Cramér-Rao Bound for Parameter Estimation in Sensor Arrays with Mutual Coupling

J. P. Pascual, N. von Ellenrieder, *Member,* IEEE and C. H. Muravchik, *Senior Member,* IEEE

***Abstract*— The mutual coupling effect in a sensor array must be taken into account, since it degrades significantly the performance of the well-known signal direction finding algorithms. In this work, we derived the Cramér-Rao bound on the estimation of the mutual coupling coefficients and of the signal direction of arrival, when the signal covariance matrix and the noise variance are unknown. The Cramér-Rao bound plays an important role in estimation problems, since it allow us to study the performance of estimation methods under certain conditions. We use the calculated bounds to evaluate the performance of an estimation method of the mentioned parameters. This approach uses the multiple signal classification algorithm on an enlarged sensor array with auxiliary elements, whose number depends on the number of mutual coupling coefficients.**

***Keywords*— Cramér-Rao bound, sensor array, mutual coupling, DOA estimation, MUSIC.**

I. Introducción

La ESTIMACIÓN de las direcciones de arribo (DOA) de múltiples señales es un problema clásico en el procesamiento de señales para arreglos de sensores. Al mismo tiempo la cota de Cramér-Rao (CRB) tiene un rol importante, debido a que permite analizar el desempeño esperable de manera independiente de los algoritmos de estimación, y en general con una menor carga computacional.

La deducción de la CRB para la estimación de las DOA es un problema que ha sido abordado en varios trabajos bajo hipótesis diferentes. En [1] la cota se evalúa considerando señales determinísticas desconocidas, mientras que en [2], [3] los autores consideran señales aleatorias con matriz de covarianza y varianza de ruido desconocidas. Sin embargo, en estos enfoques no se contemplan imperfecciones en el arreglo. En general, los algoritmos de localización de fuentes de alta resolución requieren una precisa caracterización del arreglo. En la práctica esta información está sujeta a errores de calibración, lo que lleva a un deterioro en el desempeño de los procedimientos de estimación de las DOA [4]. En particular, uno de los fenómenos que los afectan es el acoplamiento entre los elementos de un arreglo, y no puede ser ignorado cuando el espaciado entre sensores es pequeño. Respecto a este tema, en la literatura por lo general se aborda el problema de la compensación del acoplamiento para la estimación de las DOA. En [5] se evalúa la CRB para la estimación de las DOA cuando existen imperfecciones en el arreglo, pero solo consideran un coeficiente de acoplamiento y la matriz de covarianza entre las señales se considera conocida. Por otro lado, en [6] se propone un modelo de acoplamiento inspirado biológicamente para la estimación de DOA en presencia de acoplamiento, pero el cálculo de la cota se realiza asumiendo como parámetros conocidos a los coeficientes de acoplamiento.

En este trabajo se deducen las expresiones para calcular la cota de Cramér-Rao para la estimación de los coeficientes de acoplamiento y las direcciones de arribo, considerando señales aleatorias con matriz de covarianza desconocida y ruido independiente e idénticamente distribuido con varianza desconocida. Los resultados obtenidos se utilizan para evaluar el desempeño de un algoritmo para la estimación de dichos parámetros, propuesto en [7].

En el apéndice A se describe la notación de las operaciones utilizadas frecuentemente a lo largo del trabajo.

II. Métodos

A. Formulación del problema

Consideremos un arreglo de sensores lineal y uniforme (ULA) compuesto de N elementos isotrópicos con un espaciado d entre sensores vecinos. A este arreglo arriban M señales aleatorias de banda angosta $f_1(t), f_2(t), \cdots, f_M(t)$ de las direcciones $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_M$, las cuales se asume que han sido emitidas por fuentes en campo lejano y tienen la misma longitud de onda central λ, conocida por el receptor. El ruido aditivo de los sensores es independiente e idénticamente distribuido, Gaussiano con media nula y varianza σ^2. Se ha demostrado que el acoplamiento es el mismo entre elementos separados igual distancia y que la magnitud del acoplamiento decrece rápidamente a medida que el espaciado entre sensores se incrementa [4], [6], es decir, el acoplamiento entre dos elementos lo suficientemente alejados puede considerarse nulo. Por este motivo, habitualmente en los ULA se modela el acoplamiento utilizando una matriz en banda con simetría Toeplitz con unos pocos coeficientes de acoplamiento distintos de cero [5]. Basándonos en este modelo, si suponemos que P es el número de coeficientes de acoplamiento no nulos, entonces para el i-ésimo sensor el acoplamiento proviene de los sensores $(i-P+1), \cdots, (i-1), (i+1), \cdots$ e $(i+P-1)$. Luego, la salida del arreglo puede escribirse como

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{f}(k) + \mathbf{n}(k) \quad k = 1, \cdots, K, \tag{1}$$

J. P. Pascual, Universidad Nacional de La Plata, Buenos Aires, Argentina, CONICET, juanpablo.pascual@ing.unlp.edu.ar

N. von Ellenrieder, Universidad Nacional de La Plata, Buenos Aires, Argentina, CONICET, ellenrie@ing.unlp.edu.ar

C. H. Muravchik, Universidad Nacional de La Plata, Buenos Aires, Argentina, CIC-PBA, carlosm@ing.unlp.edu.ar

donde K es el número de realizaciones de los datos y $\mathbf{x}(k)=[x_1(k)\,x_2(k)\cdots x_N(k)]^T$, $\mathbf{f}(k)=[f_1(k)\,f_2(k)\cdots f_M(k)]^T$ y $\mathbf{n}(k)=[n_1(k)\,n_2(k)\cdots n_N(k)]^T$, denotan el vector de señal a la salida del arreglo, el vector de las señales recibidas y el vector de ruido, respectivamente. Además, $\mathbf{V}=[\mathbf{v}(\psi_1)\,\mathbf{v}(\psi_2)\cdots\mathbf{v}(\psi_M)]$ es la matriz de viraje del arreglo, cuyas columnas son los vectores variedad del arreglo de las distintas señales $\mathbf{v}(\psi_i)=[e^{-j\psi_i(N-1)/2}\cdots e^{j\psi_i(N-1)/2}]^T$, $i=1,\cdots,M$, con $\psi_i=2\pi d sen(\phi_i)/\lambda$, siendo ϕ_i el ángulo de arribo de la *i*-ésima señal. Por último, podemos escribir los elementos de la matriz $\mathbf{C}$ como $[\mathbf{C}]_{ij}=c_{|i-j|}$, con $c_0=1$ [4], donde c_n es el coeficiente de acoplamiento entre los sensores *i*-ésimo e *(i+n)*-ésimo, con lo que resulta

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 1 & c_1 & \cdots & c_{P-1} & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & 1 & \cdots & c_{P-2} & c_{P-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{P-1} & c_{P-2} & \cdots & 1 & c_1 & \cdots & \\ 0 & c_{P-1} & \cdots & c_1 & 1 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{P-1} & \cdots & c_1 & 1 \end{bmatrix}_{N\times N}. \tag{2}$$

Bajo estas hipótesis y considerando que las señales son independientes del ruido, entonces el vector de salida del arreglo es aleatorio con matriz de covarianza

$$\mathbf{S}_x=\mathrm{E}\left\{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k)\right\}=\mathbf{CVS}_f\mathbf{V}^H\mathbf{C}^H+\sigma^2\mathbf{I}_N, \tag{3}$$

donde $\mathbf{S}_f=\mathrm{E}\left\{\mathbf{f}(k)\mathbf{f}^H(k)\right\}$ es la matriz de covarianza del vector de señal e $\mathbf{I}_N$ es una matriz identidad de $N\times N$.

Para nuestro problema asumiremos que el número de señales que arriban al arreglo M y el número de coeficientes de acoplamiento P son conocidos. En la práctica, estos pueden estimarse utilizando algún criterio de selección de modelos, como por ejemplo, el principio de descripción de mínimo largo (MDL) [8]. Como parámetros desconocidos consideraremos las DOA de dichas señales, su matriz de covarianza, la varianza del ruido y los valores de los coeficientes de acoplamiento. Por otro lado, solo estamos interesados en estimar las DOA de las señales y los coeficientes de acoplamiento.

B. Cota de Cramér-Rao

En esta sección presentamos el cálculo de la cota de Cramér-Rao para los estimadores de las direcciones de arribo y de los coeficientes de acoplamiento. La CRB es una cota inferior para la matriz de covarianza de un estimador insesgado, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, de un parámetro, $\boldsymbol{\theta}$, la cual establece que [9]

$$\mathrm{E}\left\{(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta})(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta})^H\right\}\geq\mathbf{CRB}=\mathbf{J}^{-1}. \tag{4}$$

En otras palabras, la diferencia entre la matriz de covarianza del estimador y la CRB es una matriz semi-definida positiva. La matriz $\mathbf{J}$ es la matriz de información de Fisher, cuyos elementos se definen como [9]

$$[\mathbf{J}]_{ij}=\mathrm{E}\left\{\frac{\partial L_X(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}\frac{\partial L_X(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j}\right\}=-\mathrm{E}\left\{\frac{\partial^2 L_X(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right\}, \tag{5}$$

donde $L_X(\boldsymbol{\theta})$ es la función verosimilitud logarítmica de los datos $\mathbf{X}=[\mathbf{x}(1)\,\mathbf{x}(2)\cdots\mathbf{x}(K)]$.

A partir de las suposiciones realizadas y asumiendo que las señales tienen distribución Gaussiana con media nula, se puede demostrar que $[\mathbf{J}]_{ij}$ está dado por [10]

$$[\mathbf{J}]_{ij}=K\mathrm{tr}\left\{\mathbf{S}_x^{-1}\frac{\partial\mathbf{S}_x}{\partial\theta_i}\mathbf{S}_x^{-1}\frac{\partial\mathbf{S}_x}{\partial\theta_j}\right\}. \tag{6}$$

Para nuestro problema también consideraremos que las señales son no correlacionadas, pero de distinta potencia, es decir que $\mathbf{S}_f=\mathrm{diag}\left\{\sigma_1^2,\cdots,\sigma_M^2\right\}^T\mathbf{I}_N$, donde $\sigma_1^2,\cdots,\sigma_M^2$ son las varianzas de las M señales recibidas. Con la descripción realizada el número de parámetros desconocidos es $2M+2P-1$, los cuales podemos agruparlos en el vector de parámetros como $\boldsymbol{\theta}=[\boldsymbol{\psi}^T\,\boldsymbol{\rho}^T\sigma^2\,\boldsymbol{\alpha}^T]^T$, con $\boldsymbol{\psi}=[\psi_1\psi_2\cdots\psi_M]^T$, $\boldsymbol{\rho}=[\sigma_1^2\,\sigma_2^2\cdots\sigma_M^2]^T$ y $\boldsymbol{\alpha}=[\mathrm{re}\{c_1\}\mathrm{im}\{c_1\}\cdots\mathrm{re}\{c_{P-1}\}\mathrm{im}\{c_{P-1}\}]^T$. Luego, podemos escribir $\mathbf{J}$ como una matriz particionada

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}\mathbf{J}_{\psi\psi} & \mathbf{J}_{\psi\rho} & \mathbf{J}_{\psi\sigma} & \mathbf{J}_{\psi\alpha}\\ \mathbf{J}_{\rho\psi} & \mathbf{J}_{\rho\rho} & \mathbf{J}_{\rho\sigma} & \mathbf{J}_{\rho\alpha}\\ \mathbf{J}_{\sigma\psi} & \mathbf{J}_{\sigma\rho} & \mathbf{J}_{\sigma\sigma} & \mathbf{J}_{\sigma\alpha}\\ \mathbf{J}_{\alpha\psi} & \mathbf{J}_{\alpha\rho} & \mathbf{J}_{\alpha\sigma} & \mathbf{J}_{\alpha\alpha}\end{bmatrix}. \tag{7}$$

El siguiente paso para hallar las cotas es evaluar el bloque superior izquierdo y el bloque inferior derecho de $\mathbf{J}^{-1}$ que corresponden a la CRB de las DOA, $\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\psi})$, y a la CRB de los coeficientes de acoplamiento, $\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\alpha})$, respectivamente. Utilizando la fórmula de inversión de matrices particionadas [10] $\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\psi})$ y $\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\alpha})$ se pueden expresar como

$$\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\psi})=\left(\mathbf{J}_{\psi\psi}-\begin{bmatrix}\mathbf{J}_{\psi\rho} & \mathbf{J}_{\psi\sigma} & \mathbf{J}_{\psi\alpha}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{J}_{\rho\rho} & \mathbf{J}_{\rho\sigma} & \mathbf{J}_{\rho\alpha}\\ \mathbf{J}_{\sigma\rho} & \mathbf{J}_{\sigma\sigma} & \mathbf{J}_{\sigma\alpha}\\ \mathbf{J}_{\alpha\rho} & \mathbf{J}_{\alpha\sigma} & \mathbf{J}_{\alpha\alpha}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{J}_{\rho\psi}\\ \mathbf{J}_{\sigma\psi}\\ \mathbf{J}_{\alpha\psi}\end{bmatrix}\right)^{-1} \tag{8}$$

$$\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\alpha})=\left(\mathbf{J}_{\alpha\alpha}-\begin{bmatrix}\mathbf{J}_{\alpha\psi} & \mathbf{J}_{\alpha\rho} & \mathbf{J}_{\alpha\sigma}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{J}_{\psi\psi} & \mathbf{J}_{\psi\rho} & \mathbf{J}_{\psi\sigma}\\ \mathbf{J}_{\rho\psi} & \mathbf{J}_{\rho\rho} & \mathbf{J}_{\rho\sigma}\\ \mathbf{J}_{\sigma\psi} & \mathbf{J}_{\sigma\rho} & \mathbf{J}_{\sigma\sigma}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{J}_{\psi\alpha}\\ \mathbf{J}_{\rho\alpha}\\ \mathbf{J}_{\sigma\alpha}\end{bmatrix}\right)^{-1} \tag{9}$$

Para evaluar la matriz $\mathbf{J}$ comenzamos calculando la derivada de $\mathbf{S}_x$ respecto de los distintos parámetros

$$\frac{\partial \mathbf{S}_x}{\partial \psi_i} = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T\mathbf{S}_f\mathbf{V}^H\mathbf{C}^H + \mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{S}_f\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T\mathbf{D}^H\mathbf{C}^H \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}_x}{\partial \rho_i} = \frac{\partial \mathbf{S}_x}{\partial \sigma_i^2} = \mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T\mathbf{V}^H\mathbf{C}^H \tag{11}$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}_x}{\partial \sigma^2} = \mathbf{I}_N \tag{12}$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}_x}{\partial \alpha_i} = \mathbf{B}_i\mathbf{V}\mathbf{S}_f\mathbf{V}^H\mathbf{C}^H + \mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{S}_f\mathbf{V}^H\mathbf{B}_i^H \tag{13}$$

donde $\mathbf{e}_i$ es un vector de $M \times 1$ cuyo elemento *i*-ésimo es igual a uno y los restantes son cero, la matriz $\mathbf{D}$ está dada por

$$\mathbf{D} = \left[\frac{\partial \mathbf{v}(\psi_1)}{\partial \psi_1}\frac{\partial \mathbf{v}(\psi_2)}{\partial \psi_2}\cdots\frac{\partial \mathbf{v}(\psi_M)}{\partial \psi_M}\right], \tag{14}$$

y la matriz $\mathbf{B}_i$ se define como

$$[\mathbf{B}_i]_{kl} = \frac{\partial[\mathbf{C}]_{kl}}{\partial \alpha_i} = \begin{cases} \delta_{k+0.5(i+1),l} + \delta_{k,l+0.5(i+1)} & i\ impar \\ j(\delta_{k+0.5i,l} + \delta_{k,l+0.5i}) & i\ par, \end{cases} \tag{15}$$

donde $\delta_{k,l}$ es la función delta de Kronecker. Reemplazando las ecuaciones (10) a (13) en (6) según corresponda, se obtienen los bloques de la matriz $\mathbf{J}$. Cabe destacar que para los bloques en los que no se deriva respecto de los coeficientes de acoplamiento las expresiones son análogas al caso en que no existe acoplamiento, con la diferencia que aparece el producto $\mathbf{CV}$ en lugar de $\mathbf{V}$. Estas matrices se pueden escribir como

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{\psi\psi} = 2K\mathrm{re}\big\{&[\mathbf{S}_f\mathbf{V}^H\mathbf{C}^H\mathbf{S}_x^{-1}\mathbf{C}\mathbf{D}] \square [\mathbf{S}_f\mathbf{V}^H\mathbf{C}^H\mathbf{S}_x^{-1}\mathbf{C}\mathbf{D}]^T \\ &+[\mathbf{S}_f\mathbf{V}^H\mathbf{C}^H\mathbf{S}_x^{-1}\mathbf{C}\mathbf{V}] \square [\mathbf{D}^H\mathbf{C}^H\mathbf{S}_x^{-1}\mathbf{C}\mathbf{D}]^T\big\},\end{aligned} \tag{16}$$

$$\mathbf{J}_{\rho\psi} = 2K\mathrm{re}\big\{[\mathbf{S}_f\mathbf{V}^H\mathbf{C}^H\mathbf{S}_x^{-1}\mathbf{C}\mathbf{V}]^T \square [\mathbf{V}^H\mathbf{C}^H\mathbf{S}_x^{-1}\mathbf{C}\mathbf{D}]^T\big\}, \tag{17}$$

$$\mathbf{J}_{\sigma\psi} = 2K\mathrm{diag}\big\{\mathrm{re}\big\{\mathbf{S}_f\mathbf{V}^H\mathbf{C}^H\mathbf{S}_x^{-2}\mathbf{C}\mathbf{D}\big\}\big\}^T, \tag{18}$$

$$\mathbf{J}_{\rho\rho} = K[\mathbf{V}^H\mathbf{C}^H\mathbf{S}_x^{-1}\mathbf{C}\mathbf{V}]^T \square [\mathbf{V}^H\mathbf{C}^H\mathbf{S}_x^{-1}\mathbf{C}\mathbf{V}], \tag{19}$$

$$\mathbf{J}_{\sigma\rho} = K\mathrm{diag}\big\{\mathbf{V}^H\mathbf{C}^H\mathbf{S}_x^{-2}\mathbf{C}\mathbf{V}\big\}^T, \tag{20}$$

$$\mathbf{J}_{\sigma\sigma} = K\mathrm{tr}\big\{\mathbf{S}_x^{-2}\big\}, \tag{21}$$

las filas de $\mathbf{J}_{\alpha\psi}$ y de $\mathbf{J}_{\alpha\rho}$ están dadas por

$$\begin{aligned}[\mathbf{J}_{\alpha\psi}]_{i,:} = 2K\mathrm{diag}\big\{\mathrm{re}\big\{&\mathbf{S}_f\mathbf{V}^H\mathbf{C}^H\mathbf{S}_x^{-1}\mathbf{B}_i\mathbf{V}\mathbf{S}_f\mathbf{V}^H\mathbf{C}^H\mathbf{S}_x^{-1}\mathbf{C}\mathbf{D} \\ &+\mathbf{D}^H\mathbf{C}^H\mathbf{S}_x^{-1}\mathbf{B}_i\mathbf{V}\mathbf{S}_f\mathbf{V}^H\mathbf{C}^H\mathbf{S}_x^{-1}\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{S}_f\big\}\big\}^T,\end{aligned} \tag{22}$$

$$[\mathbf{J}_{\alpha\rho}]_{i,:} = 2K\mathrm{diag}\big\{\mathrm{re}\big\{\mathbf{V}^H\mathbf{C}^H\mathbf{S}_x^{-1}\mathbf{B}_i\mathbf{V}\mathbf{S}_f\mathbf{V}^H\mathbf{C}^H\mathbf{S}_x^{-1}\mathbf{C}\mathbf{V}\big\}\big\}^T, \tag{23}$$

los elementos de $\mathbf{J}_{\alpha\sigma}$ y de $\mathbf{J}_{\alpha\alpha}$ son de la forma

$$[\mathbf{J}_{\alpha\sigma}]_i = 2K\mathrm{tr}\big\{\mathrm{re}\big\{\mathbf{S}_x^{-1}\mathbf{B}_i\mathbf{V}\mathbf{S}_f\mathbf{V}^H\mathbf{C}^H\mathbf{S}_x^{-1}\big\}\big\}, \tag{24}$$

$$\begin{aligned}[\mathbf{J}_{\alpha\alpha}]_{ij} = 2K\mathrm{tr}\big\{\mathrm{re}\big\{&\mathbf{S}_x^{-1}\mathbf{B}_i\mathbf{V}\mathbf{S}_f\mathbf{V}^H\mathbf{C}^H\mathbf{S}_x^{-1}\mathbf{B}_j\mathbf{V}\mathbf{S}_f\mathbf{V}^H\mathbf{C}^H \\ &+\mathbf{S}_x^{-1}\mathbf{B}_i\mathbf{V}\mathbf{S}_f\mathbf{V}^H\mathbf{C}^H\mathbf{S}_x^{-1}\mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{S}_f\mathbf{V}^H\mathbf{B}_j^H\big\}\big\},\end{aligned} \tag{25}$$

y debido a que la matriz de Fisher tiene simetría hermítica las matrices restantes pueden obtenerse como $\mathbf{J}_{\psi\rho} = \mathbf{J}_{\rho\psi}^H$, $\mathbf{J}_{\psi\sigma} = \mathbf{J}_{\sigma\psi}^H$, $\mathbf{J}_{\rho\sigma} = \mathbf{J}_{\sigma\rho}^H$, $\mathbf{J}_{\psi\alpha} = \mathbf{J}_{\alpha\psi}^H$, $\mathbf{J}_{\rho\alpha} = \mathbf{J}_{\alpha\rho}^H$ y $\mathbf{J}_{\sigma\alpha} = \mathbf{J}_{\alpha\sigma}^H$.

Finalmente, reemplazando las expresiones (16) a (25) en (8) y en (9) se obtienen $\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\psi})$ y $\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\alpha})$ respectivamente.

C. Algoritmo de comparación

Con el objetivo de mostrar la utilidad del conocimiento de las cotas de Cramér-Rao obtenidas en la sección anterior, se analiza el desempeño de un método propuesto en [7] para la estimación de las direcciones de arribo y los coeficientes de acoplamiento.

Considerando un ULA de N elementos con P coeficientes de acoplamiento lo que se propone en este método es agregar $P-1$ elementos auxiliares a cada lado del arreglo, dando como resultado un arreglo de $N+2(P-1)$ elementos. Con este arreglo, pero utilizando la salida de sus N sensores centrales se realiza una estimación de las direcciones de arribo utilizando el algoritmo de clasificación de señales múltiples (MUSIC). Una vez que se realizó esta estimación preliminar de las DOA se pueden estimar los coeficientes de acoplamiento. Con los valores de la estimación de los coeficientes de acoplamiento se refina la estimación de las DOA utilizando la salida de todos los sensores del arreglo ampliado.

Siguiendo el enfoque de los algoritmos de subespacios, la matriz de covarianza de la señal recibida (3) puede escribirse como [10]

$$\mathbf{S}_x = \sum_{i=1}^{M}\lambda_i\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i^H + \sum_{i=M+1}^{N}\lambda_i\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i^H = \mathbf{U}_s\Lambda_s\mathbf{U}_s^H + \sigma^2\mathbf{U}_n\mathbf{U}_n^H, \tag{26}$$

donde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_M > \lambda_{M+1} = \cdots = \lambda_N = \sigma^2$ son los autovalores de $\mathbf{S}_x$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_M, \cdots, \mathbf{u}_N$ son sus autovectores asociados, Λ_s es una matriz diagonal con $[\Lambda_s]_{ii} = \lambda_i$, $i = 1, \cdots, M$ y las columnas de $\mathbf{U}_s$ y $\mathbf{U}_n$ son los autovectores asociados con los M autovalores mayores y con los $N-M$ autovalores menores, respectivamente. Se puede demostrar que los vectores $\mathbf{C}\mathbf{v}(\psi_1), \cdots, \mathbf{C}\mathbf{v}(\psi_M)$ pertenecen al subespacio de señal generado por $\mathbf{U}_s$ y son ortogonales al subespacio de ruido generado por $\mathbf{U}_n$ [11]. Entonces

$$\left\|\mathbf{U}_n^H\mathbf{C}\mathbf{v}(\psi_i)\right\| = 0 \quad i = 1, \cdots, M. \tag{27}$$

Luego, podemos definir la función espectral como $P_{MU}(\psi) = \left\| \mathbf{U}_n^H \mathbf{C}\mathbf{v}(\psi) \right\|^{-2}$. Dado que $\mathbf{U}_n^H \mathbf{C}\mathbf{v}(\psi)$ es cero cuando $\psi = \psi_i$ entonces los picos de $P_{MU}(\psi)$ se corresponden con los verdaderos valores de las DOA [11]. El problema es que cuando no se conoce $\mathbf{C}$ este procedimiento no funciona. Para ello a continuación se describe la solución utilizando elementos auxiliares, en [7] se encuentra el fundamento de cada uno de los pasos del algoritmo.

1. Considerar un ULA de $N + 2(P-1)$ elementos. Utilizar todos los datos disponibles para estimar su matriz de covarianza $\mathbf{S}_x^{(a)}$ como

$$\hat{\mathbf{S}}_x^{(a)} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \overline{\mathbf{x}}(k) \overline{\mathbf{x}}^H(k), \tag{28}$$

donde $\overline{\mathbf{x}}(k) = [x_1(k) x_2(k) \cdots x_{N+2(P-1)}(k)]^T$. Luego obtener a partir de $\hat{\mathbf{S}}_x^{(a)}$ una estimación de la matriz de covarianza de los N elementos centrales del arreglo como $\hat{\mathbf{S}}_x = \hat{\mathbf{S}}_x^{(a)}(P : N+P-1, P : N+P-1)$.

2. Obtener una estimación de las matrices que generan sus respectivos espacios de ruido $\hat{\mathbf{U}}_n^{(a)}$ y $\hat{\mathbf{U}}_n$.
3. Utilizando MUSIC sobre el espacio de ruido más pequeño $\hat{\mathbf{U}}_n$ obtener una estimación de las DOA $\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2, \cdots, \hat{\psi}_M$ con la función espectral $P_{MU}(\psi) = \left\| \hat{\mathbf{U}}_n^H \mathbf{v}(\psi) \right\|^{-2}$.
4. Hallar una estimación de los coeficientes de acoplamiento mediante mínimos cuadrados resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$\mathbf{Q}(:, 2:P)\mathbf{c}(2:P) = -\mathbf{q}_1 \tag{29}$$

con $\mathbf{c} = [1 \; c_1 \cdots c_{P-1}]^T$ y

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \, \mathbf{q}_2 \cdots \mathbf{q}_P] = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_n^{(a)} \mathbf{T}\left[\overline{\mathbf{v}}(\hat{\psi}_1)\right] \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{U}}_n^{(a)} \mathbf{T}\left[\overline{\mathbf{v}}(\hat{\psi}_M)\right] \end{bmatrix} \tag{30}$$

donde la matriz $\mathbf{T}\left[\overline{\mathbf{v}}(\psi)\right]$ se obtiene de la relación $\mathbf{C}\overline{\mathbf{v}}(\psi) = \mathbf{T}\left[\overline{\mathbf{v}}(\psi)\right]\mathbf{c}$, $\overline{\mathbf{v}}(\psi) = [e^{-j\psi(N+2P-3)/2} \cdots e^{j\psi(N+2P-3)/2}]^T$ y $\mathbf{C}$ es de la forma de (2) pero de $(N + 2(P-1)) \times (N + 2(P-1))$.

5. Refinar la estimación de las DOA utilizando MUSIC usando $\hat{\mathbf{C}}$ y el espacio de ruido más grande $\hat{\mathbf{U}}_n^{(a)}$ a partir de la función espectral $P_{MU}(\psi) = \left\| \left(\hat{\mathbf{U}}_n^{(a)} \right)^H \hat{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{v}}(\psi) \right\|^{-2}$.

Cabe destacar que este proceso iterativo puede continuar. Sin embargo, la mejora que se obtiene a partir de la tercera iteración es despreciable.

III. Resultados

Para evaluar el desempeño del algoritmo descripto en la sección anterior realizamos simulaciones numéricas del tipo Monte Carlo, en la cuales calculamos la raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE) de la estimación de los parámetros de interés y lo comparamos con respecto a las cotas halladas en este trabajo.

El número de elementos del arreglo es 14, con un espaciado entre elementos contiguos de $d = \lambda / 2$ y un número de coeficientes de acoplamiento distintos de cero igual a $P = 3$. Entonces, al aplicar el algoritmo de estimación descripto para trabajar en presencia de acoplamiento, se considera inicialmente que los $P-1$ sensores de cada extremo del arreglo son auxiliares, resultando en un arreglo inicial de $N = 10$ elementos, con el mismo espaciado entre elementos que el arreglo original. Consideramos que arriban al arreglo $M = 3$ señales de igual potencia desde las direcciones $\psi_1 = -1.5708$, $\psi_2 = 0.8131$ y $\psi_3 = 2.2214$, correspondientes a los ángulos $\phi_1 = -30^o$, $\phi_2 = 15^o$ y $\phi_3 = 45^o$, y que los valores de los coeficientes de acoplamiento son $c_1 = 0.43301 - j0.25$ y $c_2 = 0.14142 - j0.14142$, valores arbitrarios tomados del ejemplo presentado en [7]. El experimento consiste en estimar las DOA de las señales y los coeficientes de acoplamiento. Repetimos el mismo para distintos valores de relación señal a ruido (SNR), la cual para la *i*-ésima señal, en dB, se define como $SNR = 10\log_{10}(\sigma_i^2 / \sigma^2)$. Para cada valor de SNR realizamos 1000 estimaciones para evaluar el RMSE, con un número de realizaciones del proceso de $K = 100$ en todos los casos.

Por otro lado, con los valores de los parámetros utilizados en las simulaciones se evaluaron las cotas de Cramér-Rao de las direcciones de arribo y de los coeficientes del modo en que se describió en la sección II.B.

En la Fig. 1 se muestran el RMSE y la CRB correspondientes a la estimación de las DOA para cada una de las señales, junto con la CRB de un arreglo de 14 elementos sin acoplamiento. En esta figura se puede ver que el error en la estimación de las DOA alcanza el valor mínimo predicho por la cota aún para baja SNR. Además, se observa que debido al acoplamiento la estimación de dos de las direcciones tiene un error mayor al que tendría si no existiera acoplamiento, mientras que la señal restante tiene menor error de estimación cuando el acoplamiento existe.

En la Fig. 2 se muestran el RMSE y la CRB correspondientes a la estimación de los coeficientes de acoplamiento. En este caso se observa que también el RMSE alcanza la CRB, pero lo hace para valores de SNR mayores en relación a la estimación de las DOA. Cabe destacar que la cota de Cramér-Rao de un parámetro complejo es la suma de la CRB de su parte real más la CRB de su parte imaginaria.

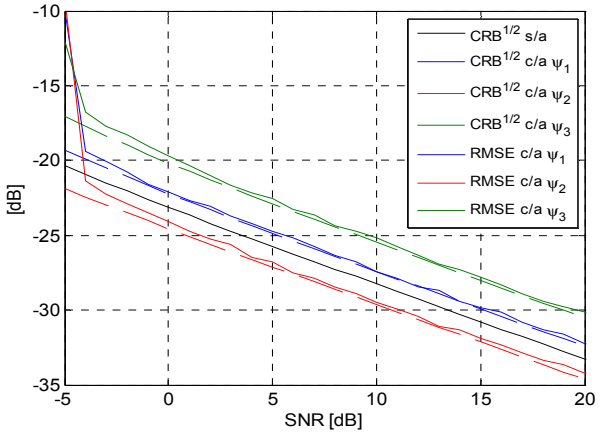

Figura 1. RMSE y CRB de la estimación de las direcciones de arribo.

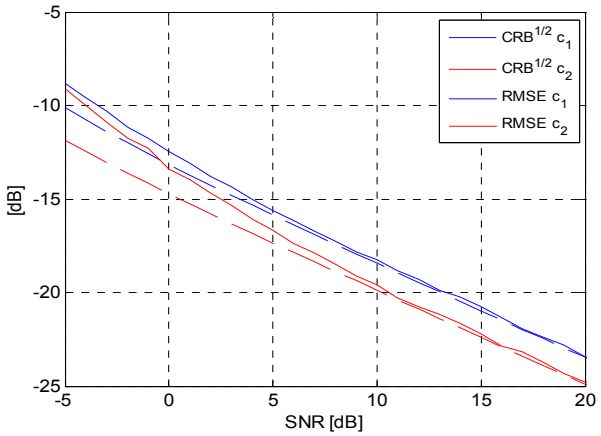

Figura 2. RMSE y CRB de la estimación de los coeficientes de acoplamiento.

IV. Discusión

En este trabajo se estudió la cota de Cramér-Rao para la estimación de los coeficientes de acoplamiento y de las direcciones de arribo de señales en un ULA, para el caso de señales modeladas como procesos Gaussianos no correlacionadas de potencia desconocida, al igual que la varianza de ruido. Dichas cotas se compararon con un método de estimación de los parámetros mencionados. Los resultados obtenidos para la estimación de las DOA muestran que existen ciertas direcciones para las cuales el error de estimación es menor que el que se tendría en el caso de un ULA sin acoplamiento. Este comportamiento se debe a que cuando existe acoplamiento el patrón de radiación del arreglo se modifica aumentando la ganancia en ciertas direcciones y disminuyéndola para otras. Inclusive puede ocurrir que alguna combinación de valores de los coeficientes de acoplamiento produzca direcciones ciegas, es decir direcciones para las cuales la ganancia sea nula [7]. Comparando los resultados obtenidos con el algoritmo de estimación y la cota vemos que tanto los estimadores de los coeficientes de acoplamiento como los de las DOA son al menos asintóticamente eficientes, es decir, alcanzan la cota cuando el número de realizaciones es grande. Sin embargo, en el caso de los coeficientes de acoplamiento este comportamiento se verifica para SNR mayores que para las DOA. De cualquier manera, esto no representa una limitación dado que en realidad es de interés conocer de manera precisa las DOA. El conocimiento de la cota permite evaluar el desempeño del algoritmo, lo que constituye un ejemplo de la utilidad de la misma.

Entre las tareas futuras se tiene contemplado obtener expresiones cerradas para las cotas, extendiéndolas al caso general de señales correlacionadas y analizar una posible solución al problema cuando existen direcciones ciegas.

Apéndice

Apéndice A: Notación

$(\cdot)^T$	transpuesta
$(\cdot)^{-1}$	inversa
$(\cdot)^H$	transpuesta conjugada
$\mathrm{tr}\{\cdot\}$	traza
$\mathrm{diag}\{\cdot\}$	diagonal de una matriz
$\mathrm{re}\{\cdot\}$	parte real
$\mathrm{im}\{\cdot\}$	parte imaginaria
$\square$	producto de Hadamard-Schur
$\mathrm{E}\{\cdot\}$	esperanza

Agradecimientos

Este trabajo fue financiado a través de la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT) PICT 2011-0909, la Universidad Nacional de La Plata (UNLP) 11-I127, el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y la Comisión de Investigaciones Científicas de la provincia de Buenos Aires (CIC-PBA).

Referencias

[1] P. Stoica and A. Nehorai, "Music, maximum likelihood and Cramér-Rao bound," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 37, pp. 720–741, 1989.

[2] A. Weiss and B. Friedlander, "On the Cramér-Rao bound for direction finding of correlated signals," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 1, pp. 495–499, 1993.

[3] P. Stoica, E. Larsson, and A. Gershman, "The stochastic CRB for array processing: a textbook derivation," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 8, no. 5, pp. 148–150, 2001.

[4] T. Svantesson, "Modeling and estimation of mutual coupling in a uniform linear array of dipoles," in *Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1999. 1999 IEEE International Proceedings, S. Schmalzriedt*, Ed., vol. 5, 1999, pp. 2961–2964.

[5] B. Friedlander and A. Weiss, "Direction finding in the presence of mutual coupling," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 39, no. 3, pp. 273–284, 1991.

[6] M. Akcakaya, C. Muravchik, and A. Nehorai, "Biologically inspired coupled antenna array for direction-of-arrival estimation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 59, no. 10, pp. 4795–4808, 2011.

[7] Z. Ye and C. Liu, "On the resiliency of music direction finding against antenna sensor coupling," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 56, no. 2, pp. 371–380, 2008.
[8] S. Konishi and G. Kitagawa, *Information Criteria and Statistical Modeling*. New York: Springer, 2008.
[9] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing, Estimation Theory*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1993.
[10] H. L. V. Trees, *Optimum Array Processing*. Third Avenue, NJ: John Wiley & Sons, 2002.
[11] C. Yeh, M. Leou, and D. Ucci, "Bearing estimations with mutual coupling present," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 37, no. 10, pp. 1332–1335, 1989.

Juan Pablo Pascual has received his Eng. degree in Electronics Engineering from the National University of La Plata (UNLP), Buenos Aires, Argentina, in 2006. He is currently a Ph.D. candidate in the UNLP. His research interests are statistical and array signal processing with radar and communication applications.

Nicolás von Ellenrieder (S'96-M'06) is a Professor at the Universidad Nacional de La Plata, were he received his Eng. (1998) and Ph.D. (2005) degrees. His postdoctoral experience includes research visits to the Washington University in St. Louis (2006), the Cuban Neuroscience Center (2006), and the Montreal Neurological Institute of McGill University (2010). His research interests include statistical and digital signal processing with applications in the fields of biomedicine and radar.

Carlos H. Muravchik (S'81-M'83-SM'99) graduated as an Electronics Engineer from the National University of La Plata, Argentina, in 1973. He received the M.Sc. in Statistics (1983) and the M.Sc. (1980) and Ph.D. (1983) degrees in Electrical Engineering, from Stanford University, Stanford, CA. He is a Professor at the Department of the Electrical Engineering of the National University of La Plata and chairman of its Industrial Electronics, Control and Instrumentation Laboratory (LEICI). He is also a member of the Comision de Investigaciones Cientificas de la Pcia. de Buenos Aires. He was a Visiting Professor to Yale University in 1983 and 1994, to the University of Illinois at Chicago in 1996, 1997, 1999 and 2003 and to Washington University in St Louis in 2006 and 2010. Since 1999 he is a member of the Advisory Board of the journal Latin American Applied Research and was an Associate Editor of the IEEE Transactions on Signal Processing (2003-2006). His research interests are in the area of statistical and array signal processing with biomedical, communications and control applications, and in nonlinear control systems.