Crecimiento económico y capital humano heterogéneo: trampas de pobreza y polarización en economías desiguales[1]

Silvia London[2]
Departamento de Economía, UNS-CONICET
Bahía Blanca, Argentina
slondon@uns.edu.ar

Mara Rojas
Departamento de Economía, UNS-CONICET
Bahía Blanca, Argentina
mara_rojas05@yahoo.com.ar

Resumen

Haciendo hincapié en el contexto de los países de ingresos medios, este trabajo se focaliza en la importancia que poseen las condiciones iniciales de una economía al inicio de su proceso de desarrollo y la acumulación de capital humano para explicar las posibles trayectorias de crecimiento.

Tomando el trabajo de Lucas (1988) como base del análisis, se alterarán dos supuestos fundamentales sobre los que gravitan los resultados obtenidos por aquel autor. En primer lugar, la homogeneidad de los individuos en cuanto a la acumulación de conocimientos. En segundo lugar, la linealidad de los rendimientos en la acumulación de capital humano.

De acuerdo a la distribución de los individuos en el espacio de habilidades, las tasas de crecimiento de la economía podrán ser mayores o menores, dependiendo de los rendimientos establecidos y de ciertos umbrales y parámetros definidos,

[1] Este trabajo es una extensión de "Crecimiento Económico y Capital Humano Heterogéneo", presentado por Mara Rojas en las Jornadas Latinoamericanas de Teoría Económica, San Luis, Argentina, 2008.

[2] Corresponding Author

conduciendo a la economía hacia una senda de crecimiento sostenido o hacia una situación de trampa de pobreza.

Considerando los elementos anteriores, la consideración de una desigual distribución del ingreso inicial conduce, como resultado, al surgimiento (ceteris paribus) de una desigualdad endógena que puede ser creciente.

Abstract

This work focus on the relevance of initial conditions and the human capital accumulation to explain potential economic growth paths, in the context of middle-income countries.

We start with the Lucas' work (1988) reconsidering two central assumptions. First, the homogeneity between individuals supposed by the author. Second, the linearity of returns over the knowledge.

According to the distribution of individuals into the ability space, the growth rate of the economy will be greater or lower given the returns, parameters, and threshold values. This fact leads the population to two possible results: a poverty trap or a positive growth path.

In this framework, given an initial inequality on the income distribution, there can be possible that the inequality becomes endogenous.

Palabras clave: Crecimiento, capital humano, trampas de pobreza, desigualdad.

Clasificación JEL: O1-O4.

1. Introducción

Existe una amplia literatura que relaciona crecimiento con desigualdad. Básicamente, la discusión se centra sobre la posibilidad de crecer en un contexto de desigualdad de ingresos, si es necesario redistribuir antes de encarar el proceso de crecimiento, etc. Sin adentrarnos en esta discusión teórica, el objetivo de este trabajo es el de plantear aquellos escenarios posibles en los que, a partir del proceso de acumulación de capital humano, se produce crecimiento económico con desigualdad creciente entre los individuos, o se cae en una trampa de pobreza al no poder el sistema (dada la desigualdad inicial en la dotación de capital humano) generar el proceso de acumulación necesario para alcanzar un crecimiento sostenido.

Para tal efecto, en la próxima sección se desarrollará el modelo de Lucas (1988), base teórica para nuestra discusión. La sección III se ocupará de presentar la faceta empírica de los países en desarrollo en cuanto a acumulación de capital humano se refiere. En la sección IV presentamos el modelo que incluye las características empíricas principales descriptas en la sección III. La sección V se ocupa principalmente del caso especial de la polarización en la distribución de los ingresos, como resultado del proceso de acumulación. Por último se señalan las conclusiones principales y la futura línea de investigación.

2. El modelo de Lucas

En los últimos años, la Teoría del Capital Humano se ha extendido enormemente. Sin embargo, el modelo desarrollado por Lucas (1988) ha sido, quizás, uno de los más estudiados y utilizados a lo largo del tiempo. En el afán de encontrar una construcción alternativa al modelo de crecimiento desarrollados por Solow (1956), Lucas (1988) introduce el concepto de "capital humano" definido por Schultz (1961) y Becker (1964) en el contexto neoclásico. La inversión en capital humano es la fuente que explica la obtención de tasas de crecimiento per cápita positivas en las economías, en lugar de estados estacionarios.

La Teoría del Capital Humano se focaliza en el hecho de que la manera en que un individuo asigna su tiempo sobre diferentes actividades afectará, en el futuro, su productividad, a través de su nivel de conocimientos alcanzado. Y esto, a su vez, determinará la productividad total de la economía.

Lucas supone la existencia de N trabajadores cuyos niveles de habilidades h difieren y se encuentran ranqueados en un continuo de 0 a infinito. De esta forma, la fuerza laboral total de la economía podría describirse como la sumatoria de todos los trabajadores, y el stock medio de conocimientos como la sumatoria de los trabajadores ponderados por su nivel de habilidades. Si se considera un espacio de habilidades continuas, la fuerza laboral sería $N = \int_0^\infty N(h_t)dh$ y el stock medio de habilidades $H_t = \int_0^\infty h_t N(h_t)dh$.

La producción de bienes se realiza mediante una tecnología tipo Cobb – Douglas, con rendimientos constantes a escala. Los factores que intervienen en la producción son el capital físico K_t, el factor tecnológico A_t, la fuerza de trabajo efectiva N_t^e y un factor que representa la externalidad del nivel medio de conocimientos sobre el conjunto de la sociedad, reflejando el hecho de que los individuos son más productivos si trabajan rodeados de personas más productivas. Como en Solow (1956), el capital físico presenta rendimientos marginales decrecientes en la producción, y por lo tanto, en la acumulación del factor dada la linealidad del ahorro. La tecnología es exógena y se considera constante. En cuanto a la fuerza de trabajo efectiva, cada trabajador destina una fracción $u(h)$ de su tiempo a la producción de bienes en relación a su nivel de conocimientos. Así, la fuerza laboral efectiva total estará definida por $N_t^e = \int_0^\infty u(h_t)h_t N(h_t)dh$.

En este punto, Lucas (1988) simplifica su análisis al establecer que todos los individuos son homogéneos, de manera que invierten la misma cantidad de horas en trabajar y poseen el mismo nivel de conocimientos. La fuerza laboral efectiva total se describe como , dado que el promedio de las habilidades coincide exactamente con h.

Por otra parte, la forma en que se produce la acumulación de conocimientos difiere respecto del capital físico. Como se mencionó anteriormente, la acumulación de capital humano debe estar ligada a la fracción de tiempo que se destina a actividades de capacitación y estudio, y al nivel h previamente adquirido. Es decir: $\dot{h} = h^\zeta G(1-u(h))$. Dependiendo de la magnitud del parámetro ζ, la función de acumulación puede tener rendimientos crecientes, constantes o decrecientes. Si $\zeta < 1$, entonces la acumulación de capital humano no sirve como alternativa para explicar el crecimiento de los países y los resultados son similares a los hallados por el modelo neoclásico.

Lucas (1988), siguiendo a Uzawa (1965) y Rosen (1976), establece la linealidad tomando $\zeta = 1$. Los individuos acumulan conocimientos rápidamente al inicio de sus vidas y con menor velocidad en la adultez. Dado que poseen vida finita, el supuesto de linealidad podría reflejar los retornos de la educación a lo largo de todo el ciclo vital. Si la misma tecnología se aplica a todos los individuos, los cuales son al mismo tiempo homogéneos en el nivel de conocimientos, puede suponerse la linealidad de los rendimientos en un modelo de un único individuo de vida infinita *á la Ramsey*. Además, el autor asume la linealidad en la función G, de forma tal que $\dot{h} = h\delta(1 - u(h))$, donde δ es un parámetro tecnológico que refleja la productividad de la inversión en educación.

Este modelo predice que la mayor tasa de acumulación de conocimiento que puede obtenerse es δ y la menor es cero. Entre esos dos extremos, se obtendrá una tasa de crecimiento balanceado para la economía y ninguna otra fuente exógena de crecimiento será necesaria para explicar el desarrollo de las economías.

3. La heterogeneidad del capital humano en países en desarrollo

Es necesario hacer hincapié en los dos supuestos fundamentales sobre los que se basa aquel resultado: la homogeneidad de los individuos en cuanto a la acumulación de conocimientos y la linealidad de los rendimientos. Sin embargo, estos supuestos pueden estar describiendo un contexto muy diferente al observado en economías en desarrollo.

En los países latinoamericanos, más del 80 % de la población concluye la educación primaria. Pero sólo la mitad de la población en edad escolar llega al nivel secundario superior y, más aún, sólo un tercio lo finaliza. Podría imaginarse cómo será la distribución de la población según niveles educativos en estos países. La literatura de organismos especializados, como UNESCO (2005, 2007) y Banco Mundial (2006), suele hacer referencia a las amplias desigualdades en los niveles educativos alcanzados por los diferentes sectores de la sociedad y en las dispares oportunidades de acceso a la educación.

En particular, si se observa la distribución de la población para Argentina según niveles de conocimientos alcanzados (considerados como los niveles de educación formal obtenidos), la misma exhibe una distribución

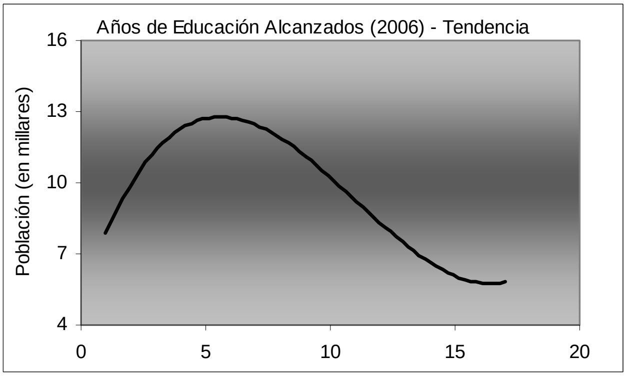

Figura 1: Población argentina según años de estudio alcanzados. Línea de tendencia.

sesgada hacia la izquierda.

Asimismo, los rendimientos de los diferentes niveles educativos muestran amplias disparidades entre aquellos individuos que alcanzan altos niveles educativos y aquellos que no logran superar cierto umbral. Carlson (2002) analiza las primas por educación en América Latina, según nivel educativo alcanzado. Las mayores primas salariales son obtenidas por los individuos que han completado el nivel de estudios universitarios y se advierten altas primas para quienes han completado el nivele de educación secundario superior.

Así, los rendimientos de la inversión en educación dependerán del nivel alcanzado. Mientras que para niveles primarios y secundarios incompletos los rendimientos parecen incrementarse menos que proporcionalmente con los gastos y costos incurridos, los rendimientos de la inversión en conocimientos para los niveles secundario completo y universitario parecen incrementarse más que proporcionalmente respecto de los desembolsos (reales y costos de oportunidad).

Según Becker et. al (1990), la tasa de retorno del capital físico se asume como decreciente a medida que el stock de capital de la economía crece.

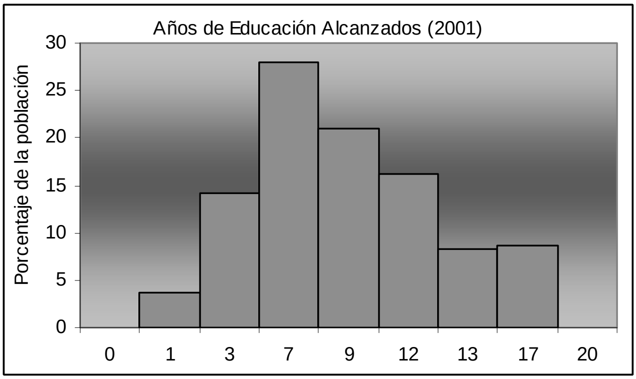

Figura 2: Población argentina según años de estudio alcanzados. Frecuencia.

Pero la idea análoga para la acumulación de capital humano es más difícil de sustentar dado que el capital humano se encuentra materializado en las personas. Los rendimientos crecientes, una vez alcanzado un nivel mínimo de conocimientos, pueden justificarse por dos razones: a nivel micro, la acumulación de conocimientos más complejos se da cuando se materializa el bloque de conocimientos básicos; a nivel macro, hay un efecto positivo del stock de capital humano sobre la nueva inversión. Ambas cuestiones hacen que las tasas de retorno sean pequeñas cuando el stock de capital humano es pequeño, y altas cuando el stock de conocimientos es grande.

Es imposible no hacer alusión a la relación que tiene este argumento con la distribución del ingreso. Cuanto menor es el ingreso de una familia, menor es la posibilidad de realizar desembolsos monetarios y mayores los costos de oportunidad de mantener un hijo en el sistema de educación formal. Por lo tanto, los niveles educativos logrados serán más bajos en hijos pertenecientes a familias de menores ingresos, en relación a aquellas metas educativas alcanzadas por hijos de familias de mayores ingresos. Esto resultará en grandes disparidades salariales al momento de ingresar los individuos en el mercado laboral, perpetuándose las diferencias entre ambos grupos sociales y condenando a los individuos de bajos ingresos a permanecer en un círculo de pobreza.

Aún sin considerar análisis de movilidad y cuestiones redistributivas, cabe preguntar qué sucederá a nivel agregado en una economía con heterogeneidad sobre los rendimientos de la inversión en capital humano. Esto es, ¿qué sucedería en el marco del modelo de Lucas (1988) si coexistieran grupos de personas cuyos rendimientos sobre la inversión en conocimientos fueran decrecientes y grupos con rendimientos crecientes sobre la inversión en capital humano?

4. El modelo con individuos heterogéneos

Lucas considera un problema de maximización dinámica, donde se presenta una función de utilidad intertemporal típica. La sociedad maximiza:

$$\text{máx}\, U = \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c_t) N_t dt \qquad \text{con} \quad u(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \tag{1}$$

Donde $u(c_t)$ es una función de utilidad de elasticidad constante y ρ es el factor de descuento. El problema de maximización dinámica se completa con las restricciones de acumulación del capital físico y humano, las condiciones iniciales y las condiciones de transversalidad. Estas son:

$$\dot{K} = F_t(\cdot) - N_t c_t - \lambda_K K_t, \text{ siendo } F_t(\cdot) = AK^\beta (N^e)^{1-\beta} \text{ con } 0 < \beta < 1,\ A > 1 \tag{2}$$

$$\dot{h} = G_t(\cdot) - \lambda_h h_t \quad \text{con} \ G_t(\cdot) = G\left(h_t; u(h_t)\right) \tag{3}$$

$$K_{t=0} = K_0, \ \ h_{t=0} = h_0 \tag{4}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\theta_t^1 K_t = 0, \ \ \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\theta_t^2 h_t = 0 \tag{5}$$

Aquí, θ_t^1 y θ_t^2 son los precios sombra de las restricciones (2) y (3) respectivamente. La tecnología viene dada por una función Cobb-Douglas con rendimientos constantes a escala y bien comportada. Para simplificar el análisis, no se considerarán efectos externos. La producción de un único bien homogéneo se destinará a consumo y acumulación de capital físico.

Introduciendo heterogeneidad, ya no se trata de un nivel promedio de conocimientos, sino que existirán diferentes niveles de h. La producción dependerá, entre otros factores, de la fuerza de trabajo efectiva, que vuelve a representarse por $N_t^e = \int_0^\infty u(h_t)h_t N(h_t)dh$, y del nivel medio de conocimientos $H_t = \int_0^\infty h_t N(h_t)dh$.

Además, los individuos ranqueados de 0 a un nivel de aprendizaje lo suficientemente bajo $\underline{h}$, acumularán conocimientos bajo rendimientos decrecientes. A partir de dicho nivel, la acumulación se producirá bajo rendimientos crecientes a escala. Individualmente, esto implica que:

$$\dot{h} = \begin{cases} h_t^\alpha(1-u) - \lambda_h h_t & \text{si } h \in [0, h] \;\; \text{con } 0 < \alpha < 1 \\ \delta h_t^\psi(1-u) - \lambda_h h_t & \text{si } h \in [h, \infty) \;\; \text{con } \psi > 1,\, \delta > 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, la acumulación promedio de capital humano en la economía dependerá de cómo se distribuyan los individuos dentro del intervalo de habilidades $[0, \infty)$. El factor δ representa un factor de eficiencia adicional para altos niveles de capital humano.

Dadas estas modificaciones, y eliminando los subíndices que identifican el tiempo para simplificar la escritura, las restricciones (2) y (3) serán[3]:

$$\dot{K} = AK^\beta(N^e)^{1-\beta} - c - \lambda K \tag{6}$$

$$\dot{H} = \int_0^{\underline{h}} h^\alpha(1-u)N(h)dh + \int_{\underline{h}}^\infty \delta h^\psi(1-u)N(h)dh - \lambda H \tag{7}$$

Donde $N(h)$ es la función de densidad y $N = \int N(h)dh = 1$. Las condiciones iniciales no sólo implicarán un nivel de K_0 determinado, sino también una distribución inicial establecida para h. La historia de la sociedad

[3] Se está suponiendo que, en promedio, la tasa de depreciación es la misma para todos los individuos, sin importar el nivel de conocimientos que posean. A su vez, es la misma que para el capital físico. Cabe aclarar que éste es sólo un supuesto simplificador que puede no verificarse en la realidad.

definirá cuál será el valor del umbral estipulado y de qué manera se encuentra distribuida la población.

Si todos los individuos asignan de la misma forma la cantidad de tiempo entre acumular conocimientos y trabajar, esto es, entre u y $(1-u)$, entonces $N^e = u\int hN(h)dh = uH$.

Resolviendo el problema de maximización, de las condiciones de primer orden respecto de c y K[4], se obtiene la senda de crecimiento del consumo per cápita:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}\left[A\beta(k^e)^{\beta-1} - \lambda - \rho\right]$$

Donde $\frac{\dot{c}}{c}$ es la tasa de crecimiento del consumo per cápita y $k^e = K/N^e = K/uH$ es el capital por unidad de trabajo efectivo. Este resultado, en principio, es similar al obtenido por Lucas. Las diferencias aquí son: 1) el capital se expresa en unidades de trabajo efectivo; 2) el mismo está formado por una distribución determinada de capital humano heterogéneo.

Un incremento en el capital por unidad de trabajo efectivo, manteniéndose el capital humano en niveles constantes, reduce la tasa de crecimiento del consumo per cápita a causa de los rendimientos decrecientes en la acumulación del capital físico. Esta conclusión se verifica, en general, en modelos de crecimiento que supongan este tipo de rendimientos para el capital físico. Obsérvese que ante incrementos en el promedio del capital humano acumulado o en la cantidad de horas trabajadas, manteniéndose K constante, el capital por unidad de trabajo efectivo tiende a caer y el consumo a acelerarse. Existe una relación negativa entre la acumulación de capital por unidad de trabajo efectivo y la acumulación de capital humano. Para ver esto más claramente, tomando la restricción (6) y expresándola en términos de unidades de trabajo efectivo:

[4]Esto es, las derivadas de primer orden del Hamiltoniano deben verificar $\Im_c = 0$ y $\Im_K = -\theta_1$, donde $\Im_i$ es la derivada primera del Hamiltoniano respecto de la variable i. (Ver apéndice matemático).

$$\frac{\dot{k}^e}{k^e} = A(k^e)^{\beta-1} - \frac{c}{K} - \left(\lambda + \frac{\dot{H}}{H}\right) \tag{8}$$

Esto es así porque, si bien la población no registra tasas de crecimiento positivas, el capital humano sí lo hace, incrementando la fuerza laboral efectiva.

La distribución inicial de h no es una cuestión menor al analizar la trayectoria de la economía. Dada una distribución $N(h)$ en $t = 0$, la distribución en $t = 1$ dependerá de la forma en que se acumule h y de cuántos individuos se encuentren a la derecha o a la izquierda del umbral $\underline{h}$.

Como se mencionó anteriormente, el nivel de conocimientos en la población latinoamericana, parece seguir una distribución sesgada a izquierda. Por tal motivo, se supondrá que $N(h)$ es una función de densidad tipo *gamma*[5] . De las condiciones de primer orden respecto de u y h, se obtiene la senda de crecimiento para el capital humano[6]:

$$\frac{\dot{H}}{H} = \frac{1}{\beta}\frac{(1-u)}{b^a\Gamma(a)}Z - \frac{c}{K} - \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\lambda \tag{9}$$

En donde $Z = \underline{h}^{\alpha+a-1}e^{-\underline{h}} - \delta\underline{h}^{\alpha+a}e^{-\underline{h}}$, siendo $a \geq 2$.

Como puede verse con mayor detenimiento en el apéndice, los valores de los parámetros a y b determinarán el sesgo de la función de distribución. Incrementos en a acrecientan el valor de Z y, por lo tanto, las tasas de acumulación del capital humano promedio de la economía. En particular, un incremento en a, inclina la distribución de los individuos hacia la derecha, produciendo una mayor concentración de la población hacia mayores niveles de educación iniciales. De esta manera, un mayor número de personas acumulará conocimientos bajo rendimientos crecientes, estimulando el crecimiento de la economía en su conjunto.

[5] La misma cumple diferentes propiedades que se detallan en el apéndice. Fundamentalmente, representa una distribución sesgada a la izquierda.

[6] Considerando $\Im_u = 0$ y $\Im_h = -\dot{\theta}_2$. Ver apéndice.

Una disminución en el factor b, concentra la distribución hacia la media. Un valor alto para el parámetro b tiende a incrementar la dispersión de los individuos alrededor del nivel medio de conocimientos. El efecto de este factor es ambiguo. Por un lado, incrementos en b podrían reducir la tasa $\frac{\dot{H}}{H}$ al aumentar la heterogeneidad de la población. Por otro lado, si el umbral $\underline{h}$ es lo suficientemente bajo, un incremento en b incrementaría la tasa de acumulación de conocimientos al colocar una mayor proporción de población bajo rendimientos crecientes en la acumulación de capital humano.

Dos puntos cruciales del análisis son en dónde se ubicará $\underline{h}$ al inicio del proceso de desarrollo y cuál será el valor de δ. Aumentos en el umbral $\underline{h}$ reducen la tasa de acumulación del capital humano al reducir Z. Y tal reducción será mayor cuanto más grande sea δ. Esto es así porque es mayor la cantidad de población que quedará bajo la ley de los rendimientos decrecientes en la acumulación de conocimientos, perdiendo la ganancia adicional de una mayor productividad.

Además, incrementos en el consumo reducen la acumulación de capital humano, mientras que incrementos en el stock de capital físico la acrecientan.

La ecuación (9) puede reescribirse como:

$$\frac{\dot{H}}{H} = \frac{(1-u)}{b^a\Gamma(a)} Z - \rho + (1-\sigma)\frac{\dot{c}}{c} \tag{10}$$

La economía alcanzará tasas de crecimiento balanceadas cuando:

$$\frac{\dot{H}}{H} = \left[\frac{(1-u)}{b^a\Gamma(a)} Z - \rho\right] \sigma^{-1} \tag{11}$$

Fácilmente se verifica que $\frac{\dot{H}}{H} = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{c}}{c}$ y $\frac{\dot{k}^e}{k^e} = 0$. La existencia de una tasa de crecimiento balanceado positiva implica la presencia de una tasa de descuento intertemporal ρ suficientemente pequeña. La idea intuitiva que hay detrás de esto es que, si se valora mucho el bienestar de las generaciones presentes, será imposible aprovechar los beneficios de inversiones sucesivas en capital humano, aunque cierta parte de la población invierta bajo rendimientos crecientes a escala.

En el caso de que $\frac{(1-u)}{b^a\Gamma(a)}Z = \rho$, la economía converge a un estado estacionario. Que se arribe a uno u otro resultado, con tasas de crecimiento positivas o nulas, dependerá, como se ha venido describiendo hasta aquí, de la distribución inicial de h, el valor de los parámetros δ, α, ψ, ρ, σ, y el valor del umbral $\underline{h}$.

5. El caso particular de la polarización

Los resultados anteriores se basan en una distribución específica de la dotación inicial de capital humano en la población. Un caso particular constituye la formación de dos grupos diferenciados de individuos: aquellos que inician con un alto stock de capital humano (que puede ser visto como, intergeneracionalmente, un clima educativo alto en el hogar) y los que poseen un bajo stock inicial. Se trata de investigar, en el marco teórico propuesto, si un incremento en la acumulación de capital humano conlleva crecimiento con igualdad en una economía inicialmente dual.

Supongamos ahora que la economía presenta dos sectores, ambos producen y consumen el mismo bien, pero se diferencian en los rendimientos bajo los cuales se acumula capital humano (*à la Lucas* en ambos sectores, pero con rendimientos decrecientes y crecientes respectivamente):

$$\dot{h} = \begin{cases} h_t^{\gamma}(1-\underline{u}) & \text{si } h_0 = \underline{h}, \text{ con } 0 < \gamma < 1 \\ \delta h_t^{\psi}(1-\overline{u}) & \text{si } h_0 = \overline{h}, \text{ con } \psi > 1,\ \delta > 1 \end{cases} \tag{12}$$

La población se distribuye entre los dos sectores de acuerdo a una proporción dada al inicio:

$$\overline{L} = pL, \quad \underline{L} = (1-p)L, \quad L = \overline{L} + \underline{L} \tag{13}$$

Por lo tanto, la utilización del capital también se dará entre los dos sectores, de acuerdo a determinadas proporciones, $K = \overline{K} + \underline{K}$

Mantenemos algunos supuestos standard para este tipo de modelos: los individuos de ambos sectores maximizan una función de utilidad típica y no hay crecimiento poblacional ni depreciación de capital físico y humano.

Dado que consideramos dos grupos diferentes conviviendo en el sistema económico, se plantean dos problemas de maximización diferentes de acuerdo al grupo de pertenencia:

Si $h_0 = \overline{h}$,

$$\begin{aligned} H &= e^{-\rho t}\left(\frac{\overline{c}^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right)pL + \theta_1\left\{\left[A\overline{K}^{\alpha}(\overline{u}hpL)^{1-\alpha}\right] - \overline{c}pL\right\} \\ &+\theta_2\left[\delta h^{\psi}(1-\overline{u})\right] \end{aligned} \tag{14}$$

Si $h_0 = \underline{h}$,

$$\begin{aligned} H &= e^{-\rho t}\left(\frac{\underline{c}^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right)(1-p)L + \lambda_1\left\{\left[B\underline{K}^{\beta}(\underline{u}h(1-p)L)^{1-\beta}\right] - \underline{c}(1-p)L\right\} \\ &+\lambda_2\left[h^{\gamma}(1-\underline{u})\right] \end{aligned}$$

Las condiciones de maximización para ambos problemas serán:

• Para $h_0 = \overline{h}$:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \left[A\alpha(\overline{k}^{e})^{\alpha-1} - \rho\right]\sigma^{-1}, \quad \text{donde } \ \overline{k}^{e} = \frac{\overline{K}}{\overline{u}hpL} \tag{15}$$

A partir de la ecuación (15) se puede ver que, si las tasas proporcionales de acumulación de K y c tienden a un nivel constante cuando t tiende a infinito, se demuestra que las tasas de K, c y h (para h inicial alto) tienden a un mismo valor. Pero para mantenerse este resultado, se tendría que limitar el valor de ψ de manera que $\psi \in (1,2)$, dado que la tasa de acumulación del capital humano será:

$$\frac{\dot{h}}{h} = \delta h_t^{\psi-1}(1-\overline{u}) \tag{16}$$

Si ψ es mayor que 2, y dado que la acumulación del capital depende del propio stock en el tiempo, se plantea un resultado creciente (explosivo). Si es menor que 2, el comportamiento, aun creciente, es más suave. Sea cual fuere el valor de ψ, la tasa de crecimiento del consumo es:

$$\left(\frac{\dot{c}}{c}\right)_{\overline{h}} = \left[(1+\alpha\overline{u}-\alpha)\delta h^{\psi-1}-\rho\right](\sigma-\alpha)^{-1} \tag{17}$$

Este resultado plantea una dificultad metodológica: dado que la tasa de crecimiento del consumo depende de h_t el resultado es explosivo, a excepción del caso particular en que ψ sea igual a 1. Este es el único resultado en el que el modelo es estable, por lo que intrínsicamente encontramos una inestabilidad de tipo filo de la navaja para el grupo particular $h_0 = \overline{h}$.

• Para $h_0 = \underline{h}$:

En este caso, la tasa de crecimiento del consumo será:

$$\left(\frac{\dot{c}}{c}\right)_{\overline{h}} = \left[(1+\beta\underline{u}-\beta)h^{\gamma-1}-\rho\right](\sigma-\beta)^{-1} \tag{18}$$

Es fácil ver que dicha tasa, así como también la del ahorro y acumulación de h y K, decrece ante incrementos en h. Hay convergencia hacia un estado estacionario en el que la tasa de crecimiento se anula. Igualando a cero:

$$\underline{h}^* = \left(\frac{1+\beta\underline{u}+\beta}{\rho}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \tag{19}$$

Pero, al mismo tiempo, la tasa de crecimiento del capital humano debe ser cero en el estado estacionario:

$$\frac{\dot{h}}{h} = \underline{h}^{\gamma-1}(1-\underline{u}) = 0 \tag{20}$$

Esto implica que, o $h^* = 0$ o $\underline{u}^* = 1$. De la ecuación anterior se desprende que, si h^* es cero, $u = (\beta-1)/\beta$. En tal caso, u sería menor que cero, lo cual es imposible. Por lo tanto, $\underline{u}^* = 1$. En el estado estacionario del sector de baja productividad no se destinará tiempo a acumular capital humano.

El resultado ya fue planteado en el modelo original de Lucas (1988): el autor señaló que incluir rendimientos decrecientes sólo complica el planteo analítico del modelo de Solow, ya se arriba a las mismas conclusiones.

La tasa de crecimiento del consumo total de la economía será una combinación de (17) y (18), creciente en el agregado pero con una componente decreciente, dada por la trayectoria de (18), y una componente creciente, dada por (17). En el limite, la tasa de crecimiento del consumo para un grupo de la población, $h_0 = \underline{h}$, será nula, mientras que para el grupo $h_0 = \overline{h}$ será positiva (o inestable y creciente) con acumulación positiva de capital humano. Se plantea de esta forma el surgimiento de una economía dual.

6. Conclusiones preliminares

Haciéndose hincapié en el contexto de los países latinoamericanos, este trabajo se focalizó en la importancia de las condiciones iniciales para explicar la trayectoria de crecimiento de un país. Se plantearon tres casos posibles para describir el desempeño de un sistema: trampas de pobreza, crecimiento sostenido, o polarización de la economía. En el modelo presentado, si toda la población se encontrara a la izquierda del umbral h, la incorporación de capital humano se realizaría bajo rendimientos decrecientes en su totalidad y, como menciona Lucas (1988), sólo se complicaría analíticamente el modelo neoclásico, sin que se obtengan resultados cualitativamente distintos. Básicamente, la economía alcanza un estado estacionario de bajo nivel de ingreso y prácticamente nula acumulación de capital humano, situación posible de ser interpretada como una trampa de pobreza.

Pero la realidad hace suponer que habrá individuos localizados, tanto a la izquierda del umbral, como a la derecha del mismo. Dependiendo de cómo se encuentre distribuida la población al inicio del proceso, las tasas de crecimiento de la economía podrían ser positivas, conduciendo a la economía a una senda de desarrollo sostenido; o nulas, atrapando a la economía en un estado estacionario de bajos niveles de ingreso.

Por último, la convivencia de ambos grupos pero con diferentes funciones de acumulación de capital humano conduce al sistema a un resultado dual, donde los individuos que caen en una situación de trampa de pobreza conviven con los que generan un circulo virtuoso de acumulación de capital humano, crecimiento y consumo crecientes. El agregado mostrará una economía en expansión, pero a nivel microeconómico los individuos desfavorecidos en historia (condiciones iniciales) no pueden beneficiarse de dicho crecimiento.

En el presente trabajo no se ha efectuado ningún análisis de movilidad. Es de suponer que a medida que la economía se desarrolla, más personas se encontrarán a la derecha del umbral. Pero, al mismo tiempo, el umbral se ha señalado como un parámetro. Podría suponerse, por ejemplo, que el umbral se incremente a medida que el mercado laboral requiere mayores especializaciones. Se pretende incorporar en futuros trabajos dicha movilidad, así como también eliminar la inestabilidad intrínseca del modelo de polarización.

Referencias

[1] Banco Mundial (2006) "Informe sobre el desarrollo mundial 2006. Equidad y desarrollo". Ed. Banco Mundial.

[2] Becker, G. (1967) Human Capital. New York, National Bureau of Economic Research.

[3] Becker, G. S., Murphy, K. M., and Tamura, R.. (1990). "Human Capital, Fertility and Economic Growth." Journal of Political Economy N^o 98, 12–37.

[4] Berti Ceroni, C. (2001) "Poverty Traps and Human Capital Accumulation." Economica, New Series, Vol. 68, No. 270, 203-219.

[5] Carlson, B. (2002). "Educación y Mercado de Trabajo en América Latina." CEPAL n^o 77.

[6] Chiu, W. H. (1998). "Income Inequality, Human Capital Accumulation and Economic Performance." The Economic Journal, Vol. 108, No. 446, 44-59.

[7] Lucas, R. (1988). “On the Mechanics of Development Planning.” Journal of Monetary Economics N^o 22/ 1, 3-42.

[8] Schultz, T. W. (1961) “Investment in Human Capital,” The American Economic Review, Vol. Mes de Marzo.

[9] Solow, R. M. (1956). “A Contribution to the Theory of Economic Growth”. Quarterly Journal of Economics, N^o 32, 65-94.

[10] UNESCO (2007) “Educational Equity and Public Policy: Comparing results from 16 countries” (Sherman J. y Poirier J.)

[11] UNESCO (2005) “Educations Trends in Perspective. Analysis of the World Education Indicators”.

[12] Uzawa, H. (1965) “Optimum Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth.” International Economic Review N^o 6, 18 – 31.

A. Apéndice Matemático

El Hamiltoniano, de acuerdo a las condiciones planteadas, queda definido por:

$$\begin{aligned}\Im &= e^{-\rho t}\left(\frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right)+\theta_1\left[AK^{\beta}\left(u\int_0^{\infty}hN(h)dh\right)^{1-\beta}-c\int_0^{\infty}N(h)dh-\lambda K\right]\\ &\quad+\theta_2\left[(1-u)\left(\int_0^{\underline{h}}h^{\alpha}N(h)dh+\int_{\underline{h}}^{\infty}\delta h^{\psi}N(h)dh\right)-\lambda\left(\int_0^{\infty}hN(h)dh\right)\right]\end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden vendrán dadas por:

A) $\Im_c = 0$

B) $\Im_K = -\theta_1$

C) $\Im_u = 0$

D) $\Im_h = -\theta_2$

Donde $\Im_i$ representa la derivada de primer orden respecto de i.

Considerando la condición A):

$$\Im_c = e^{-\rho t}c^{-\sigma} - \theta_1 = 0$$

Aplicando logaritmo natural y diferenciando respecto del tiempo:

$$\rho + \sigma\frac{\dot{c}}{c} = -\frac{\dot{\theta}_1}{\theta_1}$$

Tomando la restricción B) y recordando que $u\int_0^{\infty}hN(h)dh = N^e$:

$$\Im_K = \theta_1\left[\beta AK^{\beta-1}(N^e)^{1-\beta}-\lambda\right] = -\dot{\theta}_1 \;\Rightarrow \beta AK^{\beta-1}(N^e)^{1-\beta}-\lambda = -\frac{\dot{\theta}_1}{\theta_1}$$

Reemplazando $-\frac{\dot{\theta}_1}{\theta_1}$ y llamando k^e a K/N^e:

$$\beta AK^{\beta-1}(N^e)^{1-\beta} - \lambda = \rho + \sigma\frac{\dot{c}}{c} \;\Rightarrow\; \left[\beta A(k^e)^{\beta-1} - \lambda - \rho\right]\sigma^{-1}$$

La distribución gamma supone una función $N(h) = \frac{h^{a-1}e^{-h/b}}{b^a\Gamma(a)}$ definida en el intervalo $[0,\infty)$, donde a y b son dos parámetros establecidos y $\Gamma(a)$ es la función gamma que cumple con ciertas propiedades. El valor esperado de una distribución gamma es $E(\cdot) = ab$, que en este caso es el valor de H. Introduciendo este tipo de función de densidad, y dados los supuestos acerca de la acumulación de h, se define nuevamente el Hamiltoniano:

$$\begin{aligned}
\Im &= e^{-\rho t}u(\cdot) + \theta_1\left[AK^\beta\left(\frac{u}{b^a\Gamma(a)}\int_0^\infty h^a e^{-h/b}dh\right)^{1-\beta}\right] \\
&\quad +\theta_2\left[\begin{array}{c} \frac{1-u}{b^a\Gamma(a)}\left(\int_0^{\underline{h}} h^{\alpha+a-1}e^{-h/b}dh + \int_{\underline{h}}^\infty \delta h^{\psi+a-1}e^{-h/b}dh\right) \\ -\frac{\lambda}{b^a\Gamma(a)}\int_0^\infty h^a e^{-h/b}dh \end{array}\right]
\end{aligned}$$

Considerando la condición de primer orden respecto de u:

$$\begin{aligned}
\Im_u &= \theta_1\left[AK^\beta(1-\beta)\left(\int_0^\infty uhN(h)dh\right)^{-\beta}\int_0^\infty hN(h)dh\right] \\
&\quad +\theta_2\left(\int_0^{\underline{h}} h^\alpha N(h)dh - \int_{\underline{h}}^\infty \delta h^\psi N(h)dh\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dividiendo la expresión por θ_2 y haciendo la restricción (7):

$$\frac{\theta_1}{\theta_2}\left[A(k^e)^\beta(1-\beta)H\right] = (\dot{H} + H\lambda)\frac{1}{1-u}$$

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \left(\frac{\dot{H}}{H} + \lambda\right)\left[(1-u)A(k^e)^\beta(1-\beta)\right]^{-1}$$

Aplicando logaritmo natural y diferenciando respecto del tiempo:

$$\frac{\dot{\theta}_1}{\theta_1} - \frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} = -\beta \frac{\dot{k}^e}{k^e}$$

Ahora, considerando la condición de primer orden respecto de h:

$$\begin{aligned}
\Im_u &= \theta_1 \left[AK^\beta (1-\beta) \left(\int_0^\infty uhN(h)dh \right)^{-\beta} \int_0^\infty \big(uN(h) + uhN'(h) \big) \, dh \right] \\
&\quad + \theta_2 \left[\begin{array}{c} (1-u) \int_0^{\underline{h}} \big(\alpha h^{\alpha-1} N(h) + h^\alpha N'(h) \big) \, dh \\ +(1-u) \int_{\underline{h}}^\infty \big(\delta \varepsilon h^{\varepsilon-1} N(h) + h^\psi N'(h) \big) \, dh \\ -\lambda \int_0^\infty (N(h) + hN'(h)) \, dh \end{array} \right] \\
&= -\dot{\theta}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Im_u &= \theta_1 A (k^e)^\beta (1-\beta) u \left(1 + \int_0^\infty hN'(h)dh \right) \\
&\quad + \theta_2 \left[\begin{array}{c} (1-u) \int_0^{\underline{h}} \alpha h^{\alpha-1} N(h)dh + \int_0^{\underline{h}} h^\alpha N'(h)dh \\ + \int_{\underline{h}}^\infty \delta \varepsilon h^{\psi-1} N(h)dh + \int_{\underline{h}}^\infty \delta h^\psi N'(h)dh - \lambda \left(1 + \int_0^\infty hN'(h)dh \right) \end{array} \right] \\
&= -\dot{\theta}_2
\end{aligned}$$

Puede demostrarse que $1 + \int_0^\infty hN'(h)dh = 0$. Luego,

$$\begin{aligned}
&\theta_2 (1-u) \int_0^{\underline{h}} \alpha h^{\alpha-1} N(h)dh + \int_0^{\underline{h}} h^\alpha N'(h)dh \\
&+ \int_{\underline{h}}^\infty \delta \varepsilon h^{\psi-1} N(h)dh + \int_{\underline{h}}^\infty \delta h^\psi N'(h)dh \\
= \; & -\dot{\theta}_2
\end{aligned}$$

Dividiendo la expresión por θ_2 y reemplazando las expresiones $N(h)$ y $N'(h)$:

$$\frac{1-u}{b^a \Gamma(a)} Z = -\frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2}$$

Donde $Z=(\alpha+a-1)\int_0^{\underline{h}} h^{\alpha+a-2}e^{-h/b}dh-\frac{1}{b}\int_0^{\underline{h}} h^{\alpha+a-1}e^{-h/b}dh+\delta(\psi+a-1)\int_{\underline{h}}^{\infty} h^{\psi+a-2}e^{-h/b}dh-\frac{1}{b}\int_{\underline{h}}^{\infty} h^{\psi+a-1}e^{-h/b}dh$

Reemplazando en $\frac{\dot{\theta}_1}{\theta_1}-\frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2}=-\beta\frac{\dot{k}^e}{k^e}$:

$$-\rho-\sigma\frac{\dot{c}}{c}+\frac{1-u}{b^a\Gamma(a)}Z=-\beta\left[A(k^e)^{\beta-1}-\frac{c}{K}-\lambda-\frac{\dot{H}}{H}\right]$$

$$\Rightarrow\quad -\rho-\sigma\frac{\dot{c}}{c}+\frac{1-u}{b^a\Gamma(a)}Z=-\beta\left[\frac{1}{\beta}\left(\sigma\frac{\dot{c}}{c}+\rho+\lambda\right)-\frac{c}{K}-\lambda-\frac{\dot{H}}{H}\right]$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1-u}{b^a\Gamma(a)}Z=\beta\frac{c}{K}-(1-\beta)\lambda+\beta\frac{\dot{H}}{H}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\dot{H}}{H}=\frac{1}{\beta}\frac{1-u}{b^a\Gamma(a)}Z-\frac{c}{K}-(1-\frac{1}{\beta})\lambda+$$

Función de distribución gamma

En estadística la distribución gamma es una distribución de probabilidad continua, sesgada a la izquierda, con dos parámetros a y b, cuya función de densidad para valores positivos viene dada por:

$$f(x)=\frac{x^{a-1}e^{-x/b}}{b^a\Gamma(a)}$$

Aquí, $\Gamma(\cdot)$ es la función gamma. Para valores enteros del parámetro a, la función gamma se define como $\Gamma(a)=(a-1)!$. Para el caso de este trabajo, $N(h)=\frac{h^{a-1}e^{-h/b}}{b^a\Gamma(a)}$.

La función gamma $\Gamma(a)$ es una integral definida y se denota como:

$$\Gamma(a)=\int_0^{\infty} h^{a-1}e^{-h}dh$$

Esta función tiene ciertas propiedades que son utilizadas en la resolución de este trabajo. Algunas de ellas tienen que ver con lo que se conoce como función gamma incompleta. Una función gamma incompleta es una función gamma acotada superior o inferiormente. Así, por ejemplo:

$$\gamma(a;\underline{h}) = \int_0^{\underline{h}} h^{a-1}e^{-h}dh\,,\ \ \Gamma(a;\underline{h}) = \int_{\underline{h}}^{\infty} h^{a-1}e^{-h}dh$$

Además,

$$\gamma(a+1;\underline{h}) = a\gamma(a;\underline{h}) - \underline{h}^a e^{-\underline{h}},\ \ \Gamma(a+1;\underline{h}) = a\gamma(a;\underline{h}) + \underline{h}^a e^{-\underline{h}}$$

Teniendo estas cuestiones en consideración, se analizó qué sucede con el factor Z definido en la ecuación (9). Para simplificar las cuentas, se supuso que los rendimientos crecientes se representan por $\psi = \alpha + 1$ y se llama $z = \alpha + a + 1$, dándole al parámetro b el valor de uno y al parámetro $a \geq 2$, porque sino la función de distribución queda definida como una distribución exponencial, que es un caso extremo de la distribución gamma que no se aplica en este trabajo. Así:

$$\begin{aligned} Z &= (\alpha+a-1)\int_0^{\underline{h}} h^{\alpha+a-2}e^{-h/b}dh - \frac{1}{b}\int_0^{\underline{h}} h^{\alpha+a-1}e^{-h/b}dh \\ &\quad +\delta(\varepsilon+a-1)\int_{\underline{h}}^{\infty} h^{\psi+a-2}e^{-h/b}dh - \frac{1}{b}\delta\int_{\underline{h}}^{\infty} h^{\psi+a-1}e^{-h/b}dh \end{aligned}$$

$$Z = z\int_0^{\underline{h}} h^{z-1}e^{-h}dh - \int_0^{\underline{h}} h^{z}e^{-h}dh + \delta(z+1)\int_{\underline{h}}^{\infty} h^{z}e^{-h}dh - \delta\int_{\underline{h}}^{\infty} h^{z+1}e^{-h}dh$$

$$Z = z\gamma(z;\underline{h}) - z\gamma(z+1;\underline{h}) + \delta(z+1)z\Gamma(z+1;\underline{h}) - \delta\Gamma(z+2;\underline{h})$$

$$\begin{aligned} Z &= z\gamma(z;\underline{h}) - z\gamma(z;\underline{h}) + \underline{h}^z e^{-\underline{h}} + \delta(z+1)z\Gamma(z;\underline{h}) + \delta(z+1)\underline{h}^z e^{-\underline{h}} \\ &\quad -\delta(z+1)\Gamma(z+1;\underline{h}) - \delta\underline{h}^{z+1}e^{-\underline{h}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad Z = \underline{h}^z e^{-\underline{h}} - \delta\underline{h}^{z+1}e^{-\underline{h}}$$

Y reemplazando nuevamente z:

$$Z = \underline{h}^{\alpha+a-1}e^{-\underline{h}} - \delta\underline{h}^{\alpha+a}e^{-\underline{h}}$$

Que es la condición que acompaña a la ecuación (9).