Desigualdades con diferentes pesos para operadores multilineales

Kangwei Li - Sheldy J. Ombrosi - M. Belén Picardi

Universidad Nacional del Sur

2 de junio de 2017

En este trabajo presentamos un teorema que generaliza al contexto multilineal el resultado de Sawyer sobre desigualdades mixtas en el caso más singular.

En este trabajo presentamos un teorema que generaliza al contexto multilineal el resultado de Sawyer sobre desigualdades mixtas en el caso más singular.

Además, a partir de argumentos de extrapolación podemos extender nuestro resultado a operadores de Calderón-Zygmund multilineales.

Definición

Sea $w(x)$ una función no negativa localmente integrable
Decimos que:

Definición

Sea $w(x)$ una función no negativa localmente integrable
Decimos que:

- $w \in A_1$ *si* $Mw(x) \leq C\, w(x)$

Definición

Sea $w(x)$ una función no negativa localmente integrable
Decimos que:

- $w \in A_1$ *si* $Mw(x) \leq C\, w(x)$
- $w \in A_p$, $1 < p < \infty$, *si verifica:*

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-p'}\right)^{p-1} < \infty$$

Definición

Sea $w(x)$ una función no negativa localmente integrable Decimos que:

- $w \in A_1$ *si* $Mw(x) \leq C\, w(x)$
- $w \in A_p$, $1 < p < \infty$, *si verifica:*

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-p'}\right)^{p-1} < \infty$$

- $w \in A_\infty$, *si verfica:*

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right) exp\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q logw^{-1}\right) < \infty$$

Definición

Sea $w(x)$ una función no negativa localmente integrable
Decimos que:

- $w \in A_1$ *si* $Mw(x) \leq C\, w(x)$
- $w \in A_p$, $1 < p < \infty$, *si verifica:*

$$\sup_Q \Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \Big) \Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1-p'} \Big)^{p-1} < \infty$$

- $w \in A_\infty$, *si verfica:*

$$\sup_Q \Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \Big) exp \Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q log w^{-1} \Big) < \infty$$

- $w \in RH_\infty$, *si verifica:*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{Q}\ w(x) \leq \frac{C}{|Q|} \int_Q w(x)$$

Recordemos que

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(w)} = \sup_{\lambda>0} \lambda \, w(\{x \in \mathbb{R}^n : \ |f(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{p}}$$

Recordemos que

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(w)} = \sup_{\lambda>0} \lambda\, w(\{x \in \mathbb{R}^n : \ |f(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{p}}$$

Teorema (Sawyer, 1985)

Sean $u, v \in A_1$. Existe una constante C tal que para todo $t > 0$,

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \ \frac{M(fv)(x)}{v(x)} \ > t\right\}\right) \leq \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|u(x)v(x)\, dx$$

Recordemos que

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(w)} = \sup_{\lambda>0} \lambda\, w(\{x \in \mathbb{R}^n : \ |f(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{p}}$$

Teorema (Sawyer, 1985)

Sean $u, v \in A_1$. Existe una constante C tal que para todo $t > 0$,

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \ \frac{M(fv)(x)}{v(x)} \ > t\right\}\right) \ \le \ \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|u(x)v(x)\, dx$$

Transformada de Hilbert

$$\mathcal{H}f(x) = VP \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y} dy$$

En 2005, Cruz-Uribe, Martell y Pérez extendieron este resultado a $\mathbb{R}^n$ y además lo probaron para operadores de Calderón-Zygmund, resolviendo la conjetura de Sawyer, que decía que el teorema valía si el operador maximal era reemplazado por la transformada de Hilbert.

En 2005, Cruz-Uribe, Martell y Pérez extendieron este resultado a $\mathbb{R}^n$ y además lo probaron para operadores de Calderón-Zygmund, resolviendo la conjetura de Sawyer, que decía que el teorema valía si el operador maximal era reemplazado por la transformada de Hilbert.

Teorema

Sean $u, v \in A_1$. Existe una constante C tal que para todo $t > 0$,

En 2005, Cruz-Uribe, Martell y Pérez extendieron este resultado a $\mathbb{R}^n$ y además lo probaron para operadores de Calderón-Zygmund, resolviendo la conjetura de Sawyer, que decía que el teorema valía si el operador maximal era reemplazado por la transformada de Hilbert.

Teorema

Sean $u, v \in A_1$. Existe una constante C tal que para todo $t > 0$,

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|T(fv)(x)|}{v(x)} > t\right\}\right) \leq \frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|u(x)v(x)\,dx$$

donde T es un operador de Calderón-Zygmund con cierta regularidad.

Definición

T es un operador de Calderón-Zygmund multilineal si satisface las siguientes condiciones:

Definición

T es un operador de Calderón-Zygmund multilineal si satisface las siguientes condiciones:

- *Operador de integral singular*

$$T(f_1, ..., f_m)(x) = \int_{(\mathbb{R}^n)^m} K(x, y_1, ..., y_m)\ f_1(y_1)...f_m(y_m)\ dy_1...dy_m,$$

para todo $x \notin \cap_{j=1}^{m} sop(f_j)$.

Definición

T es un operador de Calderón-Zygmund multilineal si satisface las siguientes condiciones:

- *Operador de integral singular*

$$T(f_1, ..., f_m)(x) = \int_{(\mathbb{R}^n)^m} K(x, y_1, ..., y_m)\ f_1(y_1)...f_m(y_m)\ dy_1...dy_m,$$

para todo $x \notin \cap_{j=1}^{m} sop(f_j)$.

- *Condición de tamaño*

$$|K(y_0, y_1, ..., y_m)| \leq \frac{A}{\left(\sum_{k,l=0}^{m} |y_k - y_l|\right)^{mn}}$$

Definición

T es un operador de Calderón-Zygmund multilineal si satisface las siguientes condiciones:

- *Operador de integral singular*

$$T(f_1, ..., f_m)(x) = \int_{(\mathbb{R}^n)^m} K(x, y_1, ..., y_m)\ f_1(y_1)...f_m(y_m)\ dy_1...dy_m,$$

para todo $x \notin \cap_{j=1}^{m} sop(f_j)$.

- *Condición de tamaño*

$$|K(y_0, y_1, ..., y_m)| \leq \frac{A}{\left(\sum_{k,l=0}^{m} |y_k - y_l|\right)^{mn}}$$

- *Condición de regularidad*

$$|K(y_0, ..., y_j, ..., y_m) - K(y_0, ..., y_j', ..., y_m)| \leq \frac{A|y_j - y_j'|^{\varepsilon}}{\left(\sum_{k,l=0}^{m} |y_k - y_l|\right)^{mn+\varepsilon}},$$

para algún $\varepsilon > 0$ *y todo* $0 \leq j \leq m$, *siempre que* $|y_j - y_j'| \leq \frac{1}{2} max_{0 \leq k \leq m} |y_j - y_k|$.

En 2009 Lerner, Ombrosi, Pérez, Torres y Trujillo-González introdujeron en su trabajo la función (sub)multilineal maximal $\mathcal{M}$

En 2009 Lerner, Ombrosi, Pérez, Torres y Trujillo-González introdujeron en su trabajo la función (sub)multilineal maximal $\mathcal{M}$

Definición

Dada $\vec{f} = (f_1, ..., f_m)$ se define el operador maximal $\mathcal{M}$ como

$$\mathcal{M}(\vec{f})(x) = \sup_{x \in Q} \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f_i(y_i)| dy_i,$$

donde el supremo es tomado sobre todos los cubos Q que contienen a x.

En 2009 Lerner, Ombrosi, Pérez, Torres y Trujillo-González introdujeron en su trabajo la función (sub)multilineal maximal $\mathcal{M}$

Definición

Dada $\vec{f} = (f_1, ..., f_m)$ se define el operador maximal $\mathcal{M}$ como

$$\mathcal{M}(\vec{f})(x) = \sup_{x \in Q} \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f_i(y_i)| dy_i,$$

donde el supremo es tomado sobre todos los cubos Q que contienen a x.

Este operador maximal es mas pequeño que el operador producto

$$\prod_{j=1}^{m} M(f_j),$$

que hasta ese momento era el operador auxiliar utilizado para estimar operadores integrales singulares multilineales.

Recientemente, Li, Ombrosi y Pérez probaron que

Recientemente, Li, Ombrosi y Pérez probaron que

Teorema

Sea $u \in A_1$ *y* $v \in A_\infty$. *Entonces existe* C *tal que*

$$\left\| \frac{T(fv)}{v} \right\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq C \|f\|_{L^1(uv)},$$

donde T *puede ser la función maximal de Hardy-Littlewood o un operador de Calderón-Zygmund.*

Recientemente, Li, Ombrosi y Pérez probaron que

Teorema

Sea $u \in A_1$ y $v \in A_\infty$. Entonces existe C tal que

$$\left\| \frac{T(fv)}{v} \right\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq C\|f\|_{L^1(uv)},$$

donde T puede ser la función maximal de Hardy-Littlewood o un operador de Calderón-Zygmund.

Este teorema será de gran utilidad para la prueba de nuestro resultado.

Nosotros probamos el siguiente teorema:

Nosotros probamos el siguiente teorema:

Teorema

Sean $w_1, ..., w_m \in A_1$ *y sea* $v \in A_\infty$. *Sea* $\nu = w_1^{\frac{1}{m}} ... w_m^{\frac{1}{m}}$. *Entonces*

$$\left\| \frac{T(\vec{f})}{v} \right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \leq C \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L^1(w_i)}$$

donde T *es un operador de Calderón-Zygmund multilineal.*

Para esto, primero generalizamos al contexto multilineal el resultado de Sawyer:

Para esto, primero generalizamos al contexto multilineal el resultado de Sawyer:

Teorema

Sean $w_1, ..., w_m \in A_1$ *y sea* $v \in A_\infty$*. Sea* $\nu = w_1^{\frac{1}{m}} ... w_m^{\frac{1}{m}}$*. Entonces existe una constante* C *tal que*

$$\left\| \frac{\prod_{i=1}^m Mf_i}{v} \right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \leq C \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{L^1(w_i)}$$

Para esto, primero generalizamos al contexto multilineal el resultado de Sawyer:

Teorema

Sean $w_1, ..., w_m \in A_1$ y sea $v \in A_\infty$. Sea $\nu = w_1^{\frac{1}{m}} ... w_m^{\frac{1}{m}}$. Entonces existe una constante C tal que

$$\left\| \frac{\prod_{i=1}^m Mf_i}{v} \right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \leq C \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{L^1(w_i)}$$

Corolario

Bajo las mismas hipótesis, tenemos que

$$\left\| \frac{\mathcal{M}(\vec{f})}{v} \right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \leq C \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{L^1(w_i)}$$

En segundo lugar, extendimos el resultado a operadores de Calderón-Zygmund multilineales:

En segundo lugar, extendimos el resultado a operadores de Calderón-Zygmund multilineales:

Lerner, Ombrosi, Pérez, Torres y Trujillo-González probaron que:

Teorema

Si T es un operador de Calderón-Zygmund multilineal, $w \in A_\infty$, $p > 0$, entonces existe $C > 0$ tal que

$$\|T(\vec{f})\|_{L^p(w)} \leq C\|\mathcal{M}(\vec{f})\|_{L^p(w)}$$

Además, tenemos el siguiente teorema:

Teorema (Cruz-Uribe, Martell, Pérez, 2005)

Dada una familia $\mathcal{F}$, Si para algún $0 < p < \infty$ y todo $w \in A_\infty$ se verifica que

$$\|f\|_{L^p(w)} \leq C\|g\|_{L^p(w)},$$

entonces para todo $u \in A_1$ y todo $v \in A_\infty$ se cumple que

$$\|fv^{-1}\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq C\|gv^{-1}\|_{L^{1,\infty}(uv)}$$

Además, tenemos el siguiente teorema:

Teorema (Cruz-Uribe, Martell, Pérez, 2005)

Dada una familia $\mathcal{F}$, Si para algún $0 < p < \infty$ y todo $w \in A_\infty$ se verifica que

$$\|f\|_{L^p(w)} \leq C\|g\|_{L^p(w)},$$

entonces para todo $u \in A_1$ y todo $v \in A_\infty$ se cumple que

$$\|fv^{-1}\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq C\|gv^{-1}\|_{L^{1,\infty}(uv)}$$

Utilizando estos dos resultados y siguiendo la idea de la demostración de este último teorema, nosotros probamos que si $w_1, ..., w_m \in A_1$, $v \in A_\infty$ y $\nu = w_1^{\frac{1}{m}} ... w_m^{\frac{1}{m}}$, entonces

$$\left\|\frac{T(\vec{f})}{v}\right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \leq C\left\|\frac{\mathcal{M}(\vec{f})}{v}\right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})}$$

Con lo que finalmente tenemos que

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{T(\vec{f})}{v}\right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} &\leq C\left\|\frac{\mathcal{M}(\vec{f})}{v}\right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \\
&\leq C\left\|\frac{\prod_{i=1}^{m} Mf_i}{v}\right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \\
&\leq C\prod_{i=1}^{m}\|f_i\|_{L^1(w_i)}
\end{aligned}$$

Definimos

$$E = \{x : v(x) < \prod_{i=1}^{m} Mf_i(x) \leq 2v(x)\}.$$

Definimos

$$E = \{x : v(x) < \prod_{i=1}^{m} Mf_i(x) \leq 2v(x)\}.$$

Sea $\tilde{v}_i = \prod_{j=1, j\neq i}^{m} (Mf_j)^{-1}$ y sea $v_i = v\tilde{v}_i$.

Definimos

$$E = \{x : v(x) < \prod_{i=1}^{m} Mf_i(x) \leq 2v(x)\}.$$

Sea $\tilde{v}_i = \prod_{j=1, j\neq i}^{m} (Mf_j)^{-1}$ y sea $v_i = v\tilde{v}_i$.

Observemos que $v \in A_\infty$ y $\tilde{v}_i \in RH_\infty$. Luego $v_i \in A_\infty$.

Definimos

$$E = \{x : v(x) < \prod_{i=1}^{m} Mf_i(x) \leq 2v(x)\}.$$

Sea $\tilde{v}_i = \prod_{j=1, j\neq i}^{m} (Mf_j)^{-1}$ y sea $v_i = v\tilde{v}_i$.

Observemos que $v \in A_\infty$ y $\tilde{v}_i \in RH_\infty$. Luego $v_i \in A_\infty$.

Para probar el teorema es suficiente mostrar que

$$v^{\frac{1}{m}}\nu(E) \leq C \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L^1(w_i)}.$$

$$
\begin{aligned}
v^{\frac{1}{m}}\nu(E) &\le \int_E \prod_{i=1}^{m} \left(Mf_i \ w_i\right)^{\frac{1}{m}} \\
&\le \prod_{i=1}^{m} \left(\int_E Mf_i \ w_i\right)^{\frac{1}{m}} \\
&\le 2 \ \prod_{i=1}^{m} \left(\int_E v_i \ w_i\right)^{\frac{1}{m}} \\
&\le 2 \ \prod_{i=1}^{m} \left(\int_{\{x:v_i<Mf_i\}} v_i \ w_i\right)^{\frac{1}{m}} \\
&= 2 \ \prod_{i=1}^{m} w_i v_i\{x : Mf_i > v_i\} \\
&\le C \ \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L^1(w_i)}.
\end{aligned}
$$