

Lyapunov Exponent Analysis Applied to a Hyperchaotic Prey-predator Model

F. J. Abrego and J. L. Moiola, *Senior Member, IEEE*

Abstract— A stability analysis of strange and simple attractors of a prey-predator map is performed. An evolution of the species along generations is computed with the purpose of contrasting with more sophisticated measures of complexity theory. It can be noticed that graphs of iterations alert on the presence of complex dynamics in certain regions of the parameter space. The computation of the Lyapunov characteristic exponents (LCE) shows regions of hyperchaos, an unusual fact in 2-dimensional maps that could be useful in signal encoding for secure communication.

Keywords— chaos, complexity theory, population dynamics, Numerical simulation.

I. INTRODUCCIÓN

LOS exponentes característicos de Lyapunov (ECL) constituyen una de las medidas más usuales y confiables para clasificar la naturaleza compleja de las soluciones en ecuaciones diferenciales. En pocas palabras, los ECL brindan la expresión más general del concepto de autovalores característicos de un dado atractor, sea éste un punto de equilibrio, una órbita periódica o cuasi periódica o un atractor extraño. Su característica más sobresaliente la constituye su invariancia que permite tipificar la dinámica de naturaleza compleja con precisión. Más específicamente si uno de los ECL es positivo, el sistema presenta divergencia marcada a las condiciones iniciales y su predictibilidad a futuro se ve profundamente afectada, por lo cual, a la evolución de la solución se la denomina caótica. En el caso que dos ECL sean positivos, el sistema se clasifica como hipercaótico.

La utilización de los ECL en problemas de ingeniería eléctrica está ampliamente documentada [1] y va desde aplicaciones en procesamiento de señales, bioingeniería, etc. hasta encriptación de la información utilizando el principio de sincronización de atractores caóticos. No obstante, una de las limitaciones de su uso es el cómputo intensivo y la dificultad en la implementación del algoritmo que debe hacerse sobre la trayectoria de un atractor. Estos problemas fueron resueltos en [2] donde se mostró por primera vez un método eficaz para poder calcular los diferentes ECL de un sistema n -dimensional (véase también [3] y [4] para más detalles).

En ingeniería electrónica existe una profusa bibliografía en

This work was supported in part by Universidad Nacional del Sur (PGI 24/K052), Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (PICT 2010-00465) and Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (PIP 112-200801-01112).

F. J. Abrego, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, abregofj@hotmail.com

J. L. Moiola, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, jmoiola@criba.edu.ar

circuitos no lineales hipercaóticos con fines de sincronización para transmisión segura de la información ([5], [6] y sus referencias). Sin embargo, la mayoría de las aplicaciones se encuentran en sistemas de tiempo continuo y sólo recientemente han aparecido estudios de sistemas hipercaóticos en sistemas discretos ([7], [8]) de tres o más dimensiones. Es interesante remarcar aquí un concepto sobre las dimensiones del sistema que será muy útil más adelante para entender el aporte original de este artículo. En sistemas de tiempo continuo se necesitan como mínimo tres dimensiones para la existencia de atractores caóticos (un ECL mayor que cero) y al menos cuatro dimensiones para que el sistema sea hipercaótico (dos ECL mayores que cero). En cambio, en sistemas discretos o mapas es conocido que con sólo una dimensión la dinámica puede generar un ECL positivo para determinados valores del parámetro de bifurcación [9]. El ejemplo más estudiado de una dimensión es el mapa logístico que modela el crecimiento poblacional de una especie. Entonces parecería natural que si se acoplaran dos de estos mapas —los cuales, cada uno por su lado, pueden presentar dinámica caótica— se estaría en presencia de un sistema de dos dimensiones hipercaótico. Este sencillo concepto llevó a los investigadores en [10] a especular sobre la génesis de la hipercaoticidad en dos mapas logísticos acoplados de manera conveniente, discutiendo cómo se transitaba desde la caoticidad hacia la hipercaoticidad. Hasta dónde hemos podido indagar en la bibliografía, los resultados de [10] son los primeros en mostrar la existencia de un mapa de dos dimensiones hipercaótico de la manera más sencilla posible.

Por otro lado, existe un sistema presa-depredador de dos dimensiones que resulta de la discretización de las famosas ecuaciones de Lotka-Volterra [11]. Para llegar a este modelo discreto de dos dimensiones, primero debemos explicar el sistema de Lotka-Volterra a partir de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(r_1 - ax) - bxy \\ \dot{y}(t) &= y(-r_2 - cy) + dxy,\end{aligned}\tag{1}$$

dónde $x(t)$ e $y(t)$ representan la densidad de presas y depredadores, respectivamente. La suposición considera que, en ausencia de depredadores, el número de presas evolucionará hasta alcanzar la *capacidad de carga* del sistema, siguiendo un modelo de ecuación logística de tiempo continuo. Por otro lado, en ausencia de presas el número de depredadores decrece hasta desaparecer. La interacción entre presas y predadores es un tópico recurrente en ecología y matemática, con aplicaciones en ámbitos tan diversos como la economía y la medicina [12]. Para un excelente tratado de la riqueza de la dinámica no lineal de este aparentemente sencillo

modelo poblacional de tiempo continuo, puede consultarse el libro de Bazykin [13].

En particular, el modelo de Lotka-Volterra ([11]-[13]) ha sido uno de los más estudiados, y aún hoy en día se utiliza en diferentes aplicaciones. Los términos cruzados representan el resultado de los encuentros entre presas y depredadores: desfavorable para la población de las presas ($-bxy$) y favorable para la de los predadores ($+dxy$).

En lo últimos años se ha sugerido que los modelos discretos son más apropiados para describir las interacciones entre presas y depredadores, sobre todo en poblaciones cuyas generaciones no se superponen. En algunos casos los modelos discretos proveen mejores aproximaciones que los continuos, brindando además soluciones explícitas que no siempre pueden obtenerse mediante su contraparte continua.

En este artículo trabajaremos con un mapa presa-predador discreto, derivado del mapa continuo de Lotka-Volterra como se presenta a continuación

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= ax_k(1-x_k) - bx_k y_k \\ y_{k+1} &= dx_k y_k, \end{aligned} \tag{2}$$

con parámetros a , b y d positivos. Este mapa ha sido estudiado en [14], y posteriormente en [15] y [16] pero sin utilizar la información de los ECL. Existe un artículo relacionado con este modelo pero que afecta a los términos cruzados ($bx_k y_k$ y $dx_k y_k$) en lo que se conoce como la respuesta funcional II de Holling [17]. Sin embargo, la presentación de los resultados sobre los ECL de [17] tiene serias deficiencias numéricas ya que cuando el sistema tiene un ciclo invariante estable los autores encuentran saltos por encima de cero para uno de los ECL, resultado que es teóricamente imposible.

Por tal razón y retomando que los mapas de dos dimensiones con dos ECL son de aparición muy esporádica en la literatura específica, se implementó el cálculo de los ECL en el sistema (2) para brindar más información de la dinámica compleja. En particular, este artículo tiene como intención complementar al excelente trabajo de investigación realizado en [16] que trazó bifurcaciones de doble período y de Neimark-Sacker [18] en el espacio de los parámetros, pero sin tocar explícitamente a las regiones de naturaleza compleja o caótica. En el desarrollo de la investigación encontramos con sorpresa que el mapa (2) tiene regiones en el espacio de parámetros con dos ECL positivos, por lo cual es hipercaótico. Este resultado es trascendente ya que el sistema en cuestión ha sido ampliamente utilizado en la literatura pero hasta dónde llega el conocimiento de los autores no ha sido reportado como hipercaótico. En este sentido, serviría también como modelo para estudiar las transiciones desde el caos hacia el hipercaos, como fue puntualizado en el acoplamiento de dos mapas logísticos en [10]. No obstante, a diferencia del modelo en [10], el sistema aquí empleado es más sencillo y ha sido ampliamente estudiado en la literatura por provenir de la discretización de las ecuaciones de Lotka-Volterra.

Para continuar con la organización del artículo, en la Sección II analizaremos los puntos fijos del sistema, y las condiciones de estabilidad de los mismos. En la sección III

mostraremos la evolución de las especies a medida que suceden las generaciones para diferentes combinaciones de parámetros, revelando que estamos ante la presencia de una dinámica compleja. Concluimos con un análisis de los ECL que demuestran la presencia de regiones caóticas e hipercaóticas en el espacio de parámetros.

II. ANÁLISIS DEL MODELO, PUNTOS FIJOS Y ESTABILIDAD

El mapa con el cual trabajaremos a lo largo del artículo es el expresado por la ecuación (2). Este mapa es equivalente a (1) para el caso en el que las generaciones no se superpongan, y donde el depredador no presenta una competencia entre miembros de su misma especie, lo cual se observa en la ausencia del término logístico en la ecuación del depredador. En ausencia de depredadores, la presa crece siguiendo una ley logística, en la cual el parámetro a representa la tasa combinada de crecimiento y muerte por hambruna.

Comenzaremos el análisis identificando los puntos fijos, siendo éstos aquellos (x^*, y^*) que verifican

$$\begin{aligned} x^* &= ax^*(1-x^*) - bx^* y^* \\ y^* &= dx^* y^*. \end{aligned} \tag{3}$$

La solución a este sistema de ecuaciones arroja tres puntos críticos: $P_1=(0, 0)$, $P_2=((a-1)/a, 0)$ y $P_3=(1/d, (ad-a-d)/bd)$.

Diversos autores ([15] y [16]) han realizado un análisis exhaustivo de la estabilidad de los puntos fijos, los cuales no replicaremos debido a su extensión, aunque sí utilizaremos sus resultados.

A fin de iniciar el análisis, calculamos el Jacobiano del sistema (2) y evaluamos en los puntos fijos. El módulo de los autovalores determinará la estabilidad. El Jacobiano de (2) tiene la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} a - 2ax - by & -bx \\ dy & dx \end{pmatrix}. \tag{4}$$

En P_1 los autovalores de (4) son $\lambda_1=0$ y $\lambda_2=a$. Por lo tanto P_1 será asintóticamente estable si $0 \leq a \leq 1$.

En P_2 los autovalores de (4) son $\lambda_1=2-a$ y $\lambda_2=d(a-1)/a$. Este punto por lo tanto será asintóticamente estable si $1 \leq a \leq 3$ y $d < a/(a-1)$.

En P_3 los autovalores de (4) toman una forma algebraica más complicada que en los casos anteriores, y su estabilidad se determina mediante el test de Jury [19]. Debido a la complejidad inherente y la extensión del cálculo, nos remitiremos a los resultados de [16]. Para que P_3 sea asintóticamente estable, debe verificarse una de las siguientes condiciones:

- (i) $3/2 < d < 9$ y $d/(d-1) < a < 3d/(3-d)$
- (ii) $d = 9/4$ y $1.8 < a < 9$
- (iii) $d > 9/4$ y $d/(d-1) < a < d/(d-2)$.

III. INDICIOS DE DINÁMICA COMPLEJA

En las simulaciones que se presentan a continuación, se han fijado los parámetros en función de los utilizados en [16], de

modo que si el lector lo desea pueda adicionar los resultados del presente trabajo a los allí generados para obtener mayor complementariedad. Más específicamente los resultados en [16] se refieren exclusivamente a órbitas periódicas utilizando herramientas de la teoría de bifurcaciones mientras que en el presente artículo se incluyen las medidas de caoticidad.

En la Fig. 1 se observa un diagrama de bifurcaciones con los parámetros $a=3.5$ y $b=0.2$ variando el parámetro d entre 2.7 y 3.8.

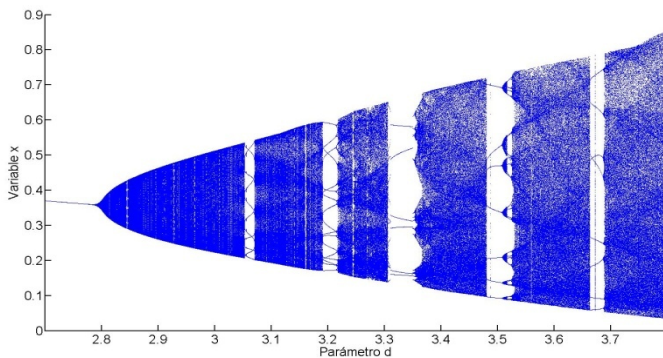


Figura 1. Diagrama de bifurcaciones del mapa (2).

La Fig. 1 revela un aumento de la complejidad del sistema a partir de $d=2.8$, en el cual aparece una bifurcación del tipo Neimark-Sacker, que genera un ciclo invariante estable. Las Figs. 2 y 3 muestran las gráficas del espacio de fases antes y después del punto de Neimark-Sacker, respectivamente.

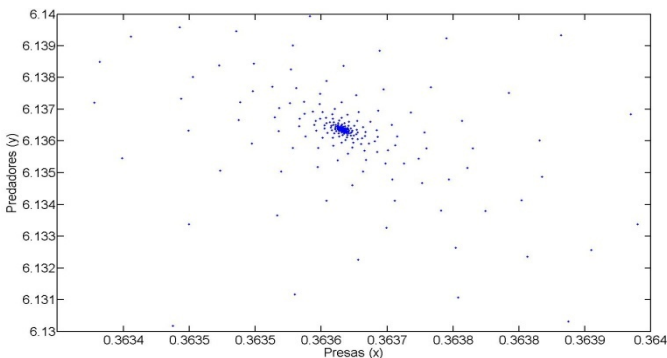


Figura 2. Iteración para $d=2.75$. La órbita confluye a un punto fijo estable.

Se observa como el punto fijo se convierte en un ciclo invariante atractor, confirmando la existencia de una bifurcación del tipo Neimark-Sacker supercrítica [18]. Observando la Fig. 1, pareciera existir una región caótica antes de la ventana periódica alrededor de $d=3.2$. En la Fig. 4 se aprecia la simulación para $d=3.19$. Allí puede notarse que el ciclo invariante se ha bifurcado en uno de período fijo.

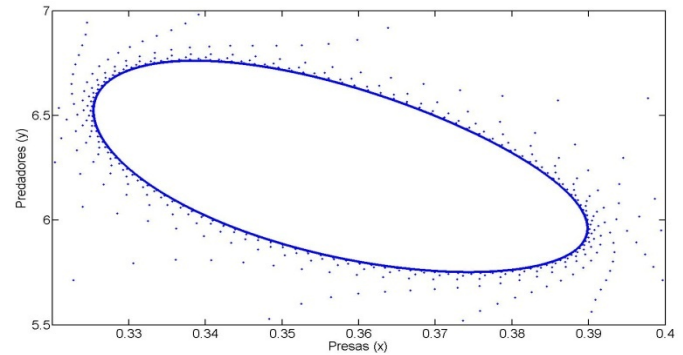


Figura 3. Iteración para $d=2.81$. Las órbitas confluyen a un ciclo invariante estable.

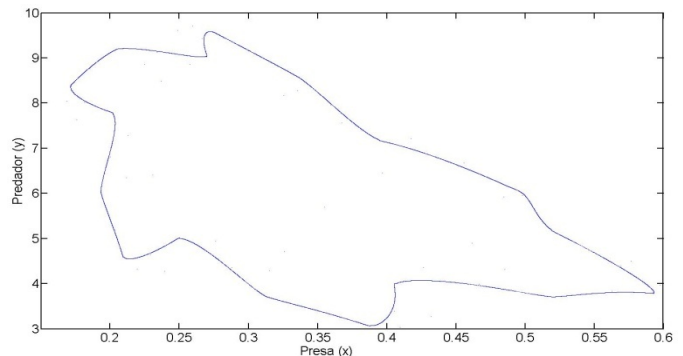


Figura 4. Iteraciones para $d=3.19$. La órbita confluye a un ciclo *quebrado*.

A simple vista podría sugerirse que en la Fig. 4 no existe una solución periódica. Un análisis mediante la Transformada Rápida de Fourier revela que es una combinación de diferentes frecuencias, siendo entonces una solución quasi-periódica. El módulo de la FFT se observa en la Fig. 5.

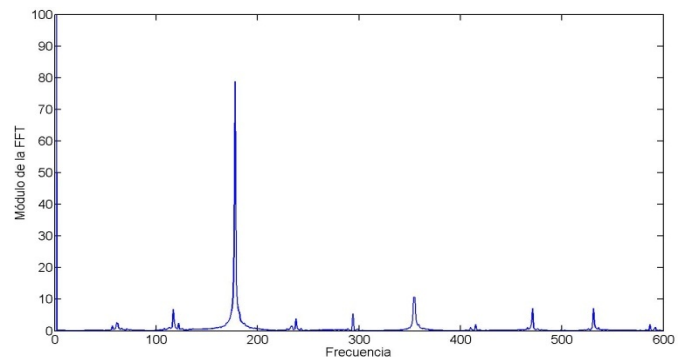


Figura 5. Módulo de la FFT de la variable x para $d=3.19$.

Luego de la ventana periódica alrededor de $d=3.2$, aparecen sucesivamente ventanas de bajo período seguido de regiones quasi-periódicas y, finalmente, caos.

En la Fig. 6 se observa claramente la dinámica caótica, aunque pueden apreciarse aún vestigios del ciclo invariante atractor de la Fig. 4.

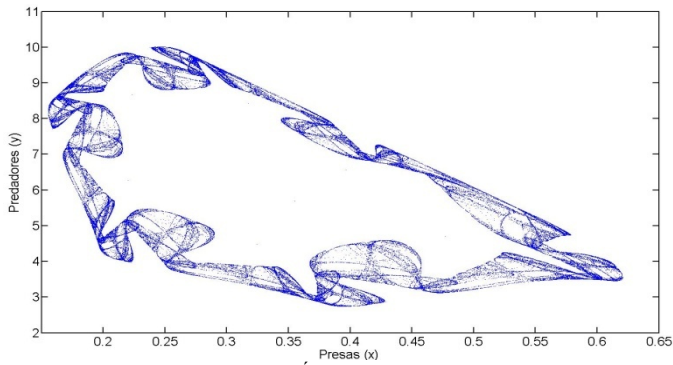


Figura 6. Iteraciones para $d=3.24$. Órbita caótica con plegamientos.

Finalmente, el sistema cambia a una dinámica aún más compleja que la anterior para $d=3.8$, la cual puede apreciarse en la Fig. 7. En la misma se observa que ya no quedan vestigios del ciclo invariante observado en la Fig. 4, sino que las variables llenan gran parte del espacio de estados de la cuenca de atracción.

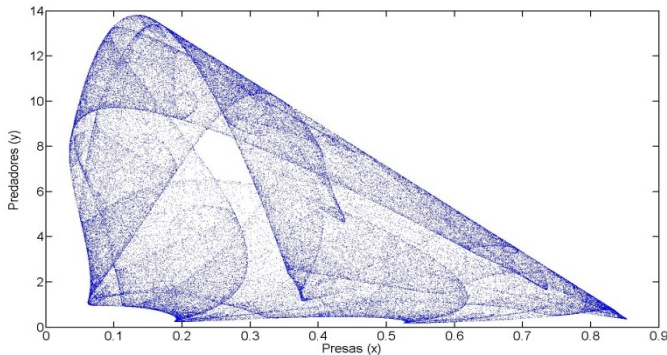


Figura 7. Plano de fases para $d=3.8$. Órbita caótica con plegamientos más amplios.

En la siguiente sección analizaremos los ECL del sistema, contrastando con lo observado mediante las simulaciones expuestas con anterioridad. Concluiremos que la dinámica compleja mostrada en la Fig. 7 es producto de dos ECL positivos, siendo entonces (2) un sistema hipercaótico para ciertas regiones del espacio de parámetros.

IV. ANÁLISIS MEDIANTE EXPONENTES DE LYAPUNOV

A continuación detallaremos el resultado de aplicar un algoritmo de cálculo de ECL al sistema (2). Este algoritmo fue desarrollado en un programa estándar de lenguaje simbólico, basándose en el aporte de [2].

El algoritmo utiliza una ortonormalización de Gram-Schmidt para evitar los errores producidos debido a que los vectores involucrados en el cálculo de los ECL se orientan en la dirección de máximo crecimiento. Para más detalles sobre esta problemática y sus posibles soluciones, los lectores pueden referirse a [2] o bien al tutorial más detallado [4].

Como la dinámica alterna entre regiones periódicas y caóticas, se calculó el espectro completo de Lyapunov variando el parámetro d entre 2.67 y 3.8, con incrementos de

0.001, lo que da un total de 1130 muestras de ECL en el intervalo. Cada ECL se calculó utilizando una órbita de 10^4 puntos y un intervalo de ortonormalización de 10 muestras. La precisión de los ECL obtenidos es del orden de 10^{-3} . Los resultados se observan en las Figs. 8 y 9.

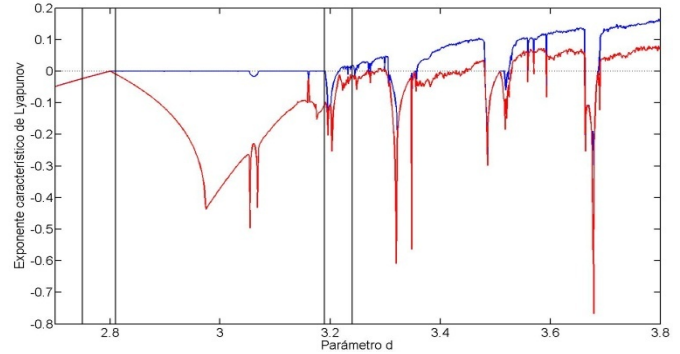


Figura 8. ECL para el sistema (2) variando el parámetro d .

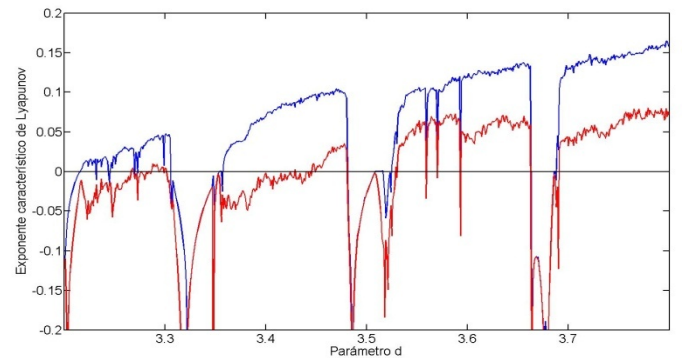


Figura 9. Detalle de los ECL para el sistema (2) en la región hipercaótica.

Las líneas verticales en la Fig. 8 corresponden a los valores del espacio de parámetros en los cuales se calcularon las Figs. 2, 3, 4, 6 y 7.

Como se observa en la Fig. 8, y con más detalle en la Fig. 9, el sistema (2) tiene ambos ECL positivos en ciertas regiones del espacio de parámetros.

Podría inferirse que la presencia de un segundo ECL positivo se debe a errores de cómputo, debido a la pequeña magnitud del mismo (10^{-2}). Para descartar esto, se realizó una extensiva simulación en un punto del espacio de parámetros en el cual se aprecia que ambos exponentes son positivos.

Esta nueva simulación fue realizada con una órbita de 10^6 puntos, un intervalo de ortonormalización de 1 muestra y los parámetros $a=3.5$, $b=0.2$ y $d=3.8$; los cuales coinciden con los utilizados para generar la gráfica de la Fig. 7.

La simulación arrojó como resultado los siguientes ECL: $\lambda_1=0.15896$ y $\lambda_2=0.07558$. Esto confirma que para ciertas regiones del espacio de parámetros, el mapa (2) presenta más de un ECL positivo, y por lo tanto es hipercaótico.

Es notable como al ojo humano el plano de fases de la Fig. 7 pareciera presentar un “desorden” mayor que el de la Fig. 6. El análisis numérico revela que mientras para los parámetros

de la Fig. 6 el mapa (2) presenta un solo ECL positivo (caótico), para los parámetros de la Fig. 7 tiene ambos ECL positivos (hipercaótico).

V. CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado la aplicación de los ECL en un mapa que modela la interacción entre presa y depredador. La contribución original consistió en obtener regiones en el espacio de parámetros donde los dos ECL son positivos, haciendo que el atractor sea clasificado como hipercaótico. El algoritmo desarrollado en este trabajo fue contrastado con el implementado en otros modelos equivalentes para apreciar su precisión. En particular, fue utilizado en el cálculo de los ECL del clásico mapa de Hénon [9] y, posteriormente, en el mapa de Hénon generalizado introducido en [7]. En este último mapa se verificaron los ECL variando el orden de las ecuaciones a diferencias como fue apuntado originalmente por Richter. Para los casos hipercaóticos se obtuvieron los mismos valores que [7] hasta el tercer dígito decimal, por lo cual se tiene un alto grado de confianza con los resultados mostrados en las Figs. 8 y 9, que son originales para este sistema. Por último, es importante remarcar que a diferencia de los resultados de hipercaoticidad con mapas de 3 dimensiones como en [8], aquí se sigue un camino más difícil al explorar la hipercaoticidad con la mínima dimensión posible que es 2, siguiendo la ruta trazada en [10] al acoplar dos ecuaciones logísticas discretas para estudiar la transición entre el caos y el hipercaos. Así, el modelo presa-depredador presentado aquí también puede ser un paradigma para analizar esta transición.

Otra posible aplicación es como fuente para encriptar información debido a su gran potencia de "mezclado" al disponer de la divergencia de dos ECL [20]. Por su cualidad de hipercaótico, el mapa estudiado genera una entropía a un ritmo mayor que aquellos sistemas que poseen sólo un ECL positivo. Las señales generadas por el mismo presentan, a pesar de ser determinísticas, un espectro en frecuencia muy similar al del ruido blanco. Este aspecto es muy apreciado en aplicaciones de encriptación de información. Las características más importantes de la encriptación mediante señales caóticas se brindan en [21], dando lugar a algoritmos de codificación mediante caos [22]. En [20] se analizan las ventajas de utilizar sistemas hipercaóticos para encriptar imágenes; mientras que en [23] se explora la utilización de atractores sincronizados para enviar y recibir información de forma segura, en los cuales el mensaje a transmitir es añadido a una señal caótica de mayor magnitud, siendo sólo decodificable por un atractor idéntico presente en el receptor.

Finalmente, la hipercaoticidad del mapa presa-predador de dos dimensiones podría extrapolarse en modelos de tres dimensiones que se han estudiado recientemente con el fin de modelar las interacciones de distritos industriales [24].

VI. AGRADECIMIENTOS

Los resultados de este trabajo fueron financiados con una beca de alumnos avanzados de la Universidad Nacional del Sur y con los subsidios PGI 24/K052 (UNS), PICT 2010-0465 (FONCyT) y PIP 112-200801-01112 (CONICET).

REFERENCIAS

- [1] W. Kinsner, "Characterizing chaos through Lyapunov metrics," *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics-Part C: Applications and Reviews*, vol. 36, pp. 141-151, March 2006.
- [2] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano, "Determining Lyapunov exponents from a time series," *Physica D*, vol. 16, pp. 285-317, 1985.
- [3] L. Dieci, E. S. Van Vleck, "Computation of a few Lyapunov exponents for continuous and discrete dynamical systems," *Applied Numerical Mathematics*, vol. 17, pp 275-291, 1995.
- [4] C. Skokos, "The Lyapunov characteristic exponents and their computation," *Lecture Notes in Physics*, vol. 790, pp. 63-135, 2010.
- [5] L. M. Pecora, T. L. Carroll, G. A. Johnson, D. J. Mar, J. F. Heagy, "Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications," *Chaos*, vol. 7, pp. 520-543, 1997.
- [6] G. Grassi, S. Mascolo, "Nonlinear observer design to synchronize hyperchaotic systems via a scalar signal," *IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 44, pp. 1011-1014, October 1997.
- [7] H. Richter, "The generalized Hénon maps: Examples for higher-dimensional chaos," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 12, no. 6, pp. 1371-1384, 2002.
- [8] D. A. Miller, G. Grassi, "A discrete generalized hyperchaotic Hénon map circuit," in *Proc. 2001 Midwest Symp. On Circuits and Systems*, Dayton, OH, vol. 1, 2001, pp. 328-331.
- [9] J. C. Sprott, *Chaos and Time-Series Analysis*. New York: Oxford University Press, 2003.
- [10] T. Kapitaniak, Y. Maistrenko, S. Popovych, "Chaos-hyperchaos transition," *Physical Review E*, vol. 62, no. 2, pp. 1972-1976, August 2000.
- [11] A. A. Berryman, "The origins and evolution of predator-prey theory," *Ecology*, vol. 73, no. 5, pp. 1530-1535, October 1992.
- [12] R. Quentin Grafton, J. Silva-Echenique, "How to manage Nature? Strategies, predator-prey models, and chaos," *Marine Resources Economics*, vol. 12, pp. 127-143, 1997.
- [13] A. D. Bazykin, *Nonlinear Dynamics of Interacting Populations*, Singapore: World Scientific Publishing, 1998.
- [14] H. Koçak, *Differential and Difference Equations Through Computer Experiments*, New York: Springer-Verlag, second edition, 1998.
- [15] M. Danca, S. Codreanu, B. Bakó, "Detailed analysis of a nonlinear prey-predator model," *Journal of Biological Physics*, vol. 23, pp. 11-20, 1997.
- [16] R. Khoshsiar Ghaziani, W. Govaerts, C. Sonck, "Codimension-two bifurcations of fixed points in a class of discrete prey-predator systems," *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Art. ID 862494, 27 pages, 2011.
- [17] H. N. Agiza, E. M. Elabbasy, H. El-Metwally, A. A. Elsadany, "Chaotic dynamics of a discrete prey-predator model with Holling type II," *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, vol. 10, pp. 116-129, 2009.
- [18] J. Hale, H. Koçak, *Dynamics and Bifurcations*, New York: Springer-Verlag, 1991.
- [19] C. L. Phillips, H. Troy Nagle, *Digital Control System Analysis and Design*, New Jersey: Prentice Hall, third edition, 1995.
- [20] F. Belkhouche, I. Gokcen, "Digital image encoding using hyperchaos," in *Proc. of the 2009 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, San Antonio, TX, October 2009, pp. 1349-1352.
- [21] L. Kocarev, "Chaos-based cryptography: a brief overview," *IEEE Circuits and Systems Magazine*, vol. 1, no. 3, pp. 6-21, 2001.
- [22] G. Jakimoski, L. Kocarev, "Chaos and cryptography: block encryption ciphers based on chaotic maps," *IEEE Trans. on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 48, no. 2, pp. 163-169, February 2001.
- [23] Y. H. Chu and S. Chang, "Dynamical cryptography based on synchronized chaotic systems," *Electron. Lett.*, vol. 35, pp. 974-975, 1999.

- [24] G. I. Bischi, F. Tramontana, "Three-dimensional discrete-time Lotka-Volterra models with an application to industrial clusters," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 15, pp. 3000-3014, 2010.



Francisco J. Abrego is a student in electrical engineering at the Universidad Nacional del Sur (UNS), Bahía Blanca, Argentina. He has a fellowship at UNS from April 2011 to March 2012 and also from Asociación Argentina de Control Automático (AADECA) from November 2010 to November 2011. He is teaching assistant in the Mathematics Department at UNS. His primary research interest are nonlinear dynamics, modelling and control.



Jorge L. Moiola (S'86, M'93, SM'98) received the B.S. degree in electrical engineering from the Universidad Nacional del Sur (UNS), Bahía Blanca, Argentina, in 1986, the M.Sc. degree in electrical engineering from the University of Houston, TX, in 1991, and the Ph.D. degree from the UNS, in 1992. Since then, he has been with the Department of Electrical Engineering at UNS, where he is currently Associate Professor and a member of the CONICET (National Council of Scientific Research of Argentina). In 2001, he was a Research Scholar of the Alexander von Humboldt Foundation at the University of Cologne. Dr. Moiola was the Editor-in-Chief of the Latin American Applied Research Journal (1999–2005) and Associate Editor of the IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS—II: EXPRESS BRIEFS (2004–2005). His primary research interest is in the field of nonlinear oscillations and bifurcations related to control systems theory.