Libros de Cátedra

ANTROMÁTICA

Aporte para la formación en Matemática de estudiantes de Antropología y Profesorado de Biología

Viviana Cappello y Romina Herrera (coordinadoras)

n
naturales

FACULTAD DE
CIENCIAS NATURALES Y MUSEO

edulp
Editorial de la Universidad de La Plata

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

ANTROMÁTICA

APORTE PARA LA FORMACIÓN EN MATEMÁTICA DE ESTUDIANTES DE ANTROPOLOGÍA Y PROFESORADO DE BIOLOGÍA

Viviana Cappello
Romina Herrera
(coordinadoras)

Facultad de Ciencias Naturales y Museo

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

edulp
Editorial de la Universidad de La Plata

Agradecimientos

Escribir un libro de divulgación es tarea muy complicada, o al menos resultó serlo para nosotros. No sabemos si habremos logrado un balance justo entre el rigor y la claridad de los argumentos; entre el atractivo de los ejemplos y su importancia para los temas expuestos; y un nivel de exposición que haga accesibles a los alumnos los temas tratados, sin degradarlos y convertirlos en trivialidades. Si este balance se obtuvo, será en buena medida gracias a un gran número de personas que influyeron en nuestra formación como docentes.

Queremos manifestar nuestro agradecimiento a quienes, directa o indirectamente, contribuyeron al resultado del libro, ya que sería imposible mencionarlos a todos.

A nuestros estudiantes de los cursos de antropología y profesorado de biología que soportaron por varios cuatrimestres con clases pseudo experimentales, que en buena medida era un intento de exponer a la crítica puntos de vista e ideas nuestras. Muchísimo de lo que aprendimos compartiendo estos cursos aparece ahora en el libro.

A nuestras familias, que nos acompañan en el crecimiento profesional de manera silenciosa, no por eso menos importante.

Gracias a todos ellos.

Índice

Capítulo 1
Números

Romina Herrera, Anyelen Di Paolantonio y Guillermo Lamenza

Números Reales

Nuestro sistema de numeración se compone de varios conjuntos numéricos. El primero que conocemos en los primeros aprendizajes es el de los **números naturales**. Son aquellos que utilizamos para contar y ordenar: $1, 2, 3, \ldots$

La ampliación de este conjunto numérico está dada por la inclusión del cero y los números que llamamos **negativos:** $0, -1, -2, -3, -4, \ldots$ A la unión de estos conjuntos mencionados la llamamos conjunto de los **números enteros.** Así, los enteros son $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

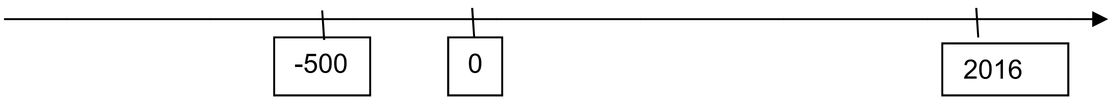
Sin embargo, este conjunto no es suficiente para describir cualquier situación de la cotidianeidad. Para ello debemos considerar a los números denominados **racionales** que son aquellos que pueden ser expresados como cociente entre dos números enteros: $\frac{a}{b}, b \neq 0$. Estos números también se pueden escribir en forma decimal, es decir efectuando la división entre el numerador y el denominador de dicha fracción. De esta manera obtenemos números decimales con finitas cifras decimales: $-\frac{3}{4} = -0,75$, o con infinitas cifras decimales periódicas: $\frac{5}{7} = 0,714285714\ldots$ donde, luego de cierta cifra decimal, la secuencia se repite.

Este conjunto numérico contiene a los dos mencionados anteriormente ya que a todo entero m se lo puede escribir como $\frac{m}{1}$.

No obstante, hay números que no pueden ser expresados como racionales, es decir como cociente de dos números enteros. A estos números los denominamos **números irracionales** y tienen la característica de tener infinitas cifras decimales no periódicas. Algunos con los que estamos más familiarizados son: $\sqrt{2} = 1,4142...$ o e=2,71.

La unión del conjunto de los números racionales con los irracionales da por resultado el conjunto de los **números reales**.

En antropología muchas veces tenemos que referirnos a hechos que sucedieron en el pasado. Existen diversas maneras de medir el tiempo y de posicionar algún evento en un punto dentro de un eje temporal. Tal vez el más conocido, de uso en la vida cotidiana, refiere a la utilización del nacimiento de Cristo como punto de partida para contabilizar el paso del tiempo. Así, dentro de ese marco de medición, en este momento estamos en el año 2016 d.C. (después de Cristo). Del mismo modo, si queremos referir a un hecho sucedido con anterioridad a nuestro punto de partida, como por ejemplo el comienzo del Periodo Inicial en el Valle del Hualfín, decimos 500 a.C. (alrededor de 500 años antes de Cristo). Si graficamos estos años en una recta numérica veremos que cuando decimos 500 años antes de Cristo estaremos representando -500, un número negativo.



Otra manera de medir el tiempo, siempre desde la óptica de la temporalidad occidental, está en relación con el desarrollo del método de datación radiocarbónica. En este caso el punto de partida es 1950.

Para conocer un poco más la historia de los números: “La maravillosa historia de los números“ http://hdl.handle.net/10261/112435

Algunos ejemplos del uso de los números:

- “Se estudia la estructura de la población prehistórica del NOA a través del análisis de la variabilidad fenotípica a nivel regional. La muestra está constituida por 961 individuos deformados y no deformados artificialmente, de ambos sexos, de edades post-reproductivas, pertenecientes a cuatro subregiones (Puna, Quebrada de Humahuaca, Valliserrana y Selvas Occidentales). Se emplearon 35 caracteres métricos del neuro y esplacnocráneo. Se muestran algunos datos en la siguiente tabla:”

Tabla 1. Noroeste Argentino. Composición de la muestra empleada de acuerdo con la subregión, el sexo, la edad y la deformación artificial

	Puna [1]	Quebrada [2]	Valliserrana [3]	Selvas [4]	Total
Sexo					
Masculino	155	213	116	25	509
Femenino	188	151	94	19	452
Edad					
Adulto	187	195	88	21	491
Maduro	143	152	120	14	429
Senil	13	17	2	9	41

Fuente: Varela y otros, 2004, p. 321.[1]

[1] La variabilidad entre poblaciones se evaluó mediante el empleo de diferentes técnicas de análisis estadístico multivariado, tales como análisis discriminante, D2 de Mahalanobis, análisis de agrupamiento, y correlación entre matrices de distancias. Los resultados indican que las relaciones biológicas entre subregiones no cambian cuando son obtenidas con cráneos deformados artificialmente o con cráneos sin deformación. Además, se comprueba la

- En el campo de aplicación de la antropología biológica trabajamos constantemente con distintos tipos de números. Por ejemplo en osteometría se utilizan métodos estandarizados de medición. La mayoría de estas medidas refieren a distancias entre puntos establecidos en las diferentes piezas óseas. Tomando el fémur se releva la longitud máxima, la longitud bicondilar, anchura epicondilar, entre otras medidas de utilidad para describir la morfología y realizar distintos tipos de estudios. Por convenciones establecidas internacionalmente estas medidas deben ser registradas con un instrumental específico y con una unidad de medida establecida. Siguiendo con el ejemplo del fémur (Desántolo et al. 2013), se utilizan distintas medidas e índices para aproximar la identificación de un individuo en un caso de reclamo de tierras ancestrales.

A continuación, un extracto de "Folia Histórica del Nordeste". Nro. 21, pág. 163

Aportes bioantropológicos para la identificación

La estimación de la morfología craneana se realizó a través del relevamiento morfométrico pormenorizado del cráneo (Buikstra y Ubelaker, 1994). El cálculo de índices indicadores de forma permiten caracterizar al individuo como sigue: cabeza de capacidad media (1373,55 según fórmula de Lee y Pearson), alargada en sentido anteroposterior (Índice Craneano Horizontal = 70.33), alta en relación a la longitud (Índice Craneano Vértico-Longitudinal = 75.27) y alta respecto a la anchura (Índice Craneano Vértico-Transversal = 107.03), de frente ancha (Índice Fronto-Parietal = 85.16) con crestas temporales intermedias (Índice Frontal Transversal = 87.15), con región maxilar no saliente (Índice Gnático = 102.04), cara baja y ancha (Índice Facial Superior = 44.93), nariz alta y estrecha (Índice Nasal = 40.71), órbitas medias (Índice Orbitario = 83.33), arcada alveolar superior ancho (Índice Arcada Alveolar = 116.00) y paladar ancho y corto (Índice Palatino = 97.56).

Estimación de la estatura

La relación entre la longitud de los huesos largos y la estatura del individuo, a todas las edades, ha servido a los osteólogos para reconstruirla a partir de valores métricos obtenidos en diferentes elementos óseos post craneanos (White y Folkens, 2005). La estimación de la estatura se realizó a partir del fémur izquierdo utilizando la fórmula de Trotter (1970).

Trotter, 1970

Masculino 2.38 x (fémur) + 61.41= estatura +/- 3.27

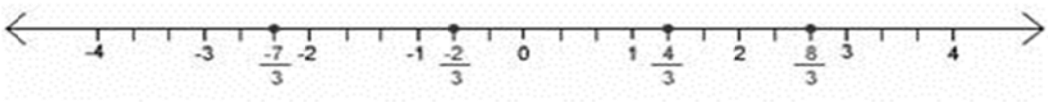
2.38 x 43.7 + 61.41= **165.416** (162.14 - 168.68)

Representación

La representación de los números reales se hace sobre una recta denominada **recta real.** Se considera un punto de origen al que se le asigna el **0,** se elige cierta longitud como unidad, y se ubican los números deseados.

---

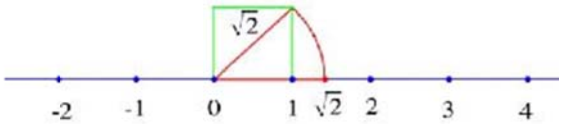
existencia de dos conglomerados biológicos, uno integrado por Valliserrana y Selvas Occidentales y otro constituido por Puna y Quebrada de Humahuaca. Por último, se demuestra que este modelo es globalmente consistente con el obtenido a partir de caracteres discretos del cráneo.



Observemos que los reales negativos aparecen a la izquierda del cero.

La representación de los números irracionales no es tan directa como la de los números racionales. ¿Por qué?

Por ejemplo, algunos números irracionales tal como $\sqrt{2}$ se pueden representar de esta manera:



Se puede demostrar que existe una relación biunívoca entre la recta real y los números reales, es decir que a cada punto de la recta real le corresponde un único número real, y a cada número real un único punto de la recta.

Propiedades

El conjunto de los números reales satisface la siguiente lista de axiomas:

- Si $a, b \in R$, entonces $a + b \in R$ (Cerradura en la suma)
- Si $a, b \in R$, entonces $a + b = b + a$ (Conmutatividad en la suma)
- Si $a, b, c \in R$, entonces $(a + b) + c = a + (b + c)$ (Asociatividad en la suma)
- Existe 0 de manera que $a + 0 = a$ para todo $a \in R$ (Neutro aditivo)
- Para cada $a \in R$ existe un elemento $-a \in R$ tal que $-a + a = 0$ (Inverso aditivo)
- Si $a, b \in R$, entonces $a.b \in R$ (Cerradura en la multiplicación)
- Si $a, b \in R$, entonces $a \cdot b = b \cdot a$ (Conmutatividad en la multiplicación)
- Si $a, b, c \in R$, entonces $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (Asociatividad en la multiplicación)
- Existe $1 \in R$ de manera que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ para cualquier $a \in R$ (Neutro multiplicativo)
- Para cada $a \neq 0,\ a \in R$, existe un número $b \in R$ tal que $a \cdot b = b \cdot a = 1$ y escribimos $b = \frac{1}{a}$ o $b = a^{-1}$ de manera que $a \cdot a^{-1} = 1$ (Inverso multiplicativo)

Ejemplo: Sea $a = 3$, existe el número $b = \frac{1}{3}$ de manera que $a \cdot b = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$

Notar que la expresión $\frac{1}{0}$ o 0^{-1} **no está definida.** En otras palabras, **no podemos dividir por cero** y no atribuimos ningún significado a los símbolos mencionados anteriormente.

- Si $a \in R$ entonces el producto $a \cdot 0 = 0$ y está definido.

El producto de cualquier número por 0 es 0. Por otra parte, si $b \in R$, b ≠ 0, entonces $\frac{0}{b}$ está definido y es igual a 0.

- Si $a, b, c \in R$, entonces $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (Propiedad distributiva de la multiplicación en la suma)
- Si $a, b \in R$, entonces se cumple sólo una de estas: (Tricotomía)
  - $a > b$
  - $a < b$
  - $a = b$
- Si $a, b, c \in R$, $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$ (Transitividad)
- Si $a, b, c \in R$ y $a < b$, entonces $a + c < b + c$ (Monotonía en la suma)
- Si $a, b, c \in R$, $a < b$
  - $c > 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$ (Monotonía en la multiplicación)
  - $c < 0$, entonces $a \cdot c > b \cdot c$ (Monotonía en la multiplicación)

Un ejemplo de estos dos últimos axiomas es:

Si tenemos la desigualdad: $1 < 3$. Como $2 > 0$, tenemos también $2 \cdot 1 < 2 \cdot 3$. Pero -2 es negativo, y si multiplicamos ambos miembros por -2 obtenemos $-2 > -6$.

En la representación de los números reales sobre la recta, -2 se encuentra a la derecha de -6. Esto nos muestra que -2 es mayor que -6.

Daremos también un ejemplo que nos muestre cómo determinar números que satisfagan ciertas desigualdades. Para esto necesitamos alguna terminología.

Sean a y b dos números y supongamos que $a < b$.

- La colección de números x tales que $a < x < b$ se llama **intervalo abierto** entre a y b, y se denota (a, b).
- La colección de números x tales que $a \leq x \leq b$ se llama **intervalo cerrado** entre a y b, y se denota $[a, b]$. Un punto sólo se llamará también intervalo cerrado.

En ambos casos, los números a y b se denominan **extremos** de los intervalos. Algunas veces deseamos incluir solamente uno de ellos en el intervalo y entonces definimos:

- La colección de los números x tales que $a \le x < b$ como un intervalo **semicerrado**, lo mismo para los números x tales que $a < x \le b$.

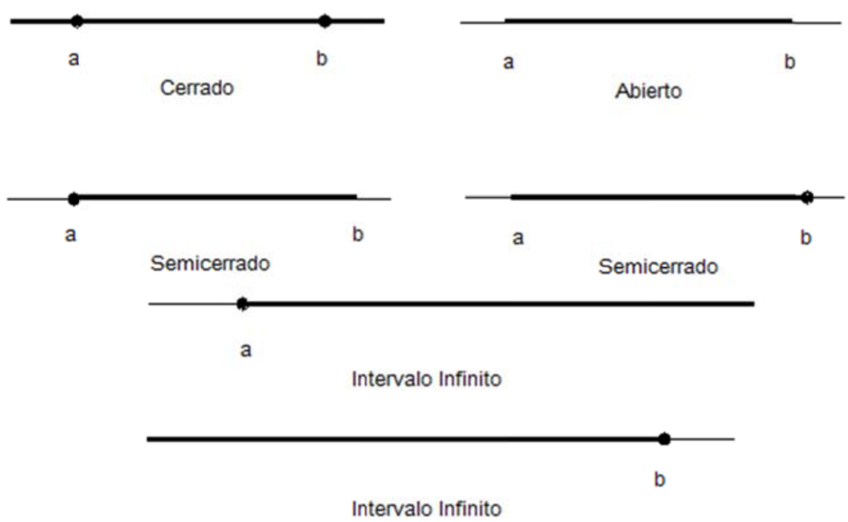
  Finalmente, si a es un número:

- La colección de los números $x > a$, $x \ge a$, $x < a$ ó $x \le a$ se denomina **intervalo infinito.**

  En resumen

<table>
<tr><th>Notación de conjunto</th><th>Notación de intervalo</th><th>Gráfica</th><th>Tipo de intervalo</th></tr>
<tr><td>$\{x / a < x < b\}$</td><td>(a,b)</td><td>(----------|----------)
a 0 b</td><td>Intervalo abierto</td></tr>
<tr><td>$\{x / a \le x \le b\}$</td><td>$[a,b]$</td><td>[----------|----------]
a 0 b</td><td>Intervalo cerrado</td></tr>
<tr><td>$\{x / a \le x < b\}$</td><td>$[a,b)$</td><td>[----------|----------)
a 0 b</td><td>Intervalo cerrado en a y abierto en b</td></tr>
<tr><td>$\{x / a < x \le b\}$</td><td>$(a,b]$</td><td>(----------|----------]
a 0 b</td><td>Intervalo abierto en a y cerrado en b</td></tr>
<tr><td>$\{x / x \ge b\}$</td><td>$[b,+\infty)$</td><td>[--------------------
b +∞</td><td>Intervalo infinito</td></tr>
<tr><td>$\{x / x \le b\}$</td><td>$(-\infty,b]$</td><td>--------------------]
-∞ b</td><td>Intervalo infinito</td></tr>
<tr><td>$\{x / x > b\}$</td><td>$(b,+\infty)$</td><td>(--------------------
b +∞</td><td>Intervalo infinito</td></tr>
<tr><td>$\{x / x < b\}$</td><td>$(-\infty,b)$</td><td>--------------------)
-∞ b</td><td>Intervalo infinito</td></tr>
</table>

Mostramos algunos dibujos de intervalos



Un ejemplo muy común de intervalos en antropología puede ser el de los intervalos en los métodos de datación. Cada método tiene su respectivo rango temporal de utilidad. El carbono

14 puede medir hasta 60000 años ^{14}C AP mientras que la termoluminiscencia puede medir hasta 200000 años y el Potasio-Argón puede llegar a millones de años.

Actividad 1

1.1 Escribir el conjunto que satisfacen las siguientes condiciones y representar en la recta:

1.1.1 Números reales mayores que -2 y menores o iguales a 5

1.1.2 Números reales menores que -2 o mayores o iguales a 5.

1.1.3 Números reales mayores que 3 y menores que 1.

1.1.4 Números reales mayores que 3 o menores que 1.

1.2 Escribir la desigualdad que representa el intervalo:

1.2.1 $(-\infty,-1)$

1.2.2 $[-6,\infty)$

1.2.3 $(-\infty,3]$

1.2.4 $(2,6]$

1.2.5 $(10,\infty)$

1.2.6 $[-1,4]$

Inecuaciones

Se llaman inecuaciones lineales a aquellas desigualdades que contienen una variable. Una inecuación se resuelve hallando el conjunto de valores que verifica la desigualdad.

Algunos ejemplos son:

- $-3x>2$
  $-3x:(-3)<2:(-3)$
  $x<-\frac{2}{3}$
  $s=\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$

- $-\frac{1}{4}x\geq -1$
  $-\frac{1}{4}x(-4)\leq -1(-4)$
  $x\leq 4$
  $s=(-\infty,4]$

- $3x-\frac{8}{3}<4-x$
  $3x+x<4+\frac{8}{3}$
  $4x<\frac{20}{3}$
  $x<\frac{20}{3}:4$
  $x<\frac{5}{3}$
  $s=\left(-\infty,\frac{5}{3}\right)$

Valor Absoluto

El valor absoluto de un número nos indica la **distancia** que existe entre dicho número y el 0.

Se define al valor absoluto o módulo de un número a como: $|a|=\begin{cases} a \text{ si } a>0 \\ -a \text{ si } a<0 \end{cases}$

Representaremos el valor absoluto de un número colocándolo entre dos barras verticales. Así, el valor absoluto de un número a se simboliza como $|a|$.

Observemos que cuando a es negativo, $-a$ es positivo. Así pues, el valor absoluto de un número es siempre un número positivo o cero.

Por ejemplo

- $|3| = 3$ ya que $3 > 0$
- $|-5| = -(-5)$ ya que $-5 < 0$

Para determinar los números que satisfacen la condición $|x+1| = 2$ aplicamos la definición:

$$\begin{array}{lcl} x+1=2 & & -(x+1)=2 \\ x=2-1 & \text{o} & x+1=-2 \\ x=1 & & x=-2-1 \\ & & x=-3 \end{array}$$

Solución = $\{-3;1\}$

Hallemos los intervalos de números que satisfacen la desigualdad: $|x+1| > 2$

Esta desigualdad es equivalente a las dos desigualdades:

$$\begin{array}{lcl} x+1>2 & & -(x+1)>2 \\ x>2-1 & \text{o} & x+1<-2 \\ x>1 & & x<-2-1 \\ & & x<-3 \end{array}$$

Hay dos intervalos infinitos que verifican la desigualdad: $x > 1$ y $x < -3$.

En notación de intervalo: $S = (-\infty;-3) \cup (1;+\infty)$

Actividad 2

2.1 Resolver las siguientes inecuaciones, escribir la solución en notación de intervalo y representarla en la recta real.

2.1.1 A=$\{x / |x| < 3\}$

2.1.2 B=$\{x / |x+1| < 6\}$

2.1.3 C=$\{x / |3x-2| < 5\}$

2.1.4 D=$\{x / |x-5| > 2\}$

2.1.5 E=$\{x / |x-1| < 4\}$

2.1.6 F=$\{x / |2x-1| > 3\}$

Sucesiones

Diremos, provisoriamente, que una sucesión es un conjunto ordenado de números, de modo que alguno de ellos se identifica como el primero y así siguen uno a continuación del otro. En el Capítulo 2 daremos la definición formal de este concepto.

El conjunto de los números naturales es una sucesión de infinitos elementos.

$N = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; ...\}$

A cada uno de los elementos de una sucesión se los denomina **términos.**

Otro ejemplo es:

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{2}; & 1; & \frac{3}{2}; & 2; & \frac{5}{2}; & 3; \quad ... \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array}$$

En general a dichos términos se los escribe como: $a_1, a_2, a_3, a_4, ...$

Algunas sucesiones tienen cierta regularidad de manera que se puede encontrar el término general $\boldsymbol{a_n}$ también llamado término enésimo. Dicho término tendrá una expresión que nos permitirá calcular el valor de cualquier término conociendo el lugar que ocupa.

En la sucesión $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}; 3; ...$ el **término general** es $\boldsymbol{a_n} = \frac{n}{2}$

Si el término general de una sucesión es $a_n = \frac{1}{n}$, entonces la sucesión será:

$$1; \ \frac{1}{2}; \ \frac{1}{3}; \ \frac{1}{4}; \ \frac{1}{5}; \ \frac{1}{6}; ...; \frac{1}{n}$$

Sucesión o Progresión Aritmética

Es aquella en la cual cada término de la misma se obtiene sumando al anterior un número constante $\boldsymbol{r}$ llamado **razón aritmética.**

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a_1 + 0r \\ a_2 = a_1 + 1r \\ a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r \\ a_4 = a_3 + r = a_1 + r + r + r = a_1 + 3r \\ ... \\ a_n = a_{n-1} + r = a_1 + \underbrace{r + r + ... + r}_{n\text{-}1\ veces} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{El término general } \boldsymbol{a_n} \text{ es}} \boxed{a_n = a_1 + (n - 1)r}$$

Por ejemplo $3, \xrightarrow{3+6} 9, \xrightarrow{9+6} 15, \xrightarrow{15+6} 21, \xrightarrow{21+6} 27, ... \rightarrow$ Sucesión aritmética con $r = 6$

La diferencia entre dos términos consecutivos es lo que define la razón:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_n - a_{n-1} = r \qquad \text{con } n \in N - \{1\}$$

Sucesión o Progresión Geométrica

Es aquella en la cual cada término se obtiene multiplicando al anterior por un número constante r llamado **razón geométrica.**

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a_1 \cdot r^0 \\ a_2 = a_1 \cdot r^1 \\ a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2 \\ a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^3 \\ \ldots \\ a_n = a_{n-1} \cdot r = a_1 \cdot \underbrace{r \cdot r \cdot \ldots \cdot r}_{n\text{-}1\ veces} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{El término general } a_n \text{ es}} \boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

Por ejemplo $5, \xrightarrow{5\cdot(-2)} -10, \xrightarrow{-10\cdot(-2)} 20, \xrightarrow{20\cdot(-2)} -40, \xrightarrow{-40\cdot(-2)} 80, \ldots$ $\rightarrow$ Sucesión geométrica con $r = -2$

Para que una razón sea geométrica debe verificarse que:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r \text{ con } n \in N - \{1\}$$

Actividad 3

3.1 Un equipo de arqueólogos está relevando un conjunto de terrazas de cultivo en la ladera de un cerro. La primera terraza está contenida por un pircado[2] de 15 metros de largo y abarca 30m^2 de superficie disponible para cultivo. En la segunda terraza se visualiza un pircado de 20 metros y cuenta con una superficie de 60m^2 para cultivo. La tercera terraza cuenta con un pircado de 25 metros y dispone una superficie de 120m^2 para cultivo. Siguiendo cuesta abajo se pueden visualizar 3 terrazas altamente afectadas por un desmoronamiento.

3.1.1. En base a los datos determinar si están en progresión aritmética o geométrica. Explicar.

3.1.2. Para poder poner a resguardo y delimitar el área de excavación el equipo necesita conocer cuál es la medida del pircado de la última terraza.

3.1.3. Se necesita alambrar todos los pircados para contenerlos y evitar mayores desmoronamientos. Calcular los metros de alambre que se utilizarán.

3.1.4. Para proteger el área se necesita cubrir todas las superficies de las terrazas con rollos de polietileno. Calcular cuántos m^2 de polietileno se utilizarán.

3.1.5. Para obtener una muestra de sedimento se necesita excavar el 10% de la superficie de la cuarta terraza. Calcular cuánta superficie hace falta excavar.

---

[2] Pircar: cerrar un lugar con muro de piedra en seco.

3.2 Se ha estudiado la variación morfológica craneana de la especie sudamericana *Caiman yacare* a lo largo de la ontogenia. A partir de este estudio se determinaron dos regiones particulares a analizar, la orbitaria y la del hocico. Se seleccionaron las variables: largo del hocico y largo de la órbita ocular para determinar si hay un cambio de forma del cráneo a lo largo de la vida del animal. Si el aumento de dichas variables es lineal (modelo isométrico), entonces sólo hay un aumento de tamaño de esas regiones del cráneo a lo largo de la ontogenia; por el contrario, si el crecimiento es geométrico (modelo alométrico), entonces hay un cambio ontogenético de forma.

Se utilizó una muestra de 14 ejemplares de caimanes en tres distintos estadios ontogenéticos (juvenil, subadulto y adulto). De dicho análisis se obtuvieron los siguientes promedios para cada variable en cada estadio:

	Largo del Hocico (mts)	Largo de la órbita (mts)
1° estadio	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$
2° estadio	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$
3° estadio	$\frac{45}{64}$	$\frac{1}{10}$

Aclaración: Se han aproximado algunos valores reales para que la complejidad del ejercicio resulte de los modelos a aplicar, y no de los cálculos que permiten arribar a las soluciones.

Mediante el uso de progresiones aritméticas y geométricas, determinar a qué modelo, de los mencionados anteriormente, se ajusta cada variable. En cada caso, escribir la expresión que relaciona los distintos estadios.

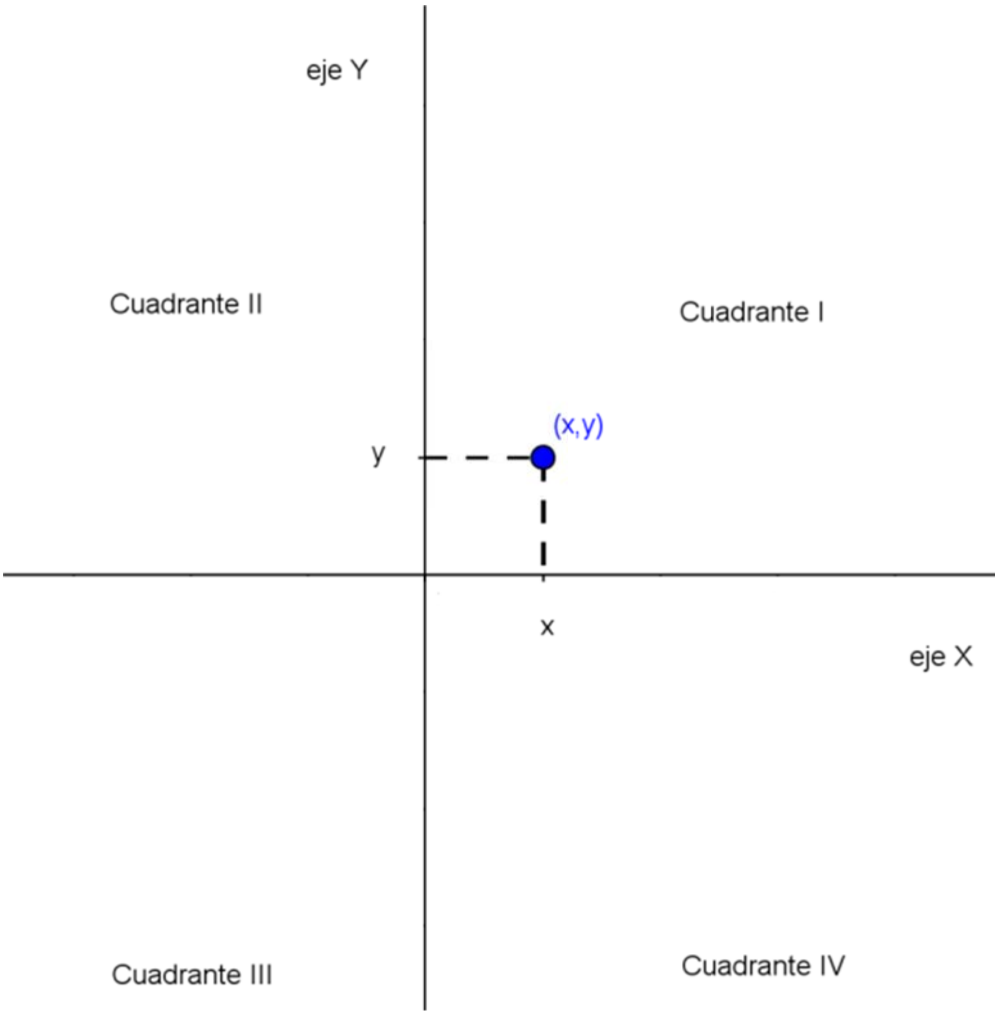
3.3 En el depósito del Museo se guardaron las urnas funerarias de una colección en estantes. En la base hay 50 de ellas, en la siguiente fila hay 49, en la siguiente 48, y así sucesivamente hasta la última fila de 20 urnas. ¿Cuántos estantes se ocuparon?

Sistema de coordenadas Cartesianas

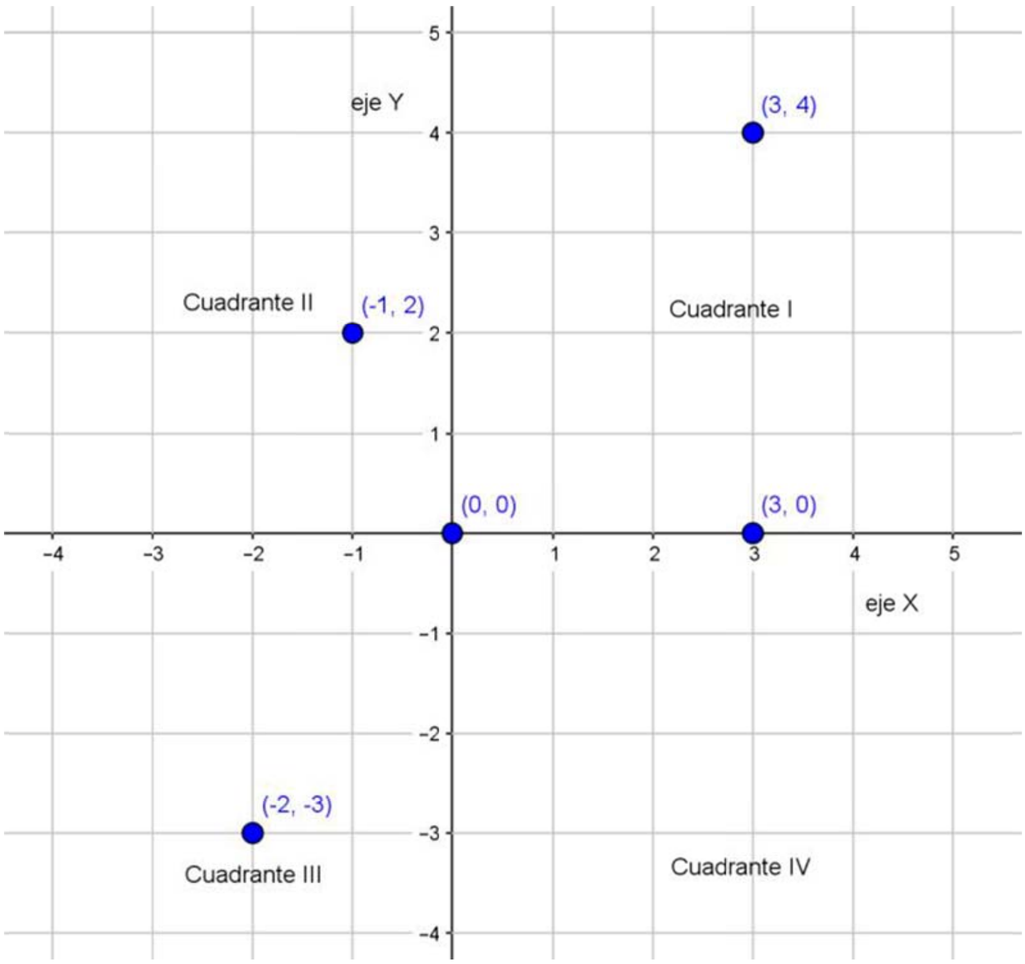
El sistema de representación más utilizado en matemática es el denominado **sistema de coordenadas rectangular** o **plano cartesiano**, en honor al matemático francés René Descartes.

Descartes, cuyo punto de partida era la desconfianza de toda fuente de conocimiento que no fuera la razón, es la racionalización del espacio. Descartes no inventa el sistema de coordenadas, pero es el primero que comprende que la sustitución de un punto del plano por un par de números constituye el caso más simple de interpretación en términos abstractos, de un dato de la intuición del espacio.

Dicho plano cartesiano está compuesto por dos rectas reales que se cortan formando ángulos rectos. Los pares ordenados de la forma (x, y) de números reales son los que identifican cada punto de dicho plano. Por convención se adopta que la primera coordenada del par, el número x, es un valor de la recta horizontal llamada "Eje x", y la segunda componente es un valor de la recta vertical llamada "Eje *y*". Su punto de intersección es el **origen**. Los dos ejes dividen el plano en cuatro **cuadrantes**.



"[…] El número x representa la distancia dirigida desde el eje y hasta el punto, y el número y, la distancia dirigida desde el eje x hasta el punto. Para el punto (x, y), la primera componente representa la coordenada x o la **abscisa** y la segunda componente, la coordenada y o la **ordenada**. Por ejemplo, la siguiente figura muestra las posiciones de los puntos $(-1,2);(3,4);(0,0);(3,0)$ y $(-2,-3)$ en el plano cartesiano." (Larson, 2001. Pág. 733)



Se adopta desde el origen de coordenadas hacia la derecha en el eje x y hacia arriba en el eje y el sentido positivo. A la izquierda del origen sobre el eje x y hacia abajo del origen sobre el eje y el sentido negativo.

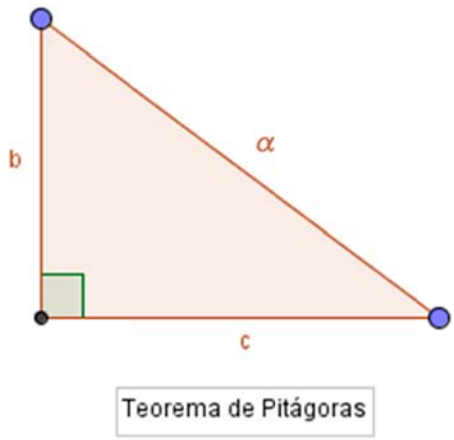
Observemos que la forma de representar un par ordenado (a, b) es análoga a la forma que utilizamos previamente para denotar un intervalo abierto. Sin embargo, esto no debería ocasionar inconvenientes dado que los contextos en los que se presenten uno u otro son bien diferenciados.

Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos cualesquiera del plano cartesiano se puede hallar a partir de la relación pitagórica.

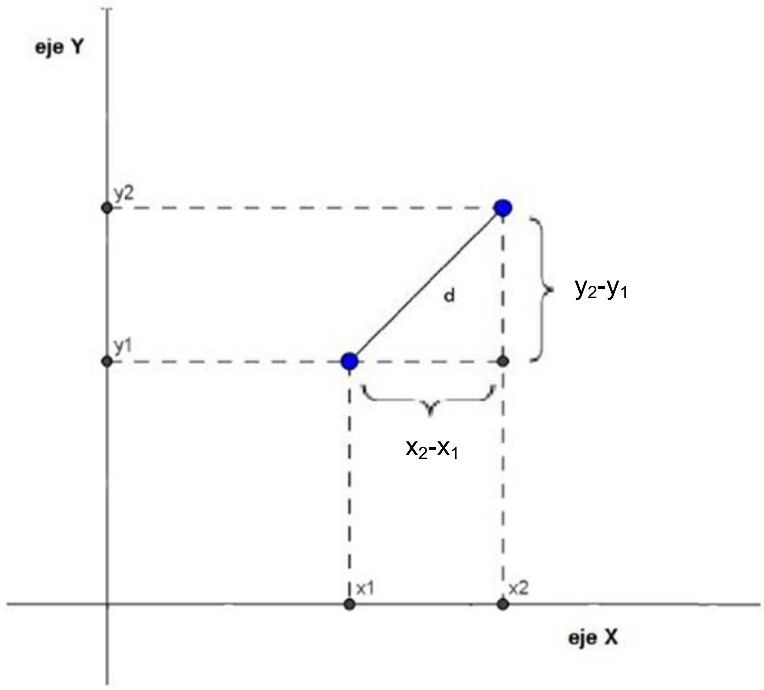
Recordemos el teorema de Pitágoras:

Sean **b** y **c** los catetos y $\boldsymbol{a}$ la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Estos están relacionados por la igualdad $a^2 = b^2 + c^2$. Recíprocamente, si $a^2 = b^2 + c^2$, entonces el triángulo es rectángulo.



Para determinar la distancia d entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) del plano, se construye con dichos puntos un triángulo rectángulo de manera que la longitud de un cateto del triángulo es $|y_2 - y_1|$, y la otra es $|x_2 - x_1|$. Del teorema de Pitágoras, se sigue que:

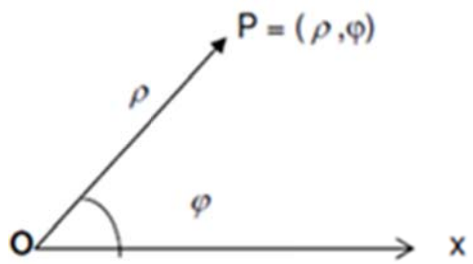
$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$
$$d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$



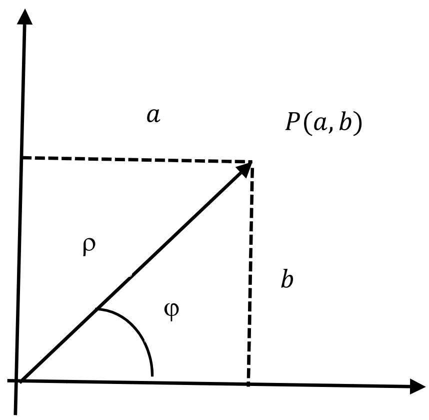
Sistemas de coordenadas Polares

Si bien el sistema de coordenadas cartesiana permite modelizar y dar respuesta a muchas situaciones, no es el único sistema utilizado en matemática.

Una forma distinta de representar puntos del plano es utilizando un sistema de coordenadas constituido por un **polo O** y un **eje polar** x , al cual se lo llama **sistema polar**. En este sistema, la posición de un punto queda determinada por la distancia que surge de unir dicho punto P con el polo O y el ángulo que forman la dirección positiva del eje polar con el segmento trazado desde P hasta O. La longitud del segmento $\overline{OP}$ recibe el nombre de radio vector ρ y el ángulo recibe el nombre de argumento φ.



Equivalencia entre los sistemas Cartesiano y Polar



Por las propias características con las que quedan definidos ambos sistemas, se puede determinar una equivalencia entre ellos. Dibujando los sistemas superpuestos, de forma tal que el origen coincida con el polo y el eje x con el eje polar, se puede demostrar mediante las relaciones trigonométricas y el Teorema de Pitágoras la validez de las siguientes fórmulas de transformación:

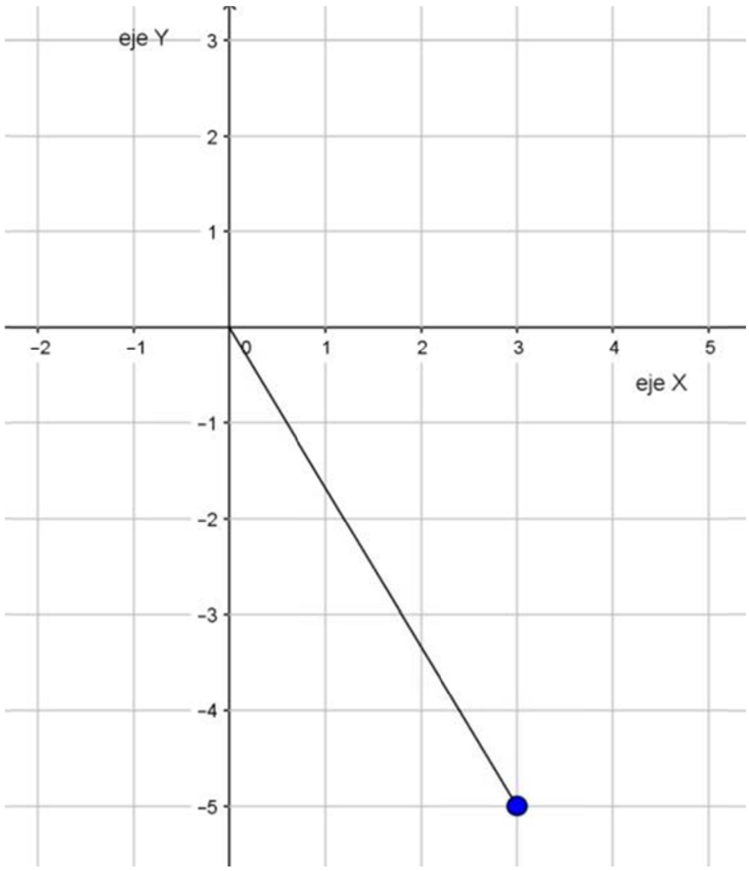
- Si se conocen las coordenadas cartesianas a y b , $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, siendo su valor la longitud del segmento $\overline{OP}$.

El ángulo φ, que forma el semieje positivo de x con la dirección del segmento $\overline{OP}$ se obtiene de la relación trigonométrica $tg\varphi = \dfrac{b}{a}$ siendo $\varphi = arctg\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

- Si se conocen las coordenadas polares (ρ,φ), estableciendo las correspondientes relaciones trigonométricas $\cos\varphi=\frac{a}{\rho}$ y $\operatorname{sen}\varphi=\frac{b}{\rho}$, obtenemos $a=\rho\cdot\cos\varphi$ y $b=\rho\cdot\operatorname{sen}\varphi$

Hacemos notar que, desde lo estrictamente matemático tienen la misma posición sobre el plano todos los pares ordenados de forma $(\rho,\varphi+2k\pi)$, siendo k un número entero, pero aquí se ha tomado una única solución considerando un solo período de 0 a 2π.

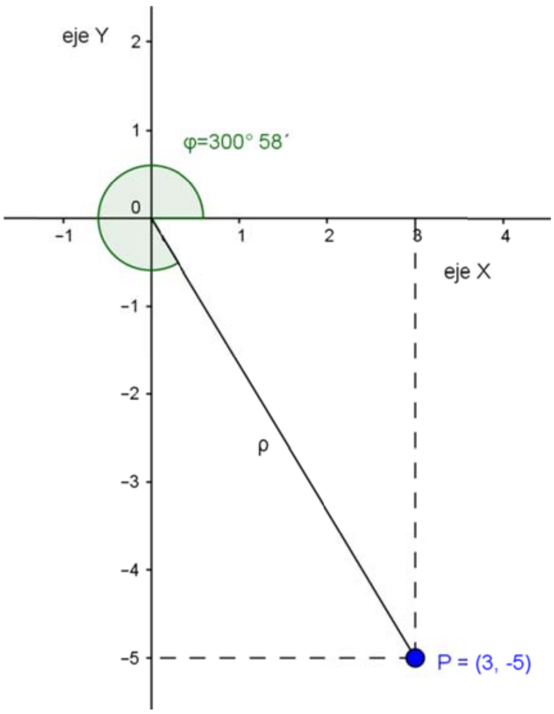
Hallaremos las coordenadas polares del punto P, si sus coordenadas cartesianas son $a=3;\ b=-5$



$\rho=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+(-5)^2}=\sqrt{34}$

$\varphi=arctg\left(\frac{b}{a}\right)=arctg\left(-\frac{5}{3}\right)$. Por ser a positivo y b negativo, el punto estará ubicado en el cuarto cuadrante, resultando $\varphi=300°58'$.

Entonces es punto (3;-5) en coordenadas cartesianas es equivalente a $(\sqrt{34};300^0 58')$ en coordenadas polares.

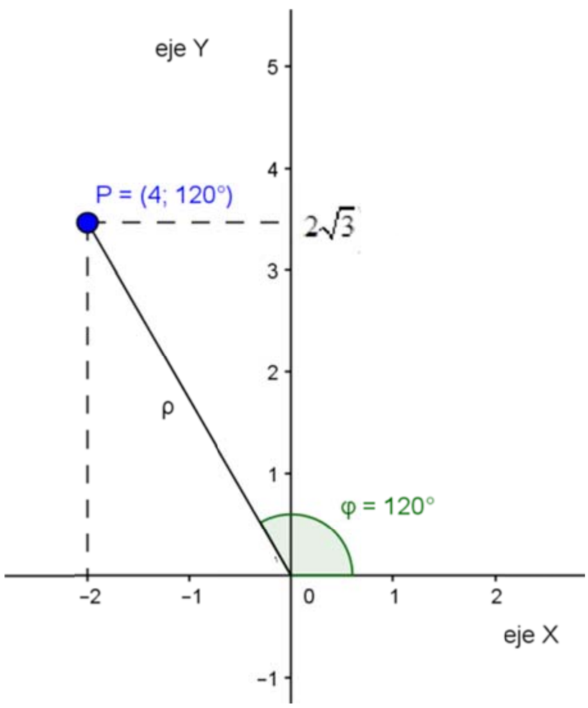


Hallaremos las coordenadas cartesianas del punto P cuyas coordenadas polares son $(4,120°)$

$$a = \rho \cdot \cos\varphi = 4\cos 120° = 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$b = \rho \cdot \operatorname{sen}\varphi = 4\operatorname{sen} 120° = 4\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

en consecuencia las coordenadas cartesianas de P son $\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$.



Actividad 4

4.1 Dados los siguientes puntos del plano expresados en coordenadas cartesianas:

$$A(3,2); B(2,5); C(5,0); D(10,0); E(6,-8); F(-2,-3); G(-4,4)$$

4.1.1. Representarlos.

4.1.2. Calcular la distancia entre AyC; CyD; EyG.

4.1.3. Transformarlos a coordenadas polares.

4.2 Dados los siguientes puntos del plano expresados en coordenadas polares:

$$H(8,60°); I(10,120°); J(10,180°); K(6,315°); L(\sqrt{2},45°)$$

Transformarlos a coordenadas cartesianas.

Es muy común en una excavación arqueológica tener que relevar la morfología del sitio, estructuras y la distribución de los artefactos dentro del mismo. Esto se realiza utilizando técnicas topográficas con instrumental específico. La mayoría de estos instrumentos utilizan el sistema de coordenadas polares para determinar los puntos que van a conformar el mapa. Como vimos, las coordenadas polares se obtienen midiendo una distancia y un ángulo. La primera se puede medir con pasos o cinta y la segunda con brújula o teodolito, entre otros.

4.3 La siguiente tabla forma parte de una libreta de campo que tiene los resultados del relevamiento de la distribución de los restos arqueológicos recuperados. Con esta información, confeccionar un mapa de distribución en coordenadas cartesianas y describir lo que puedes inferir.

Punto	Azimut	Distancia	Observaciones
1	40	4	Carbón
2	55	6	Cerámica
3	43	9	Óseo faunístico
4	120	5	Roca granítica
5	135	6	Roca granítica
6	140	7	Roca granítica
7	125	8	Roca granítica
8	230	3	Lasca de obsidiana
9	245	2	Óseo faunístico
10	330	12	Enterratorio humano

Ecuaciones e inecuaciones en el plano

Una ecuación lineal en el plano queda representada por una recta. Una desigualdad lineal en el plano queda representada por una región.

Una solución de una desigualdad con dos variables es un par ordenado de números que verifica la desigualdad.

Para mostrar que un par ordenado (x, y) es una solución de una desigualdad lineal sustituimos en dicha desigualdad el par ordenado.

Para determinar si $(-3,2)$ es una solución de $5x-4y \leq 13$ se reemplaza x por -3 e y por 2.

$$\begin{aligned}
&5x-4y \leq 13 \\
&5(-3)-4(2) \leq 13 \\
&-15-8 \leq 13 \\
&-23 \leq 13
\end{aligned}$$

Como -23 es menor que 13, el par ordenado $(-3,2)$ cumple la desigualdad y es una solución.

Las gráficas de desigualdades lineales de dos variables se pueden utilizar para resolver muchos problemas, en especial aquéllos relacionados con la optimización de cantidades.

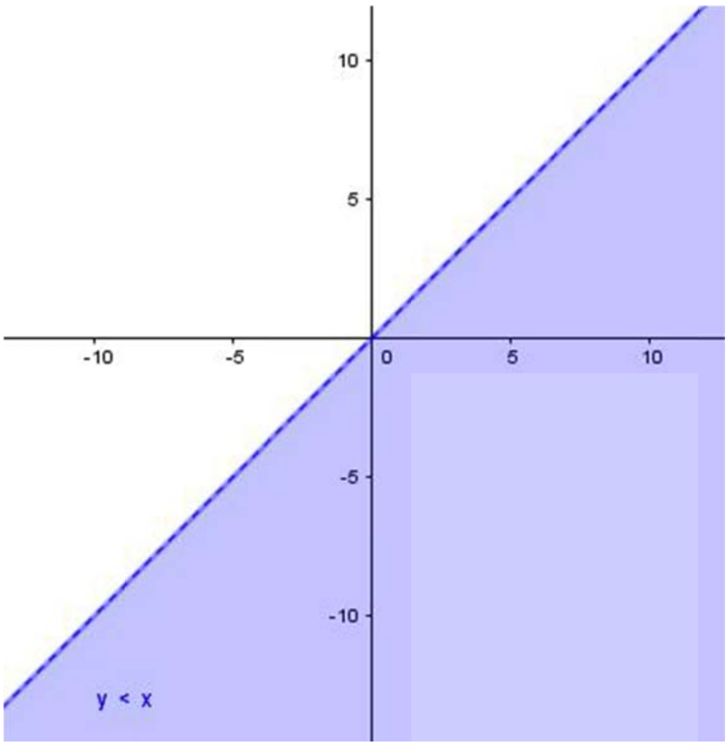
Para representar gráficamente una desigualdad lineal, primero trazamos la gráfica de la ecuación lineal correspondiente.

Por ejemplo, representaremos gráficamente $y < x$.

En primer lugar, trazamos la gráfica de la ecuación $y = x$. Esta recta señala la frontera entre los puntos que satisfacen la desigualdad y los que no la satisfacen. Trazamos la recta punteada ya que los puntos sobre ella no se encuentran en el conjunto solución de $y < x$

Para cualquier punto por encima de la recta $y > x$. Para cualquier punto por debajo de la recta $y < x$. Por consiguiente, la gráfica es el semiplano bajo la recta fronteriza $y = x$. Esto lo mostramos sombreando el semiplano inferior.

La gráfica de cualquier desigualdad lineal de dos variables es un semiplano o un semiplano junto con su frontera, la recta.

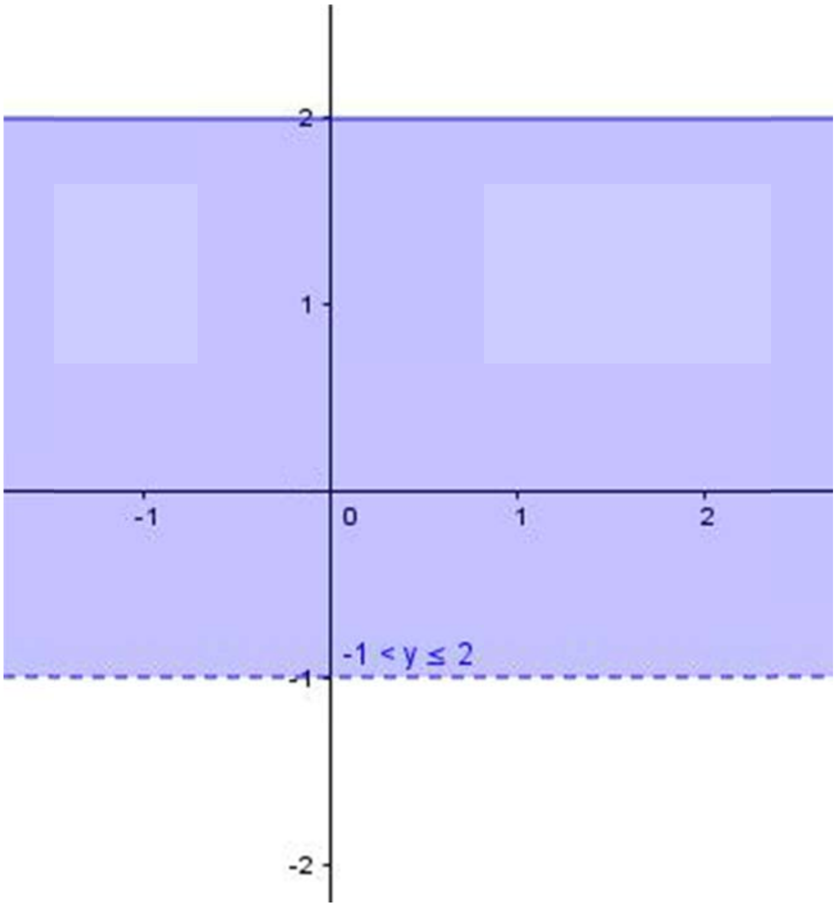


Representaremos gráficamente $-1 < y \leq 2$.

Se trata de una conjunción de dos desigualdades.

$$y > -1 \;\wedge\; y \leq 2$$

Como nuestra desigualdad es una conjunción, su gráfica es la intersección de las gráficas de las dos desigualdades.



Actividad 5

5.1 Encontrar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones. Graficar.

5.1.1. $y < 2 - \frac{1}{2}x$

5.1.2. $y \leq 2x - 4$

5.2 Una empresa fabrica dos productos distintos, A y B. Cada unidad del artículo A producida requiere dos horas de trabajo en una taladradora, y cada unidad del artículo B requiere cinco horas de trabajo en la taladradora. La empresa tiene un máximo de 40 horas de trabajo para la taladradora por semana. Si la limitación de la producción es el uso de la taladradora, graficar la relación que muestra las combinaciones de los productos que la empresa puede producir semanalmente.

Bibliografía

Berio, A. y otros. (2011). Matemática 2 Activa. (1ª ed). Argentina. Puerto de Palos

Desántolo B., Lamenza G., Balbarrey G., Ramallo V., De Feo C., Calandra H. y S. Salceda. 2013. Territorialidad y laudo forense. El caso Misión Esteros (Formosa, Argentina). Folia Histórica del Nordeste 21:155-167.

Lang, S. (1986). Cálculo I. México. Fondo Educativo Interamericano.

Larson, R. (2001). Cálculo y geometría analítica. (6ª ed). México. Programas Educativos S.A.

López, C. (2005) Apuntes de clase. Matemática y Elementos de Matemática Facultad de Ciencias Naturales y Museo.

Smith, S. (1998). Algebra, trigonometría y geometría analítica. Naucalpan de Juárez: Addison Wesley.

Varela, H.; Paschetta, C. y Cocilovo, J. (2004). Análisis de las relaciones biológicas entre poblaciones del N.O. argentino por medio de caracteres métricos. En *Relaciones de la Sociedad Argentina de Antropología XXIX,* Buenos Aires. Recuperado de http://www.saantropologia.com.ar/wp-ontent/uploads/2015/01/Relaciones%2029/15%20Varela.pdf

Webgrafía

https://pshychik.wordpress.com/2012/07/02/presentacion-de-los-numeros-reales/ Accedido 10/10/2016

http://disparatesmatematicos.blogspot.com.ar/2014_07_01_archive.html Accedido 06/10/2016

https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_real Accedido 10/10/2016

Rengifo H, U. (2015) Taller 1. Números Racionales. Colegio Berchmans. Cali

Los autores

Cappello, Viviana

Analista Universitario en Sistemas de la UTN FRLP. Ingeniera en Sistemas de Información de la UTN FRLP. Cursó el profesorado de Matemática en FaHCE UNLP. Maestría en Tecnología Informática Aplicada en Educación, Facultad de Informática UNLP. Magister en Tecnología Educativa, Universidad Autónoma de Madrid. Actualmente se desempeña como Profesora Adjunta Ordinaria en la Unidad Pedagógica de Matemática y Elementos de Matemática de la FCNyM UNLP. JTP ordinaria de la Facultad de Arquitectura y Urbanismo. Profesora Adjunta de Álgebra y Geometría Analítica en la UTN FRLP. Profesora de Informática en la ETT 2 de Berisso. Ha participado de Congresos Nacionales e Internacionales de Enseñanza de la matemática. Ha participado en Proyectos de extensión de la UNLP. Mantiene y administra la web de la cátedra de la FCNyM, FAU y plataforma virtual educativa de la ESNM.

Herrera, Romina

Profesora de Física y Matemática, título otorgado por la FAHCE, UNLP. Cursó la Maestría en Educación en Ciencias Exactas y Naturales orientación Matemática en la misma casa de estudios. Actualmente se desempeña como Profesora Adjunta Ordinaria en la Unidad Pedagógica de Matemática y Elementos de Matemática de la FCNyM, UNLP. Es Ayudante Diplomada de Matemática Nivel 1 de la FAU, UNLP. Es docente investigadora categoría V. Forma parte del Equipo Técnico Regional, Matemática, de Formación Continua de la Provincia de Bs. As. Profesora de Didáctica de la Matemática en ISFDyT N° 9. Profesora de Matemática EET 2 Berisso. Obtuvo mención proyecto articulación entre niveles, JUREC (2012). Dictó talleres a docentes. Participa de congresos de matemática vinculados a las ciencias naturales, EDIMAT 2015. Cursó seminario de posgrado de arqueología, escuela de verano, UNLP (2016).

Amor, Verónica

Licenciada en Biología Orientación Zoología, título otorgado por la Facultad de Ciencias Naturales y Museo, UNLP. Cursa la carrera de Microbiología Clínica e Industrial de la Facultad de Ciencias Veterinarias, UNLP y el Tramo de Formación Pedagógica, ISFDyT N° 9. Actualmente se desempeña como Ayudante Diplomada Ordinaria de la Unidad Pedagógica de Matemática y Elementos de Matemática de la FCNyM, UNLP. Profesora de Biología y Ciencias de la Tierra de la EES N° 3 de Berisso. Participa desde el año 2009 como docente del Curso Introductorio a la FCNyM, UNLP en las áreas de Matemática y Biología. Ha sido integrante de equipos de investigación en las áreas de Parasitología (CEPAVE) y Micología Médica e Industrial (Facultad de Ciencias Veterinarias, UNLP).

Di Paolantonio, Anyelen

Profesora de Matemática, título otorgado por la FAHCE de UNLP. Actualmente se desempeña como Ayudante Diplomada Ordinaria en la Unidad Pedagógica de Matemática y Elementos de Matemática de la FCNyM de UNLP. Es también Ayudante Diplomada Ordinaria en Elementos de Matemática y Física, Nivel I de la FAU de UNLP y en Probabilidad y Estadística de la Facultad de Ingeniería de UNLP. Profesora a cargo de Matemática de 2° Año del CNLP y de Matemática Aplicada de 6° Año del LMV de la UNLP. Profesora de Ateneo de Matemática del ISFDyT N° 9. Ha sido Adscripta en las cátedras de Didácticas Específicas del Profesorado de Matemática de la UNLP. Ha participado de Congresos Nacionales e Internacionales de Enseñanza de la matemática. Ha participado en Proyectos de extensión de la UNLP. Participa como colaboradora en un PPID de la UNLP.

Lamenza, Guillermo

Doctor en Ciencias. Licenciado en Antropología. Especializado en arqueología y paleoclima en el Gran Chaco sudamericano en la División de Antropología (FCNyM – UNLP). Becario postdoctoral (CONICET). Ha dictado cursos y seminarios de grado y posgrado. Actualmente ayudante diplomado ordinario de la Unidad Pedagógica de Matemática y Elementos de Matemática (FCNyM – UNLP). Producción científica que incluye artículos en revistas con referato (14); capítulos de libro (10); Libros (1); Trabajos en eventos C-T (44); Informes técnico (8) y Reseñas (1). Organizador y coordinador en eventos de C-T. Director e integrante de proyectos de investigación básica y extensión acreditados. Beneficiario de subsidios nacionales e internacionales. Distinción Dr. Joaquín V. González a los mejores promedios de la UNLP (2009) y el Premio internacional ¨Dra. Branislava Susnik¨ otorgado por el CEADUC, MEAB y AIP (2013). Miembro de la Sociedad Argentina de Antropología.

Lorenzo, Jimena

Profesora de Matemática, título otorgado por la UNLP. Cursó la Maestría en Educación en Ciencias Exactas y Naturales en la misma casa de estudios superiores. Actualmente integra el Equipo de Gestión del Departamento de Ciencias Exactas y Naturales de la FaHCE UNLP. También, se desempeña como Ayudante diplomado en Didáctica Específica II y Prácticas Docente en Matemática para la carrera Profesorado de Matemática. Ayudante diplomado en la cátedra de Matemática en la FCNyM UNLP. Es docente investigadora categoría V y forma parte del Proyecto de Investigación "Relación con el saber y diversidad en el aula de matemática de la escuela Secundaria básica de hoy. Un estudio exploratorio en el Gran La Plata" Profesora de Estadística para la carrera Tecnicatura Superior en Seguridad e Higiene Ambiental en el ISFT N°202, de Berisso.

Antromática : aporte para la formación en matemática de estudiantes de Antropología y Profesorado de Biología / Viviana Cappello ... [et al.] ; coordinación general de Viviana Cappello ; Romina Herrera ; prólogo de Ricardo Alberto Massucco. - 1a ed . - La Plata : Universidad Nacional de La Plata, 2017.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-950-34-1484-2

1. Matemática. 2. Antropología. 3. Biología. I. Cappello, Viviana II. Cappello, Viviana , coord. III. Herrera, Romina, coord. IV. Massucco, Ricardo Alberto , prolog.
CDD 510.7

Diseño de tapa: Dirección de Comunicación Visual de la UNLP

Universidad Nacional de La Plata – Editorial de la Universidad de La Plata
47 N.º 380 / La Plata B1900AJP / Buenos Aires, Argentina
+54 221 427 3992 / 427 4898
edulp.editorial@gmail.com
www.editorial.unlp.edu.ar

Edulp integra la Red de Editoriales Universitarias Nacionales (REUN)

Primera edición, 2017
ISBN 978-950-34-1484-2

n
naturales

Editorial
de la Universidad
de La Plata

UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE LA PLATA