z_0|^2} dt. \end{aligned} \quad (1.1)$$

La función  $P_{z_0} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$P_{z_0}(t) = \frac{1 - |z_0|^2}{|e^{it} - z_0|^2}$$

se denomina *núcleo de Poisson* y admite distintas fórmulas:

$$P_{z_0}(t) = \operatorname{Re} \left( \frac{e^{it} + z_0}{e^{it} - z_0} \right) \quad (1.2)$$

$$= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t - t_0) + r^2} \quad (1.3)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in(t-t_0)}, \quad (1.4)$$

donde estamos asumiendo que  $z_0 = re^{it_0}$ . Estas fórmulas permiten deducir fácilmente las siguientes características del núcleo de Poisson:

1.  $P_{z_0}(t) > 0$ .
2.  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{z_0}(t) dt = 1$ .
3. Si suponemos que  $t_0 = 0$ , i.e., que  $z_0 = r$  entonces:
  - i.)  $P_r(t) = P_r(-t)$ ;
  - ii.)  $P_r(t) < P_r(\delta)$  si  $0 < \delta < |t| \leq \pi$ ;
  - iii.)  $\lim_{r \rightarrow 1} P_r(\delta) = 0$  si  $\delta \in (0, \pi]$ .

Usando el núcleo de Poisson se pueden construir funciones armónicas del siguiente modo:

**Lema 1.1.** Dada  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ , la función

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} P_z(\omega) d\mu(\omega),$$

es armónica en  $\mathbb{D}$ .

*Demostración.* Usando el teorema de convergencia dominada, no es difícil ver que

$$G(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\omega + z}{\omega - z} d\mu(\omega)$$

es holomorfa en  $\mathbb{D}$ . El resultado queda demostrado al observar que  $F(z) = \operatorname{Re} G(z)$ . ■

**Notación 1.2.** De aquí en más, usaremos la siguiente notación: si  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$  entonces

$$P[\mu](z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \operatorname{Re} \left( \frac{\omega + z}{\omega - z} \right) d\mu(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} P_z(\omega) d\mu(\omega).$$

Si  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , entonces  $P[f](z) := P[f d\omega](z)$ . ▲

Una pregunta que surge al saber construir funciones armónicas, conocida como problema de Dirichlet, es si podemos construir una función armónica en  $\mathbb{D}$ , continua en  $\overline{\mathbb{D}}$  y cuyos valores en  $\mathbb{T}$  estén prefijados. El lema anterior nos da la clave de cómo resolver este problema:

**Teorema 1.3.** Sea  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$  y  $H_f : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$H_f(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } |z| = 1 \\ P[f](z) & \text{si } |z| < 1 \end{cases}.$$

Entonces  $H_f$  es armónica en  $\mathbb{D}$  y continua en  $\overline{\mathbb{D}}$ .

La pregunta que surge naturalmente ahora es qué ocurre si relajamos las hipótesis sobre la función  $f$  definida en  $\mathbb{T}$ . Veamos algunos resultados en esta dirección. Para simplificar los enunciados introduciremos la siguiente notación:

**Notación 1.4.** Si  $u : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ , entonces  $u_r : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  es la función definida por

$$u_r(e^{it}) = u(re^{it}).$$

▲

Hecha esta aclaración, pasemos a los resultados.

**Proposición 1.5.** Si  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $f \in L^p(\mathbb{T})$  y  $u = P[f]$  entonces

$$\|u_r\|_p \leq \|f\|_p.$$

**Corolario 1.6.** Si  $1 \leq p < \infty$ ,  $f \in L^p(\mathbb{T})$  y  $u = P[f]$  entonces

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \|f - u_r\|_p = 0.$$

La Proposición 1.5 nos dice que si  $u = P[f]$  para cierta  $f \in L^p(\mathbb{T})$ , entonces las funciones  $u_r$  están en  $L^p(\mathbb{T})$  y sus normas están uniformemente acotadas. El siguiente teorema es una posible recíproca de este resultado:

**Teorema 1.7.** Sea  $p > 1$  y  $u : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  una función armónica tal que

$$\sup_{r \in (0,1)} \|u_r\|_p < \infty.$$

Entonces existe  $f \in L^p(\mathbb{T})$  tal que  $u = P[f]$ .

*Demostración.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$  consideremos las funciones  $u_n(e^{it}) = u(r_n e^{it})$ , donde  $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, 1)$  es una sucesión que converge a 1. Por hipótesis, las funciones  $u_n$  están acotadas sobre  $\mathbb{T}$  por lo tanto existe una bola  $B \subseteq L^p(\mathbb{T})$  que las contiene. Por el Teorema de Banach-Alaoglu, existe una subsucesión  $\{u_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$   $\omega^*$ -convergente a una función  $f \in L^p(\mathbb{T})$ . Luego, si  $q$  es el exponente conjugado de  $p$ , para toda  $g \in L^q(\mathbb{T})$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_{n_k}(e^{it}) g(e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) g(e^{it}) dt.$$

En particular, fijando  $z_0 \in \mathbb{D}$ , si tomamos  $g = P_{z_0}$  se obtiene que

$$\begin{aligned} u(z_0) &= \lim_{k \rightarrow \infty} u(r_{n_k} z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_{r_{n_k}}(e^{it}) P_{z_0}(e^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_{z_0}(e^{it}) dt \\ &= P[f](z_0). \end{aligned}$$

■

El siguiente teorema nos da un resultado análogo para el caso  $p = 1$ .

**Teorema 1.8.** Dada  $u : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  armónica, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $\sup_{r \in (0,1)} \|u_r\|_1 < \infty$ .
2. Existe  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$  tal que  $u = P[\mu]$ .

En tal caso, la medida  $\mu$  es única.

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata de este resultado y el teorema de Hahn-Banach:

**Corolario 1.9.** La familia de funciones  $P_z$ , con  $z \in \mathbb{D}$ , es densa en  $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ .

Luego, llegamos al siguiente resultado:

**Teorema 1.10** (Herglotz). Dada una función armónica  $u : \mathbb{D} \rightarrow [0, +\infty)$ , existe una única medida  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$  también positiva tal que  $u = P[\mu]$ .

*Demostración.* Si la función armónica  $u$  es positiva, entonces automáticamente se satisface la condición

$$\sup_{r \in (0,1)} \|u_r\|_1 < \infty,$$

puesto que

$$\|u_r\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(re^{it}) dt = u(0).$$

Luego, por el Teorema 1.8 tenemos la existencia de la medida. La positividad de  $\mu$  es heredada de la positividad de las medidas  $\mu_r = u_r d\omega$ . ■

### 1.1.1. Teorema de Fatou sobre convergencia no tangencial

Si  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$  y  $u = P[f]$  entonces vimos que para todo  $\omega \in \mathbb{T}$

$$\lim_{z \rightarrow \omega} u(z) = f(\omega).$$

Cuando  $f$  no es continua, este límite puede carecer de sentido para todo  $\omega \in \mathbb{T}$ , por lo cual es necesario introducir un concepto más débil de límite. Para ello, consideraremos las regiones definidas para cada  $r \in (0, 1)$  por:

$$\Gamma_r(\omega) = \text{cc}(\mathbb{D}_r(0) \cup \{\omega\}), \quad (1.5)$$

donde  $\text{cc}$  denota la cápsula convexa del conjunto en cuestión, o equivalentemente, el menor convexo que contiene al conjunto en cuestión (ver figura 1.1). Al conjunto  $\Gamma_r(\omega)$  se lo denomina región de Stoltz.

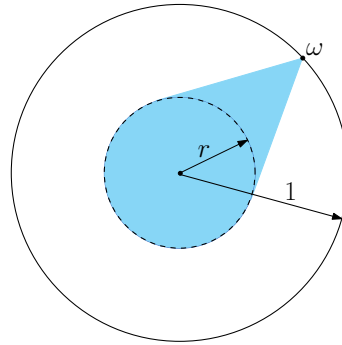


Figura 1.1: Región  $\Gamma_r(\omega)$

**Definición 1.11.** Dada  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ , se dice que posee un **límite no tangencial**  $\lambda$  en  $\omega \in \mathbb{T}$  si para toda sucesión  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que converge a  $\omega$  y está contenida en  $\Gamma_r(\omega)$ , con  $r \in (0, 1)$ , se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lambda.$$

En tal caso, lo notaremos

$$\lim_{\angle z \rightarrow \omega} f(z) = \lambda$$

**Teorema 1.12** (Fatou [19]). Si  $f$  es una función holomorfa en  $\mathbb{D}$  y acotada entonces  $f$  tiene un límite no tangencial (finito) en cada  $w \in \mathbb{T}$  excepto posiblemente para un conjunto de medida de Lebesgue cero.

Para funciones holomorfas acotadas, la existencia del límite radial es suficiente para determinar la existencia del límite no tangencial como lo demuestra el siguiente Teorema de Lindelöf.

**Teorema 1.13** (Lindelöf [46]). Si  $f$  es una función holomorfa en  $\mathbb{D}$  y acotada tal que  $f(z)$  tiende a  $\lambda$  cuando  $z$  tiende a  $w$  a lo largo de algún arco  $\gamma \subset \mathbb{D}$  que termina en  $w$ , entonces

$$\lim_{\angle z \rightarrow \omega} f(z) = \lambda$$

**Definición 1.14.** Dada una función holomorfa  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ , definimos su extensión  $f^*$  sobre  $\mathbb{T}$  como:

$$f^*(\omega) = \lim_{r \rightarrow 1^-} f(r\omega),$$

cuando el límite existe. Consideramos  $f^*(\omega) = 0$  si el límite no existe.

**Notación 1.15.** A lo largo de este trabajo denotaremos  $f(\omega)$  en lugar de  $f^*(\omega)$  al límite radial de  $f$  en  $\omega \in \mathbb{T}$ .

Antes de pasar al segundo resultado de Fatou, recordemos que dada  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$  y un punto  $\omega_0 \in \mathbb{T}$  la derivada de  $\mu$  en  $\omega_0$  se define como

$$D\mu(\omega_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \frac{\mu(\omega_0 \cdot I_\varepsilon)}{m(\omega_0 \cdot I_\varepsilon)},$$

donde  $I_\varepsilon = \{e^{it} : t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$ .

Asimismo, recordemos que (ver sección 11.19 de [62]):

- Si  $d\mu = f dm$  entonces  $D\mu(\omega) = f(\omega)$  para  $m$ -casi todo  $\omega \in \mathbb{T}$ ;
- Si  $\mu \perp m$  y  $\mu \geq 0$  entonces  $D\mu(\omega) = \infty$  para  $\mu$ -casi todo  $\omega \in \mathbb{T}$ .

**Teorema 1.16** (Fatou). Sea  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$  y  $\omega \in \mathbb{T}$  tal que la derivada  $D\mu(\omega)$  existe y es finita, entonces

$$\lim_{\angle z \rightarrow \omega} P[\mu](z) = D\mu(\omega).$$

Si la medida  $\mu$  sólo toma valores reales entonces, siempre que  $D\mu(\omega)$  exista (sea finita o infinita),

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} P[\mu](r\omega) = D\mu(\omega).$$

**Corolario 1.17.** Si  $f \in L^p(\mathbb{T})$  y  $1 < p \leq \infty$  entonces

$$\lim_{\angle z \rightarrow \omega} P[f](z) = f(\omega)$$

para casi todo  $\omega \in \mathbb{T}$ .

*Demostración.* Es consecuencia inmediata del Teorema de Fatou dado que  $D(fdm)(\omega) = f(\omega)$  para todo punto de Lebesgue  $\omega$  de  $f$ . ■

A partir del Teorema de Fatou obtenemos el siguiente resultado.

**Proposición 1.18.** Si  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ ,  $u = P[\mu]$  y  $\mu = \mu^a dm + \sigma$  es su descomposición de Lebesgue respecto a  $m$  entonces:

1.  $\lim_{r \rightarrow 1^-} u(r\omega) = \mu^a(\omega)$  para  $m$ -casi todo  $\omega \in \mathbb{T}$ ;
2. Si  $\mu \geq 0$ , entonces  $\lim_{r \rightarrow 1^-} u(r\omega) = \infty$  para  $\sigma$ -casi todo  $\omega \in \mathbb{T}$ ;
3. Si  $\mu_r = u_r dm$  entonces  $\mu_r \xrightarrow[r \rightarrow 1^-]{w^*} \mu$ .

*Demostración.* Los items (1) y (2) son consecuencia inmediata del Teorema de Fatou y del párrafo previo a dicho teorema. Para demostrar (3), primero lo testeamos en  $P_z$ , para  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int P_z(\omega) d\mu_r(\omega) = \lim_{r \rightarrow 1^-} u(rz) = u(z) = \frac{1}{2\pi} \int P_z(\omega) d\mu(\omega).$$

El resultado se sigue de la densidad de  $\{P_z\}_{z \in \mathbb{D}}$  en  $\mathcal{C}(\mathbb{T})$  y por estar las medidas  $\mu_r$  uniformemente acotadas. ■

El siguiente teorema fue demostrado por los hermanos Frigyes Riesz y Marcel Riesz en 1917. En [35] se encuentra la demostración original y una prueba moderna dada por Helson y Lowdenslager en 1958 utilizando técnicas de espacios de Hilbert.

**Teorema 1.19** (F. y M. Riesz). Sea  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$  tal que

$$\int_{\mathbb{T}} \omega^n d\mu(\omega) = 0,$$

para todo  $n \geq 1$ . Entonces  $\mu \ll m$ .

## 1.2. Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

Casos particulares de espacio de Hilbert con núcleo reproductor estarán presentes a lo largo de todo el trabajo. En la primera parte consideraremos el espacio de Hardy  $H^2$  y subespacios modelo. Mientras que en la segunda estaremos interesados en el espacio de Paley Wiener  $PW_\Omega$ , donde  $\Omega$  es un conjunto compacto.

**Definición 1.20.** Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert funcional sobre un espacio  $\mathcal{X}$ . Si para cada  $\lambda \in \mathcal{X}$  el funcional evaluación  $e_\lambda(f) = f(\lambda)$  es continuo, entonces existe  $k_\lambda \in \mathcal{H}$  tal que

$$f(\lambda) = \langle f, k_\lambda \rangle$$

para toda  $f \in \mathcal{H}$ . El vector  $k_\lambda$  se denomina **núcleo reproductor** en  $\lambda$ , su nombre se debe a que reproduce el valor de la función en  $\lambda$ . El vector  $k_\lambda \in \mathcal{H}$  es una función sobre  $\mathcal{X}$  y está dada por

$$k_\lambda(\eta) = \langle k_\lambda, k_\eta \rangle.$$

Escribimos

$$k(\eta, \lambda) := k_\lambda(\eta) = \langle k_\lambda, k_\eta \rangle$$

y la llamaremos **función núcleo** de  $\mathcal{H}$ .

**Observación 1.21.** Si  $\mathcal{H}$  es un espacio de funciones holomorfas entonces  $k(\cdot, \cdot)$  es holomorfa en la primera variable y holomorfa conjugada en la segunda. ▲

**Proposición 1.22.** Sean  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert funcional sobre  $\mathcal{X}$  y  $\{e_i\}_{i \in I}$  una base ortonormal de  $\mathcal{H}$ . Entonces

$$k(\eta, \lambda) = \sum_{i \in I} e_i(\eta) \overline{e_i(\lambda)}.$$

*Demostración.* Por la identidad de Parseval tenemos que

$$k(\eta, \lambda) = \langle k_\lambda, k_\eta \rangle = \sum_{i \in I} \langle k_\lambda, e_i \rangle \langle e_i, k_\eta \rangle = \sum_{i \in I} \overline{e_i(\lambda)} e_i(\eta).$$

■

Los espacios de Hilbert con núcleo reproductor están relacionados con las matrices positivas. Antes de enunciar el Teorema de Moore-Aronszajn que establece dicha relación recordemos la definición de matriz positiva.

**Definición 1.23.** Una *matriz positiva* sobre un dominio  $\mathcal{X}$  es una función  $k : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que para toda sucesión finita  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  de puntos distintos de  $\mathcal{X}$  la matriz  $(k(\lambda_i, \lambda_j))_{i,j}$  es semidefinida positiva. Es decir, si para cualquier vector  $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$  se cumple que

$$\sum_{i,j=1}^n k(\lambda_i, \lambda_j) \xi_j \bar{\xi}_i \geq 0.$$

**Proposición 1.24.** El núcleo reproductor  $k_\lambda$  de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  de funciones sobre un conjunto  $\mathcal{X}$  es una matriz definida positiva.

*Demostración.* Sean  $k_{\lambda_i}$  núcleos reproductores del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , con  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathcal{X}$ . Si  $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$  entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| \sum_{j=1}^n k_{\lambda_j} \xi_j \right\|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^n k_{\lambda_j} \xi_j, \sum_{i=1}^n k_{\lambda_i} \xi_i \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \langle k_{\lambda_j}, k_{\lambda_i} \rangle \xi_j \bar{\xi}_i = \sum_{i,j=1}^n k(\lambda_i, \lambda_j) \xi_j \bar{\xi}_i. \end{aligned}$$

■

En el capítulo 4 utilizaremos el siguiente resultado aplicado a  $\mathbb{D}$ .

**Teorema 1.25** (Moore-Aronszajn [5]). A toda matriz positiva  $k_z(w)$  sobre un dominio  $E$  le corresponde una y sólo una clase de funciones sobre  $E$  con una forma cuadrática unívocamente determinada, formando un espacio de Hilbert y admitiendo a  $k_z(w)$  como un núcleo reproductor. Esta clase de funciones está generada por todas las funciones de la forma  $\sum_{j=1}^n \xi_j k_{z_j}(w)$  con norma dada por

$$\left\| \sum_{j=1}^n \xi_j k_{z_j}(w) \right\|^2 = \sum_{i,j=1}^n k_{z_j}(z_i) \bar{\xi}_i \xi_j.$$

### 1.3. Los espacios de Hardy

En la presente sección daremos una breve introducción de los espacios de Hardy  $H^p(\mathbb{D})$  y  $H^p(\mathbb{T})$ . Estos espacios tienen propiedades interesantes en relación a los valores de borde y a representaciones tipo Cauchy en términos de medidas sobre  $\mathbb{T}$ . Los resultados sobre espacios de Hardy enunciados en esta sección se pueden encontrar en [8], [9], [53], [54], [62] y [64].

#### 1.3.1. Espacios de Hardy $H^p(\mathbb{D})$

Comencemos con la siguiente definición.

**Definición 1.26.** Sea  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  una función medible. Para  $p \in [1, \infty)$  y  $r \in (0, 1)$  definimos la media de orden  $p$  en el radio  $r$  como:

$$M_p(f, r) = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right]^{1/p},$$



y para  $p = \infty$  definimos

$$M_\infty(f, r) = \sup_{\theta \in [-\pi, \pi)} |f(re^{i\theta})|.$$

**Definición 1.27.** Para  $1 \leq p \leq \infty$ , el espacio de Hardy  $H^p(\mathbb{D})$  está definido como

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_p := \sup_{0 < r < 1} M_p(f, r) < \infty \right\}.$$

**Observación 1.28.** Si  $0 < p < q \leq \infty$  y  $f \in H^q(\mathbb{D})$  entonces

$$\begin{aligned} M_p(f, r) &= \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right]^{1/p} = \left[ \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right]^{q/p} \right]^{1/q} \\ &\leq \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^q d\theta \right]^{1/q} = M_q(f, r), \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se obtiene por la desigualdad de Jensen aplicada a la función  $g(t) = t^{q/p}$ , la cual es convexa por ser  $p < q$ . Además, si  $f \in H^\infty(\mathbb{D})$  entonces

$$M_q(f, r) = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^q d\theta \right]^{1/q} \leq \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M_\infty^q(f, r) d\theta \right]^{1/q} = M_\infty(f, r).$$

Por lo tanto,  $H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^q(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D})$ . ▲

**Teorema 1.29.** Si  $f$  es una función holomorfa sobre  $\mathbb{D}$  y  $p \geq 1$  entonces las funciones  $M_p(f, r)$  son monótonas crecientes en  $r \in [0, 1)$ .

**Corolario 1.30.** Si  $f$  es una función holomorfa sobre  $\mathbb{D}$  entonces

$$\|f\|_p = \lim_{r \rightarrow 1^-} M_p(f, r) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \|f_r\|_{L^p(\mathbb{T})},$$

donde  $f_r(z) = f(rz)$ .

**Teorema 1.31.** Si  $1 \leq p \leq \infty$ , el espacio  $H^p(\mathbb{D})$  es un espacio de Banach.

### 1.3.2. Espacios de Hardy $H^p(\mathbb{T})$

A lo largo de la presente sección introducimos los espacios de Hardy  $H^p(\mathbb{T})$  y recordaremos su relación con los espacios de Hardy del disco dados anteriormente. Comencemos con la definición de los espacios  $H^p(\mathbb{T})$ .

**Definición 1.32.** Dado  $1 \leq p \leq \infty$ , definimos el espacio  $H^p(\mathbb{T})$  como

$$H^p(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^p(\mathbb{T}) : \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt = 0 \text{ si } n < 0 \right\}.$$

Si  $F$  es una función integrable denotaremos  $\widehat{F}(n)$  a su  $n$ -ésimo coeficiente de Fourier, es decir,

$$\widehat{F}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{it}) e^{-int} dt.$$

El siguiente Teorema establece que si una función  $f$  en  $H^p(\mathbb{D})$  es la integral de Poisson de una función  $F$  en  $L^p(\mathbb{T})$ , para  $p \geq 1$ , entonces sus coeficiente de Fourier coinciden. Además, si los coeficientes de Fourier correspondientes a índices negativos son cero, la aplicación  $F \mapsto f$  es una isometría.

**Teorema 1.33.** Sea  $F \in L^p(\mathbb{T})$ , para  $1 \leq p \leq \infty$  tal que  $\widehat{F}(n) = 0$  para todo  $n < 0$ . Si  $f$  es la integral de Poisson de  $F$  entonces

1. La función  $f$  es holomorfa y para todo  $n \geq 0$  se cumple  $\widehat{f}(n) = \widehat{F}(n)$ .
2. La función  $f \in H^p(\mathbb{D})$  y  $\|f\|_p = \|F\|_{L^p(\mathbb{T})}$ .
3. Si  $1 \leq p < \infty$  entonces  $\lim_{r \rightarrow 1^-} \|f_r - F\|_{L^p(\mathbb{T})} = 0$ .
4. Si  $p = \infty$  entonces  $f_r$  tiende a  $F$  débil\* en  $L^\infty(\mathbb{T})$ .

La recíproca del Teorema 1.33 también es válida.

**Teorema 1.34.** Sea  $f \in H^p(\mathbb{D})$  para  $1 \leq p \leq \infty$ . Si

$$F(e^{i\theta}) := \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} f(z)$$

entonces  $F$  pertenece a  $L^p(\mathbb{T})$ ,  $\widehat{F}(n) = 0$  para todo entero negativo  $n$  y la integral de Poisson de  $F$  es  $f$ .

### 1.3.3. El espacio de Hardy $H^2(\mathbb{D})$

El espacio  $H^2(\mathbb{D})$  tiene particular importancia por ser un espacio de Hilbert. En la presente sección sólo desarrollaremos las propiedades del mismo necesarias a lo largo del trabajo. El primer resultado que veremos establece que se puede expresar la norma en términos de la serie de potencias de los coeficientes del desarrollo en serie de la función.

**Teorema 1.35.** Sea  $f$  una función holomorfa de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n.$$

Entonces  $M_2(f, r) \nearrow \left( \sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 \right)^{1/2}$ . Luego,  $f$  pertenece a  $H^2(\mathbb{D})$  si y sólo si

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 < \infty.$$

**Corolario 1.36.** La norma de  $H^2(\mathbb{D})$  se puede expresar como:

$$\|f\|_2 = \left( \sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 \right)^{1/2}.$$

**Observación 1.37.** Si  $b \in H^\infty(\mathbb{D})$  tenemos que  $\|b\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{D}} |b(z)|$ . Dado que si  $0 \leq g \leq f$  entonces  $\int g \leq \int f$ , se cumple que

$$M_2(b, r) = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} |b(re^{i\theta})|^2 d\theta \right)^{1/2} \leq \|b\|_\infty$$

para todo  $r \in (0, 1)$ , por lo tanto  $b \in H^2(\mathbb{D})$  y  $\|b\|_2 \leq \|b\|_\infty$ . ▲

A partir de esta definición se obtienen algunas propiedades de  $H^2(\mathbb{D})$ . El siguiente resultado muestra que las funciones en  $H^2(\mathbb{D})$  no pueden crecer demasiado rápido.

**Lema 1.38.** Sean  $f \in H^2(\mathbb{D})$  y  $n \geq 1$ . Si  $f$  tiene un cero de orden mayor o igual que  $n$  en el origen entonces, para cada  $z \in \mathbb{D}$

1.  $|f(z)| \leq \|f\|_2 \frac{|z|^n}{(1 - |z|^2)^{1/2}}$ .
2.  $|f'(z)| \leq \|f\|_2 \frac{\sqrt{2}(n+1)|z|^{n-1}}{(1 - |z|^2)^{3/2}}$ .

Como consecuencia de este lema, vemos que  $H^2(\mathbb{D})$  es un espacio con núcleo reproductor. Dado que los monomios forma una base ortonormal, se tiene que:

**Proposición 1.39.** En el espacio  $H^2(\mathbb{D})$  el núcleo reproductor es el denominado núcleo de Szego, el cual en  $\omega$  viene dado por la siguiente expresión

$$k_\omega(z) = \frac{1}{1 - z\bar{\omega}}.$$

*Demostración.* Consideremos la base ortonormal  $\{z^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $H^2(\mathbb{D})$ . Entonces, por la identidad de Parseval, tenemos que

$$k_\omega(\xi) = \langle k_\omega, k_\xi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle k_\omega, z^n \rangle \overline{\langle k_\xi, z^n \rangle} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{\omega}^n z^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} (z\bar{\omega})^n = \frac{1}{1 - z\bar{\omega}}.$$

■

## 1.4. Subespacios modelo

Antes de introducir los espacios modelo recordemos que una función  $\varphi \in H^\infty$  la cual satisface  $|\varphi(\omega)| = 1$ , en casi todo  $\omega$  de  $\mathbb{T}$ , se denomina **función interna** o simplemente **interna**. No es difícil probar que el módulo de una función interna, como un elemento de  $H^2(\mathbb{D})$ , está acotado por uno.

**Definición 1.40.** Dadas dos funciones internas  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ , decimos que  $\varphi_1$  **divide a**  $\varphi_2$  si  $\varphi_2/\varphi_1 \in H^2$ . Equivalentemente,  $\varphi_1$  divide a  $\varphi_2$  si  $\varphi_1 H^2$  contiene al subespacio  $\varphi_2 H^2$ .

La siguiente propiedad sobre funciones internas nos será de utilidad en el capítulo 4.

**Proposición 1.41.** Si  $\varphi$  y  $\psi$  son funciones internas entonces  $\varphi \circ \psi$  también lo es.

*Demostración.* Dado que la composición de funciones analíticas es analítica y  $\varphi$  es acotada, tenemos que  $\varphi \circ \psi \in H^\infty$ . Luego, por el Teorema de Fatou 1.12 existen subconjuntos de medida total  $F_j \subseteq \mathbb{T}$ , con  $j = 1, 2, 3$ , tales que  $\varphi \circ \psi$ ,  $\psi$  y  $\varphi$  tiene límite no tangencial en todo punto de  $F_1, F_2$  y  $F_3$ , respectivamente. Si definimos  $F_4 = \psi^{-1}(F_3^c)$  y consideramos el conjunto  $F = F_1^c \cup F_2^c \cup F_4$  entonces

$$m(F) = m(F_1^c \cup F_2^c \cup F_4) \leq m(F_1^c) + m(F_2^c) + m(F_4) = 0,$$

donde la última igualdad se obtiene por ser  $m(F_1^c) = m(F_2^c) = 0$  y  $m(F_4) = m(\psi^{-1}(F_3^c)) = 0$  por el resultado de Riesz 1.43. Luego, si  $E = F^c$  tenemos que  $m(E) = 1$ . Ahora, dado  $w \in E$  fijo, sea  $R$  la recta que une el origen y  $\omega$ . Si definimos  $L = \psi(R)$  entonces  $L$  es un arco en  $\mathbb{D}$  con punto final  $\psi^*(w) \in \mathbb{T}$ . Cuando  $\psi(z)$  se mueve a lo largo de  $L$  hacia  $\psi^*(w)$  tenemos que  $\varphi(\psi(z))$  se aproxima a algún valor  $A$ , es decir,

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \varphi(\psi(rw)) = A.$$

Luego, por el Teorema de Lindelöf 1.13,  $\varphi(\psi(z))$  converge radialmente a  $A$ :

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \varphi(r\psi^*(w)) = A.$$

Pero, dado que

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \varphi(r\psi^*(w)) = \varphi^*(\psi^*(w)) = (\varphi^* \circ \psi^*)(w),$$

concluimos que

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} (\varphi \circ \psi)(rw) = (\varphi^* \circ \psi^*)(w) \in \mathbb{T},$$

para todo  $w \in E$ . ■

Sea  $S$  el operador Shift sobre el espacio de Hardy  $H^2(\mathbb{D})$ , es decir, el operador definido por:

$$S(f)(z) = zf(z),$$

para  $f \in H^2(\mathbb{D})$ . Su definición en  $H^2(\mathbb{T})$  está dada a través del isomorfismo antes mencionado. Uno de los resultados más resonantes en la teoría de espacios de Hardy es el Teorema de Beurling, el cual da una descripción precisa de los subespacios invariantes de  $S$ .

**Teorema 1.42** (Beurling). Si  $\mathcal{L}$  es un subespacio de  $H^2$  no trivial e invariante para el Shift, entonces existe una función interna  $\varphi$  tal que  $\mathcal{L} = \varphi H^2$ . Recíprocamente, si  $\varphi$  es una función interna entonces  $\varphi H^2$  es un subespacio de  $H^2$  invariante por  $S$ .

Como corolario del Teorema de Beurling tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 1.43** (F. y M. Riesz). Si  $f \in H^2$  es una función no nula entonces

$$m(\{e^{it} \in \mathbb{T} : f(e^{it}) = 0\}) = 0.$$

*Demostración.* Sea  $E = \{e^{it} \in \mathbb{T} : f(e^{it}) = 0\}$  y consideremos el conjunto

$$\mathcal{L} = \{g \in H^2 : g(e^{it}) = 0 \ \forall e^{it} \in E\}.$$

El subespacio  $\mathcal{L}$  es cerrado e invariante para el Shift. Además,  $f \in \mathcal{L}$  por lo tanto es un subespacio no trivial. Luego, por el Teorema de Beurling 1.42 existe una función interna  $\varphi$  tal que  $\mathcal{L} = \varphi H^2$ . Dado que  $1 \in H^2$  tenemos que  $\varphi \in \mathcal{L}$ , lo cual implica que  $E \subseteq \{e^{it} \in \mathbb{T} : \varphi(e^{it}) = 0\}$ . Puesto que  $|\varphi(e^{it})| = 1$  en casi todo punto de  $\mathbb{T}$ , obtenemos el resultado. ■

El operador adjunto de  $S$  sobre el espacio  $H^2$  está definido como

$$(S^*f)(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}.$$

Por dualidad, es fácil ver que para todo subespacio  $\mathcal{L} \subset H^2$ ,

$$S\mathcal{L} \subset \mathcal{L} \Leftrightarrow S^*\mathcal{L}^\perp \subset \mathcal{L}^\perp.$$

Luego, por el Teorema de Beurling todo subespacio  $S^*$ -invariante de  $H^2$  es de la forma  $(\varphi H^2)^\perp$ , para alguna función interna  $\varphi$ .

**Definición 1.44.** Al subespacio  $(\varphi H^2)^\perp$  se lo denomina **espacio modelo** y lo denotaremos  $\mathcal{H}(\varphi)$ .

Como subespacio de  $H^2(\mathbb{D})$ , el espacio modelo también es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor. Usando que la proyección ortogonal  $P_\varphi$  del espacio de Hardy  $H^2$  al espacio modelo está definida por

$$P_\varphi f = f - \varphi P(\overline{\varphi}f), \quad (1.6)$$

donde  $P : L^2(\mathbb{T}, m) \rightarrow H^2$  es la proyección de Riesz

$$P(f)(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{g(\xi)}{1 - z\overline{\xi}} dm(\xi),$$

se puede obtener la expresión dada en la siguiente proposición para los núcleos.

**Proposición 1.45.** Los núcleos reproductores  $k_z^\varphi$  del espacio modelo  $\mathcal{H}(\varphi)$  son de la forma

$$k_z^\varphi(w) = \frac{1 - \overline{\varphi(z)}\varphi(w)}{1 - \overline{z}w}$$

con  $z, w \in \mathbb{D}$ .

El siguiente teorema nos proporciona un subespacio denso de  $\mathcal{H}(\varphi)$ , que será de gran utilidad en el trabajo, en particular en el capítulo 4. Para más detalle y prueba de este resultado se puede consultar la sección 8.5 de [8].

**Teorema 1.46.** Sea  $A$  el álgebra del disco, es decir, el espacio de las funciones continuas sobre  $\overline{\mathbb{D}}$  las cuales son analíticas en  $\mathbb{D}$ . Si  $\varphi$  es una función interna entonces

$$\mathcal{A}(\varphi) := A \cap \mathcal{H}(\varphi) \quad (1.7)$$

es un subconjunto denso de  $\mathcal{H}(\varphi)$ .

## 1.5. Medidas de Clark

En la presente sección recordaremos algunas propiedades de cierta familia de medidas positivas sobre  $\mathbb{T}$ . Dichas medidas están construidas a partir de una función holomorfa dada  $\varphi$  del disco unitario en sí mismo y deben su nombre a D.N. Clark, quien en [10] las introdujo en su estudio de medidas espectrales de la extensión unitaria de la restricción del operador Shift sobre subespacios modelo (ver [8], [63], [64]). La familia de medidas de Clark se utilizan fuertemente en los capítulos 3 y 4, siendo parte de los principales resultados de la primera parte de la tesis.

Sea  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  una función holomorfa, la cual no es constante. Para cada  $\alpha \in \mathbb{T}$  se tiene que

$$\operatorname{Re} \left( \frac{\alpha + \varphi(z)}{\alpha - \varphi(z)} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{(\alpha + \varphi(z))(\bar{\alpha} - \bar{\varphi}(z))}{|\alpha - \varphi(z)|^2} \right) = \frac{1 - |\varphi(z)|^2}{|\alpha - \varphi(z)|^2} \geq 0.$$

Luego, por el Teorema de Herglotz 1.10, existe una única medida positiva  $\mu_\alpha$  definida en los borelianos de  $\mathbb{T}$  tal que

$$\operatorname{Re} \left( \frac{\alpha + \varphi(z)}{\alpha - \varphi(z)} \right) = \int_{\mathbb{T}} P_z(\omega) d\mu_\alpha(\omega) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|\omega - z|^2} d\mu_\alpha(\omega). \quad (1.8)$$

**Observación 1.47.** La medida  $\mu_\alpha$  absorbe la constante  $\frac{1}{2\pi}$  de la integral de Poisson. ▲

**Definición 1.48.** Dada una función holomorfa  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  que no es constante, a las medidas  $\mu_\alpha$ , con  $\alpha \in \mathbb{T}$ , las denominaremos **medidas de Clark**.

Dado que

$$\operatorname{Re} \left( \frac{\alpha + \varphi(z)}{\alpha - \varphi(z)} \right) = \operatorname{Re} \left( \int_{\mathbb{T}} \frac{\omega + z}{\omega - z} d\mu_\alpha(\omega) \right),$$

sus respectivas partes imaginarias son armónicas conjugadas de la misma función y por lo tanto difieren en una constante. De este hecho se obtiene la fórmula de representación de Herglotz:

$$\frac{\alpha + \varphi(z)}{\alpha - \varphi(z)} = \int_{\mathbb{T}} \frac{\omega + z}{\omega - z} d\mu_\alpha(\omega) + i \operatorname{Im} \left( \frac{\alpha + \varphi(0)}{\alpha - \varphi(0)} \right). \quad (1.9)$$

En la siguiente proposición recolectamos algunas propiedades elementales de las medidas de Clark. La prueba se obtiene a partir de la definición.

**Proposición 1.49.**

1. Si  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$  es una medida positiva y  $\alpha \in \mathbb{T}$ , entonces  $\mu = \mu_\alpha$  para alguna función holomorfa  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ .
2. Si  $\mu_\alpha = \sigma_\alpha + \mu_\alpha^a dm$  es la descomposición de Lebesgue de la medida de Clark  $\mu_\alpha$ , entonces

$$\mu_\alpha^a(\omega) = \begin{cases} \frac{1 - |\varphi(\omega)|^2}{|\alpha - \varphi(\omega)|^2} & \text{si } |\varphi(\omega)| < 1 \\ 0 & \text{si } |\varphi(\omega)| = 1 \end{cases}.$$

3.  $\|\mu_\alpha\| = \frac{1 - |\varphi(0)|^2}{|\alpha - \varphi(0)|^2}$ .

**Observación 1.50.** Dado que los soportes de las funciones  $\mu_\alpha^a$  y  $(1 - |\varphi|)$  difieren en un conjunto de medida de Lebesgue cero, para cualesquiera  $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$ , las medidas  $\mu_\alpha^a dm$  y  $\mu_\beta^a dm$  son mutuamente absolutamente continuas. Además, si  $\varphi$  es una función interna, cada medida  $\mu_\alpha$  es singular con respecto a la medida de Lebesgue. Más aún,

$$\mu_\alpha(\mathbb{T} \setminus \{\omega \in \mathbb{T} : \lim_{z \rightarrow \omega} \varphi(z) = \alpha\}) = 0.$$

▲

El ítem tres de la proposición anterior implica directamente el siguiente corolario:

**Corolario 1.51.** Las medidas  $\mu_\alpha$  están uniformemente acotadas. Más aún, si  $\varphi(0) = 0$  entonces son todas medidas de probabilidad.

**Notación 1.52.** Dada una medida  $\mu$  denotaremos  $\varphi_\mu$  a la función interna cuya medida de Clark para  $\alpha = 1$  es  $\mu$ . Por otro lado, dada una función interna  $\varphi$  notaremos  $\mu_\alpha^\varphi$ , con  $\alpha \in \mathbb{T}$ , a las medidas de Clark asociadas a  $\varphi$ . Sin embargo, obviaremos los subíndices y supraíndices cuando el contexto no genere ambigüedad.

El siguiente resultado sobre las medidas de Clark asociadas a la composición de dos funciones internas será utilizado en el capítulo 4.

**Proposición 1.53.** Sea  $\vartheta = \psi \circ \varphi$  donde  $\varphi$  y  $\psi$  son funciones internas. La familia de medidas de Clark  $\{\mu_\alpha^\vartheta\}_{\alpha \in \mathbb{T}}$  está dada por

$$\mu_\alpha^\vartheta = \int_{\mathbb{T}} d\mu_\beta^\varphi d\mu_\alpha^\psi(\beta).$$

*Demostración.* Sea  $\vartheta = \psi \circ \varphi$ , donde  $\psi$  y  $\varphi$  son funciones internas. Si  $\mu_\alpha^\vartheta, \mu_\alpha^\psi, \mu_\alpha^\varphi$ , con  $\alpha \in \mathbb{T}$  denotan las medidas de Clark de  $\vartheta, \psi$  y  $\varphi$ , respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|\omega - z|^2} d\mu_\alpha^\vartheta(\omega) &= \frac{1 - |\vartheta(z)|^2}{|\alpha - \vartheta(z)|^2} = \frac{1 - |\psi \circ \varphi(z)|^2}{|\alpha - \psi \circ \varphi(z)|^2} \\ &= \frac{1 - |\psi(\varphi(z))|^2}{|\alpha - \psi(\varphi(z))|^2} = \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |\varphi(z)|^2}{|\beta - \varphi(z)|^2} d\mu_\alpha^\psi(\beta) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|\omega - z|^2} d\mu_\beta^\varphi(\omega) d\mu_\alpha^\psi(\beta) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{T}} P_z(\omega) d\mu_\alpha^\vartheta(\omega) = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} P_z(\omega) d\mu_\beta^\varphi(\omega) d\mu_\alpha^\psi(\beta).$$

Dado que la familia  $\{P_z\}_{z \in \mathbb{D}}$  es densa en  $C(\mathbb{T})$  se obtiene el resultado. ■

Como se mencionó al comienzo de la sección, las medidas con las cuales estamos trabajando fueron introducidas por Clark como medidas espectrales. Clark probó que si  $\mu_\alpha$  es una medida de Clark asociada a una función holomorfa  $\varphi$  entonces el operador  $V_\alpha$  definido sobre  $L^2(\mathbb{T}, \mu_\alpha)$  como

$$(V_\alpha g)(z) := (1 - \bar{\alpha}\varphi(z)) \int_{\mathbb{T}} \frac{g(\xi)}{1 - \bar{\xi}z} d\mu_\alpha(\xi) \quad (1.10)$$

es un isomorfismo isométrico de  $L^2(\mathbb{T}, \mu_\alpha)$  en el espacio modelo  $\mathcal{H}(\varphi)$ . El operador inverso de  $V_\alpha$  fue caracterizado por Poltoratskii en [58]. Más precisamente, demostró el siguiente teorema, el cual es muy importante para los resultados desarrollados en los capítulos 3 y 4.

**Teorema 1.54** (Poltoratskii). Sean  $\alpha \in \mathbb{T}$  y  $f \in \mathcal{H}(\varphi)$ . Entonces, para  $\mu_\alpha$ -casi todo  $\omega \in \mathbb{T}$  existe el límite no tangencial

$$\lim_{\angle z \rightarrow \omega} f(z).$$

Más aún, si  $f^*$  denota el elemento de  $L^2(\mathbb{T}, \mu_\alpha)$  definido por este límite entonces

$$\|f\|_{\mathcal{H}(\varphi)} = \|f\|_{H^2} = \|f^*\|_{L^2(\mathbb{T}, \mu_\alpha)},$$

y  $V_\alpha(f^*) = f$ .

## 1.6. Marcos

En la presente sección introduciremos definiciones y resultados en espacios de Hilbert abstractos, los cuales serán utilizados a lo largo del trabajo en espacios de Hilbert específicos. Para más detalle consultar [7]. La noción de marco se utilizará en la primera parte del trabajo al estudiar sucesiones efectivas, mientras que, junto con sucesiones y bases de Riesz, reaparecerá en la segunda parte al analizar la existencia de conjuntos de muestreo e interpolación universales.

**Definición 1.55.** Una sucesión de vectores  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en un espacio de Hilbert separable  $\mathcal{H}$  se dice **sucesión de Bessel** en  $\mathcal{H}$  si existe  $B > 0$  tal que para todo  $f \in \mathcal{H}$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle f, f_n \rangle|^2 \leq B \|f\|^2.$$

**Ejemplo 1.56.** Todo sistema ortonormal es una sucesión de Bessel. ▲

Dada una sucesión de Bessel, se puede definir un operador  $T^* : \mathcal{H} \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$  del siguiente modo

$$T^*(f) = \{\langle f, f_n \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Notemos que resulta un operador acotado tal que  $\|T^*\| \leq \sqrt{B}$ . Este operador se denomina **operador de análisis**. Su adjunto  $T : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{H}$  definido por

$$T(\{c_n\}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n f_n$$

se denomina **operador de síntesis**. Notemos que como  $T$  es acotado, si los coeficientes  $c_n$  cambian poco (en el sentido  $\ell^2$ ) entonces la imagen por  $T$  también cambia poco.

**Definición 1.57.** Una sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\mathcal{H}$  se dice **base de Riesz** si es de la forma  $f_n = Ab_n$ , donde  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una base ortonormal de  $\mathcal{H}$  y  $A$  es un operador acotado inversible de  $\mathcal{H}$  en sí mismo.

**Definición 1.58.** Una sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\mathcal{H}$  se dice **sucesión de Riesz** si existen constantes positivas  $A$  y  $B$  tales que para toda sucesión  $\{c_n\} \in \ell^2(I)$  se cumple que

$$A \sum_{n \in I} |c_n|^2 \leq \left\| \sum_{n \in I} c_n f_n \right\|^2 \leq B \sum_{n \in I} |c_n|^2.$$

Una sucesión de Riesz, la cual es completa en  $\mathcal{H}$ , es una base de Riesz para  $\mathcal{H}$ .

A continuación vamos a introducir un concepto que generaliza de algún modo el de sistema de generadores.



**Definición 1.59.** Una sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  se dice un **marco (o frame)** si existen constantes  $A, B > 0$  tales que para toda  $f \in \mathcal{H}$

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle f, f_n \rangle|^2 \leq B\|f\|^2. \quad (1.11)$$

Las constantes  $A, B$  óptimas se denominan *cotas del marco*, el cual se dice de **Parseval** si dichas cotas óptimas son ambas iguales a 1. En particular se cumple que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle f, f_n \rangle|^2 = \|f\|^2$$

para todo  $f \in \mathcal{H}$ .

**Comentario 1.60.** Por definición, todo marco es una sucesión de Bessel. La característica distintiva de los marcos es que el operador de síntesis  $T$  es suryectivo. En efecto, si existiese  $f \in R(T)^\perp$  de norma uno, entonces colocándolo en la expresión del medio de (1.11) nos daría cero. Esto contradice la existencia de  $A > 0$  tal que valga la primera desigualdad en dicha inecuación. Como consecuencia de la suryectividad de  $T$  se tiene que el operador  $S = TT^*$ , denominado **operador de marco o frame**, es inversible. Notar que

$$Sf = \sum_n \langle f, f_n \rangle f_n.$$

Por otra parte, no es difícil ver que las cotas óptimas, que denominamos cotas del marco son:

$$A = \|S^{-1}\|^{-1} = \min\{\lambda : \lambda \in \sigma(S)\} \quad \text{y} \quad B = \|T\|^2 = \|S\| = \max\{\lambda : \lambda \in \sigma(S)\}.$$

▲

**Definición 1.61.** Sea  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un marco de  $\mathcal{H}$ . Una sucesión  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  se denomina **marco o frame dual** de  $\{f_n\}$  si es un marco y cumple que para toda  $f \in \mathcal{H}$

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, f_n \rangle g_n = \sum_n \langle f, g_n \rangle f_n.$$

Si  $T_f$  y  $T_g$  son los operadores de síntesis de  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  respectivamente, entonces  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un marco dual de  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  si y sólo si  $T_g T_f^* = T_f T_g^* = I$ .

**Comentario 1.62.** En la definición podemos pedir solamente que  $\{g_n\}$  sea una sucesión de Bessel. Su condición de marco sale como consecuencia de la definición. ▲

En el siguiente resultado se basa gran parte del trabajo desarrollado. Dado un subespacio cerrado  $\mathcal{H}$  de un espacio de Hilbert  $\mathcal{K}$ , denotamos por  $P_{\mathcal{H}}$  al proyector ortogonal sobre  $\mathcal{H}$ .

**Teorema 1.63.** Sea  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\mathcal{H}$ . Son equivalentes:

- i.)  $\{f_n\}$  es un marco.
- ii.) Existe un espacio de Hilbert  $\mathcal{K}$ , tal que  $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$  (como subespacio cerrado) y una base de Riesz  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $f_n = P_{\mathcal{H}} b_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Más aún, la base de Riesz se puede elegir de modo que posea las mismas cotas óptimas que el marco original  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

*Demostración.* Veamos que  $i \implies ii$ ). Sea  $T$  el operador de síntesis de  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus N(T)$ , y definamos el operador

$$V : \ell^2(\mathbb{N}) = N(T) \oplus N(T)^\perp \rightarrow \mathcal{K} \approx \mathcal{H} \oplus N(T)$$

por medio de

$$V(\{c_n\}) = TP_{N(T)^\perp} \oplus AP_{N(T)} \{c_n\},$$

donde  $A$  es la cota inferior del marco  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Como  $T(N(T)^\perp) = \mathcal{H}$ , se tiene que  $V \in L(\ell^2, \mathcal{K})$  es un isomorfismo continuo. Luego, si  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es la base canónica de  $\ell^2(\mathbb{N})$ , entonces  $b_n = Ve_n$  es una base de Riesz de  $\mathcal{K}$ . Además, por construcción claramente satisface que

$$P_{\mathcal{H}}b_n = P_{\mathcal{H}}Ve_n = Te_n = f_n.$$

Finalmente, no es difícil ver que

$$V^*V = \begin{pmatrix} T^*T & 0 \\ 0 & AI \end{pmatrix} \begin{matrix} N(T)^\perp \\ N(T) \end{matrix}$$

de donde sale que  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  posee las mismas cotas que el marco original  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . ■

**Corolario 1.64.** Sea  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un marco de Parseval. Entonces existe un espacio de Hilbert  $\mathcal{K}$ , tal que  $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$  (como subespacio cerrado) y una base ortonormal  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{K}$  tal que  $f_n = P_{\mathcal{H}}b_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

## Capítulo 2

# El algoritmo de Kaczmarz

El algoritmo de Kaczmarz originalmente se utilizó para resolver sistemas de ecuaciones lineales  $Ax = b$ . Kaczmarz estableció que para matrices cuadradas no singulares, dado un vector fijo  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , el algoritmo definido de la siguiente manera:

$$x^{k+1} = x^k + \frac{b_i - \langle x^k, a^i \rangle}{\|a^i\|^2} a^i,$$

donde  $a^i$  son las columnas de la matriz adjunta de  $A$  y  $k \equiv i \pmod{m} + 1$ , converge a la solución del sistema. Más tarde se probó que el resultado sigue siendo válido cuando la matriz  $A$  pertenece a  $\mathbb{C}^{m \times n}$ . Más aún, este problema se puede generalizar a cualquier espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  como el problema de hallar una solución  $x$  (si existe) en la intersección de los  $m$  hiperplanos  $M_i = \{x \in \mathcal{H} : \langle x, a^i \rangle = b_i\}$  para todo  $i \in I$ , donde  $a^i$  denota un vector de  $\mathcal{H}$  e  $I$  el conjunto de índices. Notar que si  $z \notin M_i$  entonces las proyecciones sobre  $M_i$  están dadas por

$$P_{M_i}(z) = z + \frac{b_i - \langle z, a^i \rangle}{\|a^i\|^2} a^i.$$

Dado  $x_0$  arbitrario, el algoritmo de Kaczmarz se puede escribir como

$$x^{k+1} = P_{H_m} \cdots P_{H_1} x_0.$$

El paper original es de 1937 en alemán y fue traducido a inglés recién en 1993. Se encontraron numerosas aplicaciones de dicho algoritmo, entre ellas se destacan procesamiento de imágenes y tomografía computada.

Definiremos el método de Kaczmarz y probaremos su convergencia en la sección 2.2. Para la prueba vamos a utilizar el Teorema de Halperin (1962), el cual es una generalización de un resultado de von Neumann (1933), quien propuso el método de proyecciones alternadas en la formulación más simple: encontrar la proyección sobre la intersección de dos subespacios de un punto dado en un espacio de Hilbert. Luego, daremos un resultado sobre la velocidad de convergencia del algoritmo establecido por de Smith, Solmon y Wagner [65].

### 2.1. Producto de proyecciones alternadas

En la presente sección enunciaremos el método de proyecciones alternadas dado por von Neumann y probaremos el caso más general, es decir, para más de dos proyecciones.

**Notación 2.1.** Sean  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert y  $M$  un subespacio cerrado de  $\mathcal{H}$ . Denotaremos  $P_M$  a la proyección ortogonal de  $\mathcal{H}$  sobre  $M$ . En particular,  $P_M$  satisface las siguientes condiciones:

- $P_M$  es lineal
- $P_M^2 = P_M = P_M^*$
- $P_M$  es la mejor aproximación de  $x$  a  $M$ , es decir,

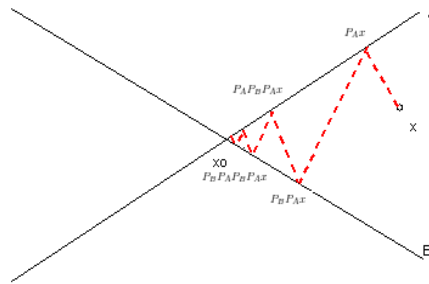
$$\|x - P_M x\| = \text{dist}(x, M).$$

El método de proyecciones alternadas fue propuesto originalmente por von Neumann en 1933, quien probó el siguiente resultado:

**Teorema 2.2.** Sean  $A$  y  $B$  dos subespacios cerrados de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P_B P_A)^n x = P_{A \cap B} x.$$

Geoméricamente el método de proyecciones alternadas dice que, dados dos subespacios cerrados  $A$  y  $B$  de  $\mathcal{H}$ , la mejor aproximación de un vector  $x \in \mathcal{H}$  en  $A \cap B$  se obtiene proyectando primero  $x$  sobre  $A$ , luego el vector resultante sobre  $B$  y se continúa proyectando el resultado de manera alternada sobre  $A$  y sobre  $B$ . La sucesión generada de esta manera converge a  $P_{A \cap B}$ .



El método de proyecciones alternada tiene utilidad práctica cuando es menos costoso calcular las proyecciones sobre  $A$  y sobre  $B$  individualmente que calcular la proyección sobre  $A \cap B$  ó dicha proyección no se conoce.

En 1962 Halperin extendió el resultado de von Neumann a más de dos subespacios. Vamos a utilizar la prueba del Teorema de Halperin dada por A. Netyanun y D. Solmon en [52], para lo cual necesitamos el siguiente lema:

**Lema 2.3** (Kakutani). Sean  $P_1, \dots, P_r$  proyecciones ortogonales sobre los subespacios cerrados  $M_1, \dots, M_r$  de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , respectivamente, y  $T = P_r \cdots P_1$ . Entonces, para cada  $x \in \mathcal{H}$ ,

$$\|T^k x - T^{k+1} x\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

*Demostración.* Sea  $x \in \mathcal{H}$ , dado que

$$\|T^{k+1} x\| \leq \|T^k x\|$$

para todo  $k \geq 1$ , la sucesión  $\{\|T^k x\|\}_{k \geq 0}$  es decreciente y acotada inferiormente, por lo tanto es convergente. Luego, la sucesión  $\{\|T^k x\|^2\}_{k \geq 0}$  también es decreciente e inferiormente acotada, por lo tanto es una sucesión de Cauchy, con lo cual

$$\|T^k x\|^2 - \|T^{k+1} x\|^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Por otra parte, si  $P$  es una proyección ortogonal, por el Teorema de Pitágoras tenemos que

$$\|x - Px\|^2 = \|x\|^2 - \|Px\|^2.$$

Ahora, si definimos de forma recursiva los operadores  $Q_j = P_j Q_{j-1}$ , para  $j = 1, \dots, r$ , con  $Q_0 = I$  tenemos que  $Q_r = T$ . Entonces

$$\begin{aligned} \|T^k x - T^{k+1} x\|^2 &= \left\| \sum_{j=0}^{r-1} (Q_j T^k x - Q_{j+1} T^k x) \right\|^2 \leq \left[ \sum_{j=0}^{r-1} \|Q_j T^k x - Q_{j+1} T^k x\| \right]^2 \\ &\leq r \sum_{j=0}^{r-1} \|Q_j T^k x - Q_{j+1} T^k x\|^2 = r \sum_{j=0}^{r-1} (\|Q_j T^k x\|^2 - \|Q_{j+1} T^k x\|^2) \\ &= r (\|Q_0 T^k x\|^2 - \|Q_r T^k x\|^2) = r (\|T^k x\|^2 - \|T^{k+1} x\|^2) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad se obtiene de  $2|a||b| \leq a^2 + b^2$ . ■

**Teorema 2.4** (Halperin). Sea  $P_j$ , para  $1 \leq j \leq r$ , la proyección ortogonal sobre el subespacio cerrado  $M_j$  de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  y  $P_M$  la proyección ortogonal sobre  $M = \bigcap_{j=1}^r M_j$ . Si  $T = P_r \cdots P_1$

entonces  $T^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{SOT} P_M$ , es decir,

$$\|T^k x - P_M x\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

para cada  $x \in \mathcal{H}$ .

*Demostración.* Si escribimos  $T^k - T^{k+1} = T^k(I - T)$  entonces para  $y \in \overline{\mathcal{R}(I - T)}$ , por continuidad de  $T$  y el Lema de Kakutani 2.3,  $T^k y$  converge a cero. Por otra parte, como  $T^* = P_1 \cdots P_r$ , tenemos que  $\ker(I - T^*) = M_1 \cap \dots \cap M_r = M$ .

Ahora, dado que

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(I - T)} \oplus \mathcal{R}(I - T)^\perp = \overline{\mathcal{R}(I - T)} \oplus \ker(I - T^*),$$

si  $x \in \mathcal{H}$  lo podemos descomponer como  $x = P_{\overline{\mathcal{R}(I - T)}} x + P_M x$ , donde  $M = M_1 \cap \dots \cap M_r$ . Por lo tanto,

$$T^k x = T^k P_{\overline{\mathcal{R}(I - T)}} x + T^k P_M x = T^k P_{\overline{\mathcal{R}(I - T)}} x + P_M x \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\|\cdot\|} P_M x.$$

**Observación 2.5.** En las condiciones del Teorema de Halperin 2.4, dado  $\varepsilon > 0$  y  $Q_k = \prod_{i=1}^k P_i$ , si  $\|Q_k - P_M\| < \varepsilon$  entonces  $\|Q_{k+1} - P_M\| < \varepsilon$ . En efecto, como  $P_k P_M = P_M$  para todo  $k = 1, \dots, r$  tenemos que

$$\|Q_{k+1} - P_M\| = \|P_{k+1}(Q_k - P_M)\| \leq \|Q_k - P_M\| < \varepsilon.$$

## 2.2. Algoritmo de Kaczmarz

En esta sección comenzaremos dando la definición del algoritmo de Kaczmarz y probaremos que converge a una solución del sistema aplicando el Teorema de Halperin 2.4. Luego veremos una estimación de la velocidad de convergencia, la cual depende de los ángulos entre ciertos subespacios.

### 2.2.1. Definición y convergencia

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b \quad (2.1)$$

donde  $A$  es una matriz de  $\mathbb{C}^{m \times n}$ , con  $m \geq n$ ,  $x$  y  $b$  son vectores columna en  $\mathbb{C}^n$  y  $\mathbb{C}^m$ , respectivamente. El producto interno y la norma en  $\mathbb{C}^n$  están definidos como

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k} \quad \text{y} \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

respectivamente. Utilizaremos supraíndices para denotar vectores y subíndice para denotar las entradas de los mismos, por lo tanto  $a^{i*}$  notará la  $i$ -ésima fila de  $A$ . La solución del problema en (2.1) se puede pensar como hallar el vector  $x \in \mathbb{C}^n$  que verifique

$$\langle x, a_k \rangle = b_k, \quad \text{para todo } k = 1, \dots, m.$$

En 1937 Kaczmarz propuso el siguiente algoritmo para resolver sistemas de matrices: dado  $x^0 \in \mathbb{C}^n$  definimos la sucesión de vectores

$$x^{k+1} = x^k + \frac{b_i - \langle x^k, a^i \rangle}{\|a^i\|^2} a^i, \quad (2.2)$$

donde  $k \equiv i \pmod{m} + 1$ . Originalmente el algoritmo fue propuesto para resolver sistemas de matrices cuadradas no singulares con entradas reales.

Para cada  $k = 1, \dots, m$  el algoritmo anterior representa la proyección ortogonal del punto  $x^k$  sobre el hiperplano

$$M_k = \left\{ x \in \mathbb{C}^n : \langle x, a^k \rangle = b_k \right\}.$$

El punto  $x^{m+1}$  se obtiene por proyectar nuevamente sobre el subespacio  $M_1$ , el punto  $x^{m+2}$  por proyectar sobre el subespacio  $M_2$ , y así sucesivamente.

El siguiente Teorema prueba que dicho algoritmo converge a la solución del sistema independientemente del punto  $x^0$  inicial.

**Teorema 2.6.** Sea  $Ax = b$  un sistema de ecuaciones lineales, donde  $A$  es una matriz de  $\mathbb{C}^{m \times n}$ , con  $m \geq n$ ,  $x$  y  $b$  son vectores columna en  $\mathbb{C}^n$  y  $\mathbb{C}^m$ , respectivamente. Entonces el algoritmo de Kaczmarz (2.2) converge a una solución del sistema.

*Demostración.* Dada la matriz  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , denotamos  $a^i$ , para  $i = 1, \dots, m$ , las columnas de la matriz adjunta de  $A$ ,  $P_i$  a la proyección ortogonal sobre  $\langle a^i \rangle^\perp$ , para  $i = 1, \dots, m$ , y  $M = \bigcap_{i=1}^m \langle a^i \rangle^\perp$ . Sea  $x^0 \in \mathbb{C}^n$  fijo. Si  $b = 0$ , dado que  $k \equiv i \pmod{m} + 1$ , el algoritmo de Kaczmarz (2.2) toma la forma

$$x^{k+1} = x^k - \frac{\langle x^k, a^i \rangle}{\|a^i\|^2} a^i = P_i x^k = P_i P_{i-1} \dots P_1 (P_m \dots P_1)^s x^0$$

donde  $k + 1 = sm + i$ . Si  $\tilde{x}$  es una solución del sistema entonces satisface que

$$\langle \tilde{x}, a^i \rangle = 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, m,$$

es decir  $\tilde{x} \in M$ .

Por el Teorema de Halperin 2.4, sabemos que  $(P_m \dots P_1)^s x_0$  converge a  $P_M x_0$ . Luego, por la observación 2.5 e inducción tenemos que

$$x^{k+1} = P_i P_{i-1} \dots P_1 (P_m \dots P_1)^s x^0 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} P_M x_0.$$

Ahora, sea  $b \neq 0$  y  $\tilde{x}$  una solución particular del sistema  $Ax = b$ . Entonces

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \frac{b_i - \langle x^k, a^i \rangle}{\|a^i\|^2} a^i \\ &= \tilde{x} + (x^k - \tilde{x}) + \frac{\langle \tilde{x} - x^k, a^i \rangle}{\|a^i\|^2} a^i \\ &= \tilde{x} + P_i(x^k - \tilde{x}) = \tilde{x} + P_i P_{i-1} \dots P_1 (P_m \dots P_1)^s (x^0 - \tilde{x}), \end{aligned}$$

donde  $k + 1 = sm + i$ . Entonces  $x^{k+1}$  tiende a  $\tilde{z} = \tilde{x} + z_0$ , donde  $z_0 \in P_M$ , es decir,  $z_0$  es solución de  $Ax = 0$ . Luego,  $\tilde{z}$  es una solución del sistema  $Ax = b$ . ■

### 2.2.2. Velocidad de convergencia del algoritmo

Para saber si el método de proyecciones alternadas es eficiente es necesario estimar la velocidad de convergencia, ya que si para obtener una buena aproximación se necesitan demasiadas proyecciones el método deja de ser una opción viable numéricamente.

Smith, Solmon y Wagner [65] hallaron una cota para la velocidad de convergencia del algoritmo la cual depende de los ángulos entre los subespacios.

**Definición 2.7.** Sean  $M$  y  $N$  subespacios cerrados de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Denotaremos

- $M_1 = \{x \in M : \|x\| = 1\}$
- $M \ominus N = M \cap (M \cap N)^\perp$

Se define el ángulo entre  $M$  y  $N$  al número  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  cuyo coseno está dado por

$$c[M, N] = \sup \{ |\langle x, y \rangle| : x \in (M \ominus N)_1, y \in (N \ominus M)_1 \}.$$

Si  $M \subseteq N$  ó  $N \subseteq M$  escribimos  $c[M, N] = 0$ , como si fueran ortogonales.

El seno del ángulo entre  $M$  y  $N$  es

$$s[M, N] = (1 - c[M, N])^{1/2}.$$

**Teorema 2.8.** Sea  $P_j$  una proyección ortogonal sobre  $M_j$ , para  $j = 1, \dots, r$ , donde  $M_j$  es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Si  $M = \bigcap_{i=1}^r M_i$ ,  $P_M$  es la proyección ortogonal sobre  $M$  y  $\theta_j$  es el ángulo entre  $M_j$  y  $\bigcap_{i=j+1}^r M_i$ , entonces para todo  $x \in \mathcal{H}$  y  $n \geq 1$ ,

$$\left\| (P_r \cdots P_1)^k x - P_M x \right\| \leq c^k \|x - P_M x\|,$$

$$\text{donde } c = \left( 1 - \prod_{j=1}^{r-1} \sin^2 \theta_j \right)^{1/2}.$$

*Demostración.* Sea  $P = P_r \cdots P_1$ . Dado que  $P_M x \in M$  y  $P$  actúa como la identidad sobre  $M$ , podemos escribir la desigualdad que queremos probar de la siguiente manera:

$$\left\| P^k (x - P_M x) \right\|^2 \leq \left( 1 - \prod_{j=1}^{r-1} \sin^2 \theta_j \right)^k \|x - P_M x\|^2.$$

Si definimos  $v = x - P_M x$ , dado que  $M^\perp$  es invariante por  $P$  (en efecto, si  $y \in M^\perp$  y  $x \in M$  entonces  $\langle Py, x \rangle = \langle y, P^* x \rangle = \langle y, P_1 \cdots P_M x \rangle = \langle y, x \rangle = 0$ ), basta probar que

$$\|Pv\|^2 \leq \left( 1 - \prod_{j=1}^{r-1} \sin^2 \theta_j \right) \|v\|^2, \quad \text{para } v \in M^\perp.$$

La prueba es por inducción sobre  $r$ . Si  $r = 1$  entonces ambos lados de la desigualdad son iguales cero. Ahora supongamos que dicha desigualdad vale para el producto de  $r - 1$  proyecciones. Sean  $\widetilde{M} = M_r \cap \dots \cap M_2$  y  $\widetilde{P} = P_r \cdots P_2$ . Todo vector  $v \in M^\perp$  se puede escribir como  $v = w + v_1$  donde  $w \in M_1$  y  $v_1 \in M_1^\perp$  entonces

$$Pv = Pw + Pv_1 = Pw = \widetilde{P}w.$$

Ahora, podemos descomponer a  $w$  como  $w = w_1 + w_2$  donde  $w_1 \in \widetilde{M}$  y  $w_2 \in \widetilde{M}^\perp$  entonces

$$\widetilde{P}w = \widetilde{P}w_1 + \widetilde{P}w_2 = w_1 + \widetilde{P}w_2.$$

Como los vectores de la suma son ortogonales, por el Teorema de Pitágoras, tenemos que

$$\left\| \widetilde{P}w \right\|^2 = \|w_1\|^2 + \left\| \widetilde{P}w_2 \right\|^2.$$

Por la hipótesis inductiva se satisface la siguiente desigualdad:

$$\left\| \widetilde{P}w_2 \right\|^2 \leq \left( 1 - \prod_{j=2}^{r-1} \sin^2 \theta_j \right) \|w_2\|^2.$$



Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{P}w\|^2 &\leq \|w_1\|^2 + \left(1 - \prod_{j=2}^{r-1} \sin^2 \theta_j\right) \|w_2\|^2 \\
&= \|w_1\|^2 + \left(1 - \prod_{j=2}^{r-1} \sin^2 \theta_j\right) (\|w\|^2 - \|w_1\|^2) \\
&= \|w_1\|^2 \prod_{j=2}^{r-1} \sin^2 \theta_j + \left(1 - \prod_{j=2}^{r-1} \sin^2 \theta_j\right) \|w\|^2.
\end{aligned}$$

Como el ángulo entre  $\tilde{M}$  y  $M_1$  es por lo menos  $\theta_1$ , tenemos que

$$\|w_1\|^2 = \langle w, w_1 \rangle = \cos \theta_1 \|w\| \|w_1\|$$

entonces, por ser  $\|w_1\| \neq 0$ ,

$$\|w_1\| = \cos \theta_1 \|w\|.$$

Luego, utilizando las dos últimas desigualdades tenemos que

$$\begin{aligned}
\|Pv\|^2 &= \|\tilde{P}w\|^2 \leq \|w_1\|^2 \prod_{j=2}^{r-1} \sin^2 \theta_j + \left(1 - \prod_{j=2}^{r-1} \sin^2 \theta_j\right) \|w\|^2 \\
&\leq \cos^2 \theta_1 \|w\|^2 \prod_{j=2}^{r-1} \sin^2 \theta_j + \left(1 - \prod_{j=2}^{r-1} \sin^2 \theta_j\right) \|w\|^2 \\
&\leq (1 - \sin^2 \theta_1) \|w\|^2 \prod_{j=2}^{r-1} \sin^2 \theta_j + \left(1 - \prod_{j=2}^{r-1} \sin^2 \theta_j\right) \|w\|^2 \\
&= \|w\|^2 - \prod_{j=1}^{r-1} \sin^2 \theta_j \|w\|^2 \\
&\leq \left(1 - \prod_{j=1}^{r-1} \sin^2 \theta_j\right) \|v\|^2,
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se obtiene por ser  $\|w\| \leq \|v\|$ . ■

Ahora, sea  $\tilde{x}$  una solución del sistema  $Ax = b$  y  $x^0$  una condición inicial. Como vimos en la demostración del Teorema 2.6, los vectores del algoritmo de Kaczmarz están dados por

$$x^{k+1} = \tilde{x} + P_i \dots P_1 (P_m \dots P_1)^s (x^0 - \tilde{x}),$$

donde  $k + 1 = sm + i$ . Luego, si  $P$  es la proyección sobre  $\tilde{x} + M$ ,

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - Px^0\| &= \|\tilde{x} + P_i \dots P_1 (P_m \dots P_1)^s (x^0 - \tilde{x}) - Px^0\| \\
&= \|\tilde{x} + P_i \dots P_1 (P_m \dots P_1)^s (x^0 - \tilde{x}) - P_M(x^0 - \tilde{x}) - \tilde{x}\| \\
&\leq \|P_i \dots P_1\| \|(P_m \dots P_1)^s (x^0 - \tilde{x}) - P_M(x^0 - \tilde{x})\| \\
&\leq c^s \|x^0 - \tilde{x} - P_M(x^0 - \tilde{x})\| \\
&= c^s \|x^0 - Px^0\|,
\end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad se obtiene del Teorema 2.8 y por ser  $\|P_i \dots P_1\| \leq 1$ .

# Capítulo 3

## Sucesiones efectivas

Como mencionamos al comienzo del capítulo 2, el algoritmo de Kaczmarz se puede generalizar a cualquier espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimensión finita. En tal caso, dados vectores  $a^i$  de  $\mathcal{H}$  y números  $b_i$ , el problema consiste en hallar una solución  $x$  (si existe) en la intersección de los  $m$  hiperplanos  $M_i = \{x \in \mathcal{H} : \langle x, a^i \rangle = b_i\}$ , para todo  $i = 1, \dots, m$ . En 2001, Kwapién y Mycielski [40] extendieron el algoritmo a espacios de Hilbert de dimensión infinita. En la primera sección del presente capítulo veremos dicha generalización, a partir de la cual se definen las sucesiones efectivas y estudiaremos la relación con cierto marco de Parseval. En la sección 3.2 estudiaremos bajo qué condiciones las sucesiones estacionarias resultan efectivas. En particular, estamos interesados en la sucesión de monomios  $\{z^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , la cual es estacionaria en  $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ , donde  $\mu$  es una medida positiva sobre  $\mathbb{T}$ . Probaremos que si  $\mu$  es singular respecto a la medida de Lebesgue, entonces la sucesión  $\{z^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es efectiva en  $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ . Luego, dada una medida singular  $\mu$ , tenemos un marco de Parseval asociado a la sucesión efectiva de monomios. Por otra parte, dado que la sucesión  $\{z^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una base ortonormal del espacio de Hardy  $H^2$ , la sucesión de proyecciones  $\{P_\varphi(z^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un marco de Parseval en el espacio modelo  $\varphi H^2$ , donde  $\varphi$  es una función interna asociada a la medida  $\mu$ . En la sección 3.3, nuestro principal objetivo es relacionar dichos marcos de Parseval. Por último veremos que, utilizando proyecciones ortogonales, las sucesiones casi periódicas en espacios de dimensión finita son efectivas, como sucede en el caso de sucesiones periódicas.

### 3.1. Definición de sucesión efectiva y algunas propiedades básicas

Comenzamos la sección con la generalización a espacios de dimensión infinita dada por Kwapién y Mycielski [40]: sea  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión de vectores unitarios en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , dado  $x \in \mathcal{H}$  el algoritmo de Kaczmarz asociado a esta sucesión se define del siguiente modo:

$$\begin{aligned}x_0 &= \langle x, e_0 \rangle e_0 \\x_n &= x_{n-1} + \langle x - x_{n-1}, e_n \rangle e_n.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Notar que por definición de  $x_n$  los vectores  $x - x_n$  y  $e_n$  son ortogonales para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Además, en el caso infinito dimensional, el algoritmo también se puede expresar en términos de proyecciones ortogonales: si  $P_n$  denota la proyección ortogonal sobre el subespacio  $\langle e_n \rangle^\perp$ , es decir,  $P_n x = x - \langle x, e_n \rangle e_n$ , entonces

$$x_n = x_{n-1} + (I - P_n)(x - x_{n-1}).$$

Como vimos en el capítulo 2 (Teorema 2.6), en el caso de dimensión finita, la sucesión iterada generada por el algoritmo de Kaczmarz siempre converge, en cambio esta condición en el caso infinito

dimensional puede no ser cierta. Si  $x \in \mathcal{H}$  y  $\{e_n\}_{n \geq 1}$  es una sucesión linealmente densa de vectores unitarios en  $\mathcal{H}$ , para cada  $n \geq 2$  tenemos que

$$\|x - x_n\| \geq |\langle e_{n-1}, e_n \rangle| \|x - x_{n-1}\|. \quad (3.2)$$

En efecto, dado que

$$\|x - x_n\|^2 = \|P_n(x - x_{n-1})\|^2 = \|x - x_{n-1}\|^2 - |\langle x - x_{n-1}, e_n \rangle|^2,$$

si suponemos que  $\|x - x_{n-1}\| = 1$  para simplificar las expresiones, entonces

$$\begin{aligned} \|x - x_n\|^2 &\geq \min_{\substack{u \in \langle e_{n-1} \rangle^\perp \\ \|u\| \leq 1}} 1 - |\langle u, e_n \rangle|^2 \\ &= 1 - \max_{\substack{u \in \langle e_{n-1} \rangle^\perp \\ \|u\| \leq 1}} |\langle u, P_{n-1}e_n \rangle|^2 \\ &= 1 - \|P_{n-1}e_n\|^2 \\ &= \left\| P \langle e_{n-1} \rangle e_n \right\|^2 = |\langle e_{n-1}, e_n \rangle|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, a partir de la desigualdad en (3.2) obtenemos

$$\|x - x_n\| \geq |\langle e_1, e_2 \rangle| \dots |\langle e_{n-1}, e_n \rangle| \|x - x_1\|.$$

En particular, sea  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una base ortonormal de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  y consideremos la sucesión de vectores unitarios dada por  $e_n = \frac{b_1 - 2^{-n}b_n}{\sqrt{1+4^{-n}}}$ . Dado que

$$\langle e_{n-1}, e_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{1+4^{-n+1}}\sqrt{1+4^{-n}}},$$

por la desigualdad antes vista tenemos que  $\|x - x_n\|$  no converge a cero. Este hecho conduce a la siguiente definición.

**Definición 3.1.** Sea  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión de vectores unitarios linealmente densa en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Si para todo  $x \in \mathcal{H}$  se tiene que  $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ , donde la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  está dada por el algoritmo de Kaczmarz, entonces la sucesión  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  se denomina **efectiva**.

En [40] se da la siguiente caracterización de las sucesiones efectivas en términos de proyecciones ortogonales.

**Proposición 3.2.** Sean  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión de vectores unitarios linealmente densa en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  y  $P_n$  la proyección ortogonal sobre el subespacio  $\langle e_n \rangle^\perp$ . La sucesión  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  es efectiva si y sólo si los operadores  $P_n \cdots P_0$  tienden *SOT* a cero.

*Demostración.* Dado  $x \in \mathcal{H}$ ,

$$\begin{aligned} x - x_n &= x - x_{n-1} - \langle x - x_{n-1}, e_n \rangle e_n \\ &= P_n(x - x_{n-1}) = P_n P_{n-1}(x - x_{n-2}) \\ &= P_n P_{n-1} \cdots P_0 x. \end{aligned}$$

Luego, la sucesión  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  es efectiva si y sólo si los operadores  $P_n \cdots P_0$  tienden *SOT* a cero. Notar que como la norma de dichos operadores está acotada basta probar la convergencia puntual sobre un subconjunto linealmente denso de vectores, por ejemplo la sucesión  $\{e_n\}_{n \geq 0}$ . ■

**Observación 3.3.** Con este resultado podemos probar la convergencia del algoritmo en el caso de dimensión finita planteado por Kaczmarz. En efecto, sea  $\mathcal{H}$  un espacio de dimensión finita y  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión periódica, entonces existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $e_n = e_{n+m}$  para todo  $n \geq 0$ . Además, por la densidad de la sucesión,  $M = e_0^\perp \cap \dots \cap e_m^\perp = \{0\}$ . Si definimos  $T = P_m P_{m-1} \cdots P_0$ , donde  $P_j = e_j^\perp$ , entonces por el Teorema 2.4,  $\|T^k x\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ . Luego, por la Proposición 3.2, la sucesión  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  es efectiva.  $\blacktriangle$

Por otra parte, en [40] los autores dan otra expresión para la sucesión de vectores definida a partir del algoritmo.

**Proposición 3.4.** Sean  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert real o complejo y  $\{e_n\}_{n \geq 0} \subseteq \mathcal{H}$  una sucesión de vectores unitarios. Entonces la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  definida por el algoritmo de Kaczmarz se puede expresar como

$$x_n = \sum_{k=0}^n \langle x, g_k \rangle e_k, \quad (3.3)$$

donde los vectores  $g_n$  están definidos de forma recursiva por la siguiente relación:

$$\begin{aligned} g_0 &= e_0 \\ g_n &= e_n - \sum_{k=0}^{n-1} \langle e_n, e_k \rangle g_k. \end{aligned} \quad (3.4)$$

*Demostración.* Por definición

$$x_0 = \langle x, e_0 \rangle e_0,$$

entonces si tomamos  $g_0 = e_0$  obtenemos que

$$x_0 = \langle x, g_0 \rangle e_0.$$

Supongamos que la igualdad es válida para  $n - 1$ . Entonces

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + \langle x - x_{n-1}, e_n \rangle e_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, g_k \rangle e_k + \langle x, e_n \rangle e_n - \langle x_{n-1}, e_n \rangle e_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, g_k \rangle e_k + \langle x, e_n \rangle e_n - \left\langle \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, g_k \rangle e_k, e_n \right\rangle e_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, g_k \rangle e_k + \langle x, e_n \rangle e_n - \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, g_k \rangle \langle e_k, e_n \rangle e_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, g_k \rangle e_k + \langle x, e_n \rangle e_n - \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, \langle e_n, e_k \rangle g_k \rangle e_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, g_k \rangle e_k + \left\langle x, e_n - \sum_{k=0}^{n-1} \langle e_n, e_k \rangle g_k \right\rangle e_n. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$x_n = \sum_{k=0}^n \langle x, g_k \rangle e_k,$$

con  $g_n = e_n - \sum_{k=0}^{n-1} \langle e_n, e_k \rangle g_k$  como queríamos probar. ■

**Corolario 3.5.** Los conjuntos  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{I}_n}$  y  $\{g_k\}_{k \in \mathbb{I}_n}$  generan el mismo subespacio. En particular, la sucesión  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  es linealmente densa en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  si y sólo si lo es la sucesión  $\{g_n\}_{n \geq 0}$ .

*Demostración.* El resultado se obtiene de la relación entre  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  y  $\{g_n\}_{n \geq 0}$  dada en (3.4). En efecto,  $x \in \langle \{e_k\}_{k \in \mathbb{I}_n} \rangle$  si y sólo si

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \sum_{j=1}^k \langle e_k, e_j \rangle g_j = \sum_{r=1}^n \beta_r g_r,$$

lo cual es equivalente a que  $x \in \langle \{g_k\}_{k \in \mathbb{I}_n} \rangle$ . ■

El siguiente resultado, probado en [40], es una herramienta fundamental para nuestro trabajo. Uno de los principales resultados de la tesis es la caracterización del marco de Parseval obtenido en el caso particular  $e_n = z^n$  como se verá en la sección 3.3.

**Teorema 3.6.** Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert y  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  una sucesión de vectores unitarios linealmente densa en  $\mathcal{H}$ . La sucesión  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  es efectiva si y sólo si la sucesión  $\{g_n\}_{n \geq 0}$  es marco de Parseval.

*Demostración.* Sea  $x \in \mathcal{H}$ . Dado que los vectores  $x - x_n$  y  $e_n$  son ortogonales para todo  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|x - x_0\|^2 + \langle x - x_0, x_0 \rangle + \langle x_0, x \rangle \\ &= \|x - x_0\|^2 + \langle x - x_0, \langle x, e_0 \rangle e_0 \rangle + \langle \langle x, e_0 \rangle e_0, x \rangle \\ &= \|x - x_0\|^2 + \overline{\langle x, e_0 \rangle} \langle x - x_0, e_0 \rangle + |\langle x, e_0 \rangle|^2 \\ &= \|x - x_0\|^2 + |\langle x, g_0 \rangle|^2, \end{aligned}$$

y por (3.3),

$$\begin{aligned} \|x - x_{n-1}\|^2 &= \|x - x_n + \langle x, g_n \rangle e_n\|^2 \\ &= \|x - x_n\|^2 + \overline{\langle x, g_n \rangle} \langle x - x_n, e_n \rangle + \langle x, g_n \rangle \langle e_n, x - x_n \rangle + |\langle x, g_n \rangle|^2 \|e_n\|^2 \\ &= \|x - x_n\|^2 + |\langle x, g_n \rangle|^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Por lo tanto,

$$\|x - x_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^n |\langle x, g_k \rangle|^2.$$

Luego, la sucesión  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  es efectiva si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n |\langle x, g_k \rangle|^2 = \|x\|^2,$$

es decir,

$$\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\langle x, g_k \rangle|^2.$$

Dado que  $x \in \mathcal{H}$  es arbitrario, la última ecuación establece que  $\{g_n\}_{n \geq 0}$  es marco de Parseval. ■

En general, una sucesión efectiva  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es redundante y existen diferentes maneras de reconstruir un vector  $x$ . En particular, puede haber más de un marco de Parseval que satisfaga 3.3. La ventaja de la sucesión  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es su definición recursiva en términos de los vectores  $e_n$ . A continuación vemos algunas propiedades que satisface la sucesión  $\{g_n\}_{n \geq 0}$ .

### Observaciones 3.7.

1. Si  $\{g_n\}_{n \geq 0}$  es el marco de Parseval asociado a  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  entonces cualquier vector  $g_m$  de norma 1 es ortogonal a  $g_n$ , para todo  $n \neq m$ . En efecto,

$$1 = \|g_m\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle g_m, g_n \rangle|^2 = |\langle g_m, g_m \rangle|^2 + \sum_{n \neq m} |\langle g_m, g_n \rangle|^2 = 1 + \sum_{n \neq m} |\langle g_m, g_n \rangle|^2.$$

Por lo tanto,  $\langle g_m, g_n \rangle = 0$  para todo  $n \neq m$ .

En particular, si  $\{g_n\}_{n \geq 0}$  es el marco de Parseval asociado a la sucesión efectiva  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  entonces  $g_0$  es ortogonal a  $g_n$ , para todo  $n \geq 1$  ya que

$$\|g_0\| = \|e_0\| = 1.$$

2. Si la sucesión efectiva  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  es marco de Parseval entonces el marco de Parseval asociado definido en la ecuación (3.4) es él mismo. En efecto,

$$1 = \|e_n\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\langle e_n, e_k \rangle|^2 = 1 + \sum_{k \neq n} |\langle e_n, e_k \rangle|^2,$$

por lo tanto  $\langle e_n, e_k \rangle = 0$  para todo  $k \neq n$ . Luego, de la ecuación (3.4) concluimos que  $e_n = g_n$  para todo  $n \geq 0$ .

3. Por la relación en (3.4) tenemos que

$$e_n = \sum_{j=0}^n \langle e_n, e_j \rangle g_j = \sum_{j=0}^n m_{n,j} g_j$$

entonces

$$[I + M] \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ m_{1,0} & 1 & 0 & \cdots \\ m_{2,0} & m_{2,1} & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n,0} & m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Luego, tomando la inversa algebraica de la matriz triangular inferior  $I + M$ , a la cual denotaremos  $I + U$ , podemos expresar la sucesión  $\{g_n\}_{n \geq 0}$  en términos de  $\{e_n\}_{n \geq 0}$

$$[I + U] \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ c_{1,0} & 1 & 0 & \cdots \\ c_{2,0} & c_{2,1} & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n,0} & c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \\ \vdots \end{bmatrix},$$

es decir,

$$g_n = \sum_{j=0}^{n-1} c_{n,j} e_j + e_n. \quad (3.6)$$

▲

Veamos algunas relaciones entre las matrices  $M$  y  $U$  establecidas en [25].

**Proposición 3.8.** Sean  $U$  y  $M$  matrices triangulares inferiores estrictas tales que satisfacen

$$MU = UM = -U - M.$$

Son equivalentes:

1.  $\|U\| \leq 1$
2.  $M + M^* + I \geq 0$

*Demostración.* Sean  $M_{(n)}$  y  $U_{(n)}$  los truncamientos de las matrices  $M$  y  $U$  respectivamente, es decir,

$$M_{(n)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ m_{1,0} & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \cdots \\ m_{n,0} & \cdots & m_{n,n-1} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad U_{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ c_{1,0} & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \cdots \\ c_{n,0} & \cdots & c_{n,n-1} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

Entonces los operadores asociados a  $M_{(n)}$  y  $U_{(n)}$  son acotados sobre  $l^2(\mathbb{N}_0)$  y por hipótesis

$$M_{(n)}U_{(n)} = U_{(n)}M_{(n)} = -U_{(n)} - M_{(n)}. \quad (3.7)$$

Si suponemos que la matriz  $M + M^* + I \geq 0$  entonces la matriz  $M_{(n)} + M_{(n)}^* + I$  corresponde a un operador acotado y positivo sobre  $l^2(\mathbb{N}_0)$ . Por lo tanto,

$$0 \leq (U_{(n)}^* + I)(M_{(n)} + M_{(n)}^* + I)(U_{(n)} + I) = I - U_{(n)}^*U_{(n)},$$

donde la última igualdad se obtiene de (3.7). Luego,  $\|U_{(n)}\| \leq 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , por lo tanto  $\|U\| \leq 1$ .

Recíprocamente, si  $\|U\| \leq 1$  entonces  $\|U_{(n)}\| \leq 1$ , es decir,  $I - U_{(n)}^*U_{(n)} \geq 0$ . Por lo tanto,

$$M_{(n)} + M_{(n)}^* + I = (M_{(n)}^* + I)(I - U_{(n)}^*U_{(n)})(M_{(n)} + I) \geq 0.$$

Luego,  $M + M^* + I \geq 0$ . ■

**Observación 3.9.** Si  $M + M^* + I \geq 0$  entonces existen un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  y vectores  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  en  $\mathcal{H}$  tales que  $M + M^* + I$  es una matriz de Gram de dichos vectores. ▲

La siguiente demostración es otra prueba del principal resultado de [25]: caracterizar las sucesiones efectivas. Para ello utilizamos teoría de marco.

**Teorema 3.10.** Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert. La sucesión  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  es efectiva si y sólo si es linealmente densa en  $\mathcal{H}$  y  $U$  es una isometría parcial, es decir,  $U^*U$  es una proyección ortogonal.



*Demostración.* Antes de comenzar la demostración recordemos que la sucesión  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  es efectiva si y sólo si la sucesión  $\{g_n\}_{n \geq 0}$  es un marco de Parseval (Teorema 3.6). Además, si  $G$  es la matriz de Gram de  $\{g_n\}_{n \geq 0}$ , por definición de los vectores tenemos que

$$\begin{aligned} G_{j,k} &= \left\langle \sum_{h=0}^j c_{j,h} e_h, \sum_{l=0}^k c_{k,l} e_l \right\rangle \\ &= \sum_{h=0}^j \sum_{l=0}^k c_{j,h} \overline{c_{k,l}} \langle e_h, e_l \rangle \\ &= \sum_{h=0}^j \sum_{l=0}^k c_{j,h} (I + M + M^*)_{h,l} \overline{c_{k,l}} \\ &= ((I + U)(I + M + M^*)(I + U^*))_{k,j}. \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que la sucesión  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  es efectiva. Sean  $T : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{H}$  el operador de síntesis de la sucesión de Parseval asociada  $\{g_n\}_{n \geq 0}$ , el cual está dado por  $(\alpha_n)_{n \geq 0} \mapsto \sum_{n \geq 0} \alpha_n g_n$ , y  $T^* : \mathcal{H} \rightarrow l^2(\mathbb{N})$  su adjunto, definido por  $T^*(f) = (\langle f, g_n \rangle)_{n \geq 0}$ . Si componemos ambos operadores obtenemos el operador de  $l^2(\mathbb{N})$  en sí mismo

$$T^*T \left( (\alpha_n)_{n \geq 0} \right) = \left( \left\langle \sum_{n \geq 0} \alpha_n g_n, g_k \right\rangle \right)_{k \geq 0}$$

cuya representación matricial en la base canónica de  $l^2(\mathbb{N})$  es

$$[T^*T] = (\langle g_j, g_k \rangle)_{k,j \geq 0}.$$

Luego, dado que

$$\begin{aligned} (I + U)(I + M + M^*)(I + U^*) &= (I + M^* + UM^*)(I + U^*) \\ &= I + UM^* + UM^*U^* \\ &= I + UM^* - UM^* - UU^* \\ &= I - UU^*, \end{aligned}$$

por lo visto el comienzo de la demostración tenemos que

$$[I - UU^*] = [G^t] = (\langle g_j, g_k \rangle)_{k,j} = [T^*T],$$

por lo tanto  $I - UU^*$  es un proyector ortogonal. Luego,  $UU^*$  es proyector ortogonal, es decir,  $U^*$  es una isometría parcial. Dado que el adjunto de una isometría parcial también lo es, concluimos que  $U$  es isometría parcial.

Veamos que  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  es linealmente densa en  $\mathcal{H}$ . Sea  $x \in \mathcal{H}$ , por el algoritmo de Kaczmarz (3.1), tenemos que

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1} + \langle x - x_{n-1}, e_n \rangle e_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, e_0 \rangle e_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \langle x - x_k, e_{k+1} \rangle e_{k+1}, \end{aligned}$$

por lo tanto  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  es linealmente densa en  $\mathcal{H}$ .

Recíprocamente, si  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  es linealmente densa en  $\mathcal{H}$ , por el Corolario 3.5 la sucesión  $\{g_n\}_{n \geq 0}$  también lo es, por lo tanto  $\overline{\langle \{g_n\}_{n \geq 0} \rangle} = \mathcal{H}$ . Luego, si consideramos el operador  $T : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{H}$  dado por  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n g_n$  tenemos que  $\overline{R(T)} = \mathcal{H}$ . Puesto que  $T^*T$  es un proyector ortogonal,  $R(T^*T)$  es un subespacio cerrado en  $l^2(\mathbb{N})$  y, por lo tanto,  $R(T)$  es un subespacio cerrado de  $\mathcal{H}$ . En consecuencia,  $R(T) = \mathcal{H}$ . Entonces,  $T$  es suryectivo, lo cual implica que  $T^*$  está acotado inferiormente y  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  resulta ser marco.

Veamos que  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es marco de Parseval, es decir, que las cotas  $A = \gamma(T)^2$  y  $B = \|T\|^2$  del marco son iguales a 1, donde  $\gamma(T) = \inf \{ \|Tx\| : x \in \ker(T)^\perp, \|x\| = 1 \}$ :

$$\begin{aligned} \|T((\alpha_n)_{n \geq 0})\|^2 &= \left\langle \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n g_n, \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n g_n \right\rangle \\ &= \sum_{n, m \in \mathbb{N}} \alpha_n \bar{\alpha}_m \langle g_n, g_m \rangle \\ &= \langle G((\alpha_n)_{n \geq 0}), (\alpha_n)_{n \geq 0} \rangle \\ &= \|G((\alpha_n)_{n \geq 0})\|^2, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene por ser  $G$  un proyector ortogonal. Dado que  $\|T\| = \|G\| = 1$  tenemos que la cota superior es igual a 1. Además, como  $\gamma(T) = \gamma(G) = 1$ , la cota inferior también es igual a 1. Luego,  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es marco de Parseval. ■

## 3.2. Sucesiones estacionarias

Dado un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , una sucesión  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  se llama **estacionaria** si

$$\langle e_{k+m}, e_{l+m} \rangle = \langle e_k, e_l \rangle$$

para todo  $l, k, m \in \mathbb{N}$ . Si denotamos

$$a_m = \langle e_{k+m}, e_k \rangle,$$

donde  $k \in \mathbb{N}$  y  $k > -m$  y consideramos la matriz

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & a_1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix},$$

dado que  $M + M^* + I$  es una matriz definida positiva, por el Teorema de Bochner-Herglotz existe una única medida positiva  $\mu$  sobre  $\mathbb{T}$  tal que

$$a_m = \int_{\mathbb{T}} \xi^m d\mu(\xi),$$

para cada  $m \in \mathbb{Z}$ . A dicha medida se la denomina **medida espectral** de la sucesión estacionaria.

Notar que los vectores de una sucesión estacionaria son unitarios si y sólo si la medida espectral  $\mu$  es de probabilidad.

En esta sección vamos a estudiar cuándo una sucesión estacionaria resulta ser efectiva. La respuesta la dieron Kwapien y Mycielski en [40], quienes probaron el siguiente resultado:

**Teorema 3.11.** Una sucesión estacionaria de vectores unitarios  $\{e_n\}_{n \geq 1}$  en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  es efectiva si y sólo si su medida espectral  $\mu$  es la medida de Lebesgue o es singular respecto a la medida de Lebesgue.

Nosotros daremos una prueba distinta a la original utilizando medidas de Clark y algunas ideas de la demostración dada por Haller y Szwarc en [25]. Para esto necesitaremos dos lemas previos.

**Lema 3.12.** Sean  $A$  y  $B$  matrices de Toeplitz triangulares superiores cuyas entradas no nulas son denotadas por  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  y  $\{b_n\}_{n \geq 1}$  respectivamente, es decir

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

tales que  $(A + I)(B + I) = I$  y  $b$  la función dada por

$$b(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n.$$

Entonces  $B$  es el operador de multiplicación con símbolo  $b$  y

$$a(z) = \frac{1}{1 + b(z)} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

*Demostración.* Sea  $B$  una matriz de Toeplitz con entradas no nulas  $\{b_n\}_{n \geq 1}$ , es decir,  $B = T_b = PM_b|_{H^2}$  donde la función  $b$  está dada por

$$b(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

y  $P$  es la proyección de  $L^2(\mathbb{T})$  sobre el espacio de Hardy  $H^2$ . Dado que la matriz  $A^* + A + I$  es definida positiva y se cumple la relación  $A^*B^* = B^*A^* = -B^* - A^*$  (ya que  $(B + I)(A + I) = I$ ), por la Proposición 3.8 aplicada a  $B^*$  y  $A^*$  tenemos que  $B^*$  es una contracción, por lo tanto  $B$  también lo es. Luego,

$$\|b\|_{L^\infty} = \|B\| \leq 1.$$

Además, como  $b_n = 0$  para todo  $n \leq 0$  concluimos que  $b \in H^\infty$ . En consecuencia,  $B = M_b$ . Ahora, sea  $a(z)$  definida como en el enunciado del teorema y supongamos que

$$a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n.$$

Dado que  $(a(z) + 1)(b(z) + 1) = 1$ , si definimos  $c_0 = b_0 = 1$  tenemos la siguiente relación

$$1 = \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{h=0}^k c_h b_{(k-h)} \right) z^k,$$

por lo tanto para todo  $k \geq 1$  se cumple que

$$\sum_{h=0}^k c_h b_{(k-h)} = 0. \quad (3.8)$$

Por otra parte,

$$\langle F_i(A+I), C_j(B+I) \rangle = \sum_{l=1}^{\infty} a_{il} b_{lj} = \begin{cases} \sum_{l=i}^j a_{l-i} b_{j-l} & \text{si } i < j \\ 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases},$$

siendo  $a_0 = 1$ . Luego, dado que  $(A+I)(B+I) = I$  tenemos que

$$0 = \sum_{l=i}^j a_{l-i} b_{j-l} = \sum_{h=0}^{j-i} a_h b_{j-(h+i)} = \sum_{h=0}^k a_h b_{k-h}. \quad (3.9)$$

Por definición  $a_0 = c_0 = b_0 = 1$  y dado que las ecuaciones (3.8) y (3.9) valen para todo  $k \geq 1$  obtenemos que

$$0 = \sum_{h=0}^1 (c_h - a_h) b_{1-h} = (c_1 - a_1) \underbrace{b_0}_{=1},$$

por lo tanto  $a_1 = c_1$ . Ahora, supongamos que  $c_h = a_h$  para todo  $h < k$ , entonces

$$0 = \sum_{h=0}^k (c_h - a_h) b_{k-h} = (c_k - a_k) \underbrace{b_0}_{=1},$$

luego  $c_k = a_k$ . Por lo tanto,

$$a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

■

**Lema 3.13.** Si  $\{e_n\}_{n \geq 1}$  es una sucesión estacionaria en  $\mathcal{H}$  y  $\mu$  es su medida espectral entonces existe una función holomorfa tal que  $\mu$  es su medida de Clark correspondiente a 1.

*Demostración.* Sean  $\{e_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión estacionaria en  $\mathcal{H}$  y  $\mu$  su medida espectral, es decir,

$$a_m = \langle e_{k+m}, e_k \rangle = \int_{\mathbb{T}} \xi^m d\mu(\xi).$$

Si  $M$  es la matriz de Toeplitz triangular inferior dada por

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & a_1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

definimos  $(I + M)^{-1} = I + U$ , donde la matriz  $U$  es de la forma

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ u_1 & 0 & 0 & \cdots \\ u_2 & u_1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n & u_{n-1} & u_{n-2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

Por el Lema 3.12 sabemos que  $U^*$  es un operador de Toeplitz con símbolo

$$u(z) = \sum_{n \geq 1} \bar{u}_n z^n$$

y  $\|u\|_{H^\infty} = \|U^*\| \leq 1$ . Además, la función  $a(z) = \frac{1}{1+u(z)} - 1$  se puede escribir como

$$a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n z^n$$

y satisface la igualdad  $(a(z) + 1)(u(z) + 1) = 1$ . Entonces

$$1 + a(z) + \overline{a(z)} = \frac{1}{1 + u(z)} + \frac{1}{1 + \bar{u}(z)} - 1 = \frac{1 - |u(z)|^2}{|1 + u(z)|^2}.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} 1 + a(z) + \overline{a(z)} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{a}_n z^n + a_n z^{-n}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{T}} \omega^{-n} z^n + \omega^n z^{-n} d\mu(\omega) \\ &= 1 + \int_{\mathbb{T}} \sum_{n=1}^{\infty} (\omega^{-n} z^n + \omega^n z^{-n}) d\mu(\omega) = 1 + \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{1 - \bar{\omega}z} + \frac{1}{1 - \omega\bar{z}} - 2 d\mu(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{1 - \bar{\omega}z} + \frac{1}{1 - \omega\bar{z}} - 1 d\mu(\omega) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|1 - \bar{\omega}z|^2} d\mu(\omega), \end{aligned}$$

por lo tanto  $\mu$  es la medida de Clark correspondiente a  $\alpha = 1$  asociada a la función  $-u$ . Como  $-u(0) = 0$  tenemos que la medida  $\mu$  es de probabilidad. ■

*Demostración del Teorema 3.11.* Dada una sucesión estacionaria  $\{e_n\}_{n \geq 1}$ , sean  $U$  y  $u$  la matriz y la función definidas en el Lema 3.13, respectivamente.

Supongamos que  $\{e_n\}_{n \geq 1}$  es efectiva y sea  $\{g_n\}_{n \geq 1}$  el marco de Parseval asociado. Por el Teorema 3.10,  $U^*$  es isometría parcial entonces  $|u|$  es 1 ó 0 sobre  $\mathbb{T}$ . Por el Teorema de F. y M. Riesz 1.43,  $u \equiv 0$  ó el subconjunto de  $\mathbb{T}$  sobre el cual  $u = 0$  tiene medida cero y por lo tanto  $u$  es interna, en tal caso  $-u$  también lo es y  $\mu$  resulta singular respecto a la medida de Lebesgue. Si  $u \equiv 0$  entonces  $U$  es la matriz nula y dado que  $U + I = (M + I)^{-1}$  tenemos que  $M$  también lo es, por lo tanto

$$a_n = \int_{\mathbb{T}} \xi^n d\mu(\xi) = 0 \quad \forall n \geq 1, \quad (3.10)$$

luego por el Teorema de F. y M. Riesz 1.19,  $\mu \ll m$ . Por el Teorema de Radon- Nikodým existe una función  $f$  medible y positiva tal que  $d\mu = f dm$ . Conjugando en la ecuación (3.10) obtenemos que

$$\int_{\mathbb{T}} \xi^n d\mu(\xi) = 0 \quad \forall n \leq 1. \quad (3.11)$$

Luego, de (3.10) y (3.11) concluimos que

$$\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(\xi) \xi^n d\mu(\xi) = 0 \quad \forall n \neq 0,$$

y por unicidad de la transformada de Fourier tenemos que  $f$  debe ser constante. Dado que  $\mu$  es una medida de probabilidad,  $f \equiv 1$ .

Recíprocamente, supongamos que  $\{e_n\}_{n \geq 1}$  es una sucesión estacionaria y que la medida espectral  $\mu$  asociada es la medida de Lebesgue o es singular respecto a dicha medida. En el primer caso

$$a_n = \int_{\mathbb{T}} \xi^n dm(\xi) = 0,$$

por lo tanto  $M$  es la matriz nula y dado que  $U + I = (M + I)^{-1}$  concluimos que  $U$  también lo es.

Ahora, si  $\mu$  es singular entonces su parte absolutamente continua es cero. Dado que  $\mu$  es una de las medidas de Clark asociada a  $-u$ , por la expresión de la parte absolutamente continua de tales medidas:

$$\mu_\alpha^a(\omega) = \begin{cases} \frac{1-|u(\omega)|^2}{|\alpha-u(\omega)|^2} & \text{si } |u(\omega)| < 1 \\ 0 & \text{si } |u(\omega)| = 1 \end{cases},$$

con  $\alpha \in \mathbb{T}$ , tenemos que  $u$  es interna.

En ambos casos,  $U$  es una isometría parcial entonces por el Teorema 3.10, la sucesión  $\{e_n\}_{n \geq 1}$  es efectiva. ■

**Observación 3.14.** Sea  $\mu$  una medida singular de Borel sobre  $\mathbb{T}$  y  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  la sucesión dada por  $e_n = e^{2\pi i n(\cdot)}$ . Si  $k, l, m \in \mathbb{N}$  entonces

$$\langle e_{k+m}, e_{l+m} \rangle_{L^2(\mu)} = \int_0^1 e^{2\pi i(k-l)t} d\mu(t) = \langle e_k, e_l \rangle_{L^2(\mu)}.$$

Por lo tanto, la sucesión  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  es estacionaria en  $L^2(\mu)$  y  $\mu$  es su medida espectral. Además, la sucesión es linealmente densa en  $L^2(\mu)$ . En efecto, si no fuera así, existe  $f \in L^2(\mu)$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_0^1 e^{2\pi i n t} \overline{f(t)} d\mu(t) = 0.$$

Por el Teorema de F. y M. Riesz 1.19 tenemos que  $\overline{f} d\mu \ll m$ . Por otra parte, la medida  $\overline{f} d\mu \perp m$ , luego por unicidad en el Teorema de la descomposición de Lebesgue, resulta que  $\overline{f} d\mu = 0$ . Por lo tanto,  $f = 0$  en casi todo punto con respecto a  $\mu$ , lo cual es una contradicción. Luego,  $\text{span}(\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = L^2(\mu)$ . Por el Teorema 3.11, la sucesión  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  es efectiva en  $L^2(\mu)$ .

### 3.3. Sucesiones efectivas y los espacios modelos

En la presente sección se encuentra uno de los principales resultados del trabajo: Teorema 3.15, el cual relaciona el marco de Parseval asociado a la sucesión efectiva de monomios  $\{z^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con los valores en el borde del marco Parseval  $\{P_\varphi(z^n)\}_{n \geq 0}$  para el espacio modelo  $\mathcal{H}(\varphi)$ .

Sea  $\mu$  una medida de Borel sobre  $\mathbb{T}$  la cual es de probabilidad y singular con respecto a la medida de Lebesgue, e identifiquemos el intervalo  $[0, 1)$  con  $\mathbb{T}$  de manera usual. Por el Teorema 3.11, sabemos que los monomios  $\{\omega^n\}_{n \geq 0}$  constituyen una sucesión efectiva para  $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ , por lo tanto todo elemento  $f \in L^2(\mathbb{T}, \mu)$  se puede escribir como

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, g_n \rangle \omega^n, \quad (3.12)$$

donde  $\{g_n\}_{n \geq 0}$  es un marco de Parseval para  $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ . La convergencia de esta serie es en sentido de  $L^2$ .

Por otra parte, consideremos la función holomorfa  $\psi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por la transformada de Herglotz

$$\psi(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu(\zeta).$$

Notar que la parte real de  $\psi(z)$  es precisamente  $P[\mu](z)$ , la cual es positiva, por lo tanto la función  $\varphi$  dada por

$$\varphi(z) = \frac{\psi(z) - 1}{\psi(z) + 1} \quad (3.13)$$

mapea el disco en sí mismo. Escribiendo  $\psi$  en términos de  $\varphi$  es fácil ver que

$$P[\mu](z) = \frac{1 - |\varphi(z)|^2}{|1 - \varphi(z)|^2}.$$

Veamos que  $\varphi$  es una función interna. Dado que  $\mu$  es singular con respecto a la medida de Lebesgue sobre  $\mathbb{T}$ , por el Teorema 1.16, para  $m$ -casi todo  $\omega \in \mathbb{T}$  se cumple que

$$\lim_{\angle z \rightarrow \omega} P[\mu](z) = 0, \quad \text{lo cual implica que} \quad \lim_{\angle z \rightarrow \omega} |\varphi(z)| = 1,$$

para  $m$ -casi todo  $\omega \in \mathbb{T}$ . En consecuencia,  $\varphi$  es interna. Además, por ser  $\mu$  una medida de probabilidad tenemos que  $\psi(0) = 1$ , y por lo tanto  $\varphi(0) = 0$ .

Dado que los monomios  $\{z^n\}_{n \geq 0}$  son una base ortonormal para el espacio de Hardy  $H^2$ , si  $P_\varphi$  denota la proyección ortogonal sobre el subespacio modelo  $\mathcal{H}(\varphi)$ , por el Teorema 1.63 la sucesión  $\{P_\varphi(z^n)\}_{n \geq 0}$  es un marco de Parseval para  $\mathcal{H}(\varphi)$ . Además, si  $f \in \mathcal{H}(\varphi)$ ,

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, z^n \rangle_{H^2} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, P_\varphi z^n \rangle_{\varphi H^2} z^n.$$

Luego, dada  $f^* \in L^2(\mu)$ , si en particular  $f \in \mathcal{H}(\varphi)$  es tal que

$$f^*(w) = \lim_{\angle z \rightarrow w} f(z),$$

respecto a la medida  $\mu$ , entonces tomando límite no tangencial con respecto a  $\mu$  en la identidad anterior, por ser  $V_\mu$  un operador unitario (ver (1.10)),

$$f^* = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f^*, P_\varphi^* z^n \rangle_{L^2(\mu)} e_n.$$

Luego,  $\{P_\varphi^* z^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  también es un marco asociado a la sucesión efectiva  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Dados dichos marcos de Parseval asociados a la sucesión efectiva de monomios nos preguntamos si existe alguna relación entre ellos. En el siguiente teorema damos la respuesta a esta pregunta.

**Teorema 3.15.** Para  $\mu$ -casi todo  $\zeta \in \mathbb{T}$

$$g_n(\zeta) = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta} P_\varphi(z^n)(w).$$

*Demostración.* La primera parte de la demostración es similar a la prueba del Lema 3.13. Para  $n \in \mathbb{Z}$ , consideremos los coeficientes de Fourier de  $\mu$

$$\widehat{\mu}(n) = \int_{\mathbb{T}} \bar{\omega}^n d\mu(\omega).$$

Sea  $M$  la matriz de Toeplitz triangular inferior cuyas entradas están dadas por

$$M_{ij} = \begin{cases} \widehat{\mu}(i-j) & \text{si } i > j \\ 0 & \text{si } i \leq j \end{cases}$$

y  $U$  la matriz de Toeplitz triangular inferior definida por la relación algebraica

$$(M + I)^{-1} = I + U, \quad (3.14)$$

donde  $I$  denota la matriz identidad. Si  $\{u_n\}_{n \geq 1}$  es la sucesión definida a partir de las entradas de la matriz  $U$  de la siguiente manera

$$U_{ij} = \begin{cases} u_{i-j} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{si } i \leq j \end{cases},$$

sean  $\phi$  y  $\eta$  las funciones definidas como

$$\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} -\bar{u}_n z^n \quad \text{y} \quad \eta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\mu}(n) z^n. \quad (3.15)$$

Notar que la identidad (3.14) implica que  $(1 + \eta(z))(1 - \phi(z)) = 1$ . A partir de esta identidad obtenemos que

$$1 + \eta(z) + \overline{\eta(z)} = \frac{1 - |\phi(z)|^2}{|1 - \phi(z)|^2}.$$

Esta igualdad fue notada por Haller y Szwarc, quienes la utilizaron para probar  $\phi$  es una función interna (ver Sección 4 en [25]). Sin embargo, si además observamos que

$$1 + \eta(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{1 - \bar{\zeta}z} d\mu(\zeta)$$

obtenemos que

$$\frac{1 - |\phi(z)|^2}{|1 - \phi(z)|^2} = P[\mu](z).$$

Esto muestra que  $\phi$  y la función  $\varphi$  definida en (3.13) tienen la misma parte real. Dado que  $\phi(0) = \varphi(0) = 0$ , concluimos que  $\phi(z) = \varphi(z)$ . Utilizando esta identidad y la expresión para  $P_\varphi$  dada en (1.6),



si  $w \in \mathbb{D}$  obtenemos que

$$\begin{aligned}
(P_\varphi z^n)(w) &= w^n - \varphi(w) \int_{\mathbb{T}} \frac{\overline{\varphi(\zeta)} \zeta^n}{1 - w\overline{\zeta}} d\zeta = w^n - \varphi(w) \int_{\mathbb{T}} \overline{\varphi(\zeta)} \zeta^n \sum_{k=0}^{\infty} (w\overline{\zeta})^k d\zeta \\
&= w^n - \varphi(w) \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left( \int_{\mathbb{T}} \overline{\varphi(\zeta)} \zeta^{n-k} d\zeta \right)}_{=0 \text{ if } k \geq n} w^k = w^n - \varphi(w) \sum_{k=0}^{n-1} \left( \int_{\mathbb{T}} \overline{\varphi(\zeta)} \zeta^{n-k} d\zeta \right) w^k \\
&= w^n - \varphi(w) \sum_{k=0}^{n-1} u_{n-k} w^k = w^n + \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(w) u_{n-k} w^k.
\end{aligned}$$

Ahora, si  $w$  tiende a  $\zeta$  no tangencialmente, tenemos que

$$(P_\varphi z^n)^*(\zeta) = \zeta^n + \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\zeta) u_{n-k} \zeta^k = \zeta^n + \sum_{k=0}^{n-1} u_{n-k} \zeta^k,$$

donde la segunda igualdad se obtiene por ser  $\varphi = 1$  sobre el soporte de  $\mu$ . Nos resta probar que la última expresión es justamente  $g_n(\zeta)$ . Con este propósito, notar que como consecuencia de (3.4) podemos escribir el vector  $\zeta^n$  de la siguiente manera

$$\zeta^n = \sum_{j=0}^n \widehat{\mu}(n-j) g_j(\zeta),$$

el cual en términos de la matriz  $M$  definida anteriormente se puede expresar como

$$(I + M) \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ m_{1,0} & 1 & 0 & \cdots \\ m_{2,0} & m_{2,1} & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n,0} & m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

A partir de esta expresión obtenemos que  $g_n(\zeta) = \zeta^n + \sum_{k=0}^{n-1} u_{n-k} \zeta^k$ , lo cual concluye la demostración. ■

Notar que  $\mu$  es la medida de Clark asociada a  $\varphi$  con  $\alpha = 1$ . Dado que  $\varphi$  es interna, las restantes medidas de Clark  $\mu_\alpha^\varphi$  también son singulares con respecto a la medida de Lebesgue sobre  $\mathbb{T}$ . Por lo tanto, los monomios también son una sucesión efectiva para  $L^2(\mathbb{T}, \mu_\alpha^\varphi)$ , y tienen el correspondiente marco de Parseval  $\{g_n^{(\alpha)}\}_{n \geq 0}$  asociado. Como la medida de Clark  $\mu_\alpha^\varphi$  es la medida de Clark  $\mu_1^{(\overline{\alpha}\varphi)}$ , a partir del resultado anterior, de forma directa, obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 3.16.** Dado  $\alpha \in \mathbb{T}$ , para  $\mu_\alpha^\varphi$ -casi todo  $\zeta \in \mathbb{T}$

$$g_n^{(\alpha)}(\zeta) = \lim_{\angle w \rightarrow \zeta} P_\varphi(z^n)(w).$$

Antes de continuar, veamos una simple consecuencia del Teorema 3.15: para toda  $f \in \mathcal{H}(\varphi)$ , por el Teorema de Poltoratskii 1.54,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, z^n \rangle_{H^2} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_\varphi f, z^n \rangle_{\mathcal{H}(\varphi)} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, P_\varphi z^n \rangle_{\mathcal{H}(\varphi)} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f^*, g_n \rangle_{L^2(\mu)} z^n, \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde  $f^*$  es el elemento de  $L^2(\mathbb{T}, \mu)$  definido por tomar límites no tangenciales. Notar que, como la sucesión de monomios es sobre determinada, este simple argumento no se podría hacer sin el conocimiento del Teorema 3.15.

Ahora, como una aplicación del Teorema 3.15, daremos una prueba más simple y conceptual de un resultado dado en [27] relacionado con la llamada transformada de Cauchy normalizada. Dada una medida de Borel (compleja) sobre  $\mathbb{T}$  definimos la **transformada de Cauchy** de  $\mu$  como

$$K(\mu)(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{1 - z\bar{\zeta}} d\mu(\zeta),$$

donde  $z \in \mathbb{D}$ . Si  $\varphi(0) = 0$ , utilizando la expresión

$$(K d\mu_\alpha^\varphi)(z) = (K d\mu_1^{\bar{\alpha}\varphi})(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\mu}_1(n) z^n = \frac{1}{1 - \bar{\alpha}\varphi(z)},$$

el operador  $V_\alpha$  definido en (1.10) se puede expresar como

$$(V_\alpha g)(z) = \frac{K(g d\mu_\alpha^\varphi)(z)}{(K d\mu_\alpha^\varphi)(z)}.$$

El lado derecho de esta identidad se denomina **transformada de Cauchy normalizada**.

**Corolario 3.17.** Sea  $\mu$  una medida de Borel la cual es de probabilidad y singular con respecto a la medida de Lebesgue sobre  $\mathbb{T}$ . Si  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es el marco de Parseval para  $L^2(\mathbb{T}, \mu)$  asociado a la sucesión efectiva de monomios, entonces

$$\frac{K(g d\mu)(z)}{(K d\mu)(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle g, g_n \rangle_{L^2(\mu)} z^n.$$

*Demostración.* Sea  $\varphi$  la función interna definida por (3.13). Dado que la transformada de Cauchy normalizada coincide con el isomorfismo isométrico  $V_1$  entre los espacios  $\mathcal{H}(\varphi)$  y  $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ , usando (3.16) tenemos que para toda  $g \in L^2(\mathbb{T}, \mu)$ ,

$$V_1 g = \sum_{n=0}^{\infty} \langle V_1^* g, g_n \rangle_{L^2(\mu)} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \langle g, g_n \rangle_{L^2(\mu)} z^n,$$

donde en la segunda igualdad hemos utilizado el Teorema de Poltoratskii (Teorema 1.54). ■

Otra aplicación es la siguiente expresión para los núcleos reproductores de espacio  $\mathcal{H}(\varphi)$ .

**Corolario 3.18.** Sea  $\mu$  una medida de Borel, la cual es de probabilidad y singular con respecto a la medida de Lebesgue sobre  $\mathbb{T}$ , y  $\varphi$  la función interna definida por (3.13). Si  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es el marco de Parseval para  $L^2(\mathbb{T}, \mu)$  asociado a la sucesión efectiva de monomios, entonces

$$k_z^\varphi(w) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \langle g_n, g_m \rangle_{L^2(\mu)} \bar{z}^n w^m.$$

*Demostración.* Puesto que los monomios forman una base ortonormal del espacio de Hardy, tenemos que

$$\begin{aligned} k_z^\varphi(w) &= \sum_{m=0}^{\infty} \langle k_z^\varphi, w^m \rangle_{H^2} w^m = \sum_{m=0}^{\infty} \langle k_z^\varphi, P_\varphi(w^m) \rangle_{\mathcal{H}(\varphi)} w^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \overline{P_\varphi(w^m)(z)} w^m = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \langle g_n, g_m \rangle_{L^2(\mu)} \bar{z}^n w^m, \end{aligned}$$

donde en la última identidad hemos usado (3.16) y el Teorema 3.15. ■

### 3.4. Sucesiones casi periódicas

El concepto de casi periodicidad es una generalización de la periodicidad. Vamos a probar que en espacios de Hilbert de dimensión finita, al igual que las sucesiones periódicas, las sucesiones casi periódicas también son efectivas. Comencemos con la definición (para más detalle ver [70]), para lo cual denotamos  $\mathcal{X}$  a un espacio métrico arbitrario y  $\rho$  a la métrica definida sobre el mismo.

**Definición 3.19.** Una sucesión  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathcal{X}$  se dice **casi periódica** si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un entero positivo  $p(\varepsilon)$  tal que cualquier conjunto que conste de  $p(\varepsilon)$  números enteros consecutivos contiene al menos un entero  $l$  para el cual

$$\rho(x_{k+l}, x_k) < \varepsilon,$$

con  $k \in \mathbb{Z}$ . El número  $l$  se denomina **número  $\varepsilon$ -traslación** de  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ .

Veamos un ejemplo, consideremos la sucesión dada por  $x_n = \sin(2\pi n\sqrt{2})$ . Si  $l \in \mathbb{Z}$  entonces

$$x_{n+l} = \sin\left(2\pi(n+l)\sqrt{2}\right) = \sin(2\pi n\sqrt{2}) \cos(2\pi l\sqrt{2}) + \cos(2\pi n\sqrt{2}) \sin(2\pi l\sqrt{2}),$$

por lo tanto  $x_{n+l} = x_n$  si y sólo si  $nl\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$ , lo cual es absurdo para todo  $l \in \mathbb{Z}$ . Luego, la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  no es periódica. Sin embargo, dado  $\tilde{\varepsilon} > 0$  arbitrariamente chico, por ser  $\mathbb{T}$  compacto, la sucesión  $\left\{e^{2\pi i n\sqrt{2}}\right\}_{n \in \mathbb{Z}}$  tiene un punto de acumulación. Luego, existen  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$  tales que

$$\left|e^{2\pi i n_1\sqrt{2}} - e^{2\pi i n_2\sqrt{2}}\right| < \tilde{\varepsilon},$$

por lo tanto  $\left|e^{2\pi i\sqrt{2}(n_1-n_2)} - 1\right| < \tilde{\varepsilon}$ . En consecuencia, siempre podemos encontrar  $l \in \mathbb{Z}$  tal que  $l\sqrt{2}$  difiera de otro entero  $k$  menos que  $\varepsilon/2\pi$ . Luego, si escribimos  $l\sqrt{2} - k = \delta$ , con  $|\delta| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$ , entonces

$$\sin(2\pi n\sqrt{2} + 2\pi l\sqrt{2}) = \sin(2\pi n\sqrt{2} + 2k\pi + 2\pi\delta) = \sin(2\pi n\sqrt{2} + 2\pi\delta).$$

Si denotamos  $\theta = \frac{2\pi\delta}{\varepsilon}$ , entonces  $|\theta| < 1$  y podemos escribir

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(2\pi n\sqrt{2} + \theta\varepsilon) &= \operatorname{sen}(2\pi n\sqrt{2}) \cos(\theta\varepsilon) + \cos(2\pi n\sqrt{2}) \operatorname{sen}(\theta\varepsilon) \\ &= \operatorname{sen}(2\pi n\sqrt{2}) + \operatorname{sen}(2\pi n\sqrt{2}) (\cos(\theta\varepsilon) - 1) + \cos(2\pi n\sqrt{2}) \operatorname{sen}(\theta\varepsilon) \\ &= \operatorname{sen}(2\pi n\sqrt{2}) + \left( \operatorname{sen}(2\pi n\sqrt{2}) \frac{\cos(\theta\varepsilon) - 1}{\theta\varepsilon} + \cos(2\pi n\sqrt{2}) \frac{\operatorname{sen}(\theta\varepsilon)}{\theta\varepsilon} \right) \theta\varepsilon. \end{aligned}$$

Luego, para  $\varepsilon$  suficientemente chico tenemos que

$$x_{n+l} = x_n + \tilde{\theta}\varepsilon,$$

con  $|\tilde{\theta}| < 1$ , por lo tanto la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es casi periódica.

Para probar el resultado principal de esta sección necesitamos el próximo lema. Antes, notar que si  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión linealmente densa en un espacio de dimensión finita  $\mathcal{H}$  entonces existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{H} = \langle e_1, \dots, e_m \rangle$ , con  $e_i \in \mathcal{H}$ . En efecto, sea  $\mathcal{S}_m = \langle e_1, \dots, e_m \rangle$  y supongamos que  $\mathcal{H} \neq \mathcal{S}_m$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Entonces para cada  $m$  existe  $x_m \in \mathcal{H}$ , con  $\|x_m\| = 1$ , tal que  $x_m \perp \mathcal{S}_m$ . Dado que  $\mathcal{H}$  tiene dimensión finita, la bola unidad es compacta y por lo tanto existe una subsucesión  $\{x_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  y  $x \in \mathcal{H}$  tal que  $x_{m_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x$ . Por la propiedad de encaje que satisfacen los conjuntos  $\mathcal{S}_m$ , tenemos que  $x_{m_h} \perp \mathcal{S}_{m_k}$  para  $k < h$ , entonces  $x \perp \mathcal{S}_{m_k}$  para todo  $k \geq 1$  ya que si existiera  $j \in \mathbb{N}$  tal que  $x$  no fuera ortogonal a  $\mathcal{S}_{m_j}$  tampoco lo sería a  $\mathcal{S}_{m_h}$  para todo  $h > j$  y podríamos tomar  $\tilde{x}_{m_h} \in \mathcal{S}_{m_h}$  tal que  $\tilde{x}_{m_h} \perp x_{m_h}$  y  $\langle \tilde{x}_{m_h}, x \rangle \neq 0$  lo cual implicaría que  $0 < |\langle x - x_{m_h}, \tilde{x}_{m_h} \rangle|^2 \leq \|x - x_{m_h}\|^2 \|\tilde{x}_{m_h}\|^2$ , y esto no puede pasar puesto que  $x_{m_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x$ . Luego, por la densidad de la sucesión  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\mathcal{H}$ , debe ser  $x = 0$ , lo cual es absurdo.

Sea  $A_{n,m} = P_n \dots P_m$ , con  $n > m$ , donde  $P_k$  es la proyección ortogonal sobre  $\langle e_k \rangle^\perp$ . El siguiente lema relaciona la dimensión del espacio  $\mathcal{H}$  con el hecho que  $A_{m,1}$  sea una contracción.

**Lema 3.20.** Sea  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión linealmente densa en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimensión finita y  $\mathcal{S}_m$  el subespacio generado por  $\langle e_1, \dots, e_m \rangle$ . Son equivalentes:

1.  $\mathcal{H} = \mathcal{S}_{m_0}$  con  $m_0 \in \mathbb{N}$ ,
2.  $\|A_{m_0,1}\| < 1$ .

*Demostración.* Sea  $m_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{S}_{m_0} = \mathcal{H}$ . Si  $\|A_{m_0,1}\| = 1$ , existe  $x_0 \in \mathcal{H}$ , con  $\|x_0\| = 1$ , tal que  $\|A_{m_0,1}x_0\| = 1$ . Entonces

$$1 = \|P_{m_0}P_{m_0-1} \cdots P_1x_0\| \leq \prod_{k=2}^{m_0} \|P_k\| \cdot \|P_1x_0\| \leq 1, \quad (3.17)$$

y por lo tanto  $\|P_1x_0\| = 1$ . Luego,

$$1 = \|x_0\|^2 = \|x_0 - P_1x_0\|^2 + \|P_1x_0\|^2 \geq \|P_1x_0\|^2 = 1,$$

lo cual implica que  $\|x_0 - P_1x_0\|^2 = 0$  y por lo tanto  $x_0 \in \langle e_1 \rangle^\perp$ . Luego, reemplazando en (3.17) tenemos que

$$1 = \|P_{m_0}P_{m_0-1} \cdots P_1x_0\| = \|P_{m_0}P_{m_0-1} \cdots P_2x_0\| \leq \prod_{k=3}^{m_0} \|P_k\| \cdot \|P_2x_0\| \leq 1,$$

entonces, al igual que para  $k = 1$ , deducimos que  $x_0 \in \langle e_2 \rangle^\perp$ . Utilizando el mismo argumento para  $k = 3, \dots, m_0$  concluimos que  $x_0 \in \langle e_k \rangle^\perp$  para todo  $k = 1, \dots, m_0$ . Por densidad de la sucesión  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  debe ser  $x_0 = 0$ , lo cual es absurdo pues  $\|x_0\| = 1$ . Luego,  $\|A_{m_0,1}\| < 1$ .

Recíprocamente, si existe  $m_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\|A_{m_0,1}\| < 1$  entonces  $A_{m_0,1}^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{SOT} 0$ . Luego, por el Teorema 2.4, tenemos que  $M = \bigcap_{k=1}^{m_0} \langle e_k \rangle^\perp = \{0\}$ . Por lo tanto,  $\mathcal{H} = \mathcal{S}_{m_0}$ . ■

**Proposición 3.21.** Si  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión casi periódica y linealmente densa en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimensión finita entonces  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es efectiva en  $\mathcal{H}$ .

*Demostración.* Dado que la sucesión  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es densa, existe  $m > 0$  tal que  $\mathcal{H} = \langle e_1, \dots, e_m \rangle$ . En tal caso, por el Lema 3.20, sabemos que  $\|A_{m,1}\| = \alpha < 1$ . Tomemos  $\beta \in (\alpha, 1)$  y elijamos  $\varepsilon > 0$  de modo que si  $(T_1, \dots, T_m)$  y  $(S_1, \dots, S_m)$  son dos  $n$ -uplas de operadores de la bola unidad de  $L(\mathcal{H})$  que verifican

$$\|T_j - S_j\| \leq \varepsilon,$$

para todo  $j \in \{1, \dots, m\}$ , entonces se tiene que

$$\|T_m \dots T_1 - S_m \dots S_1\| \leq \beta - \alpha.$$

Sea  $M \geq m$  de modo que cada intervalo de longitud  $M$  de números enteros contiene al menos un  $\varepsilon$ -periodo de la sucesión  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Si denotamos por medio de  $\tau_k$  al  $\varepsilon$ -periodo comprendido entre  $[(2k-1)M, 2kM]$ , entonces

$$\tau_{k+1} - \tau_k > M \geq m.$$

Luego, usando la submultiplicatividad de la norma de operadores y que los proyectores tienen norma uno, por la elección que hicimos de  $\varepsilon$  se tiene que

$$\|A_{2nM,1}\| \leq \prod_{k=1}^n \|A_{\tau_k+m, \tau_k}\| \leq \beta^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Como la sucesión  $\{A_n\}$  es decreciente, resulta que toda la sucesión tiende a cero y por ende  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  resulta efectiva. ■



## Capítulo 4

# Matrices positivas en el espacio de Hardy

Como vimos en el capítulo de preliminares, dada  $f \in H^2(\mathbb{D})$  existe una única función  $f^* \in L^2(\mathbb{T})$  tal que

$$f^*(w) = \lim_{\angle z \rightarrow \omega} f(z),$$

para  $m$ -c.t.p. sobre  $\mathbb{T}$ . Además,  $f^*$  satisface que

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \|f^* - f_r\|_{L^2(\mathbb{T}, m)} = 0,$$

donde  $f_r(\omega) = f(r\omega)$ , con  $r \in (0, 1)$ . En particular, dicha extensión al borde existe para los núcleos reproductores y por ser los espacios  $H^2(\mathbb{D})$  y  $H^2(\mathbb{T})$  isométricos podemos escribirlos de la siguiente manera

$$k_z(w) = \langle k_z, k_w \rangle_{H^2} = \int_{\mathbb{T}} k_z^*(\xi) \overline{k_w^*(\xi)} dm(\xi).$$

Es decir, los núcleos reproductores se reproducen a sí mismos a partir de sus extensiones al borde con respecto a la medida de Lebesgue. En el presente capítulo, dado un núcleo  $k$  contenido en  $H^2$  vamos a estudiar el conjunto de medidas respecto a las cuales existe una extensión sobre el borde de  $k$  y se reproduce a sí mismo. En particular, si  $k$  es el núcleo reproductor de un subespacio modelo, probamos que tales medidas son las medidas  $\mu$  para las cuales el subespacio modelo está isométricamente contenido en  $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ .

**Definición 4.1.** *Sea  $\mu$  una medida finita de Borel sobre  $\mathbb{T}$ . Dada una función  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  diremos que  $f^* \in L^2(\mathbb{T}, \mu)$  es una **extensión** de  $f$  si*

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \|f^* - f_r\|_{L^2(\mathbb{T}, \mu)} = 0, \tag{4.1}$$

donde  $f_r = f(r \cdot)$ .

Consideremos un núcleo definido positivo  $k : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ . Como hemos mencionado en la sección 1.2 de preliminares, dado  $z \in \mathbb{D}$  fijo, denotaremos  $k_z$  a la función definida sobre  $\mathbb{D}$  como  $k_z(\cdot) = k(\cdot, z)$ . Si  $\mu$  es una medida positiva de Borel sobre  $\mathbb{T}$  con respecto a la cual las funciones  $k_z$ , con  $z \in \mathbb{D}$ , admiten una extensión al borde en  $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ , decimos que  $k$  se reproduce a sí mismo con respecto a  $\mu$  si

$$k_z(w) = \int_{\mathbb{T}} k_z^*(\zeta) \overline{k_w^*(\zeta)} d\mu(\zeta).$$

**Definición 4.2.** Dado un núcleo fijo  $k$ , denotaremos  $M(k)$  al conjunto de todas las medidas positivas de Borel sobre  $\mathbb{T}$  con respecto a las cuales  $k$  se reproduce a sí mismo.

### Ejemplos 4.3.

- El núcleo de Szegő se reproduce a sí mismo con respecto a la medida de Lebesgue.
- Sea  $\varphi$  una función interna y  $k^\varphi$  el núcleo reproductor del espacio modelo  $\mathcal{H}(\varphi)$ . Veremos que  $k^\varphi$  no solo se reproduce a sí mismo con respecto a la medida de Lebesgue, sino que también se reproduce a sí mismo con respecto a las medidas de Clark asociadas a  $\varphi$ .

El primero de los objetivos en este capítulo será relacionar el conjunto  $M(k^\varphi)$ , correspondiente al núcleo reproductor del espacio modelo  $\mathcal{H}(\varphi)$ , con el conjunto  $\text{Iso}(\varphi)$  introducido por Aleksandrov en [3] que definimos a continuación.

**Definición 4.4.** Dada una función interna  $\varphi$ , el conjunto  $\text{Iso}(\varphi)$  consiste de aquellas medidas positivas  $\mu$  sobre  $\mathbb{T}$  tales que para toda  $g \in \mathcal{A}(\varphi)$  (ver (1.7)) se satisface que

$$\int_{\mathbb{T}} |g^*|^2 d\mu = \|g\|_{H^2}^2, \quad (4.2)$$

donde  $g^*$  denota la restricción de  $g$  a  $\mathbb{T}$ .

Si  $g \in \mathcal{A}(\varphi)$ , notar que las funciones  $g_r$  convergen uniformemente a la restricción  $g^*$ . Dado que  $\mu \in \text{Iso}(\varphi)$  es finita, la convergencia uniforme implica que

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \|g^* - g_r\|_{L^2(\mathbb{T}, \mu)} = 0.$$

Por lo tanto, si  $g \in \mathcal{A}(\varphi)$  la notación  $g^*$  para la restricción sobre el borde es consistente con la notación introducida en (4.1). Además, como este subespacio es denso en  $\mathcal{H}(\varphi)$ , la ecuación (4.2) define una isometría  $\Phi$  de  $\mathcal{H}(\varphi)$  en  $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ . En principio, la acción sobre un elemento  $f \in \mathcal{H}(\varphi) \setminus \mathcal{A}(\varphi)$  es formal. Sin embargo, el siguiente resultado de Aleksandrov [4] muestra que este operador actúa sobre cada  $f \in \mathcal{H}(\varphi)$  por tomar límite no tangencial.

**Teorema 4.5.** Si  $\mu \in \text{Iso}(\varphi)$ , toda  $f \in \mathcal{H}(\varphi)$  posee valor no tangencial en el borde en casi todo punto de  $\mathbb{T}$  con respecto a  $\mu$ .

Notar que por densidad de  $\mathcal{A}(\varphi)$  en  $\mathcal{H}(\varphi)$ , el valor en el borde para  $f \in \mathcal{H}(\varphi)$  dado en el Teorema de Aleksandrov es  $\Phi(f)$ , es decir,

$$\lim_{\angle z \rightarrow \omega} f(z) = \Phi(f)(\omega),$$

en  $\mu$ -casi todo  $\omega \in \mathbb{T}$ .

El siguiente teorema es el primero de los principales resultados del presente capítulo.

**Teorema 4.6.** Sea  $\varphi$  una función interna y  $k^\varphi$  el núcleo reproductor del espacio modelo  $\mathcal{H}(\varphi)$ . Entonces,  $M(k^\varphi) = \text{Iso}(\varphi)$ . Más aún, para toda  $f \in \mathcal{H}(\varphi)$

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \|\Phi(f) - f_r\|_{L^2(\mathbb{T}, \mu)} = 0.$$



Dado que las combinaciones lineales de los núcleos reproductores  $k_z^\varphi$  son densas en  $\mathcal{H}(\varphi)$ , este resultado es bastante natural. La principal dificultad en la prueba del Teorema 4.6 es tratar con las diferentes nociones de valor de borde usadas en la definición de los conjuntos  $M(k^\varphi)$  y  $\text{Iso}(\varphi)$ . Por un lado, en la definición de  $M(k^\varphi)$  la extensión de los núcleos reproductores está definida mediante restricciones del límite radial en  $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ . Por otra parte, en el caso de  $\text{Iso}(\varphi)$ , como hemos mencionado en el Teorema de Aleksandrov, la definición de valor de borde está dada mediante límites no tangenciales. Para poder lidiar con estas dificultades necesitamos algunos resultados previos.

Recordemos que dada una medida de Borel (compleja) sobre  $\mathbb{T}$  se define la transformada de Cauchy de  $\mu$  como

$$K(\mu)(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{1 - z\bar{\zeta}} d\mu(\zeta),$$

donde  $z \in \mathbb{D}$ . Por un conocido teorema de Smirnov,  $K(\mu) \in H^p$  para todo  $p \in (0, 1)$  (ver por ejemplo [53, Teorema 4.2.2], [8, Teorema 2.1.10]). Diremos que una función interna  $\varphi$  es un divisor de una función  $f \in H^p$  si  $f\varphi^{-1} \in H^p$  para algún  $p$ . Notar que esta definición es compatible con la noción de división entre funciones internas dada en la sección 1.4. El siguiente resultado fue probado por Aleksandrov en [3].

**Proposición 4.7.** Sean  $\mu$  una medida de Borel (compleja) sobre  $\mathbb{T}$  y  $\varphi$  una función interna. Si  $\varphi$  es un divisor de  $K(\mu)$  entonces toda función  $f$  en  $\mathcal{H}(\varphi) \cap H^\infty$  tiene límite no tangencial en  $|\mu|$ -casi todo punto sobre  $\mathbb{T}$  y para este valor de borde se cumple que

$$\int_{\mathbb{T}} \overline{f(\zeta)} d\mu(\zeta) = 0.$$

Notar que, en particular, como una consecuencia de la proposición anterior, todos los núcleos reproductores tienen límite no tangencial en  $|\mu|$ -casi todo punto sobre  $\mathbb{T}$ . Usando este resultado podemos probar el siguiente lema técnico.

**Lema 4.8.** Si  $\mu \in M(k^\varphi)$  entonces existe  $\varphi^* \in L^\infty(\mathbb{T}, \mu)$  tal que

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \|\varphi^* - \varphi_r\|_{L^2(\mathbb{T}, \mu)} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\angle z \rightarrow \omega} \varphi(z) = \varphi^*(\omega),$$

para  $\mu$ -casi todo  $\omega \in \mathbb{T}$ .

*Demostración.* Sea  $z \in \mathbb{D}$  tal que  $\varphi(z) \neq 0$ . Dado que  $k_z^\varphi(w) = \frac{1 - \overline{\varphi(z)}\varphi(w)}{1 - \bar{z}w}$  y

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \|(k_z^\varphi)^* - (k_z^\varphi)_r\|_{L^2(\mathbb{T}, \mu)} = 0,$$

por cálculos directos se obtiene que

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \|\varphi^* - \varphi_r\|_{L^2(\mathbb{T}, \mu)} = 0,$$

para alguna función medible  $\varphi^* : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ . Veamos que  $\varphi$  converge a  $\varphi^*$  no tangencialmente en casi todo punto con respecto a  $\mu$ . Puesto que existe una sucesión  $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\{\varphi_{r_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge en  $\mu$ -casi todo punto a  $\varphi^*$  podemos concluir que  $|\varphi^*(\omega)| \leq 1$  para casi todo  $\omega \in \mathbb{T}$ . Además, para todo  $z \in \mathbb{D}$

$$(k_z^\varphi)^*(\omega) = \frac{1 - \overline{\varphi(z)}\varphi^*(\omega)}{1 - \bar{z}\omega}$$

donde la identidad es considerada en  $\mu$ -casi todo punto sobre  $\mathbb{T}$ . Dado que  $\mu \in M(k^\varphi)$  sabemos que

$$\int_{\mathbb{T}} \left| \frac{1 - \overline{\varphi(z)}\varphi^*(\zeta)}{1 - \overline{z}\zeta} \right|^2 d\mu(\zeta) = \frac{1 - |\varphi(z)|^2}{1 - |z|^2}.$$

Siguiendo la idea utilizada por Aleksandrov en la demostración del Teorema 2 en [3], definimos la función  $\Gamma : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$\Gamma(z, w) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - \overline{\varphi(z)}\varphi^*(\zeta)}{1 - z\zeta} \frac{1 - \varphi(w)\overline{\varphi^*(\zeta)}}{1 - w\overline{\zeta}} d\mu(\zeta) - \frac{1 - \overline{\varphi(z)}\varphi(w)}{1 - zw}.$$

Esta función es holomorfa en el bidisco y  $\Gamma(\overline{z}, z) = 0$ . Por lo tanto,  $\Gamma(z, w)$  es idénticamente igual a cero en  $\mathbb{D}^2$ , en particular

$$0 = \overline{\Gamma(\overline{z}, 0)} = \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - \varphi(z)\overline{\varphi^*(\zeta)}}{1 - z\overline{\zeta}} \left(1 - \overline{\varphi(0)}\varphi^*(\zeta)\right) d\mu(\zeta) - \left(1 - \varphi(z)\overline{\varphi(0)}\right). \quad (4.3)$$

Si  $\mu = \mu_s + \mu_{ac}$  es la descomposición de Lebesgue de  $\mu$  con respecto a la medida de Lebesgue  $m$  sobre  $\mathbb{T}$ , entonces

$$\begin{aligned} 1 - \varphi(z)\overline{\varphi(0)} &= \left\langle 1 - \varphi\overline{\varphi(0)}, k_z^\varphi \right\rangle_{\mathcal{H}(\varphi)} = \left\langle 1 - \varphi^*\overline{\varphi(0)}, (k_z^\varphi)^* \right\rangle_{L^2(\mathbb{T}, m)} \\ &= \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - \varphi(z)\overline{\varphi^*(\xi)}}{1 - z\overline{\xi}} \left(1 - \varphi^*(\xi)\overline{\varphi(0)}\right) dm(\xi) \\ &= \int_{\text{sop}(\mu_s)^c} \frac{1 - \varphi(z)\overline{\varphi^*(\xi)}}{1 - z\overline{\xi}} \left(1 - \varphi^*(\xi)\overline{\varphi(0)}\right) dm(\xi). \end{aligned}$$

Luego, si definimos

$$\nu = (1 - \overline{\varphi(0)}\varphi^*)(\mu - \chi_{\text{sop}(\mu_s)^c} m),$$

entonces la identidad en (4.3) se puede escribir como

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{1 - \varphi(z)\overline{\varphi^*(\zeta)}}{1 - z\overline{\zeta}} d\nu(\zeta) = 0. \quad (4.4)$$

Observar que la parte singular de  $\mu$  y  $\nu$  son mutuamente absolutamente continuas. Como hemos mencionado en la sección de preliminares,

$$\lim_{\angle z \rightarrow \omega} \varphi(z) = \varphi^*(\omega)$$

se satisface para  $m$ -casi todo  $\omega \in \mathbb{T}$ . Por lo tanto, solo resta probar que el límite no tangencial se verifica en  $|\nu|$ -casi todo punto, ya que esto implica que el límite se satisface en  $\mu_s$ -casi todo punto también. Con este propósito, notar que la identidad (4.4) se puede reescribir como

$$K(\nu)(z) = \varphi(z)K(\overline{\varphi^*}\nu)(z).$$

Luego, si aplicamos la Proposición 4.7 a la medida  $\nu$ , tenemos que para todo  $z \in \mathbb{D}$

$$\lim_{\angle w \rightarrow \zeta} k_z^\varphi(w) = (k_z^\varphi)^*(\zeta),$$

lo cual de forma directa implica que el límite  $\lim_{\angle z \rightarrow \omega} \varphi(z) = \varphi^*(\omega)$  también se satisface para  $|\nu|$ -casi todo punto. ■

Como consecuencia de este lema, más precisamente como consecuencia de su demostración, tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 4.9.** Sea  $\mu \in M(k^\varphi)$ . Dado  $z \in \mathbb{D}$

$$(k_z^\varphi)^*(\omega) = \frac{1 - \overline{\varphi(z)}\varphi^*(\omega)}{1 - \overline{z}\omega},$$

para  $\mu$ -casi todo  $\omega \in \mathbb{T}$ .

Para concluir la demostración del Teorema 4.6, necesitamos también el siguiente resultado de Aleksandrov [3].

**Teorema 4.10.** Si  $\mu$  es una medida positiva sobre  $\mathbb{T}$  y  $\varphi$  es una función interna entonces son equivalentes:

- i.)  $\mu \in \text{Iso}(\varphi)$ .
- ii.) La función  $\varphi$  tiene valores de borde angulares en  $\mu$ -casi todo punto sobre  $\mathbb{T}$  y para todo  $z \in \mathbb{D}$

$$\int_{\mathbb{T}} \left| \frac{1 - \overline{\varphi(z)}\varphi(\zeta)}{1 - \overline{z}\zeta} \right|^2 d\mu(\zeta) = \frac{1 - |\varphi(z)|^2}{1 - |z|^2}.$$

- iii.) Existe una función  $\theta \in H^\infty$  tal que  $\|\theta\|_{H^\infty} \leq 1$  y para todo  $z \in \mathbb{D}$

$$\int_{\mathbb{T}} P_z(\zeta) d\mu(\zeta) = \text{Re} \left( \frac{1 + \theta(z)\varphi(z)}{1 - \theta(z)\varphi(z)} \right).$$

**Observación 4.11.** Notar que por el ítem (iii), si  $\mu \in \text{Iso}(\varphi)$  entonces

$$\|\mu\| = \text{Re} \left( \frac{1 + \theta(0)\varphi(0)}{1 - \theta(0)\varphi(0)} \right) = \frac{1 - |\theta(0)\varphi(0)|^2}{|1 - \theta(0)\varphi(0)|^2}.$$

Por lo tanto,  $\text{Iso}(\varphi)$  está incluido en la bola de radio  $R = (1 - |\varphi(0)|)^{-2}$ . En particular,  $\text{Iso}(\varphi)$  es  $w^*$ -compacto.

En el Teorema 4.6, la prueba de la convergencia  $\|\Phi(f) - f_r\|_{L^2(\mathbb{T}, \mu)} \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0$  para todo  $f \in \mathcal{H}(\varphi)$ , cuando  $\mu \in \text{Iso}(\varphi)$ , sigue esencialmente las ideas descritas en [58] para medidas de Clark. Sin embargo, daremos una prueba detallada adaptada a nuestra situación. Antes, demostraremos los siguientes resultados técnicos.

**Lema 4.12.** Sea  $g \in \mathcal{H}(\varphi)$  y  $g_n$  la  $n$ -ésima suma parcial de su expansión de Taylor en  $\mathbb{D}$ . Si  $\mu \in \text{Iso}(\varphi)$  se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi(g) - g_n\|_{L^2(\mathbb{T}, \mu)} = 0.$$

*Demostración.* Recordemos que, si  $S^*$  denota el operador adjunto del operador shift, entonces  $S^*g \in \mathcal{H}(\varphi)$ . Luego, por el Teorema 4.5, para  $\mu$ -casi todo  $\omega \in \mathbb{T}$

$$g_n(\omega) = \Phi(g)(\omega) - \omega^{n+1}\Phi((S^*)^{(n+1)}g)(\omega). \quad (4.5)$$

Por lo tanto,

$$\|\Phi(g) - g_n\|_{L^2(\mu)} = \left\| \Phi \left( (S^*)^{(n+1)}g \right) \right\|_{L^2(\mu)} = \left\| (S^*)^{(n+1)}g \right\|_{H^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

■

**Lema 4.13.** Sea  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números reales que converge a  $\alpha$ . Entonces

$$\limsup_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (r^n - r^{n+1}) = \alpha.$$

*Demostración.* Sea  $\lambda_n = r^n - r^{n+1}$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\alpha = 0$  ya que por ser  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = 1$  se cumple que

$$\alpha - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha - \alpha_n) \lambda_n.$$

Luego, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \geq 0$  tal que  $|\alpha_n| < \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0$ , entonces por la desigualdad de Jensen

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| \lambda_n = \sum_{n=0}^{n_0} |\alpha_n| \lambda_n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |\alpha_n| \lambda_n \leq \sum_{n=0}^{n_0} |\alpha_n| \lambda_n + \varepsilon.$$

Dado que  $\lambda_n$  tiende a cero cuando  $r \rightarrow 1^-$ ,

$$\limsup_{r \rightarrow 1^-} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda_n \right| \leq \left( \limsup_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{n_0} |\alpha_n| \lambda_n \right) + \varepsilon = \varepsilon.$$

■

**Comentario 4.14.** Recordemos la fórmula de suma por partes de Abel:

$$\begin{aligned} \sum_m^n a_k (b_{k+1} - b_k) &= a_m (b_{m+1} - b_m) + a_{m+1} (b_{m+2} - b_{m+1}) + \dots + a_n (b_{n+1} - b_n) \\ &= -a_m b_m + b_{m+1} (a_m - a_{m+1}) + \dots + b_n (a_{n-1} - a_n) + a_n b_{n+1} \\ &= a_n b_{n+1} - a_m b_m - \sum_{k=m+1}^n b_k (a_k - a_{k-1}). \end{aligned}$$

*Demostración del Teorema 4.6.* Dada  $\mu \in \text{Iso}(\varphi)$ , sea  $g$  una función holomorfa definida sobre  $\mathbb{D}$  y supongamos que

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

es la expansión de Taylor de  $g$  en  $\mathbb{D}$ . Aplicando la fórmula de sumación de Abel para  $c_k \zeta^k = b_{k+1} - b_k$  y  $r^k = a_k$  obtenemos que

$$\begin{aligned} g_r(\zeta) &= g(r\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k \zeta^k \\ &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} r^n \sum_{j=0}^{n+1} c_j \zeta^j \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{k-1} c_n \zeta^n \right) (r^k - r^{k-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^k c_n \zeta^n \right) (r^k - r^{k+1}). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|g_r\|_{L^2(\mu)}^2 = \int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^k c_n \zeta^n \right) (r^k - r^{k+1}) \right|^2 d\mu(\zeta).$$

Observar que  $\sum_{k=0}^{\infty} (r^k - r^{k+1}) = 1$ , por lo tanto usando la desigualdad de Jensen tenemos que

$$\begin{aligned} \|g_r\|_{L^2(\mu)}^2 &\leq \int_{\mathbb{T}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n=0}^k c_n \zeta^n \right|^2 (r^k - r^{k+1}) d\mu(\zeta) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{n=0}^k c_n \zeta^n \right|^2 d\mu(\zeta) \right) (r^k - r^{k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \|g_k\|_{L^2(\mu)}^2 (r^k - r^{k+1}). \end{aligned}$$

Sean  $\varepsilon > 0$  y  $f \in \mathcal{H}(\varphi)$ . Por el Lema 4.12, existe  $n \geq 1$  tal que

$$\|\Phi(f) - f_n\|_{L^2(\mu)} < \frac{\varepsilon}{4},$$

donde  $f_n$  denota la  $n$ -ésima suma parcial de la expansión de Taylor en  $\mathbb{D}$  de la función  $f$ . Además, podemos tomar este  $n$  de manera que la desigualdad

$$\|\Phi((S^*)^{(n+1)}f)\|_{L^2(\mu)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

también se satisfaga. Por otra parte, dado que la medida  $\mu$  es finita, existe  $r_0 \in (0, 1)$  tal que

$$\|f_n - (f_n)_r\|_{L^2(\mu)} < \frac{\varepsilon}{4},$$

para todo  $r \in (r_0, 1)$ . Por lo tanto, obtenemos que

$$\begin{aligned} \|\Phi(f) - f_r\|_{L^2(\mu)} &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|f_r - (f_n)_r\|_{L^2(\mu)} = \frac{\varepsilon}{2} + \|(f - f_n)_r\|_{L^2(\mu)} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \left( \sum_{k=0}^{\infty} \|(f - f_n)_k\|_{L^2(\mu)}^2 (r^k - r^{k+1}) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Utilizando (4.5), un cálculo directo muestra que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|(f - f_n)_k\|_{L^2(\mu)}^2 = \|\Phi((S^*)^{(n+1)}f)\|_{L^2(\mu)}^2.$$

Entonces, por el Lema 4.13, tenemos que

$$\limsup_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} \|(f - f_n)_k\|_{L^2(\mu)}^2 (r^k - r^{k+1}) = \|\Phi((S^*)^{(n+1)}f)\|_{L^2(\mu)}^2.$$

En consecuencia,

$$\limsup_{r \rightarrow 1^-} \|\Phi(f) - f_r\|_{L^2(\mu)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|\Phi((S^*)^{n+1}f)\|_{L^2(\mu)} \leq \varepsilon.$$

En particular esto se cumple para los núcleos reproductores. Por otra parte, puesto que los espacios  $\mathcal{H}(\varphi)$  y  $L^2(\mathbb{T}, \mu)$  son isométricos por definición de  $\text{Iso}(\varphi)$ , los núcleos claramente se reproducen a sí mismos con respecto a  $\mu$ .

Recíprocamente, si  $\mu \in M(k^\varphi)$ , por el Lema 4.8 y el Corolario 4.9, tenemos que la condición (ii) del Teorema 4.10 se satisface. Por lo tanto,  $\mu \in \text{Iso}(\varphi)$ . ■

Ahora veremos algunas consecuencias del Teorema 4.6. La primera de ellas se debe al Teorema 1.54 de Poltoratskii y por ser  $V_\mu$  un operador unitario.

**Corolario 4.15.** Todas las medidas de Clark  $\mu_\alpha^\varphi$  pertenecen a  $M(k^\varphi)$ .

Por otra parte, en [28], Herr et. al. prueban que si  $k$  es un núcleo positivo incluido en un espacio modelo  $\mathcal{H}(\varphi)$ , es decir  $k_z \in \mathcal{H}(\varphi)$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ , y la medida de Clark  $\mu_1^\varphi \in M(k)$  entonces  $\mu_1^{\varphi^n} \in M(k)$ , para todo  $n \geq 0$ . La siguiente proposición da una generalización de este resultado.

**Proposición 4.16.** Sean  $\varphi$  una función interna y  $k$  un núcleo positivo incluido en  $\mathcal{H}(\varphi)$ . Si  $\mu_1^\varphi \in M(k)$  y  $\psi$  es una función interna tal que  $\varphi|\psi$  entonces  $\mu_\alpha^\psi \in M(k)$  para todo  $\alpha \in \mathbb{T}$ .

*Demostración.* Basta probar el resultado para  $\alpha = 1$  (ver el párrafo anterior al Corolario 3.16). Si  $\psi$  es una función interna tal que  $\varphi|\psi$  entonces  $\mathcal{H}(\varphi) \subseteq \mathcal{H}(\psi)$ , por lo tanto  $k \subseteq \mathcal{H}(\psi)$ . Luego,  $k_z^* \in L^2(\mu_1^\varphi) \cap L^2(\mu_1^\psi)$  (definido por el límite no tangencial así como también por el límite radial en  $L^2$ ) y cumple que

$$\begin{aligned} k_z(w) &= \langle k_z^*, k_w^* \rangle_{L^2(\mu_1^\varphi)} = \langle k_z, k_w \rangle_{\mathcal{H}(\varphi)} = \langle k_z, k_w \rangle_{H^2} \\ &= \langle k_z, k_w \rangle_{\mathcal{H}(\psi)} = \langle k_z^*, k_w^* \rangle_{L^2(\mu_1^\psi)} = \int_{\mathbb{T}} k_z^*(\zeta) \overline{k_w^*(\zeta)} d\mu_1^\psi(\zeta), \end{aligned}$$

donde la primera igualdad la obtenemos por la hipótesis  $\mu_1^\varphi \in M(k)$ , la segunda y la quinta por la isometría  $V_1$ , la tercera y la cuarta por coincidir las normas en  $H^2$  y en  $\mathcal{H}(\varphi)$ . ■

Notemos que, en el resultado de Herr et. al., podemos escribir  $\varphi^n$  como la composición  $z^n \circ \varphi$ . Luego, como consecuencia de la Proposición 1.41 y la Proposición 4.16 obtenemos la siguiente versión sobre el resultado de Herr, Weber y Jorgensen antes mencionado.

**Corolario 4.17.** Sean  $\vartheta$  una función interna tal que  $\vartheta(0) = 0$  y  $k$  un núcleo positivo en  $H^2$  el cual está incluido en  $\mathcal{H}(\varphi)$ . Si  $\mu_1^\varphi \in M(k)$  entonces la función  $\psi = \vartheta \circ \varphi$  es interna y  $\mu_\alpha^\psi \in M(k)$  para todo  $\alpha \in \mathbb{T}$ .

*Demostración.* Como  $\vartheta(0) = 0$ , se tiene que  $\tilde{\vartheta} = \frac{\vartheta}{z} \in H^2(\mathbb{D})$ . Por el Teorema de Littlewood, el operador composición

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi$$

es un operador acotado de  $H^2(\mathbb{D})$  en sí mismo (ver por ejemplo [63]). Luego,  $\tilde{\vartheta} \circ \varphi \in H^2(\mathbb{D})$ . Dado que  $\psi = \varphi(\tilde{\vartheta} \circ \varphi)$ , concluimos que  $\varphi|\psi$ . Entonces, por la Proposición 4.16,  $\mu_1^\psi \in M(k)$ . Considerando  $\alpha\psi = (\alpha\vartheta) \circ \varphi$  en lugar de  $\psi$ , obtenemos el resultado para las restantes medidas de Clark. ■

**Observación 4.18.** Otra manera de obtener la conclusión del corolario anterior es utilizando las medidas de Clark. Este punto de vista está relacionado con el último resultado en [28]. Sean  $\varphi$  y  $\vartheta$  funciones internas tales que  $\vartheta(0) = 0$ . Como ya hemos mencionado, la composición  $\psi = \vartheta \circ \varphi$  es una función interna. Por otra parte, las medidas de Clark  $\{\mu_\alpha^\psi\}_{\alpha \in \mathbb{T}}$  están dadas por la siguiente fórmula

$$\mu_\alpha^\psi = \int_{\mathbb{T}} d\mu_\beta^\varphi d\mu_\alpha^\vartheta(\beta).$$

En efecto, para distintos valores de  $\alpha \in \mathbb{T}$ , sean  $\mu_\alpha^\vartheta$ ,  $\mu_\alpha^\psi$ , y  $\mu_\alpha^\varphi$  las medidas de Clark de  $\vartheta$ ,  $\psi$ , y  $\varphi$ , respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} d\mu_\alpha^\psi(\zeta) &= \frac{1 - |\psi(z)|^2}{|\alpha - \psi(z)|^2} = \frac{1 - |\vartheta \circ \varphi(z)|^2}{|\alpha - \vartheta \circ \varphi(z)|^2} \\ &= \frac{1 - |\vartheta(\varphi(z))|^2}{|\alpha - \vartheta(\varphi(z))|^2} = \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |\varphi(z)|^2}{|\beta - \varphi(z)|^2} d\mu_\alpha^\vartheta(\beta) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} d\mu_\beta^\varphi(\zeta) d\mu_\alpha^\vartheta(\beta). \end{aligned}$$

Luego,

$$\int_{\mathbb{T}} P_z(\zeta) d\mu_\alpha^\psi(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} P_z(\zeta) d\mu_\beta^\varphi(\zeta) d\mu_\alpha^\vartheta(\beta).$$

Obtenemos el resultado por ser la familia  $\{P_z\}_{z \in \mathbb{D}}$  densa en  $C(\mathbb{T})$ . Dado que  $\vartheta(0) = 0$ , sus medidas de Clark son de probabilidad. Entonces, se cumple que

$$\mu_\alpha^\psi \in \overline{\text{c.c.} \left( \left\{ \mu_\beta^\varphi \right\}_{\beta \in \mathbb{T}} \right)}.$$

Por el Teorema 4.6, cada medida de Clark  $\mu_\beta^\varphi$  está incluida en  $M(k^\varphi) = \text{Iso}(\varphi)$ . Puesto que  $\text{Iso}(\varphi)$  es convexo y  $w^*$ -cerrado (ver [3] u Observación 4.11), se verifica que  $\mu_\alpha^\psi \in M(k^\varphi) \subset M(k)$  para todo  $\alpha \in \mathbb{T}$ .





## Parte II

# Conjuntos de muestreo y de interpolación universales en grupos localmente compactos abelianos



# Introducción

Como hemos mencionado en la Introducción general, las nociones de espacio de Paley-Wiener, conjunto de muestreo y de interpolación se extienden a grupos más generales que  $\mathbb{R}^d$ .

Sea  $G$  un grupo localmente compacto abeliano y  $\Omega$  un subconjunto precompacto medible Borel del grupo dual  $\widehat{G}$ . Análogamente a la definición dada en  $\mathbb{R}^d$ , el espacio de Paley-Wiener  $PW_\Omega$  consiste de todas las funciones cuadrado integrables definidas sobre  $G$  cuya transformada de Fourier se anula en casi todo punto del complemento de  $\Omega$ . En este contexto, el espacio  $PW_\Omega$  también resulta ser un espacio de Hilbert con núcleo reproductor. Por otra parte, un conjunto  $\Lambda \subseteq G$  se denomina conjunto estable de muestreo para  $PW_\Omega$  si existen constantes  $A, B > 0$  de modo que para toda  $f \in PW_\Omega$  se cumple que

$$A \|f\|_2^2 \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)|^2 \leq B \|f\|_2^2.$$

Un conjunto  $\Gamma$  se dice conjunto de interpolación estable para  $PW_\Omega$  si para cualquier  $\{c_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \in \ell^2(\Gamma)$  el problema de interpolación

$$f(\gamma) = c_\gamma$$

tiene una solución  $f \in PW_\Omega$ . Recordemos que dichos conjuntos se denominan universales si son conjuntos de muestreo estable y de interpolación estable para cualquier espacio  $PW_\Omega$  para el cual  $m_{\widehat{G}}(\Omega) < \mathcal{D}(\Lambda)$  y  $m_{\widehat{G}}(\Omega) > \mathcal{D}(\Gamma)$ , respectivamente, donde  $m_{\widehat{G}}$  denota la medida de Haar de  $\widehat{G}$  y  $\mathcal{D}$  la densidad uniforme.

Mediante la transformada de Fourier, sigue siendo válida la equivalencia mencionada en la Introducción general entre conjuntos de muestreo e interpolación y marcos de exponenciales, considerando en este caso caracteres en lugar de exponenciales. Más precisamente, un conjunto  $\Lambda$  es de muestreo o de interpolación para el espacio  $PW_\Omega$  si y sólo si la familia de núcleos reproductores  $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es un marco o una sucesión de Riesz para  $PW_\Omega$ . Luego, el conjunto de caracteres  $\{e_{\lambda\chi_\Omega}\}_{\lambda \in \Lambda}$  será un marco o una sucesión de Riesz para  $L^2(\Omega)$ , respectivamente.

El principal objetivo de la presente parte del trabajo es probar la existencia de conjuntos de muestreo estables universales y de interpolación estables universales en grupos que no poseen necesariamente cuasi-cristales. La estrategia seguida para demostrarlo está basada en la idea utilizada en [1] para probar la existencia de conjuntos de muestreo e interpolación con densidades arbitrariamente cercanas a la densidad crítica para el espacio de Paley-Wiener en grupos. Dado un conjunto compacto  $\Omega$  de  $\widehat{G}$  con medida fija queremos hallar un conjunto  $\tilde{\Omega}$  tal que en el caso de muestreo contenga a  $\Omega$  y en el caso de interpolación esté contenido en  $\Omega$  de manera que  $L^2(\tilde{\Omega})$  admita una base de Riesz de caracteres con frecuencias en el conjunto  $\Lambda$ . De esta forma, en el primer caso la base de Riesz será un marco en  $L^2(\Omega)$  y en el segundo una sucesión de Riesz en  $L^2(\Omega)$ .

Sin embargo, obtener el conjunto  $\tilde{\Omega}$  en grupos cuyo dual es isomorfo a  $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2} \times K$  puede ser difícil debido al grupo compacto  $K$ . Para sortear esta dificultad vamos a utilizar el siguiente resultado:

Dado un entorno  $U$  de la identidad de  $\widehat{G}$ , existe un subgrupo compacto  $K$  incluido en  $U$  tal que  $\widehat{G}/K$  es elemental, es decir,

$$\widehat{G}/K \cong \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2} \times \mathbb{Z}^{d_3} \times F,$$

donde  $F$  es un grupo finito abeliano.

Luego, en primer lugar, vamos a abordar el problema a resolver para grupos cuyo dual es compactamente generado de tipo Lie, es decir, isomorfos a  $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2} \times \mathbb{Z}^{d_3} \times F$ , siendo  $F$  un grupo finito abeliano (ver Teorema 8.5). En particular, el grupo simple  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{Z}_2^3$  pertenece a esta familia de grupos.

Para probar la existencia del conjunto  $\tilde{\Omega}$ , por un lado utilizaremos un resultado de aproximación de conjuntos compactos por una cantidad finita de cubos cuasi-diádicos dado en [1]. Por el otro, siguiendo las ideas utilizadas por Olevskii y Ulanovskii en [57], un proceso inductivo el cual en el paso  $n$ -ésimo permite obtener una base de Riesz para todos los conjuntos de medida uno que son unión de a lo sumo  $n$  cubos cuasi-diádicos. El resultado se obtiene aplicando alternadamente la extensión del Teorema de Wiener sobre perturbaciones de bases de Riesz a grupos de la forma  $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2} \times D$ , donde  $D$  es un grupo discreto (ver Teorema 7.4) y el teorema sobre existencia de bases de Riesz y multiteselados (Teorema 7.6).

En [1] se probó que si  $\Omega$  es un subconjunto de  $G/K$  tal que  $L^2(\Omega)$  admite una base de Riesz de caracteres y  $\pi$  denota la proyección canónica de  $G$  en  $G/K$  entonces  $L^2(\pi^{-1}(\Omega))$  también admite una base de Riesz de caracteres. Luego, cuando  $\widehat{G}$  no es de tipo Lie, utilizando este resultado y un argumento similar al usado en la prueba del Teorema 8.5 aplicado a  $\widehat{G}/K$  en lugar de  $\widehat{G}$ , obtenemos la demostración del segundo resultado principal de la presente parte del trabajo (ver Teorema 8.6).

La segunda parte de la tesis se encuentra organizada de la siguiente manera:

En el Capítulo 5 recordaremos definiciones y resultados básicos sobre grupos localmente compactos abelianos. En particular, se encuentra el Teorema de Weil, el cual nos da la existencia de la medida de Haar para un grupo cociente, la transformada de Fourier para grupos y el Teorema de inversión. La última sección del capítulo contiene los Teoremas de estructura, los cuales son fundamentales en el trabajo ya que, bajo ciertas hipótesis, nos permiten concentrar nuestro estudio en grupos de la forma  $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2} \times \mathbb{Z}^{d_3} \times F$ , donde  $d_1, d_2, d_3 \geq 0$  y  $F$  es un grupo finito.

En el Capítulo 6 se define el espacio de Paley Wiener en grupos localmente compactos abelianos e introducimos nuestros principales objetos de estudio: los conjuntos de muestreo estable e interpolación estable para dicho espacio. Con el fin de estudiar expansiones de Fourier probaremos que en grupos sigue siendo válida la equivalencia entre conjuntos de muestreo e interpolación y marco y sucesiones de Riesz de núcleos reproductores, respectivamente. Finalizamos el capítulo con las nociones de densidades introducidas por Gröchening et. al. en [24] para grupos. En particular, se prueba que dicha generalización coincide con las densidades de Beurling cuando  $G = \mathbb{R}^d$ .

Como hemos mencionado, la estrategia para probar los principales resultados del trabajo es hallar una base de Riesz de caracteres para  $L^2(\Omega)$ , de cierto conjunto  $\Omega$  del grupo dual. Con este propósito, en el Capítulo 7 por un lado extendemos a grupos de la forma  $G = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2} \times D$ , donde  $D$  es un grupo discreto, el resultado de Paley y Wiener sobre perturbaciones de bases de Riesz. En términos generales, establece que si dos conjuntos  $A$  y  $\tilde{A}$  de  $G$  están “cerca” (ver definición 7.3 para más precisión) y los caracteres en  $A$  forman una base de Riesz entonces también lo hacen los caracteres en  $\tilde{A}$ . Por otra parte, en relación a la conjetura de Fuglede, Grepstad y Lev en [23] y más tarde Kolountzakis en [38] probaron que si  $\Omega$  es un conjunto acotado de  $\mathbb{R}^d$  que multitesela  $\mathbb{R}^d$  con traslaciones de un retículo  $\Lambda$  entonces  $L^2(\Omega)$  admite una base de Riesz de exponenciales. En la sección 7.2 enunciamos la extensión de este resultado a grupos localmente compactos abelianos obtenida en [1].

---

El Capítulo 8 contiene los principales resultados de la segunda parte de la tesis. Comenzamos el mismo con la noción de cubos cuasi-diádicos, los cuales fueron definidos en [1] para aproximar conjuntos compactos arbitrarios de un grupo elemental. En la sección 8.2, demostramos que  $L^2(\Omega)$  admite una base de Riesz de caracteres (Teorema 8.4) si  $\Omega$  es un conjunto de medida uno formado por cubos cuasi-diádicos. Luego, probamos la existencia de conjuntos de muestreo estables universales y de interpolación estables universales para grupos isomorfos a  $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2} \times \mathbb{Z}^{d_3} \times F$ , donde  $F$  es un grupo finito. Por último, si  $G$  es un grupo compactamente generado y  $U$  es un entorno de la identidad de  $\widehat{G}$  probamos la existencia de dichos conjuntos, en el caso de muestreo para el espacio  $PW_\Omega$  para todo  $\Omega$  tal que  $m_{\widehat{G}}(\Omega + U) < \mathcal{D}(\Lambda)$  y en el caso de interpolación para el espacio  $PW_{\Omega+U}$  para todo  $\Omega$  tal que  $m_{\widehat{G}}(\Omega) > \mathcal{D}(\Lambda)$ .



## Capítulo 5

# Preliminares sobre grupos localmente compactos abelianos

En el presente capítulo daremos definiciones y resultados sobre grupos localmente compactos abelianos que utilizaremos a lo largo del trabajo. En particular, se encuentra el Teorema de Weil, el cual utilizaremos en el Capítulo 8 para demostrar uno de los principales resultados obtenidos. Además, repasaremos propiedades del conjunto de morfismos continuos definidos sobre un grupo y recordaremos la definición de transformada de Fourier. Por último veremos que, bajo ciertas condiciones, podremos restringir nuestro estudio a grupos de la forma  $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2} \times \mathbb{Z}^{d_3} \times F$ , donde  $d_1, d_2, d_3 \geq 0$  y  $F$  es un grupo finito. Las pruebas de los resultados contenidos en esta sección se puede encontrar en [60] y [13].

### 5.1. Definiciones y propiedades básicas

Dado un grupo arbitrario  $G$  consideraremos la adición como la operación del grupo, denotaremos  $e$  al elemento neutro y  $-x$  al inverso de  $x$  en  $G$ . Recordemos que una topología  $\tau$  sobre  $G$  se dice Hausdorff si para todo par de puntos distintos  $x, y \in G$  existen entornos disjuntos de  $x$  e  $y$ . Por otra parte, si todo punto de  $G$  tiene un entorno compacto decimos que  $\tau$  es localmente compacta.

**Definición 5.1.** *Sea  $G$  un grupo abeliano dotado de una topología  $\tau$  la cual es Hausdorff y localmente compacta de modo que la aplicación dada por*

$$(x, y) \mapsto x - y$$

*es continua de  $(G \times G, \tau \times \tau)$  en  $(G, \tau)$ . A tal grupo lo llamaremos **grupo localmente compacto abeliano** y utilizaremos la abreviación grupo *LCA*.*

#### Ejemplos 5.2.

- $\mathbb{R}^n$  con la suma y la topología usual.
- $\mathbb{Z}^n$  con la suma y la topología discreta.
- $\mathbb{T}^n$  con la topología producto, considerando a  $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  con la topología heredada de  $\mathbb{C}$ .

En un grupo LCA  $G$  existe una medida  $m$  no negativa regular de Borel la cual no es idénticamente nula y es invariante por traslaciones, es decir,

$$m(E) = m(E + x),$$

para todo  $x \in G$  y todo conjunto de Borel  $E$  contenido en  $G$ . A tal medida la denominaremos **medida de Haar** del grupo y es única salvo productos por escalares positivos. Si el grupo es compacto, la normalizaremos de modo que resulte una medida de probabilidad.

**Notación 5.3.** Dado un grupo LCA  $G$ , notaremos  $m_G$  a la medida de Haar de  $G$ . Obviaremos el subíndice si no hay posibilidad de confusión sobre a qué grupo corresponde la medida.

Fijada la medida de Haar, los espacios  $L^p(G) = L^p(G, m)$ , para  $0 \leq p \leq \infty$ , se definen de la manera usual. La norma en  $L^p(G)$  es invariante por traslaciones, es decir, si  $f \in L^p(G)$  y  $x \in G$ ,

$$\|f_x\|_p = \|f\|_p$$

donde  $f_x(y) = f(y - x)$ , con  $y \in G$ .

**Teorema 5.4.** Si  $1 \leq p < \infty$  y  $f \in L^p(G)$  entonces la aplicación de  $G$  en  $L^p(G)$  dada por

$$x \mapsto f_x$$

es uniformemente continua.

**Definición 5.5.** Sean  $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$  dos funciones medibles Borel y  $x \in G$  tal que

$$\int_G |f(x - y)g(y)| dm(y) < \infty. \quad (5.1)$$

Entonces se define la **convolución** de  $f$  y  $g$  en  $x$  como

$$(f * g)(x) = \int_G f(x - y)g(y)dm(y).$$

En la siguiente proposición listamos algunas propiedades de la convolución que se deducen más o menos inmediatamente de la definición y el Teorema 5.4.

**Proposición 5.6.** Sea  $G$  un grupo LCA.

1. Si se cumple (5.1) para un  $x \in G$  entonces  $(f * g)(x) = (g * f)(x)$ .
2. Si  $f$  y  $g$  son continuas con soporte compacto, entonces  $\text{sop}(f * g) \subseteq \text{sop}(f) + \text{sop}(g)$ .
3. Si  $f \in L^1(G)$  y  $g \in L^\infty(G)$ , entonces  $f * g$  está bien definida, es acotada y uniformemente continua.
4. Si  $1 < p < \infty$  y  $q$  es el exponente conjugado de  $p$ , dadas  $f \in L^p(G)$  y  $g \in L^q(G)$  entonces  $f * g \in C_0(G)$ .
5. Si  $f, g \in L^1(G)$  entonces (5.1) se cumple para  $m$ -ctp. y vale que

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

6. El espacio  $(L^1(G), +, *)$  es un álgebra de Banach conmutativa.



### 5.1.1. Grupo cociente

Si  $H$  es un subgrupo de  $G$ , el conjunto  $G/H$  de todos los cosets de  $H$  resulta un grupo abeliano si definimos

$$(H + x) + (H + y) = H + x + y,$$

con  $x, y \in G$ . Más aún, si  $H$  es cerrado entonces el conjunto  $G/H$  es, en realidad, un grupo LCA.

**Teorema 5.7.** Sea  $G$  un grupo LCA y  $\pi$  la proyección canónica de  $G$  en  $G/H$ , donde  $H$  es un subgrupo cerrado de  $G$ . Un subconjunto de  $G/H$  es abierto si y sólo si es la imagen por  $\pi$  de un subconjunto abierto de  $G$ . Entonces  $G/H$  es un grupo LCA.

*Demostración.* Por definición  $\pi$  es una aplicación continua y abierta, por lo tanto  $G/H$  es localmente compacto. Sean  $x, y \in G$  tales que  $x - y \notin H$ , entonces dado que  $y + H$  es cerrado, existe un entorno  $W$  del elemento neutro  $e$  de  $G$  tal que  $x + W$  no interseca a  $y + H$ . Por ser  $G$  un grupo LCA, existe un entorno simétrico y compacto  $V$  de  $e$  tal que  $V + V \subset W$ , entonces los conjuntos  $x + H + V$  e  $y + H + V$  no se intersecan. Es decir, existen entornos disjuntos de los puntos  $x + H$  e  $y + H$  en  $G/H$ , por lo tanto  $G/H$  es un espacio de Hausdorff. Ahora, veamos que la aplicación  $\phi_H : G/H \times G/H \rightarrow G/H$  es continua. Sea  $U \subseteq G/H$  un conjunto abierto. Consideramos  $\psi = \pi \times \pi$  y  $\phi_G : G \times G \rightarrow G$  la aplicación que asigna la operación del grupo. Por ser  $G$  un grupo topológico,  $\phi_G$  es continua, además dado que  $\pi$  es continua y abierta,  $\psi$  resulta una aplicación abierta. Luego,  $\phi_H^{-1}(U) = \psi\phi_G^{-1}\pi^{-1}(U)$  es abierto en  $G/H \times G/H$ . Por lo tanto,  $\phi_H$  es una aplicación continua. ■

Los conjuntos que se definen a continuación son fundamentales en el presente trabajo.

**Definición 5.8.** Sea  $G$  un grupo LCA. Un **retículo uniforme** en  $G$  es un subgrupo discreto  $H$  tal que  $G/H$  es compacto.

**Definición 5.9.** Sea  $G$  un grupo LCA y  $H$  un retículo uniforme en  $G$ . Una **sección de Borel** de  $G/H$  es un conjunto de representantes de dicho cociente, es decir, es un conjunto  $A$  de  $G$  que contiene exactamente un elemento de cada coset. Luego, cada elemento  $x \in G$  se puede escribir de manera única como  $x = a + h$ , donde  $a \in A$  y  $h \in H$ . Además, se puede probar que existe una única sección de Borel de  $G/H$  relativamente compacta, a la cual se la denomina **dominio fundamental**. (ver [21] y [36]).

### Fórmula integral de Weil

El Teorema Weil prueba la existencia de la medida de Harr sobre el cociente  $G/H$ , siendo  $H$  un subgrupo cerrado de  $G$ . Además, la fórmula integral relaciona funciones integrables en  $G$  con funciones integrables sobre  $G/H$ .

**Teorema 5.10** (Weil). Sean  $G$  un grupo LCA y  $H$  un subgrupo cerrado de  $G$ . Entonces existe una medida invariante  $m_{G/H}$  no nula sobre el cociente  $G/H$  tal que  $m_{G/H}$  es única salvo factor escalar. Dadas las medidas de Harr de  $G$  y  $H$ , existe una única elección de  $m_{G/H}$  tal que para toda  $f \in C_c(G)$  se verifica la fórmula integral para el cociente

$$\int_G f(x) dm_G(x) = \int_{G/H} \int_H f(x + h) dm_H(h) dm_{G/H}(\pi(x)),$$

donde  $\pi$  denota la proyección canónica de  $G$  en  $G/H$ .

**Observación 5.11.** Vamos a asumir esta normalización y llamaremos **medida cociente** a  $m_{G/H}$ .

### 5.1.2. Grupo dual y transformada de Fourier

Si  $G$  es un grupo LCA entonces  $L^1(G)$  resulta ser un álgebra de Banach conmutativa con el producto dado por la convolución. La siguiente proposición relaciona los morfismos sobre  $G$  con los morfismos sobre  $L^1(G)$ .

**Proposición 5.12.** Sea  $G$  un grupo LCA y  $\gamma : G \rightarrow \mathbb{C}$  un morfismo continuo, definimos

$$\varphi_\gamma(f) = \int_G f(x) \overline{\gamma(x)} dm(x),$$

para toda  $f \in L^1(G)$ . Entonces la función  $\varphi_\gamma$  es un morfismo no nulo sobre  $L^1(G)$ . Más aún, todo morfismo no nulo sobre  $L^1(G)$  se obtiene de esta manera.

Consideremos  $L^1(G)^*$  con la topología débil\* y sea  $\Omega(G)$  el conjunto de morfismos no nulos sobre  $L^1(G)$ . Con la topología débil\* relativa,  $\Omega(L^1(G))$  es un espacio localmente compacto Hausdorff.

Sea  $\widehat{G}$  el conjunto dado por

$$\widehat{G} = \{\gamma : G \rightarrow \mathbb{T} : \gamma \text{ es un morfismo continuo}\}.$$

Dotado con la operación

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(x) = \gamma_1(x) \gamma_2(x),$$

para  $\gamma_1, \gamma_2 \in \widehat{G}$  y  $x \in G$ , el conjunto  $\widehat{G}$  es un grupo y se lo denomina **grupo dual** de  $G$  y a sus elementos **caracteres**. Por otra parte, la Proposición 5.12 nos permite dotar a  $\widehat{G}$  de una topología Hausdorff localmente compacta vía la identificación de  $\widehat{G}$  con  $\Omega(L^1(G))$ . Notemos que respecto a esta topología, una red  $\{\gamma_\alpha\}_{\alpha \in A}$  converge a  $\gamma \in \widehat{G}$  si y sólo si para toda  $f \in L^1(G)$  se tiene que

$$\lim_\alpha \varphi_{\gamma_\alpha}(f) = \varphi_\gamma(f).$$

Entonces, hemos visto que  $\widehat{G}$  es un grupo y un espacio localmente compacto Hausdorff. El próximo teorema establece que estas dos estructuras juntas hace a  $\widehat{G}$  un grupo LCA. Antes consideremos los siguientes conjuntos

$$N(K, r, \gamma_0) = \{\gamma \in \widehat{G} : |\gamma(x) - \gamma_0(x)| < r \text{ para todo } x \in K\},$$

donde  $K$  es un compacto de  $G$  y  $r > 0$ . Notar que  $N(K, r, \gamma_0) = \gamma_0 + N(K, r, 0)$ .

**Teorema 5.13.**

- i.) La función  $(x, \gamma) \mapsto \gamma(x)$  es continua de  $G \times \widehat{G}$  en  $\mathbb{T}$ ;
- ii.) Los conjuntos  $N(K, r, \gamma_0)$  son abiertos y son una base de la topología de  $\widehat{G}$ .
- iii.) El grupo  $\widehat{G}$  es un grupo LCA.

Como consecuencia inmediata se obtiene el siguiente resultado.

**Corolario 5.14.** Sea  $x \in G$ , entonces la función  $e_x : \widehat{G} \rightarrow \mathbb{T}$  definida por  $e_x(\gamma) = \gamma(x)$  es un caracter.

La Proposición 5.12 es el punto de partida de la teoría de Fourier en grupos LCA.

**Definición 5.15.** Dada  $f \in L^1(G)$  definimos *transformada de Fourier* a la función  $\widehat{f} : \widehat{G} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\widehat{f}(\gamma) = \int_G f(x) \overline{\gamma(x)} dm(x).$$

En otras palabras,  $\widehat{f}$  no es otra cosa que la transformada de Gelfand de  $f$ . Por medio de  $A(\widehat{G})$  denotaremos a la imagen de la transformada de Gelfand en  $C_0(\widehat{G})$  (resp.  $C(\widehat{G})$  si  $\widehat{G}$  es compacto).

Las siguientes propiedades se obtienen como consecuencia directa de la definición y de las propiedades de la transformada de Gelfand.

**Proposición 5.16.**

- i.)  $A(\widehat{G})$  separa puntos en  $\widehat{G}$ .
- ii.) Si  $f^*(x) = \overline{f(-x)}$ , entonces  $\widehat{f^*} = \overline{\widehat{f}}$ . En consecuencia,  $A(\widehat{G})$  es densa en  $C_0(\widehat{G})$ .
- iii.)  $A(\widehat{G})$  es invariante por traslaciones y modulaciones, i.e. multiplicación por caracteres. En particular se tiene que
  - $\widehat{(T_x f)}(\gamma) = e_x(\gamma) \widehat{f}(\gamma)$ , donde  $e_x(\gamma) = \gamma(x)$ ;
  - $\widehat{(\eta f)}(\gamma) = \widehat{f}(\gamma - \eta)$ .
- iv.)  $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ .

**Proposición 5.17.** Si  $G$  es discreto entonces  $\widehat{G}$  es compacto y si  $G$  es compacto entonces  $\widehat{G}$  es discreto.

Veamos algunos ejemplos clásicos de grupos y la transformada de Fourier.

**Ejemplos 5.18.**

- Si  $G = \mathbb{R}^n$ , entonces  $\widehat{G} = \mathbb{R}^n$  y  $\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i \langle y, x \rangle} dm(x)$ , con  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .
- Si  $G = \mathbb{Z}^n$ , entonces  $\widehat{G} = \mathbb{T}^n$  y  $\widehat{f}(e^{i\alpha}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} f(m) e^{i \langle m, \alpha \rangle}$ , con  $e^{i\alpha} \in \mathbb{T}^n$ .
- Si  $G = \mathbb{T}^n$ , entonces  $\widehat{G} = \mathbb{Z}^n$  y  $\widehat{f}(m) = \int_{\mathbb{T}^n} f(e^{i\theta}) e^{i \langle n, \theta \rangle} dm(\theta)$ , con  $m \in \mathbb{Z}^n$ .

Los siguientes subgrupos serán muy importante para probar los principales resultado en el capítulo 8.

**Definición 5.19.** Dado un subgrupo cerrado  $H$  de  $G$  se denomina *anulador* de  $H$  al conjunto  $H^\perp$  de  $\widehat{G}$  dado por

$$H^\perp := \{\gamma \in \widehat{G} : \gamma(h) = 1, \forall h \in H\}.$$

**Definición 5.20.** El anulador  $\Lambda = H^\perp$  es un retículo de  $\widehat{G}$  denominado *retículo dual*.

**Teorema de inversión**

El próximo resultado nos da una normalización para la medida de Haar de  $\widehat{G}$ . Sea  $B(G)$  el conjunto de todas las funciones  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  las cuales se pueden representar de la forma

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} e_x(\gamma) d\mu(\gamma) \quad (5.2)$$

para cierta  $\mu \in M(\widehat{G})$ . Por el teorema de Bochner y el teorema de descomposición de Hahn, este conjunto es precisamente el conjunto de combinaciones lineales finitas de funciones definidas positivas. Recordemos que una función  $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$  se dice **definida positiva** si la aplicación  $k : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $k(x, y) = \phi(x - y)$  es una matriz positiva.

**Teorema 5.21.** Sea  $f \in L^1(G) \cap B(G)$ . Entonces

- i.)  $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$ ;
- ii.) Si fijamos la medida de Haar  $m_G$  en  $G$ , se puede normalizar la medida de Haar  $m_{\widehat{G}}$  de  $\widehat{G}$  de modo que

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\gamma) e_x(\gamma) dm_{\widehat{G}}(\gamma).$$

Una consecuencia importante del teorema anterior es la identidad de Plancherel.

**Teorema 5.22** (Plancherel). Sea  $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ . Entonces  $\widehat{f} \in L^2(\widehat{G})$  y además

$$\|f\|_{L^2(G)} = \|\widehat{f}\|_{L^2(\widehat{G})}.$$

Más aún, la transformada de Fourier se extiende a un isomorfismo isométrico.

**Teorema de Dualidad de Pontryagin**

Dado un grupo LCA  $G$ , vimos que su dual  $\widehat{G}$  también es un grupo LCA, luego la pregunta natural que surge es qué relación existe entre  $\widehat{\widehat{G}}$  y  $G$ . Según vimos en el Teorema 5.13, todo elemento  $x \in G$  induce un carácter  $e_x$  sobre  $\widehat{G}$  del siguiente modo:

$$e_x(\gamma) = \gamma(x).$$

Si definimos  $\alpha : G \rightarrow \widehat{\widehat{G}}$  por medio de  $\alpha(x) = e_x$  entonces claramente la función  $\alpha$  posee las siguientes propiedades:

- $\alpha$  es un morfismo de grupos.
- Es inyectivo (ya que  $\gamma$  separa puntos en  $G$ ).

El Teorema de Dualidad de Pontryagin nos dice que  $\widehat{\widehat{G}}$  puede ser identificado con  $G$ , informalmente establece que todo grupo LCA es el grupo dual de su grupo dual.

**Teorema 5.23.** El morfismo  $\alpha$  es un homeomorfismo de  $G$  en  $\widehat{\widehat{G}}$ .

## 5.2. Teoremas de estructura

La presente sección contiene tres teoremas de estructura que nos serán de gran utilidad en los próximos dos capítulos. Primero veremos que los grupos LCA son isomorfos a grupos de la forma  $\mathbb{R}^d \times H$ , para algún  $d \geq 0$  y  $H$  un grupo LCA que contiene un subgrupo abierto compacto  $K$ . Si además contamos con información adicional sobre el grupo podremos obtener mejores teoremas de estructura. Por ejemplo, todo grupo LCA compactamente generado es isomorfo a un grupo de la forma  $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{Z}^{d_2} \times K$ , para algún grupo compacto  $K$  y  $d_1, d_2 \geq 0$  y todo grupo compactamente generado de tipo Lie es isomorfo a uno de la forma  $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{Z}^{d_2} \times \mathbb{T}^{d_3} \times F$ , donde  $F$  es un grupo finito y  $d_1, d_2, d_3 \geq 0$ . Los resultados enunciados en esta sección y sus demostraciones se pueden encontrar en [13] y [60].

A continuación enunciamos el primer teorema de estructura.

**Teorema 5.24.** Sea  $G$  un grupo LCA. Entonces existen un grupo LCA  $H$  y  $d \geq 0$  tales que

1.  $G$  es isomorfo a  $\mathbb{R}^d \times H$ .
2.  $H$  contiene un subgrupo compacto abierto  $K$ .

El segundo teorema de estructura es para grupos LCA compactamente generados. Recordemos que un grupo topológico  $G$  se dice **compactamente generado** si

$$G = \langle V \rangle = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V^n,$$

para algún subconjunto compacto  $V$  de  $G$ .

**Teorema 5.25.** Sea  $G$  un grupo LCA compactamente generado. Entonces existen  $d_1, d_2 \geq 0$  y un grupo compacto  $K$  tales que  $G$  es isomorfo a  $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{Z}^{d_2} \times K$ .

El tercer teorema de estructura que enunciaremos en esta sección es para grupos LCA de tipo Lie. Para definir esta noción recordemos que dos grupos localmente compactos  $G$  y  $\tilde{G}$  se dicen **localmente isomorfos** si existen entornos abiertos de la unidad  $V$  y  $\tilde{V}$  en  $G$  y  $\tilde{G}$ , respectivamente, junto con un homeomorfismo  $\varphi : V \rightarrow \tilde{V}$  tales que

$$\varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y) \quad \text{y} \quad \varphi(-x) = \varphi(x)^{-1} \quad (5.3)$$

para todo  $x, y \in V$  tales que  $x + y \in V$  (resp.  $-x \in V$ ). Un grupo LCA  $G$  se dice **de tipo Lie** si  $G$  es localmente isomorfo a  $\mathbb{R}^d$  para algún  $d \geq 0$ . Dicho  $d$  está unívocamente determinado y se llama la dimensión del grupo.

**Teorema 5.26.** Sea  $G$  un grupo LCA de tipo Lie. Entonces  $G$  es isomorfo a  $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2} \times D$ , para  $d_1, d_2 \geq 0$  y  $D$  un grupo discreto abeliano.

Combinando los Teoremas 5.25 y 5.26 junto con los isomorfismos

$$\widehat{\mathbb{R}^{d_1}} \cong \mathbb{R}^{d_1}, \quad \widehat{\mathbb{Z}^{d_2}} \cong \mathbb{T}^{d_2}, \quad \widehat{\mathbb{T}^{d_3}} \cong \mathbb{Z}^{d_3} \quad (5.4)$$

y el hecho de que el dual de un grupo discreto es un grupo compacto y el dual de un grupo compacto es un grupo discreto, obtenemos el siguiente corolario como consecuencia del Teorema de Dualidad de Pontryagin 5.23.

**Corolario 5.27.** Sea  $G$  un grupo LCA. Entonces son equivalentes:

1.  $\widehat{G}$  está compactamente generado.
2.  $G$  es un grupo LCA de tipo Lie.

Dado que los cocientes de grupos localmente generados están localmente generados, el Teorema 5.26 junto con el teorema de estructura para grupos abelianos finitamente generados, el cual establece que dichos grupos son isomorfos a  $\mathbb{Z}^m \times F$ , donde  $m \in \mathbb{N}$  y  $F$  es un grupo finito abeliano, implican inmediatamente el siguiente corolario.

**Corolario 5.28.** Sea  $G$  un grupo LCA. Entonces son equivalentes:

1.  $G$  es un grupo LCA compactamente generado de tipo Lie.
2. Existen  $d_1, d_2, d_3 \geq 0$  y un grupo finito abeliano  $F$  tal que  $G \cong \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2} \times \mathbb{Z}^{d_3} \times F$ .

## Capítulo 6

# Preliminares sobre muestreo e interpolación en espacios de Paley Wiener de un grupo LCA

Como hemos mencionado en la introducción en esta segunda parte de la tesis, estamos interesados en saber cuándo un conjunto es de muestreo o interpolación para el espacio de Paley-Wiener. En el presente capítulo veremos que, por medio de la transformada de Fourier, dicha condición es equivalente a que los núcleos reproductores constituyan un marco o una sucesión de Riesz, relación que utilizaremos fuertemente en el capítulo 8. Luego, recordaremos la noción de densidad de Beurling para  $\mathbb{R}^d$  y consideraremos la extensión a grupos LCA dada por K. Gröchenig et. al. en [24].

### 6.1. Espacios de Paley Wiener en grupos LCA

El espacio que definimos a continuación forma parte de la familia de subespacios invariantes del operador shift. A lo largo de este capítulo estaremos interesados en este espacio y es sobre el cual se centran los principales resultados obtenidos.

**Definición 6.1.** Sean  $G$  un grupo LCA y  $\Omega$  un subconjunto precompacto de  $\widehat{G}$ . El **espacio de Paley-Wiener**  $PW_\Omega$  consiste de todas las funciones cuadrado integrables definidas sobre  $G$  cuya transformada de Fourier converge a cero (en casi todo punto) fuera de  $\Omega$ , es decir,

$$PW_\Omega = \left\{ f \in L^2(G) : \widehat{f}\chi_{\Omega^c} = 0 \text{ en } m\text{-ctp} \right\}.$$

Notar que si  $f \in PW_\Omega$  entonces por el Teorema de inversión 5.21 y la identidad de Plancherel 5.22, se cumple que

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_\Omega \widehat{f}(\gamma) e_x(\gamma) dm_{\widehat{G}}(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\gamma) \overline{(e_{-x}\chi_\Omega)(\gamma)} dm_{\widehat{G}}(\gamma) \\ &= \int_G f(t) \overline{(e_{-x}\chi_\Omega)^\sim(t)} dm_G(t) = \left\langle f, (e_{-x}\chi_\Omega)^\sim \right\rangle_{L^2(G)}. \end{aligned}$$

Luego, obtenemos que las evaluaciones son acotadas, y por lo tanto el espacio de Paley-Wiener  $PW_\Omega$  es un espacio con núcleo reproductor. Si  $x \in G$ , al núcleo asociado a la evaluación en  $x$  lo denotamos  $k_x$  y está dado por  $k_x = (e_{-x}\chi_\Omega)^\sim$ .

En gran parte del trabajo supondremos que  $\widehat{G}$  es compactamente generado. Esto no es una restricción seria, tal como lo muestra el siguiente teorema (ver también [20]).

**Teorema 6.2.** Supongamos que  $\Omega \subseteq \widehat{G}$  es relativamente compacto y que  $H$  es el subgrupo abierto generado por  $\Omega$ . Entonces  $H$  es compactamente generado y existe un subgrupo compacto  $K \subseteq G$  tal que toda  $f \in PW_\Omega$  es  $K$ -periódica. Más aún, el cociente  $G/K$  es isomorfo a  $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2} \times D$  para cierto grupo abeliano discreto y a lo sumo numerable  $D$ , y  $(G/K)^\wedge = H$ , donde  $H$  es el subgrupo de  $\widehat{G}$  generado por  $\Omega$ .

*Demostración.* Sea  $V$  un entorno abierto y relativamente compacto de  $\Omega \subseteq \widehat{G}$ , y sea  $H$  el subgrupo abierto de  $\widehat{G}$  generado por  $V$ . Entonces,  $\widehat{G}/H$  es discreto, y por ende  $(\widehat{G}/H)^\wedge$  es compacto. Veamos que  $K := H^\perp$  es el subgrupo que estamos buscando. Sean  $f \in PW_\Omega$ ,  $x \in G$ , y  $k \in K$ , entonces por la fórmula de inversión

$$\begin{aligned} f(x+k) &= \int_{\Omega} \widehat{f}(\gamma)\gamma(x+k) dm_{\widehat{G}}(\gamma) \\ &= \int_{\Omega} \widehat{f}(\gamma)\gamma(x)\gamma(k) dm_{\widehat{G}}(\gamma) \\ &= \int_{\Omega} \widehat{f}(\gamma)\gamma(x) dm_{\widehat{G}}(\gamma) = f(x) \end{aligned}$$

dato que  $k \in H^\perp$  y  $\Omega \subseteq H$ . Como  $H$  es compactamente generado, por el Corolario 5.27,  $H$  es isomorfo a un grupo de la forma  $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{Z}^{d_2} \times L$  para cierto grupo compacto  $L$ . En consecuencia

$$\widehat{H} \simeq \widehat{\widehat{G}/H^\perp} \simeq G/K \simeq \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2} \times D,$$

donde  $D = \widehat{L}$  es un grupo discreto. ■

Como consecuencia de este resultado, cada función  $f \in PW_\Omega$  pertenece a  $G/K$  y puede ser identificada con una función  $\tilde{f} \in L^2(G/K)$ .

## 6.2. Sucesiones de muestreo e interpolación

Intuitivamente, un conjunto es de muestreo si conociendo nuestra función sobre él, tenemos suficiente información para reconstruirla, mientras que un conjunto de interpolación impone restricciones que debe satisfacer la función. Comenzamos la sección dando la definición formal de dichos conjuntos.

**Definición 6.3.** Sea  $\Lambda$  un conjunto de puntos de  $G$ . Diremos que  $\Lambda$  es un **conjunto de muestreo** para  $PW_\Omega$  si existen constantes  $A, B > 0$  de modo que para todo  $f \in PW_\Omega$  se verifica que

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)|^2 \leq B\|f\|^2. \tag{6.1}$$

**Definición 6.4.** Un conjunto de puntos  $\Lambda$  se denomina **conjunto de interpolación** del espacio  $PW_\Omega$  si para cualquier sucesión  $\{c_\lambda\} \in \ell^2(\Lambda)$  existe una función  $f$  en  $PW_\Omega$  tal que:

$$f(\lambda) = c_\lambda. \tag{6.2}$$

Cuando el espacio de Paley Wiener está definido en el grupo  $\mathbb{R}^d$ , es un resultado bien conocido que todo conjunto de interpolación es separado y que todo conjunto de muestreo es una unión finita de conjuntos separados. Esto permite, sin pérdida de generalidad, suponer que los conjuntos con los que se trabaja son separados. A continuación veremos que lo mismo ocurre en el marco de grupos LCA. Las demostraciones de estos resultados están esencialmente extraídas de [24]. En este contexto, pese a que en la mayoría de los casos de interés el grupo es metrizable, es más usual hablar de conjuntos uniformemente discretos.



**Definición 6.5.** Diremos que un conjunto  $\Lambda$  de un grupo LCA  $G$  es **uniformemente discreto** si existe un entorno de la identidad  $U$  de modo que para todo par  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$

$$(\lambda_1 + U) \cap (\lambda_2 + U) = \emptyset.$$

Hecha esta aclaración, comencemos considerando el caso de las sucesiones de interpolación. Como veremos a continuación, un conjunto de interpolación es automáticamente separado.

**Proposición 6.6.** Si  $\Lambda$  un conjunto de interpolación entonces  $\Lambda$  es uniformemente discreto.

*Demostración.* En primer lugar notemos que como consecuencia del teorema del gráfico cerrado, el problema de interpolación siempre se puede resolver de manera que existe  $M > 0$  tal que el problema

$$f(\lambda) = a_\lambda$$

tiene como solución una  $f$  tal que

$$\|f\|_2^2 \leq M \sum_{\lambda} |a_\lambda|^2$$

para toda sucesión de cuadrado integrable  $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ . Aclarado esto, supongamos que para todo abierto  $U$  en  $G$  existen puntos  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  en  $G$  tales que  $\lambda_2 - \lambda_1$  pertenece a  $U$ . Resolviendo el problema para  $f(\lambda_1) = 1$  y  $f(\lambda) = 0$  si  $\lambda \in \Lambda$  y  $\lambda \neq \lambda_1$ , se tiene que  $\|f\|_2 \leq M$  y

$$\begin{aligned} 1 &= |f(\lambda_1) - f(\lambda_2)| \leq \int_{\Omega} |\hat{f}(\gamma)| |e_{\lambda_1}(\gamma) - e_{\lambda_2}(\gamma)| dm_{\widehat{G}}(\gamma) \\ &\leq M m_{\widehat{G}}(\Omega)^{1/2} \sup_{\gamma \in \Omega} |1 - e_{\lambda_2 - \lambda_1}(\gamma)|, \end{aligned}$$

lo cual no puede ocurrir para cualquier abierto  $U$  cuando  $\Omega$  es relativamente compacto. ■

La reducción en el caso de conjuntos de muestreo también sigue las líneas usuales. Ahora veamos que un conjunto de muestreo es una unión finita de conjuntos separados. Para eso necesitamos el siguiente lema.

**Lema 6.7.** Sea  $\Lambda$  un conjunto uniformemente discreto de  $G$ , y  $\Omega$  un subconjunto relativamente compacto de  $\widehat{G}$ . Entonces existe una constante positiva  $C$  tal que

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)|^2 \leq C \|f\|_2^2,$$

para toda  $f \in PW_{\Omega}$ .

*Demostración.* Sea  $g$  una función en  $L^1(G)$  tal que  $\widehat{g}(\gamma) = 1$  para todo  $\gamma \in \overline{\Omega}$  y para cualquier entorno  $U$  de la identidad, la función

$$g^{\#}(x) = \sup_{u \in U} |g(x + u)|$$

también pertenece a  $L^1(G)$  (sobre la existencia de tal función ver [59, Thm. 5.1.3]). Si  $f \in PW_{\Omega}$ , entonces  $f = f * g$  y  $f^{\#}(x) \leq (|f| * g^{\#})(x)$  para todo  $x$  en  $G$ . Consecuentemente,

$$\|f^{\#}\|_2 \leq \|f\|_2 \|g^{\#}\|_1$$

para toda  $f$  en  $PW_\Omega$ . Claramente,  $|f(\lambda)| \leq f^\sharp(x)$  siempre que  $x \in (\lambda + U)$ . Dado que  $\Lambda$  es uniformemente discreto, podemos elegir  $U$  de modo que

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)|^2 &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{m_G(U)} \int_{\lambda+U} |f(\lambda)|^2 dm_G(x) \\ &\leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{m_G(U)} \int_{\lambda+U} |f^\sharp(x)|^2 dm_G(x) \\ &\leq \frac{1}{m_G(U)} \int_G |f^\sharp(x)|^2 dm_G(x) \leq \frac{\|g^\sharp\|_1^2}{m_G(U)} \|f\|_2^2. \end{aligned} \tag{6.3}$$

■

Como el espacio  $PW_\Omega$  es un espacio invariante por traslaciones constituido por funciones continuas, dado  $x \in G$  existe una función  $f \in PW_\Omega$  tal que  $|f(x)| > 0$ . Esta observación y el lema anterior nos conducen al siguiente resultado:

**Proposición 6.8.** Sea  $\Lambda$  un subconjunto de  $G$  y  $\Omega$  un subconjunto relativamente compacto de  $\widehat{G}$ . Entonces, existe una constante  $C > 0$  tal que para toda  $f \in PW_\Omega$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)|^2 \leq C \|f\|_2^2, \tag{6.4}$$

si y sólo si  $\Lambda$  es una unión finita de conjuntos uniformemente discretos.

Dado que conjunto de muestreo satisface la condición de Bessel (6.4) resulta que un conjunto de muestreo es una unión finita de conjuntos separados.

Si bien no lo utilizaremos en los resultados subsecuentes, cabe mencionar que se puede probar que dado un conjunto de muestreo  $\Lambda$  con constantes positivas  $c$  y  $C$ , es decir, que se verifica la desigualdad

$$c \|f\|_2^2 \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)|^2 \leq C \|f\|_2^2$$

para toda  $f \in PW_\Omega$ , entonces existe un subconjunto uniformemente discreto  $\widetilde{\Lambda}$  de  $\Lambda$  y constantes positivas  $\widetilde{c}$  y  $\widetilde{C}$  tales que

$$\widetilde{c} \|f\|_2^2 \leq \sum_{\widetilde{\lambda} \in \widetilde{\Lambda}} |f(\widetilde{\lambda})|^2 \leq \widetilde{C} \|f\|_2^2$$

para toda  $f$  en  $PW_\Omega$ .

El principal ingrediente de la prueba de este resultado es el siguiente lema, el cual posee interés en sí mismo y nos será útil más adelante.

**Lema 6.9.** Sea  $\Lambda$  un subconjunto uniformemente discreto de  $G$ . Entonces, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un entorno  $U$  de la identidad tal que si  $\lambda \mapsto \lambda'$  es una función de  $\Lambda$  en  $G$  que satisface  $\lambda' - \lambda \in U$ , entonces

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda) - f(\lambda')|^2 \leq \varepsilon \|f\|_2^2 \tag{6.5}$$

para toda  $f$  en  $PW_\Omega$ .

*Demostración.* Sea  $g$  como en la prueba del Lema 6.7. Entonces

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda) - f(\lambda')|^2 \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \left( \int_G |f(y)| |g(\lambda - y) - g(\lambda' - y)| dm_G(y) \right)^2.$$

Por la desigualdad de Jensen, el sumando de la derecha correspondiente a  $\lambda$  es mayorizado por la expresión

$$\int_G |f(y)|^2 |g(\lambda - y) - g(\lambda' - y)| dm_G(y) \int_G |g(\lambda - x) - g(\lambda' - x)| dm_G(x).$$

Como el operador  $g(x) \mapsto g(\eta - x)$  es continuo con respecto a la norma  $L^1$ , la integral

$$\int_G |g(\lambda - x) - g(\lambda' - x)| dm_G(x)$$

se puede hacer arbitrariamente pequeña y de manera uniforme en  $U$ , si este entorno se toma de clausura compacta. Por otra parte, en la integral

$$\int_G |f(y)|^2 |g(\lambda - y) - g(\lambda' - y)| dm_G(y)$$

al sumar en  $\lambda$  e intercambiando el orden de la suma con la integral se obtiene

$$\int_G |f(y)|^2 \left( \sum_{\lambda \in \Lambda} |g(\lambda - y) - g(\lambda' - y)| \right) dm_G(y).$$

La serie en el integrando se puede acotar repitiendo la estimación hecha en (6.3). Por lo tanto, eligiendo convenientemente  $U$  se obtiene (6.5). ■

Por último veamos que relación existe entre los conjuntos de muestreo e interpolación y los núcleos reproductores indexados en los puntos de dichos conjuntos. A partir de la definición de conjunto de muestreo y de la transformada de Fourier es fácil ver el siguiente resultado:

**Proposición 6.10.** Sea  $\Lambda$  un conjunto de puntos de  $G$ . Entonces son equivalentes:

- i.)  $\Lambda$  es un conjunto de muestreo.
- ii.)  $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es un marco para  $PW_\Omega$ .
- iii.)  $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es un marco para  $L^2(\Omega)$ .

Notemos que en particular,  $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  y  $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  son familias de Bessel en sus respectivos espacios. Veamos ahora el caso de interpolación.

**Proposición 6.11.** Dado el conjunto  $\Lambda$  en  $G$ , son equivalentes:

- 1.  $\Lambda$  es un conjunto de interpolación.
- 2.  $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una sucesión de Riesz.
- 3.  $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una sucesión de Riesz.

4. Existen constantes  $A, B > 0$  tales que para todo  $f \in PW_\Omega$

$$A \sum_{\lambda \in \Lambda} |c_\lambda|^2 \leq \|f\|_2 \leq B \sum_{\lambda \in \Lambda} |c_\lambda|^2 \quad (6.6)$$

para toda sucesión  $\{c_\lambda\} \in \ell^2(\Lambda)$  y  $f$  en el espacio  $\mathcal{L}$  generado por  $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  que interpole los  $c_\lambda$ .

*Demostración.*

1  $\implies$  2) Sea  $\mathcal{L}$  el espacio cerrado generado por  $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ . Por las Proposiciones 6.6 y 6.8 el conjunto  $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una sucesión de Bessel. Luego, para cada  $f \in PW_\Omega$  la sucesión  $\{f(\lambda)\} \in \ell^2(\Lambda)$ , y el operador  $T^*$  que realiza esta asignación es acotado. Si  $B$  denota el operador lineal acotado que a cada sucesión  $\{c_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in \ell^2(\Lambda)$  le asigna el único elemento en  $f \in \mathcal{L}$  que resuelve el problema de interpolación entonces  $T^*B = I$ , y por lo tanto  $T^*$  es suryectivo. Esto muestra que su adjunto  $T$  es acotado inferiormente, lo cual equivale a que la sucesión  $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  sea una base de Riesz de  $\mathcal{L}$ .

2  $\iff$  3) Se obtiene por ser la transformada de Fourier un operador unitario.

2  $\iff$  4) Si  $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una base de Riesz del subespacio que generan entonces el operador de síntesis es acotado inferiormente y continuo. Esto es equivalente a las dos desigualdades en (6.6).

4  $\implies$  1) Las desigualdades muestran que el operador de síntesis es continuo y acotado inferiormente. Luego el operador de análisis es suryectivo, lo cual es equivalente a que  $\Lambda$  sea un conjunto de interpolación. ■

**Comentario 6.12.** Si  $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una base de Riesz de un subespacio cerrado  $\mathcal{L}$ , entonces existe una base de Riesz  $\{g_n\}$  del mismo subespacio  $\mathcal{L}$  de modo que

$$g_k(\lambda_n) = \langle g_k, k_\lambda \rangle = \delta_{n,k}. \quad (6.7)$$

Por ende, toda  $f \in \mathcal{L}$  se puede escribir como

$$f(x) = \sum_n f(\lambda_n) g_n(x).$$

Esto se asemeja a lo que ocurre entre polinomios de grado acotado y los polinomios de Lagrange. ▲

### 6.3. Densidad de Beurling

La noción de densidad de Beurling juega un papel importante en muchas áreas del análisis de Fourier moderno. Las densidades superior e inferior fueron introducidas por Beurling sobre la recta real en sus trabajos sobre balayage e interpolación. Luego, Landau en [44] las define para conjuntos uniformemente discretos de  $\mathbb{R}^d$  al estudiar conjuntos de muestreo e interpolación en espacios de funciones de banda limitada. En esta misma línea, Gröchenig, Kutyniok y Seip en [24] extienden el concepto de densidades para grupos LCA.

**6.3.1. En  $\mathbb{R}^d$** 

Sea  $K$  un conjunto compacto integrable Riemann de medida 1 y  $\Lambda$  un conjunto uniformemente discreto de  $\mathbb{R}^d$ . Si

$$\bar{n}_{\Lambda, K}(r) := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \#(\Lambda \cap (rK + x)) \quad \text{y} \quad \underline{n}_{\Lambda, K}(r) := \inf_{x \in \mathbb{R}^d} \#(\Lambda \cap (rK + x)),$$

entonces se definen las densidades inferior y superior como

$$\mathcal{D}^-(\Lambda) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\underline{n}_{\Lambda, K}(r)}{r^d} \quad \text{y} \quad \mathcal{D}^+(\Lambda) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\bar{n}_{\Lambda, K}(r)}{r^d}, \quad (6.8)$$

respectivamente. Si  $\mathcal{D}^-(\Lambda) = \mathcal{D}^+(\Lambda)$  entonces se dice que  $\Lambda$  tiene **densidad uniforme**, la cual se denota simplemente por medio de  $\mathcal{D}(\Lambda)$ .

En el trabajo antes mencionado Landau probó que estas densidades no dependen de  $K$ , y por lo tanto podemos definir las considerando el cubo  $Q = [-1/2, 1/2]^d$ . Notemos que en tal caso

$$\mathcal{D}(\Lambda) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\#\Lambda \cap (rQ + x)}{r^d}$$

uniformemente en  $x \in \mathbb{R}^d$ .

Si  $k \in \mathbb{N}$  entonces no es difícil ver que

$$\underline{n}_{\Lambda, Q}(kr) \geq k^d \underline{n}_{\Lambda, Q}(r) \quad \text{y} \quad \bar{n}_{\Lambda, Q}(kr) \leq k^d \bar{n}_{\Lambda, Q}(r). \quad (6.9)$$

Esta observación nos permite probar que en la definición de las densidades los límites existen.

**Proposición 6.13.** Sea  $\Lambda$  un conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^d$ . Entonces

$$\mathcal{D}^-(\Lambda) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\underline{n}_{\Lambda}(r)}{r^d} = \sup_{r > 0} \frac{\underline{n}_{\Lambda, Q}(r)}{r^d} \quad (6.10)$$

$$\mathcal{D}^+(\Lambda) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\bar{n}_{\Lambda}(r)}{r^d} = \inf_{r > 0} \frac{\bar{n}_{\Lambda, Q}(r)}{r^d}. \quad (6.11)$$

*Demostración.* Lo probaremos sólo para  $\mathcal{D}^+(\Lambda)$ , la prueba para  $\mathcal{D}^-(\Lambda)$  es similar. Definamos

$$\beta = \inf_{r > 0} \frac{\bar{n}_{\Lambda, Q}(r)}{r^d}.$$

Si  $\beta = \infty$ , claramente el límite también es infinito. Si  $\beta < \infty$ , dado  $\varepsilon > 0$  sea  $r_0 > 0$  de modo que  $\bar{n}_{\Lambda}(r_0) \leq (\beta + \varepsilon)r_0$ . Si ahora tomamos  $r \in (r_0(k-1), r_0k]$ , donde  $k \in \mathbb{N}$ , usando la monotonía de  $\bar{n}_{\Lambda}(\cdot)$  como así también la segunda desigualdad en (6.9) obtenemos que:

$$\beta \leq \frac{\bar{n}_{\Lambda, Q}(r)}{r^d} \leq \frac{\bar{n}_{\Lambda, Q}(kr_0)}{r^d} \leq \left(\frac{kr_0}{r}\right)^d \frac{\bar{n}_{\Lambda, Q}(r_0)}{r_0^d} \leq \left(\frac{kr_0}{r}\right)^d (\beta + \varepsilon).$$

De esta cadena de desigualdades se deduce que para  $r$  suficientemente grande

$$\left| \beta - \frac{\bar{n}_{\Lambda, Q}(r)}{r^d} \right| \leq 2\varepsilon.$$

lo cual concluye la demostración. ■

### 6.3.2. En grupos LCA

En  $\mathbb{R}^d$  las densidades antes definidas comparan la concentración de puntos de un conjunto discreto dado con la del retículo entero  $\mathbb{Z}^d$ . En un grupo topológico, esta comparación se hace respecto a algún retículo de referencia por medio de la siguiente relación (ver [24]).

**Definición 6.14.** *Dados dos conjuntos uniformemente discretos  $\Lambda$  y  $\Lambda'$  de un grupo  $G$  LCA, y números no negativos  $\alpha$  y  $\alpha'$ , notamos  $\alpha\Lambda \preceq \alpha'\Lambda'$  si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un subconjunto compacto  $K$  de  $G$  tal que para todo subconjunto compacto  $L$  de  $G$  se satisface que*

$$(1 - \varepsilon)\alpha \#(\Lambda \cap L) \leq \alpha' \#(\Lambda' \cap (K + L)).$$

Ahora, tenemos que fijar un retículo de referencia en el grupo  $G$ . Asumiendo que  $\widehat{G}$  es compactamente generado, por los teoremas de estructura  $G$  es isomorfo a  $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2} \times D$ , donde  $D$  es un conjunto numerable discreto. Entonces, un retículo de referencia natural es  $H_0 = \mathbb{Z}^{d_1} \times \{e\} \times D$ . Utilizando dicho retículo de referencia, y la relación transitiva antes mencionada, tenemos todo lo necesario para poder dar la definición de densidad superior e inferior (ver [24] para más detalles).

**Definición 6.15.** *Sea  $\Lambda$  un subconjunto uniformemente discreto de  $G$ . La densidad uniforme inferior de  $\Lambda$  se define como*

$$\mathcal{D}^-(\Lambda) = \sup\{\alpha \in \mathbb{R}^+ : \alpha H_0 \preceq \Lambda\}.$$

Por otra parte, se define la densidad uniforme superior como

$$\mathcal{D}^+(\Lambda) = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}^+ : \Lambda \preceq \alpha H_0\}.$$

En el caso que ambas densidades coincidan, escribimos simplemente  $\mathcal{D}(\Lambda)$ .

Estas densidades siempre satisfacen que  $\mathcal{D}^-(\Lambda) \leq \mathcal{D}^+(\Lambda)$ , y son finitas. Además, se puede probar que el ínfimo y el supremo en realidad son un mínimo y un máximo.

**Proposición 6.16.** *Sea  $G$  un grupo LCA y  $\Lambda$  un subconjunto de  $G$  uniformemente discreto. Entonces  $\mathcal{D}^-(\Lambda) \leq \mathcal{D}^+(\Lambda) < \infty$ .*

*Demostración.* Basta probar que  $\mathcal{D}^+(\Lambda)$  y  $\mathcal{D}^-(\Lambda)$  son finitas. En efecto, si  $\mathcal{D}^+(\Lambda) < \mathcal{D}^-(\Lambda)$  entonces  $\Lambda \preceq \delta\Lambda$ , para algún  $\delta < 1$ . Por la transitividad de la relación  $\preceq$ , sólo se puede dar si  $\mathcal{D}^-(\Lambda) = 0$  o  $\mathcal{D}^-(\Lambda) = \infty$ .

Vamos a probar primero que  $\mathcal{D}^+(\Lambda) < \infty$ . Para esto necesitamos ver que existe un número positivo  $\alpha$  tal que  $\Lambda \preceq \alpha H_0$ . Sea  $L$  un subconjunto compacto de  $G$ . Dado que  $\Lambda$  es uniformemente discreto, existe una cota uniforme sobre la cantidad de puntos de  $L \cap \Lambda$  que se pueden encontrar en cada conjunto  $\gamma + K$ , donde  $K := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2} \times \{e\}$  y  $\gamma$  es un elemento de  $H_0$ . Luego, si denotamos por  $M$  a la cota uniforme antes mencionada,

$$\#(\Lambda \cap L) \leq M \#(H_0 \cap (K + L)),$$

por lo tanto  $\Lambda \preceq M H_0$ .

Ahora veamos que  $\mathcal{D}^-(\Lambda) < \infty$ . Supongamos que  $\alpha H_0 \preceq \Lambda$  para algún  $\alpha$ . Entonces para todo  $\varepsilon > 0$  existe un conjunto compacto  $K$  tal que

$$(1 - \varepsilon)\alpha \#(H_0 \cap L) \leq \#(\Lambda \cap (K + L)), \tag{6.12}$$

para todo conjunto compacto  $L$ . Dado que estamos considerando  $G = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2} \times D$ , podemos suponer que  $K = B \times \mathbb{T}^{d_2} \times F$ , donde  $B$  es la bola cerrada de  $\mathbb{R}^{d_1}$  centrada en cero y  $F$  es un subconjunto

finito de  $D$  tal que  $F = -F$ . Entonces  $\bigcup_{n=1}^{\infty} F^n$  es un subgrupo de  $D$  finitamente generado, el cual tiene la estructura  $\mathbb{Z}^l \times E$ , siendo  $E$  un grupo finito. Para simplificar el argumento supongamos que  $F = B' \times E$ , donde  $B'$  es una bola de  $\mathbb{Z}^l$  centrada en el origen. Consideremos  $L = \sum_{i=1}^n K$  y notemos que para  $n$  suficientemente grande tenemos que

$$\#(H_0 \cap L) \geq (1 - \varepsilon) m_G(L).$$

Por otra parte, si  $U \subseteq K$  es un conjunto abierto tal que los conjuntos  $\lambda + U$ , con  $\lambda \in \Lambda$ , son disjuntos dos a dos, entonces

$$\#(\Lambda \cap (K + L)) \leq m_G(U)^{-1} m_G\left(\sum_{i=1}^{n+2} K\right) \leq (1 + \varepsilon) m_G(U)^{-1} m_G(L), \quad (6.13)$$

para  $n$  suficientemente grande. Combinando las desigualdades en (6.12) y (6.13), tenemos que para todo  $\varepsilon > 0$ ,

$$\alpha \leq \frac{1 + \varepsilon}{(1 - \varepsilon)^2} m_G(U)^{-1},$$

por lo tanto  $\mathcal{D}^-(\Lambda) \leq m_G(U)^{-1}$ . ■

Por último veamos que si  $G = \mathbb{R}^d$ , las densidades definidas para grupos coinciden con las densidades de Landau-Beurling cuando el retículo de referencia es  $\mathbb{Z}^d$ .

**Proposición 6.17.** Si  $G = \mathbb{R}^d$  y  $\mathcal{D}_B$  denota la densidad de Beurling entonces  $\mathcal{D}^-(\Lambda) = \mathcal{D}_B^-(\Lambda)$  y  $\mathcal{D}^+(\Lambda) = \mathcal{D}_B^+(\Lambda)$  para todo conjunto uniformemente discreto  $\Lambda$ .

*Demostración.* Sea  $\Lambda$  un conjunto uniformemente discreto de  $\mathbb{R}^d$ . Por definición de densidad uniforme inferior,  $\mathcal{D}^-(\Lambda)\mathbb{Z}^d \preceq \Lambda$ , entonces para todo  $\varepsilon > 0$  existe un conjunto compacto  $K = Q_R(0) = \left[-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}\right]^d$  tal que

$$(1 - \varepsilon)\mathcal{D}^-(\Lambda) \#(\mathbb{Z}^d \cap L) \leq \#(\Lambda \cap (L + Q_R(0))),$$

para todo conjunto compacto  $L$ . Si consideramos  $L = Q_h(y)$ , con  $y \in \mathbb{R}^d$ , tenemos que

$$(1 - \varepsilon)\mathcal{D}^-(\Lambda) \inf_{y \in \mathbb{R}^d} \frac{\#(\mathbb{Z}^d \cap Q_h(y))}{(h + R)^d} \leq \inf_{y \in \mathbb{R}^d} \frac{\#(\Lambda \cap Q_{h+R}(y))}{(h + R)^d}.$$

Luego, tomando límite cuando  $h \rightarrow \infty$  obtenemos que  $(1 - \varepsilon)\mathcal{D}^-(\Lambda) \leq \mathcal{D}_B^-(\Lambda)$ . Dado que  $\varepsilon$  se puede tomar arbitrariamente chico, tenemos que  $\mathcal{D}^-(\Lambda) \leq \mathcal{D}_B^-(\Lambda)$ .

Recíprocamente, por definición de  $\mathcal{D}_B^-(\Lambda)$ , dado  $\varepsilon > 0$  existe  $h_0 > 0$  tal que para todo  $y \in \mathbb{R}^d$  y  $h > h_0$  se verifica que

$$\frac{\#(\Lambda \cap Q_h(y))}{h^d} \geq (1 - \varepsilon)\mathcal{D}_B^-(\Lambda). \quad (6.14)$$

Ahora, consideremos la partición de  $\mathbb{R}^d$  formada por cubos  $Q_h(hk)$ , con  $k \in \mathbb{Z}^d$ , cuyos interiores son disjuntos. Dado un conjunto compacto  $L \subseteq \mathbb{R}^d$ , existen finitos  $k_j \in \mathbb{Z}^d$ , con  $j = 1, \dots, N$ , tal que

$$L \subset \bigcup_{j=1}^N Q_h(hk_j) \subset L + Q_{2h}(0).$$

Luego, por la desigualdad en (6.14), se cumple

$$\#(\Lambda \cap (L + Q_{2h}(0))) \geq \sum_{j=1}^N \#(\Lambda \cap Q_h(hk_j)) \geq h^d(1 - \varepsilon)N\mathcal{D}_B^-(\Lambda).$$

Dado que  $(h + 1)^d \geq \#(\mathbb{Z}^d \cap Q_h(hk_j))$  se tiene que

$$\#(\Lambda \cap (L + Q_{2h}(0))) \geq (1 - \varepsilon) \left(1 + \frac{1}{h}\right)^{-d} \mathcal{D}_B^-(\Lambda) \#(\mathbb{Z}^d \cap L).$$

Entonces  $(1 + \frac{1}{h})^{-d} \mathcal{D}_B^-(\Lambda) \mathbb{Z}^d \preccurlyeq \Lambda$ . Luego, por definición,  $\mathcal{D}^-(\Lambda) \geq (1 + \frac{1}{h})^{-d} \mathcal{D}_B^-(\Lambda)$ . Como podemos considerar  $\varepsilon$  arbitrariamente chico y  $h$  arbitrariamente grande, tenemos que  $\mathcal{D}^-(\Lambda) \geq \mathcal{D}_B^-(\Lambda)$ .

De forma análoga se prueba que  $\mathcal{D}^+(\Lambda) = \mathcal{D}_B^+(\Lambda)$ . ■



# Capítulo 7

## Bases de Riesz de caracteres

Como hemos visto en el Capítulo 6 existe una equivalencia entre los conjuntos de muestreo e interpolación y los marcos y sucesiones de Riesz de núcleos reproductores, respectivamente. Basados en este hecho, la estrategia seguida para probar los principales resultados de la presente parte del trabajo consiste en hallar base de Riesz para  $L^2$  de cierto conjunto. Para esto necesitamos, por un lado extender a grupos LCA el resultado de Paley y Wiener sobre perturbaciones de bases de Riesz, y por el otro la relación que existe entre los conjuntos que multiteselan y las bases de Riesz. El presente capítulo contiene estas dos herramientas. Si bien en el capítulo anterior probamos el resultado de estabilidad, en el presente capítulo daremos una demostración alternativa para el caso  $G = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2} \times D$ , donde  $D$  es un grupo discreto.

### 7.1. Teorema de perturbación de Paley- Wiener

Vamos a comenzar la sección con dos lemas técnicos. El primero nos dice que si  $G = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2}$  y  $\Omega \subseteq \widehat{G}$  es compacto entonces el espacio de Paley- Wiener  $PW_\Omega$  es invariante por derivación, es decir, si una función pertenece a  $PW_\Omega$  entonces sus derivadas parciales también. El segundo lo podemos considerar como un Teorema del valor medio para  $PW_\Omega$ .

Para evitar confusión denotaremos a los elemento de cada grupo de la siguiente manera:  $x, y, z, w \in \mathbb{R}^{d_1}$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}^{d_2}$ ,  $r, s, t \in [0, 1) \approx \mathbb{T}$ ,  $d \in D$ ,  $k, l \in K$ ,  $g, h \in G$ ,  $\gamma \in \widehat{G}$ . Si  $G = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2} \times D$ , donde  $D$  es un grupo discreto numerable, en particular,  $G$  es metrizable y vamos a considerar el producto métrico  $d_G = d_{\mathbb{R}^{d_1}} + d_{\mathbb{T}^{d_2}} + d_D$ , el cual en cada componente está dado por:

$$d_{\mathbb{R}^{d_1}}(x, y) = \|x - y\|_{\mathbb{R}^{d_1}}, \quad d_{\mathbb{T}^{d_2}}(\omega, \zeta) = \|\omega - \zeta\|_{\mathbb{C}^{d_2}}, \quad d_D(d, \tilde{d}) = \delta_{d, \tilde{d}}. \quad (7.1)$$

donde  $\delta_{(\cdot, \cdot)}$  es la función delta de Kronecker.

**Lema 7.1.** Sean  $G = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2}$  y  $\Omega \subseteq \widehat{G}$  un conjunto compacto. Si  $F \in PW_\Omega$  y  $(x, t) \in G$  entonces  $\frac{\partial F}{\partial x_j}, \frac{\partial F}{\partial t_j} \in PW_\Omega$ . Más aún,

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\|_2 \leq \text{diam}(\Omega|_{\mathbb{R}^{d_1}}) \|F\|_{L_2(G)}, \quad \left\| \frac{\partial F}{\partial t_j} \right\|_2 \leq \text{diam}(\Omega|_{\mathbb{Z}^{d_2}}) \|F\|_{L_2(G)}.$$

*Demostración.* Sea  $F \in PW_\Omega$ . Si denotamos  $f = \widehat{F}$  entonces

$$F(x + \vec{e}_j h, t) = \int_{\Omega} f(w, n) e^{i \langle n, t \rangle} e^{i \langle w, x + \vec{e}_j h \rangle} dm_{\widehat{G}},$$

$$F(x, t) = \int_{\Omega} f(w, n) e^{i \langle n, t \rangle} e^{i \langle w, x \rangle} dm_{\widehat{G}},$$

donde  $h \in \mathbb{R}$  y  $\{e_1, \dots, e_{d_1}\}$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^{d_1}$ . Dado que

$$\frac{e^{i \langle w, x + \vec{e}_j h \rangle} - e^{i \langle w, x \rangle}}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} i x_j e^{i \langle w, x \rangle}$$

y  $\left| \frac{e^{i \langle w, \vec{e}_j h \rangle} - 1}{h} \right| \leq |w|$ , para todo  $w \in \Omega|_{\mathbb{R}^{d_1}}$ , por el Teorema de la convergencia dominada tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x, t)}{\partial x_j} &= \int_{\Omega} f(w, n) e^{i \langle n, t \rangle} \frac{\partial e^{i \langle w, x \rangle}}{\partial x_j} dm_{\widehat{G}} \\ &= \int_{\Omega} i w_j f(w, n) e^{i \langle n, t \rangle} e^{i \langle w, x \rangle} dm_{\widehat{G}} \\ &= i(x_j \check{f})(x, t). \end{aligned}$$

Entonces, como  $w_j f(w, n) \in L^2(\Omega)$ , concluimos que  $\frac{\partial F}{\partial x_j} \in PW_{\Omega}$ . Además,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial F}{\partial x_j} \right\|_{L^2(G)}^2 &= \int_G |(x_j \check{f})(x, t)|^2 dm_G \\ &\leq \text{diam}^2(\Omega|_{\mathbb{R}^{d_1}}) \int_G |f(w, n)|^2 dm_{\widehat{G}} \\ &= \text{diam}^2(\Omega|_{\mathbb{R}^{d_1}}) \|f\|_{L^2(\widehat{G})}^2 \\ &= \text{diam}^2(\Omega|_{\mathbb{R}^{d_1}}) \|F\|_{L^2(G)}^2, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene por la identidad de Plancherel.

De forma análoga se puede probar que  $\frac{\partial F}{\partial t_j} \in PW_{\Omega}$  y  $\left\| \frac{\partial F}{\partial t_j} \right\|_2 \leq \text{diam}(\Omega|_{\mathbb{Z}^{d_2}}) \|F\|_{L^2(G)}$ . ■

**Lema 7.2.** Sean  $G = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2}$  y  $\Omega \subseteq \widehat{G}$  compacto. Si  $a, \tilde{a} \in G$  verifican que  $d_G(a, \tilde{a}) < \eta$  y  $f \in L^2(\Omega)$  entonces existe  $(\xi_a, r_a) \in G$  tal que

$$|\langle f, e_a - e_{\tilde{a}} \rangle|^2 \leq \eta^2 \|\nabla F(\xi_a, r_a)\|^2,$$

donde  $F = \check{f}$ .

*Demostración.* Dado que  $\Omega \subseteq \widehat{G}$  es un conjunto compacto y la proyección sobre cada grupo es una aplicación continua, los conjuntos  $P_{\mathbb{R}^{d_1}}(\Omega)$  y  $P_{\mathbb{Z}^{d_2}}(\Omega)$  son compactos. En particular,  $P_{\mathbb{Z}^{d_2}}(\Omega)$  es discreto, y por lo tanto finito. Por otra parte, si escribimos  $a = (x_a, t_a)$ , donde  $x_a \in \mathbb{R}^{d_1}$  y  $w_a = e^{2\pi i t_a}$ , los caracteres  $e_a \in \widehat{G}$  están dados por

$$e_a(\gamma)(x, n) = e^{-i \langle x, x_a \rangle_{\mathbb{R}^{d_1}}} e^{-i \langle n, t_a \rangle_{\mathbb{R}^{d_2}}}.$$

Luego, si  $f \in L^2(\Omega)$  se satisface que

$$|\langle f, e_a - e_{\tilde{a}} \rangle|^2 = |\check{f}(x_a, t_a) - \check{f}(x_{\tilde{a}}, t_{\tilde{a}})|^2. \quad (7.2)$$

Ahora, sea  $F = \check{f}$  y consideremos la aplicación  $\Gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  definida como  $\Gamma(s) = F(\alpha(s))$  donde  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2}$  es la curva  $\alpha(s) = ((1-s)x_a + sx_{\tilde{a}}, (1-s)t_a + st_{\tilde{a}})$ . Por el Teorema 5.19 de [61] existe  $s_0 \in (0, 1)$  tal que

$$|\Gamma(1) - \Gamma(0)| \leq |\Gamma'(s_0)|.$$

Puesto que  $\Gamma'(s_0) = \nabla F(\alpha(s_0))\alpha'(s_0)$ , si denotamos  $\xi_a = (1-s_0)x_a + s_0x_{\tilde{a}}$  y  $r_a = (1-s_0)t_a + s_0t_{\tilde{a}}$ , obtenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} |F(x_{\tilde{a}}, t_{\tilde{a}}) - F(x_a, t_a)|^2 &\leq |\nabla F(\xi_a, r_a)(x_{\tilde{a}} - x_a, t_{\tilde{a}} - t_a)|^2 \\ &\leq \|\nabla F(\xi_a, r_a)\|^2 \|(x_{\tilde{a}} - x_a, t_{\tilde{a}} - t_a)\|^2 \\ &\leq \|\nabla F(\xi_a, r_a)\|^2 \eta^2 \end{aligned} \quad (7.3)$$

Luego, de (7.2) y (7.3) concluimos que

$$\begin{aligned} |\langle f, e_a - e_{\tilde{a}} \rangle|^2 &\leq |F(x_a, t_a) - F(x_{\tilde{a}}, t_{\tilde{a}})|^2 \\ &\leq \eta^2 \|\nabla F(\xi_a, r_a)\|^2. \end{aligned}$$

■

A continuación damos una versión para grupos del Teorema de Paley y Wiener sobre estabilidad de bases de Riesz de exponenciales en  $\mathbb{R}$ . La demostración está basada en la prueba dada en [39]. Para simplificar la escritura introducimos la siguiente definición:

**Definición 7.3.** Dado  $\varepsilon > 0$ , decimos que un conjunto  $\tilde{\mathcal{B}}$  es una  $\varepsilon$ -perturbación de un conjunto separable  $\mathcal{B} \subseteq G$  si es de la forma:

$$\tilde{\mathcal{B}} = \{\lambda + \delta_\lambda : \lambda \in \mathcal{B}\},$$

donde cada  $\delta_\lambda$  satisface que  $d_G(0, \delta_\lambda) \in (0, \varepsilon)$ .

**Teorema 7.4.** Sean  $A$  un subconjunto de  $G = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2} \times D$ , donde  $D$  un grupo discreto, y  $\Omega$  un subconjunto compacto de  $\hat{G}$ . Si  $\{e_a\}_{a \in A}$  es una base de Riesz de caracteres de  $L^2(\Omega)$ , existe  $\eta > 0$  tal que si  $\tilde{A}$  es una  $\eta$ -perturbación de  $A$  entonces  $\{e_{\tilde{a}}\}_{\tilde{a} \in \tilde{A}}$  también es una base de Riesz para  $L^2(\Omega)$ .

*Demostración.* Sea  $a \in A$  y  $\tilde{a} = a + \delta_a$ , tal que  $d_G(0, \delta_a) \in (0, \eta)$ . Si  $\delta_a = (\delta_{\mathbb{R}^{d_1}}^a, \delta_{\mathbb{T}^{d_2}}^a, \delta_D^a)$  y consideramos  $\eta < 1$ , por definición de  $d_G$  en (7.1), se tiene que

$$\delta(e_D, \delta_D^a) = 0,$$

es decir,  $a$  y  $\tilde{a}$  tiene la misma componente en  $D$ . Además,  $\|\delta_{\mathbb{R}^{d_1}}^a\|_2 < \eta$  y  $\|\delta_{\mathbb{T}^{d_2}}^a\|_2 < \eta$ .

Es suficiente mostrar que para toda  $f \in L^2(\Omega)$  se cumple que

$$\sum_{a \in A} |\langle f, e_a - e_{\tilde{a}} \rangle|^2 \leq M \|f\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

donde  $M$  es una constante suficientemente chica e independiente de  $f$ .

Sea  $\hat{G} = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{Z}^{d_2} \times K$ , donde  $K$  es un grupo compacto. Los caracteres  $e_a \in \hat{G}$  están dados por

$$e_a(\gamma)(x, n, k) = e^{-i \langle x, x_a \rangle_{\mathbb{R}^{d_1}}} e^{-i \langle n, t_a \rangle_{\mathbb{R}^{d_2}}} \gamma_{d_a}(k),$$

por lo tanto, si  $f \in L^2(\Omega)$  se satisface que

$$\begin{aligned} |\langle f, e_a - e_{\bar{a}} \rangle|^2 &= \left| \int_K \overline{\gamma_{d_a}(k)} (\check{f}_k(x_a, t_a) - \check{f}_k(x_{\bar{a}}, t_{\bar{a}})) dm_K(k) \right|^2 \\ &\leq \left( \int_K \underbrace{|\overline{\gamma_{d_a}(k)}|}_{=1} |\check{f}_k(x_a, t_a) - \check{f}_k(x_{\bar{a}}, t_{\bar{a}})| dm_K(k) \right)^2 \\ &\leq \int_K |\check{f}_k(x_a, t_a) - \check{f}_k(x_{\bar{a}}, t_{\bar{a}})|^2 dm_K(k), \\ &= \int_K \left| \langle f_k, e_{(x_a, t_a)} - e_{(x_{\bar{a}}, t_{\bar{a}})} \rangle \right|^2 dm_K(k), \end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad se obtiene por Jensen. Si aplicamos el Lema 7.2 a  $f_k$ , para  $k \in K$  fijo, entonces

$$|\langle f, e_a - e_{\bar{a}} \rangle|^2 \leq \eta^2 \int_K \|\nabla F_k(\xi_a, r_a)\|^2 dm_K(k).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{a \in A} |\langle f, e_a - e_{\bar{a}} \rangle|^2 &\leq \sum_{a \in A} \eta^2 \int_K \|\nabla F_k(\xi_a, r_a)\|^2 dm_K(k) \\ &= \eta^2 \sum_{a \in A} \int_K \sum_{j=1}^{d_1} \left| \frac{\partial F_k(\xi_a, r_a)}{\partial x_j} \right|^2 + \sum_{j=1}^{d_2} \left| \frac{\partial F_k(\xi_a, r_a)}{\partial t_j} \right|^2 dm_K(k) \\ &= \eta^2 \int_K \sum_{j=1}^{d_1} \sum_{a \in A_k} \left| \frac{\partial F_k(\xi_a, r_a)}{\partial x_j} \right|^2 + \sum_{j=1}^{d_2} \sum_{a \in A_k} \left| \frac{\partial F_k(\xi_a, r_a)}{\partial t_j} \right|^2 dm_K(k). \end{aligned}$$

Dado que  $\{e_a\}_{a \in A}$  es una base de Riesz de caracteres, el conjunto  $A$  es separado. Entonces, si  $\eta$  es suficientemente chico, el conjunto  $\{(\xi_a, r_a)\}_{a \in A}$  debe ser también separado, por lo tanto  $\{e_{(\xi_a, r_a)}\}_{a \in A}$  es una sucesión de Bessel para  $L^2(\Omega)$  (ver Lema 6.7) y se cumple que

$$\sum_{a \in A_k} \left| \left\langle \frac{\partial F_k}{\partial x_j}, e_{(\xi_a, r_a)} \right\rangle \right|^2 \leq C \left\| \frac{\partial F_k}{\partial x_j} \right\|_{L^2(G)}^2.$$

Puesto que resultado también se verifica para  $\frac{\partial F_k(\xi_a, r_a)}{\partial t_j}$ , concluimos que

$$\begin{aligned} \sum_{a \in A} |\langle f, e_a - e_{\bar{a}} \rangle|^2 &\leq \eta^2 C \int_K \sum_{j=1}^{d_1} \left\| \frac{\partial F_k}{\partial x_j} \right\|_{L^2(G)}^2 + \sum_{j=1}^{d_2} \left\| \frac{\partial F_k}{\partial t_j} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2})}^2 dm_K(k) \\ &\leq \eta^2 C (d_1 + d_2) \max^2 \left( \text{diam}(\Omega|_{K, \mathbb{R}^{d_1}}), \text{diam}(\Omega|_{K, \mathbb{Z}^{d_2}}) \right) \|F\|_{L^2(G)}^2 \\ &= \eta^2 C (d_1 + d_2) \max^2 \left( \text{diam}(\Omega|_{K, \mathbb{R}^{d_1}}), \text{diam}(\Omega|_{K, \mathbb{Z}^{d_2}}) \right) \|f\|_{L^2(\widehat{G})}^2, \end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad se obtiene por el Lema 7.1. ■

## 7.2. Multiteselados y bases de Riesz

La relación entre conjuntos multiteselados y la existencias de bases de Riesz en el caso  $G = \mathbb{R}^{d_1}$  surgió por primera vez en el trabajo [23] de Grepstad y Lev. Más precisamente, los autores probaron que un conjunto integrable Riemann de Borel acotado  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  admite una base de Riesz de exponenciales si este multitesela  $\mathbb{R}^d$  con traslaciones de un retículo  $\Lambda$ . Más tarde, Kolountzakis dio en [38] una prueba más simple de este resultado un poco más general (ver también [39] para un enfoque distinto). Importantes casos especiales fueron probados por Lyubarskii y Seip en [48], y Marzo en [50], (ver también [47]).

**Definición 7.5.** *Un subconjunto relativamente compacto de Borel  $\Omega$  de  $\widehat{G}$  multitesela, o más precisamente  $k$ -tesela, al grupo  $\widehat{G}$  si*

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_{\Omega}(\omega - \lambda) = k, \quad \text{c.t.p.} \quad \omega \in \widehat{G},$$

donde  $\Lambda$  es un retículo de  $\widehat{G}$ . Si  $k = 1$  decimos que  $\Omega$  tesela a  $\widehat{G}$  por traslaciones de  $\Lambda$ .

En este trabajo utilizaremos la siguiente generalización del resultado de Grepstad-Lev a grupos LCA dada en [1].

**Teorema 7.6.** Sean  $H$  un retículo uniforme de  $G$ ,  $\Lambda$  su retículo dual, y  $k \in \mathbb{N}$ . Entonces, existen  $a_1, \dots, a_k \in G$ , dependiendo sólo del retículo  $\Lambda$ , tal que para cualquier subconjunto de Borel relativamente compacto  $\Omega$  de  $\widehat{G}$  que satisfaga la condición

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_{\Omega}(\omega - \lambda) = k, \quad \text{c.t.p.} \quad \omega \in \widehat{G},$$

el conjunto

$$\{e_{a_j - h} \chi_{\Omega} : h \in H, j = 1, \dots, k\}$$

es una base de Riesz para  $L^2(\Omega)$ .

Es importante aclarar que en el teorema anterior, el mismo conjunto  $\{a_1, \dots, a_k\}$  puede ser utilizado para cualquier conjunto  $\Omega$   $k$ -teselado. Llamaremos a tal  $k$ -upla  $(a_1, \dots, a_k)$   **$H$ -universal**. Además, necesitamos el siguiente resultado sobre  $k$ -uplas  $H$ -universal.

**Teorema 7.7.** Sea  $H$  un retículo uniforme de  $G$  y  $k \in \mathbb{N}$ . Entonces, existe un conjunto de Borel  $N \subseteq G^k$  tal que  $m_{G^k}(N) = 0$  y toda  $k$ -upla  $(a_1, \dots, a_k) \in G^k \setminus N$  es  $H$ -universal.

**Notación 7.8.** Dado un retículo  $H$  de  $G$  denotamos  $E(H)$  al conjunto

$$\{e_{a_j - h} \chi_{\Omega} : h \in H, j = 1, \dots, k\}$$

donde la  $k$ -upla  $(a_1, \dots, a_k)$  es  **$H$ -universal**.



## Capítulo 8

# Conjuntos de muestreo e interpolación universales

El presente capítulo contiene los principales resultados de la segunda parte del trabajo: dado un grupo  $G$ , cuyo dual es compactamente generado, probar la existencia de conjuntos estables de muestreo e interpolación universales para el espacio  $PW_\Omega$ , bajo ciertas condiciones sobre  $\Omega \subset \widehat{G}$ . La estrategia para la demostración consiste, por un lado en considerar una familia de conjuntos que aproxime a  $\Omega$  y por el otro construir una perturbación del retículo  $H_0$  de manera que las exponenciales con frecuencia en dicho conjunto formen una base de Riesz para todo elemento de la familia. Dado que los grupos con los cuales trabajamos tienen dual compactamente generado, por los Teoremas de estructura sabemos que  $\widehat{G}$  es isomorfo a  $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{Z}^{d_2} \times K$ , donde  $K$  es un grupo compacto. Hallar una familia que aproximen a este tipo de grupo puede ser muy difícil debido al factor compacto. Para superar esta dificultad utilizaremos el siguiente resultado clásico (ver [30]): Dado un entorno  $U$  de  $e$  en  $\widehat{G}$ , existe un subgrupo compacto  $K$  incluido en  $U$  tal que  $\widehat{G}/K$  es elemental, es decir,

$$\widehat{G}/K \simeq \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{Z}^{d_2} \times \mathbb{T}^{d_3} \times F, \quad (8.1)$$

donde  $F$  es un grupo finito. Luego, vamos a comenzar nuestro estudio con esta clase de grupos. Notar que, en particular, el grupo simple  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2^3$  pertenece a esta familia de grupos LCA. Por lo tanto, el resultado obtenido amplía considerablemente la familia de grupos para los cuales se sabe admiten conjuntos de muestreo e interpolación universales. Para probar los resultados nos basamos en la estrategia usada por Olevskii y Ulonovski en [57] y utilizamos resultados sobre cubos cuasi-diádicos probados en [1].

### 8.1. Cubos cuasi-diádicos

La noción de cubos cuasi-diádicos fue introducida en [1] con el objetivo de aproximar conjuntos complicados por medio de uniones de bloques de construcción simple. En el caso clásico de  $\mathbb{R}^d$ , la aproximación se hace por medio de conjuntos que son uniones de cubos diádicos. Notar que los cubos diádicos de lado igual a  $2^{-n}$  son dominios fundamentales para el retículo  $2^{-n}\mathbb{Z}^d$ . Por lo tanto, la dilatación de los cubos se refleja en el refinamiento de los retículos. Luego, con el objetivo de obtener buenas aproximaciones en grupos LCA más generales, la idea es buscar una familia anidada de retículos cuyos correspondientes dominios fundamentales, en cierto sentido, se vuelva cada vez más pequeños.

En  $G = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2} \times \mathbb{Z}^{d_3} \times F$  tenemos la familia de retículos diádicos

$$\Lambda_n = (2^{-n}\mathbb{Z})^{d_1} \times \mathbb{Z}^{d_2} \times (R_{2^n})^{d_3} \times F \subseteq \widehat{G} \quad (8.2)$$

y

$$H_n = \Lambda_n^\perp \subseteq G. \quad (8.3)$$

Si  $n$  está fijo, entonces  $\Lambda_n$  tiene el siguiente dominio fundamental

$$\mathcal{Q}_0^{(n)} = [0, 2^{-n})^{d_1} \times \{0\} \times [0, 2^{-n})^{d_3} \times \{e\}, \quad (8.4)$$

donde estamos identificando a  $\mathbb{T}$  con el intervalo  $[0, 1)$ . Podemos definir los cubos diádicos de generación  $n$  como traslaciones de este dominio fundamental usando los elementos de  $\Lambda_n$ . Esto nos lleva a la siguiente definición de cubos cuasi-diádicos en  $\widehat{G}$ .

**Definición 8.1.** Sean  $K$  un subgrupo compacto de  $\widehat{G}$  tal que  $\widehat{G}/K$  es elemental, y  $\pi$  la proyección canónica de  $\widehat{G}$  en el cociente. Identificando el cociente  $\widehat{G}/K$  con el grupo  $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{Z}^{d_2} \times \mathbb{T}^{d_3} \times F$ , la familia de **cubos cuasi-diádicos de generación  $n$  asociados a  $K$** , denotados por  $\mathcal{D}_K^{(n)}$ , se definen como

$$\mathcal{Q}_\lambda^{(n)} = \pi^{-1}(\mathcal{Q}_\lambda^{(n)})$$

donde  $\mathcal{Q}_\lambda^{(n)} = \lambda + \mathcal{Q}_0^{(n)}$  para  $\lambda \in \Lambda_n$ .

Notar que utilizamos letras caligráficas para simbolizar a los cubos del cociente  $\widehat{G}/K$  con el propósito de distinguirlos de los cubos en  $\widehat{G}$ . Observar también que los cubos cuasi-diádicos  $\mathcal{Q}_\lambda^{(n)}$  son relativamente compactos. En efecto, si  $S_\lambda^{(n)}$  es una sección de Borel relativamente compacta de  $\mathcal{Q}_\lambda^{(n)}$  en el grupo  $\widehat{G}$ , entonces  $\mathcal{Q}_\lambda^{(n)} = S_\lambda^{(n)} + K$ . La siguiente proposición fue probada en [1].

**Proposición 8.2.** Sean  $C$  un conjunto compacto y  $V$  un conjunto abierto tales que  $C \subset V \subset \widehat{G}$ . Entonces, existe un subgrupo compacto  $K$  de  $\widehat{G}$  tal que  $\widehat{G}/K$  es un grupo LCA elemental, y  $Q_{\lambda_1}^{(m)}, \dots, Q_{\lambda_k}^{(m)} \in \mathcal{D}_K^{(m)}$  para  $m \in \mathbb{N}$  suficientemente grande tales que

$$C \subseteq \bigcup_{j=1}^k \mathcal{Q}_{\lambda_j}^{(m)} = \pi^{-1} \left( \bigcup_{j=1}^k \lambda_j + \mathcal{Q}_0^{(m)} \right) \subseteq V.$$

Otro resultado técnico de [1] que necesitamos para probar el Teorema 8.6 es el siguiente resultado de levantamiento:

**Teorema 8.3.** Sea  $K$  un subgrupo compacto de un grupo LCA  $G$  tal que  $\widehat{K}$  es numerable. Supongamos que existe un subconjunto  $Q$  de  $G/K$  tal que  $L^2(Q)$  admite una base de Riesz de caracteres de  $G/K$ . Si  $\pi : G \rightarrow G/K$  denota la proyección canónica, y  $\widetilde{Q} = \pi^{-1}(Q)$ , entonces  $L^2(\widetilde{Q})$  también admite una base de Riesz de caracteres.

## 8.2. Conjuntos de muestreo e interpolación estables

Dado  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos los siguientes conjuntos:

$$S_n = \left\{ \bigcup_{j=0}^{2^{d_1+d_3}} \lambda_j^{(n)} + \mathcal{Q}_0^{(n)} : \lambda_j^{(n)} \in \Lambda_n \text{ y } d_G(0, \lambda_j^{(n)}) < 4^n \right\}, \quad (8.5)$$

donde  $\mathcal{Q}_0^{(n)}$  es el dominio fundamental de  $\Lambda_n$  definido en (8.4), y

$$\mathcal{S} = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n. \quad (8.6)$$



El siguiente teorema es una importante herramienta para la prueba del Teorema 8.5. La demostración está basada en las ideas seguidas por Olevskii y Ulanovskii en la prueba del Teorema 6.1 en [57].

**Teorema 8.4.** Sea  $G = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2} \times \mathbb{Z}^{d_3} \times F$ , donde  $F$  es un grupo discreto. Dado  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ , existe una  $\varepsilon$ -perturbación  $H_0^{(\varepsilon)}$  del retículo  $H_0$  tal que  $E(H_0^{(\varepsilon)})$  es una base de Riesz para  $L^2(\Omega)$ , donde  $\Omega$  es cualquier conjunto perteneciente a  $\mathcal{S}$ .

*Demostración.* Para la demostración vamos a utilizar un argumento inductivo. Antes de comenzar, dado  $H_n$ , el retículo de  $G$  definido en (8.3), sea  $\mathcal{A}_n = \{a_{n,1}, \dots, a_{n,m_n}\}$  un sistema de representantes del cociente  $H_{n-1}/H_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces, tenemos que

$$H_{n-1} = \sum_{j=1}^{m_n} a_{n,j} + H_n.$$

Ahora, comencemos con el proceso inductivo. Sea  $\Lambda_0 = \mathbb{Z}^{d_1} \times \mathbb{Z}^{d_2} \times \{e_{\mathbb{T}^{d_3}}\} \times \{e_F\} \subseteq \widehat{G}$  y  $\Omega_j^0$  cualquier conjunto de  $\mathcal{S}_0$ . Dado que para cualquier  $j$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_0} \chi_{\Omega_j^0}(\omega - \lambda) = 1,$$

por el Teorema de Fuglede, el conjunto  $\{e_h\}_{h \in H_0}$  es una base ortonormal de  $L^2(\Omega_j^0)$ , donde  $H_0 = \Lambda_0^\perp$ . Sea  $B_0 = H_0$ . Por definición de  $\mathcal{A}_1$ , se satisface que

$$H_0 = \bigcup_{j=1}^{m_1} a_{1,j} + H_1.$$

Ahora, sea  $\eta_j^0$  la constante dada por el Teorema 7.4 aplicado a  $B_0$  con respecto a  $\Omega_j^0 \in \mathcal{S}_0$ , y definimos  $\eta_0 \leq \min_j \eta_j^0$ . Entonces, para cada  $j$ , tomamos  $\varepsilon_{1,j} < \varepsilon_1 := \frac{1}{4} \min\{\varepsilon, \eta_0\}$  y definimos

$$\mathcal{B}_1 = \bigcup_{j=1}^{m_1} (a_{1,j} + \varepsilon_{1,j}) + H_1.$$

Si  $\Omega_j^1$  es un conjunto de  $\mathcal{S}_1$ , entonces

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_1} \chi_{\Omega_j^1}(\omega - \lambda) = 2^1,$$

donde  $\Lambda_1$  es el retículo dual de  $H_1$ . Luego, por el Teorema 7.6, podemos tomar  $\varepsilon_{1,j}$  de manera que  $E(\mathcal{B}_1)$  sea una base de Riesz de  $L^2(\Omega_j^1)$  para cualquier  $\Omega_j^1$  en  $\mathcal{S}_1$ . Además, por definición de  $\eta_0$ ,  $E(\mathcal{B}_1)$  también es base de Riesz para todos los conjuntos en  $\mathcal{S}_0$ . Notar que  $\mathcal{B}_1$  es una  $\varepsilon_1/4$ -perturbación de  $H_0$ . Ahora, por definición de  $\mathcal{A}_2$ ,

$$H_1 = \bigcup_{j=1}^{m_2} a_{2,j} + H_2.$$

Luego, como antes, sea  $\eta_j^1$  la constante obtenida por el Teorema 7.4 aplicado a  $\mathcal{B}_1$  y  $\Omega \in \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$ , y definamos  $\eta_1 = \min_j \eta_j^1$ . Sea  $\varepsilon_{2,j_2} < \varepsilon_2 := \frac{1}{8} \min\{\varepsilon_1, \eta_1\}$  y consideremos

$$\mathcal{B}_2 = \bigcup_{j_1=1}^{m_1} \bigcup_{j_2=1}^{m_2} (a_{1,j_1} + \varepsilon_{1,j_1}) + ((a_{2,j_2} + \varepsilon_{2,j_2}) + H_2).$$

Dado que,  $\mathcal{B}_2$  es una  $\eta_1$ -perturbación de  $\mathcal{B}_1$ ,  $E(\mathcal{B}_2)$  es una base de Riesz para  $L^2(\Omega)$ , para todo  $\Omega \in \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$ . Por otra parte, por verificarse que

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_2} \chi_{\Omega_j^2}(\omega - \lambda) = 2^2,$$

donde  $\Lambda_2$  es el retículo dual de  $H_2$  y  $\Omega_j^2$  es un conjunto de  $\mathcal{S}_2$ , por el Teorema 7.6,  $E(\mathcal{B}_2)$  es una base de Riesz para  $L^2(\Omega_j^2)$ .

Usando este proceso inductivo, dados  $\mathcal{B}_{n-1}$  y  $\eta_{n-1}$ , existe un conjunto  $\mathcal{B}_n$ , con  $\varepsilon_{n,j_n} \leq \varepsilon_n := \frac{1}{2^{n+1}} \min\{\varepsilon_{n-1}, \eta_{n-1}\}$ , el cual es una  $\eta_{n-1}$ -perturbación de  $\mathcal{B}_{n-1}$  y

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_n} \chi_{\Omega_j^n}(\omega - \lambda) = 2^n,$$

para cualquier  $\Omega_j^n$  en  $\mathcal{S}_n$ . Luego, por los Teoremas 7.4 y 7.6,  $\mathcal{B}_n$  es una base de Riesz de  $L^2(\Omega)$ , para todo  $\Omega \in \bigcup_{j=0}^n \mathcal{S}_n$ .

Si denotamos  $B(\lambda, \varepsilon)$  a la bola de radio  $\varepsilon$  y centro  $\lambda \in H_0$ , entonces existe un único elemento  $\lambda_n \in \mathcal{B}_n \cap B(\lambda, \varepsilon)$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Por construcción, dado  $\lambda \in H_0$ , la sucesión  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy, por lo tanto converge a  $\lambda_\infty$ . Notemos por  $H_0^{(\varepsilon)}$  al conjunto límite que contiene a todos los puntos  $\lambda_\infty$ . Por otra parte, la sucesión  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  también satisface que

$$\lambda_m \in B(\lambda_n, \varepsilon_{n+1}/2^n) \quad \forall m \geq n. \quad (8.7)$$

Entonces, para cada  $n \in \mathbb{N}$  fijo,  $H_0^{(\varepsilon)}$  es una  $\varepsilon_{n+1}/2^n$ -perturbación de  $\mathcal{B}_n$ . Luego, por el Teorema 7.4,  $H_0^{(\varepsilon)}$  es una base de Riesz en  $L^2(\Omega)$ , para cada  $\Omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_n$ . ■

Finalmente, tenemos todos los resultados que necesitamos para probar uno de los principales teoremas del presente trabajo.

**Teorema 8.5.** Sea  $G$  un grupo LCA tal que su dual es compactamente generado de tipo Lie. Entonces, dado  $r > 0$  existe un conjunto  $\Delta \subseteq G$  con densidad uniforme finita igual a  $r$  tal que:

1.  $\Delta$  es un conjunto de muestreo estable para todo  $PW_\Omega$ , donde  $\Omega$  es un conjunto compacto de Borel y  $m_{\widehat{G}}(\Omega) < \mathcal{D}(\Delta)$ .
2.  $\Delta$  es un conjunto de interpolación estable para todo  $PW_\Omega$ , donde  $\Omega$  es un conjunto de Borel integrable Riemann tal que  $m_{\widehat{G}}(\Omega) > \mathcal{D}(\Delta)$ .

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad podemos considerar sólo el caso  $r = 1$ . Por el Teorema 8.4 existe un conjunto  $\Delta$  tal que  $\mathcal{D}(\Delta) = 1$  y  $E(\Delta)$  es una base de Riesz para  $L^2(\Omega)$  para cualquier  $\Omega \in \mathcal{S}$ . Veamos que  $\Delta$  es el conjunto que estamos buscando.

*Caso muestreo:* Sea  $\Omega \subset \widehat{G}$  un conjunto compacto tal que  $m_{\widehat{G}}(\Omega) < 1$ . Por la regularidad de la medida de Haar, existe un conjunto abierto  $V$  tal que  $\Omega \subset V$  y  $m_{\widehat{G}}(V) < 1$ . Por la Proposición 8.2 existe  $n$  suficientemente grande y  $\lambda_1^n, \dots, \lambda_k^n \in \Lambda_n$  tal que

$$\Omega \subseteq \bigcup_{j=1}^k \lambda_j^n + \mathcal{Q}_0^{(n)} \subseteq V.$$

Tomemos cualquier  $\tilde{\Omega} \in \mathcal{S}_n$  que contenga a la unión antes mencionada. Dado que  $E(\Delta)$  es una base de Riesz para  $L^2(\tilde{\Omega})$ , se tiene que  $E(\Delta)$  es un marco para  $L^2(\Omega)$ .

*Caso interpolación:* Sea  $\Omega \subset \hat{G}$  un conjunto integrable Riemann de Borel tal que  $m_{\hat{G}}(\Omega) > 1$ . Por hipótesis,  $m_G(\partial\Omega) = 0$ , por lo tanto podemos trabajar con el interior de  $\Omega$ . Por simplicidad vamos a usar la misma letra  $\Omega$  para denotar el interior de  $\Omega$ . Por ser  $m_{\hat{G}}$  una medida regular, para todo  $\varepsilon > 0$  existe un subconjunto compacto  $K$  de  $\hat{G}$  tal que  $m_{\hat{G}}(\Omega \setminus K) < \varepsilon$  entonces, por la suposición sobre la medida de  $\Omega$ , se cumple que  $m_{\hat{G}}(K) > 1$ . Por la Proposición 8.2 existe  $n$  suficientemente grande, y  $\lambda_1^n, \dots, \lambda_k^n \in \Lambda_n$  tal que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^k \lambda_j^n + \mathcal{Q}_0^{(n)} \subseteq \Omega.$$

Dado que  $m_{\hat{G}}(K) > 1$ , podemos tomar cubos  $\lambda_{j_i}^n + \mathcal{Q}_0^{(n)}$  tales que

$$m_{\hat{G}} \left( \bigcup_{i=1}^{n_i} \lambda_{j_i}^n + \mathcal{Q}_0^{(n)} \right) = 1.$$

Sea  $\tilde{\Omega}$  la unión antes mencionada. Por ser  $E(\Delta)$  una base de Riesz para  $L^2(\tilde{\Omega})$ , cuyo elementos son caracteres de  $\hat{G}$ , esta forma una sucesión de Riesz en  $L^2(\Omega)$ . Luego, como puntos de  $G$ ,  $\Delta$  forma un conjunto de interpolación para  $PW_{\Omega}$ . ■

Usando ideas de [1], a partir del Teorema 8.5 obtendremos el último de los principales resultados.

**Teorema 8.6.** Sean  $G$  un grupo LCA y  $\Omega$  un conjunto de  $\hat{G}$ . Dado  $r > 0$  y un entorno  $U$  de  $e$  en  $\hat{G}$ , si  $\Omega_U = \Omega + U$ , entonces existe un conjunto  $\Delta \subseteq G$  con densidad uniforme finita igual a  $r$  tal que:

1.  $\Delta$  es un conjunto de muestreo estable para todo  $PW_{\Omega}$ , donde  $\Omega$  es un conjunto de Borel compacto y  $m_{\hat{G}}(\Omega_U) < \mathcal{D}(\Delta)$ .
2.  $\Delta$  es un conjunto de interpolación estable para todo  $PW_{\Omega_U}$ , donde  $\Omega$  es un conjunto de Borel integrable Riemann tal que  $m_{\hat{G}}(\Omega) > \mathcal{D}(\Delta)$ .

*Demostración.* Dado un entorno fijo  $U$  de la identidad  $e$ , existe un subgrupo compacto  $K$  incluido en  $U$  tal que  $\hat{G}/K$  es elemental (ver [30]), es decir,

$$\hat{G}/K \simeq \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{Z}^{d_2} \times \mathbb{T}^{d_3} \times F,$$

donde  $F$  es un grupo finito. Sean  $\pi$  la proyección canónica de  $\hat{G}$  en el cociente  $\hat{G}/K$  y  $m_K$  la medida de Haar sobre  $K$  normalizada de manera que sea una medida de probabilidad. Como en la demostración del Teorema 8.5, sin pérdida de generalidad podemos considerar solo el caso  $r = 1$ . Entonces, en  $\hat{G}/K$  consideramos los conjuntos  $\mathcal{S}_n$  y  $\mathcal{S}$  introducidos en (8.5) y (8.6). Por el Teorema 8.4 existe un subconjunto  $\Delta_0$  de  $\widehat{(\hat{G}/K)}$  tal que  $\mathcal{D}(\Delta_0) = 1$  y  $E(\Delta_0)$  es una base de Riesz de exponenciales para  $L^2(\tilde{\Omega})$  para cualquier  $\tilde{\Omega} \in \mathcal{S}$ .

En  $\hat{G}$  consideremos los conjuntos de medida uno que consisten de uniones finitas de cubos cuasi-diádicos. Estos conjuntos coinciden precisamente con la preimagen por  $\pi$  de los elementos de  $\mathcal{S}$ . Entonces, por el Teorema 8.3, el conjunto  $\Delta_0$  puede ser subido a un subconjunto  $\Delta$  de  $G$  tal que  $E(\Delta)$  es una base de Riesz para  $L^2(\pi^{-1}(\tilde{\Omega}))$  para cualquier  $\tilde{\Omega} \in \mathcal{S}$ .

Ahora, probaremos que este conjunto  $\Delta$  es el conjunto de muestreo universal (resp. conjunto de interpolación universal) que estamos buscando. Nuevamente haremos la prueba de ambos casos en forma separada.

*Caso muestreo:* Sea  $\Omega \subset \widehat{G}$  un conjunto compacto tal que  $m_{\widehat{G}}(\Omega_U) < 1$ . Definimos  $\Omega_K = \pi^{-1}(\pi(\Omega))$ . Dado que  $\Omega_K$  es de la forma  $\Omega_K = \Omega + K$ , es un subconjunto de  $\Omega_U$ . En particular,  $m_{\widehat{G}}(\Omega_K) < 1$ . Si normalizamos la medida de Haar en  $\widehat{G}/K$  tal que la fórmula de Weil se verifique, entonces

$$m_{\widehat{G}/K}(\pi(\Omega)) = m_{\widehat{G}}(\Omega_K) < 1.$$

En particular, como en la prueba del Teorema 8.5, es posible construir  $\widetilde{\Omega} \in \mathcal{S}$  tal que  $\pi(\Omega) \subseteq \widetilde{\Omega}$ . Por lo tanto,  $\Omega_K \subseteq \pi^{-1}(\widetilde{\Omega})$ . Por ser  $E(\Delta)$  una base de Riesz para  $L^2(\pi^{-1}(\widetilde{\Omega}))$ , se tiene que  $E(\Delta)$  es un marco para  $L^2(\Omega_K)$ .

*Caso interpolación:* Consideremos un conjunto Riemann integrable de Borel  $\Omega \subset \widehat{G}$  tal que  $m_{\widehat{G}}(\Omega) > 1$ . Como en la prueba del Teorema 8.5, sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $\Omega$  es abierto. Por ser  $\pi$  una aplicación abierta tenemos que  $\pi(\Omega)$  también es abierto. Sea  $\Omega_K = \pi^{-1}(\pi(\Omega)) = \Omega + K$ . Entonces, como consecuencia de la normalización que consideramos para la medida de Haar en el cociente, se cumple que

$$m_{\widehat{G}/K}(\pi(\Omega)) = m_{\widehat{G}}(\Omega_K) > m_{\widehat{G}}(\Omega) > 1.$$

Como en la demostración del Teorema 8.5, es posible construir  $\widetilde{\Omega} \in \mathcal{S}$  tal que  $\pi(\Omega) \supseteq \widetilde{\Omega}$ . Luego,

$$\Omega_U \supseteq \Omega_K \supseteq \pi^{-1}(\widetilde{\Omega}),$$

donde hemos usado que  $K \subseteq U$ . Dado que  $E(\Delta)$  es una base de Riesz para  $L^2(\pi^{-1}(\widetilde{\Omega}))$ , resulta que  $\Delta$  es un conjunto de interpolación para  $PW_{\Omega_U}$ . Esto concluye la prueba del Teorema 8.6. ■

# Bibliografía

- [1] E. Agora, J. Antezana and C. Cabrelli, *Multi-tiling sets, Riesz bases, and sampling near the critical density in LCA groups*, Adv. Math. **285** (2015) 454-477.
- [2] E. Agora, J. Antezana, C. Cabrelli and Basarab Matei, *Existence of quasicrystals and universal stable sampling and interpolation in LCA groups*, Trans. Amer. Math. Soc. (2019).
- [3] A. B. Aleksandrov, *Isometric embeddings of coinvariant subspaces of the Shift operator*, J. Math. Sci. **92** (1998) 3543–3549.
- [4] A. B. Aleksandrov, *On the existence of angular boundary values of pseudocontinuable functions*, Zap. Nauchn. Semin. POMI **222** (1995) 5-17; translation in J. Math. Sci. **87** (1997) 3781–3787.
- [5] N. Aronszajn, *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 337–404.
- [6] A. Beurling, *The collected works of Arne Beurling*. Vol. 2, Harmonic analysis, edited by L. Carleson, P. Malliavin, J. Neuberger, and J. Wermer, Contemporary Mathematicians, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1989. MR1057614
- [7] O. Christensen, *An introduction to Frames and Riesz bases: Applied and Numerical Harmonic Analysis*, Springer Science, New York (2016).
- [8] J. Cima, A. Matheson, W. Ross, *The Cauchy transform*, Mathematical Surveys and Monographs Volumen 125, American Mathematical Society, Providence, RI (2006), 179–208.
- [9] J. Cima, W. Ross, *The Backward Shift on the Hardy Space*, Mathematical Surveys and Monographs Volumen 79, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [10] D. N. Clark, *One dimensional perturbations of restricted shifts*, J. Anal. Math. **25** (1972) 169–191.
- [11] X.-R. Dai, *Spectra of Cantor measures*, Math. Ann. **366** (2016), no. 3-4, 1621–1647.
- [12] X.-R. Dai, X.-G. He, C.-K. Lai, *Spectral property of Cantor measures with consecutive digits*. Adv. Math. **242** (2013), 187–208.
- [13] A. Deitmar and S. Echterhoff, *Principles of harmonic analysis*, Universitext, Springer, New York (2009) xvi+333 pp.
- [14] D. E. Dutkay, C.-K. Lai, *Uniformity of measures with Fourier frames*. Adv. Math. **252** (2014), 684–707.
- [15] D. E. Dutkay, C.-K. Lai, Y. Wang, *Fourier bases and Fourier frames on self-affine measures*. Preprint (2016), arXiv:1602.04750.

- [16] D.E. Dutkay, D. Han, Q. Sun, *On the spectra of a Cantor measure*, Adv. Math. 221 (2009) 251–276.
- [17] D. E. Dutkay, Palle E. T. Jorgensen, *Affine fractals as boundaries and their harmonic analysis*, Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011) 3291–3305.
- [18] R. Duffin, A. Schaeffer, *A class of non-harmonic Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952) 341–366.
- [19] P. Fatou, *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, Acta Math. 30 (1906), 335–400.
- [20] H. G. Feichtinger, K. Gröchenig, *Irregular sampling theorems and series expansions of band-limited functions*, J. Math. Anal. Appl. **167** (1992), 530–556.
- [21] J. Feldman and F.P. Greenleaf, *Existence of Borel transversal in groups*, Pacific J. Math. **25** (1968), 455–461.
- [22] B. Fuglede, *Commuting self-adjoint partial differential operators and a group theoretic problem*, J. Funct. Anal. 16 (1974) 101–121.
- [23] S. Grepstad and N. Lev, *Multi-tiling and Riesz bases*, Adv. Math. **252** (2014) 1–6.
- [24] K. Gröchenig, G. Kutyniok and K. Seip, *Landau’s necessary density conditions for locally compact abelian groups*, J. Funct. Anal., Vol. **255**, Issue 7, (2008) 1831–1850.
- [25] R. Haller, R. Szwarc, *Kaczmarz algorithm in Hilbert space*, Studia Math. 169 (2005), no. 2, 123–132.
- [26] X.-G. He, C.-K. Lai, K.-S. Lau, *Exponential spectra in  $L^2(\mu)$* , Appl. Comput. Harmon. Anal. 34 (2013), no. 3, 327–338.
- [27] J. E. Herr, E. S. Weber, *Fourier series for singular measures*, Axioms 6(2) (2017) 7.
- [28] J. E. Herr, P. E. T. Jorgensen, E. S. Weber, *Positive matrices in the Hardy space with prescribed boundary representations via the Kaczmarz algorithm*, J. d’Analyse Mathématique, to appear.
- [29] J. E. Herr, P. E. T. Jorgensen, E. S. Weber, *A matrix characterization of boundary representations of positive matrices in the Hardy space*, arXiv:1705.04198.
- [30] E. Hewitt and K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis*, Vol. 1, Springer-Verlag, New York (1963).
- [31] E. Hewitt and K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis*, Vol. 2, Springer-Verlag, New York (1970).
- [32] S.V. Hrushev, N.K. Nikolskii, B.S. Pavlov, *Unconditional bases of exponentials and of reproducing kernels. Complex analysis and spectral theory* (Leningrad, 1979/1980) pp. 214–335 (in Russian). English translation in Lecture Notes in Math., 864, Springer, Berlin-New York, 1981.
- [33] A. Iosevich, N. Katz, T. Tao, *Fuglede conjecture holds for convex planar domains*, Math. Res. Lett. 10 (2003) 559–569.

- [34] P. E. T. Jorgensen, S. Pedersen, *Dense analytic subspaces in fractal  $L_2$ -spaces*, J. Anal.Math. 75 (1998), 185–228.
- [35] S. Kaczmarz, *Approximate solution of systems of linear equations*, Bulletin International de l'Académie Plonaise des Sciences et des Lettres. Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles. Série A. Sciences Mathématiques 35 (1937) 355-357 (in German). English translate in Internat. J. Control 57 (1993) 1269–1271.
- [36] E. Kaniuth and G. Kutyniok, *Zeros of the Zak transform on locally compact abelian groups*, Amer. Math. Soc. **126** (1998) no. 12, 3561-3569.
- [37] M. N. Kolountzakis M., *The study of translational tiling with Fourier Analysis*, Lectures given at the Workshop on Fourier Analysis and Convexity, Università di Milano-Bicocca, June 11-22, (2001).
- [38] M. Kolountzakis, *Multiple lattice tiles and Riesz bases of exponentials*, Proc. Amer. Math. Soc. 143 (2015), 741-747.
- [39] G. Kozma, S. Nitzan, *Combining Riesz bases*, Invent. Math. (2015) 199 267-285.
- [40] S. Kwapien, J. Mycielski, *On the Kaczmarz algorithm of approximation in infinite dimensional spaces*, Studia Math. 148 (2001) no. 1. 75–86.
- [41] I. Laba, *Fuglede's conjecture for a union of two intervals*, Proc. Amer. Math. Soc., 129(10) (2001), 2965-2972.
- [42] I. Laba, Y. Wang, *Some properties of spectral measures*, Appl. Comput. Harmon. Anal.20 (2006), no. 1, 149–157.
- [43] C.-K. Lai, *On Fourier frame of absolutely continuous measures*, J. Funct. Anal. 261 (2011),no. 10, 2877–2889.
- [44] H. J. Landau, *Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions*, Acta Math. **117** (1967), 37-52.
- [45] N. Lev and A. Olevskii, *Quasicrystals and Poisson's summation formula*, Invent. Math. **200** (2015) no. 2, 585-606.
- [46] E. Lindelöf, *Sur un principe général de l'analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme*, Acta Soc. Sci Fenn. 46, (1915) no. 4, 1-35.
- [47] Y. I. Lyubarskii, A. Rashkovskii, *Complete interpolation sequences for Fourier transforms supported by convex symmetric polygons*, Ark. Mat. 38 (2000), no. 1, 139-170.
- [48] Y. I. Lyubarskii, K. Seip, *Sampling and interpolating sequences for multiband-limited functions and exponential bases on disconnected sets*, J. Fourier Anal. Appl. **3** (1997) no. 5, 597-615.
- [49] A. W. Marcus, D. A. Spielman, N. Srivastava, *Interlacing families II: Mixed characteristic polynomials and the Kadison-Singer problem*, Ann. of Math. (2) 182 (2015), no. 1, 327–350.
- [50] J. Marzo, *Riesz basis of exponentials for a union of cubes in  $R^d$* , Preprint arXiv: math/0601288.

- [51] B. Matei and Y. Meyer, *Simple quasicrystals are sets of stable sampling*, Complex Var. Elliptic Equ. **55** (2010) no. 8-10, 947-964.
- [52] A. Netyanun, D. C. Solmon, *Iterated Products of Projections in Hilbert Spaces*, The Mathematical Association of America, 2006.
- [53] N. Nikolski, *Operators, functions, and systems: an easy reading*, Vol. 1. Hardy, Hankel, and Toeplitz. Mathematical Surveys and Monographs, **92**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [54] N. Nikolski, *Operators, functions, and systems: an easy reading*, Vol. 2. Model operators and systems. Mathematical Surveys and Monographs, **93**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [55] S. Nitzan, A. Olevskii, A. Ulanovskii, *Exponential frames on unbounded sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **144** (2016), no. 1, 109–118.
- [56] A. Olevskii and A. Ulanovskii, *A universal sampling of band-limited signals*, C.R. Math. Acad. Sci. Paris **342** (2006) no. 12, 927-931.
- [57] A. Olevskii and A. Ulanovskii, *Universal sampling and interpolation of band-limited signals*, Geom. Funct. Anal. **18** (2008), no. 3, 1029-1052.
- [58] A. G. Poltoratki, *The boundary behavior of pseudocontinuable functions*, Algebra i Analiz **5** (1993) no. 2, 189-210 (in Russian). English translation in St.Petersburg Math. J. **5** (1994) 389–406.
- [59] H. Reiter, *Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1968.
- [60] W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups*. Reprint of the 1962 original. Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990. x+285 pp.
- [61] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, Third edition, McGraw-Hill, New York, 1976.
- [62] W. Rudin, *Real and complex analysis*, Third edition, McGraw-Hil, New York, 1987.
- [63] E. Saksman, *An elementary introduction to Clark measures. Topics in complex analysis and operator theory*, Univ. Málaga, Málaga (2007) 85–136.
- [64] D. Sarason, *Sub-Hardy Hilbert spaces in the unit disk*, University of Arkansas Lecture Notes in the Mathematical Sciences, **10**. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994.
- [65] K. T. Smith, D. C. Solmon, and S. L. Wagner, *Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs*, Bull. Amer. Math. Soc. Vol. **83**, 1977, n° 6. 1227-1270.
- [66] K. Stephenson, *Isometries in the Nevanlinna class*, Indiana Univ. Math. J. **26** (1977) 307-324.
- [67] D. Stojanoff, *Análisis Funcional vs. Matricial*, 2010.



- 
- [68] K. Tanabe, *Projection Method for Solving a Singular System of Linear Equations and its Applications*, Springer-Verlag 1971, n° 17. 203-214.
- [69] T. Tao, *Fuglede's conjecture is false in 5 and higher dimensions*, Math. Res. Lett. 11 (2004) 251–258.
- [70] M. Veselý, *Construction of almost periodic sequences with given properties*, Electron. J. Differential Equations 126, 1-22, 2008.
- [71] P. Walters, *An introduction to Ergodic Theory*, Graduate texts in mathematics; 79, Springer-Verlag, 1982.