Modelos mentales y modelos numéricos: un estudio descriptivo en la enseñanza media

María Rita Otero[1]
Luci Banks-Leite[2]

RESUMEN

En este trabajo se realiza un estudio exploratorio transversal (N=25) a estudiantes de enseñanza media (12 a 18 años de edad), con el fin de analizar las estrategias utilizadas y los modelos mentales subyacentes cuando enfrentan una situación matemática problemática, en la medida en que no disponen de esquemas eficientes. Se adoptan las nociones de representación mental y de modelo mental propuestas por Johnson-Laird (1983, 1990, 1996), así como la idea de modelo mental numérico, elaborada por Schwartz & Moore (1998). Los datos muestran que cuando estos estudiantes conciben la situación como un problema y/o no pueden utilizar eficientemente herramientas algebraicas para expresarla, desarrollan estrategias relacionadas con modelos mentales que se basan en manipulaciones numéricas para reducir la complejidad. También se analizan los modelos mentales que subyacen en las resoluciones algebraicas, se discuten sus posibles relaciones con los modelos numéricos, al igual que se indaga cómo los modelos mentales –construidos en la memoria de trabajo– sirven como puente para extraer conocimiento de orden más alto, permitiendo la elaboración de representaciones más estables que podrían incidir en los esquemas del sujeto (Schwartz & Moore, 1998; Moreira 2002; Greca y Moreira, 2002). Además, se discuten algunas implicaciones para la enseñanza y la investigación en Educación Matemática.

- **PALABRAS CLAVE**: Modelo mental, modelo mental numérico, enseñanza de la matemática.

ABSTRACT

In this work a cross exploratory study is carried out (N=25) to students of middle education (12 to 18 years old), in order to analyzing the strategies utilized and the underlying mental models when face a problematic mathematical situation, considering that they do not have efficient plans. The notions of mental representation and mental model proposed by Johnson-Laird (1983, 1990, and 1996) are adopted, as well as the idea of numerical mental model, elaborated by Schwartz & Moore (1998). The data show that when these students conceive the situation as a problem and/or cannot utilize efficient algebraic

---

Fecha de recepción: Octubre de 2003 /Fecha de aceptación: Septiembre de 2005.

1 Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro. Provincia de Buenos Aires, Argentina.

2 Departamento de Psicología Educacional/Facultadde de Educação-Unicamp, Brasil.

tools to express it, they develop strategies related to mental models that are based on numerical manipulations to reduce the complexity. Also the mental models that underlie in the algebraic resolutions are analyzed, their possible relations with the numerical models are discussed, it is investigated how the mental models –built in the work memory– serve as a bridge to extract knowledge of higher order, permitting the elaboration of most stable representations than would be able to impact in the plans of the subject (Schwartz & Moore, 1998; Moreira 2002; Border and Moreira, 2002). Besides, some implications for the teaching and research in mathematics education are discussed.

- **KEY WORDS:** Mental model, numerical mental model, mathematics teaching.

RESUMO

Neste trabalho é realizado um estudo exploratório transversal (N=25) com estudantes de ensino fundamental e médio (12 a 18 anos de idade), com a finalidade de analisar as estratégias utilizadas e os modelos mentais subjacentes quando eles enfrentam uma situação matemática problemática, na medida em que não possuem esquemas eficientes. São adotadas as noções de representação mental e de modelo mental propostas por Johnson-Laird (1983, 1990, 1996), assim como a idéia de modelo mental numérico, elaborada por Schwartz & Moore (1998). Os dados mostram que quando estes estudantes concebem a situação como um problema e não podem utilizar eficientemente ferramentas algébricas para expressá-la, desenvolvem estratégias relacionadas com modelos mentais que se baseiam em manipulações numéricas para reduzir a complexidade. Também são analisados os modelos mentais que estão implícitos nas resoluções algébricas, e são discutidas suas possíveis relações com os modelos numéricos e é questionado como os modelos mentais –construídos na memória de trabalho– servem como ponte para extrair conhecimento de ordem maior, permitindo a elaboração de representações mais estáveis que poderiam incidir nos esquemas do sujeito (Schwartz & Moore, 1998; Moreira 2002; Greca y Moreira, 2002). Além disso são analisadas algumas implicações para o ensino e a investigação em Educação Matemática.

- **PALAVRAS CHAVE**: Modelo mental, modelo mental numérico, ensino de matemática.

RÉSUMÉ

Dans ce travail, une étude exploratoire transversale (N=25) se réalise à des étudiants de l'enseignement moyen (12 à 18 ans) afin d'analyser les stratégies utilisées et les modèles mentaux sous-jacents lorsqu'ils se trouvent face à une situation mathématique problématique, dans la mesure qu'ils ne disposent pas de schémas efficaces. Les notions de représentation mentale et de modèle mental proposés par Johnson-Laird (1983-1990-1996) sont adoptées, ainsi que l'idée de modèle mental numérique, élaboré par Schwartz & Moore (1998). Les données montrent que lorsque ces étudiants conçoivent la situation comme un problème et/ou ne peuvent pas utiliser de façon efficace les outils algébriques pour l'exprimer, ils développent des stratégies en rapport avec des modèles mentaux qui sont fondé dans les manipulations numériques ayant pour objectif de réduire la complexité. Les modèles mentaux sous-jacents des résolutions algébriques sont aussi analysés, et leurs possibles relations avec les modèles numériques, discutées ; ainsi qu'un approfondissement est effectué sur la façon dont les modèles mentaux –construits dans la mémoire du travail- fonctionnent comme liaison pour obtenir de représentations plus stables qui pourraient avoir une incidence dans les schémas du sujet (Schwartz & Moore, 1998 ; Moreira, 2002 ; Greca et Moreira, 2002). De plus, quelques implications pour l'enseignement et la recherche dans l'Éducation Mathématique sont discutées.

- **MOTS CLÉS**: Modèle mental, Modèle mental numérique, enseignement de la mathématique.

I. Modelos mentales y modelos numéricos

¿Cómo enfrentan los alumnos de la escuela media una situación problemática en matemática que -entre otras formas posibles- admite un planteo y solución algebraica? ¿Qué técnicas de resolución ponen en juego y cómo deciden acerca de su utilización? ¿Guardan tales estrategias alguna relación con su edad o con la escolarización? Durante mucho tiempo se ha considerado que, cuando las personas se enfrentan a una situación matemática, primero entienden su estructura y luego eligen qué herramientas usar, como si la situación se interpretara primero idealmente con un esquema cualitativo, el cual a su vez determina los procedimientos que aplican (Schwartz & Moore, 1998). Aunque tal forma de ejecución es una alternativa posible, no necesariamente sucede así, sobre todo cuando el sujeto no dispone de un esquema eficiente para resolver una situación problemática que percibe como nueva. El propósito de este trabajo es describir cómo se usan ciertos conocimientos matemáticos para comprender y cómo se les emplea para construir modelos mentales que ayudan a tornar cognitivamente manejable una situación compleja.

¿Qué son los modelos mentales? ¿Cuándo y para qué se utilizan? ¿Cuál es su papel en el funcionamiento cognitivo? En principio, cabe señalar que el término modelo mental es polisémico, de ahí que varias posturas cognitivas aludan a él. En este trabajo se adoptan las concepciones representación mental y modelo mental, formuladas por Johnson-Laird (1983), quien establece que los modelos mentales son representaciones internas de carácter analógico construidas en la memoria de trabajo y juegan un papel decisivo en los procesos de comprensión, inferencia y predicción. Johnson-Laird dice que el punto central de la comprensión es la existencia de un *working model* en la mente de quien comprende; por tanto, todo nuestro conocimiento del mundo dependería de nuestra capacidad para construir modelos mentales, que nos permiten interpretar y evaluar el discurso de otros y las propias proposiciones como verdaderas o falsas.

Los modelos mentales se pueden elaborar como producto de la percepción, del discurso, de la interacción social o de la experiencia interna del sujeto. Debido a que disponemos de una capacidad limitada de almacenamiento y de que, por su carácter finito, el funcionamiento cognitivo se rige por un principio de economía, construimos modelos mentales que derivan de un número pequeño de elementos, propiedades y operaciones recursivas sobre tales componentes. Ahora bien, las restricciones para la construcción de esos modelos dependen de cómo concebimos la estructura del mundo, de las relaciones conceptuales que gobiernan la ontología de lo real y de la necesidad de mantener el sistema libre de contradicciones. Los modelos no sólo representan al mundo, sino también situaciones verdaderas para el sujeto, ya sean reales o imaginarias (Johnson-Laird, 1983, p. 430).

Johnson-Laird (1983,1996) establece y fundamenta la existencia de un triple código representacional, conformado por proposiciones, imágenes y modelos mentales. Estas tres clases tienen diferencias estructurales y funcionales, pero los modelos mentales serían un constructo intermedio entre la representación proposicional y la analógica, ya que poseen propiedades comunes con los otros dos tipos de representación, de modo que un modelo mental puede contener proposiciones e imágenes.

Una proposición mental es una representación interna que puede ser expresada verbalmente. Comprender una proposición es saber cómo sería el mundo si fuese verdadera, mientras que su interpretación y evaluación se realizan a través de los modelos mentales. Las representaciones proposicionales son indeterminadas, abstractas y generales, es decir, equivalentes para diferentes estados de un mismo suceso. Por ejemplo, una que refiera la expresión «un hombre repartió una suma de dinero entre sus hijos» será independiente de que sean muchos o pocos hijos, de que se trate de dólares o euros, de billetes o monedas, de que el hombre sea viejo o joven, etc. Tales representaciones tienen alguna estructura de argumento de predicados, en algún léxico sintáctico desconocido, que captura la información explícita de aserciones verbales y otras elocuciones (Johnson Laird, 1996, p 93).

Según Johnson-Laird, el razonamiento y el proceso de inferencia no pueden ser explicados sólo con representaciones proposicionales, ya que se necesitan adoptar tanto teorías de reglas de inferencia como una cantidad ilimitada de postulados de significado. Empero, dichas teorías no pueden aclarar los errores lógicos que las personas cometen cuando razonan; además, el número de reglas y proposiciones necesarias para dar cuenta de un razonamiento silogístico simple resultaría tan grande, que sería preciso tener una capacidad ilimitada de memoria, la cual no poseemos. La teoría de Johnson-Laird señala que los modelos mentales de naturaleza analógica son la base de nuestros razonamientos lógicos, y permiten hacer inferencias y representar relaciones generales de una manera específica y económica para el sistema cognitivo porque, aunque son limitados y finitos, ofrecen una capacidad ilimitada de representación debido a que pueden revisarse recursivamente (Otero y Banks, 1998 y Otero, 1999).

A diferencia de las proposiciones, los modelos mentales son altamente específicos. Por ejemplo, no se puede generar un modelo mental de un triángulo en general, sólo de uno específico. Como representan entidades específicas, no tienen una determinada estructura sintáctica, pero sí una que desempeña un papel representacional directo, ya que es análoga al correspondiente estado de cosas del mundo. De este modo, los modelos mentales son análogos estructurales del estado de cosas del mundo, según su constructor lo percibe o concibe (Johnson Laird, 1983, p 156); asimismo, guardan cierto grado de homomorfismo con las situaciones que les dan origen, pudiendo incluir varios grados de estructura analógica y ser completamente analógicos, o parcialmente analógicos y parcialmente proposicionales. Aunque los modelos y las imágenes mentales son representaciones de tipo analógico altamente específicas, una diferencia sustantiva entre ambos es que no se puede razonar sólo con imágenes ni es posible representar mediante ellas relaciones abstractas como la causalidad y la negación, lo cual conduce a la necesidad de la existencia de los tres tipos de representación mental.

Cuando alguien comprende un problema se basa en informaciones, percepciones y representaciones vinculadas al hecho en sí, al contexto o situación en la que tiene lugar y a lo que se denominaría *presupuestos cognitivos personales con relación al problema*, los cuales orientan la recuperación de representaciones de la memoria para construir un modelo mental de la situación (Van Dijk, 1992). Así, el proceso de comprensión resulta estratégico porque no tiene ninguna garantía de éxito; en este sentido, no es posible hablar de la comprensión «correcta». Los modelos mentales y las representaciones que se construyen como parte del proceso de comprensión no necesariamente son adecuados desde el punto de vista científico; más bien resultan incompletos, dependiendo cuáles elementos, relaciones y propiedades sean considerados relevantes por el constructor y cuáles funcionales a la manera en que concibe o percibe la situación. Esto revela parcialmente porqué es tan difícil lograr que los estudiantes elaboren representaciones mentales adecuadas para comprender los conceptos científicos.

La investigación cognitiva ha refinado la descripción de ciertos tipos de modelo, haciendo énfasis, por ejemplo, en la propiedad de especificidad. Tal es el caso de los modelos cuantitativos o numéricos propuestos por Schwartz & Black (1996), quienes establecen que un modelo mental se construye *on-line* para representar un estado de situación especifico. Ellos afirman que, si bien los modelos incluyen información relacional, también requieren de instancias específicas que permiten modelizar un problema numéricamente para contribuir a la extracción de conclusiones generales. Además, consideran que la construcción de modelos específicos provee la base para hacer esquemas más abstractos, que se almacenan en la memoria de largo plazo; como los modelos mentales se construyen en la memoria de trabajo, cuando en una situación se formulan restricciones de manera específica se alivia la demanda de la memoria y, en consecuencia, las herramientas numéricas pueden ayudar en la elaboración del modelo.

II. Diseño de la investigación y contexto

La mayor parte de las investigaciones que emplean como marco teórico a los modelos mentales en educación utilizan protocolos verbales o documentos como diseños, esquemas, soluciones de problemas y mapas conceptuales que producen los sujetos investigados mediante entrevistas o tareas instruccionales. Esto resulta consistente con el hecho de que *los modelos mentales están en la cabeza de las personas y la única manera de investigarlos es a través de lo que ellas* *exteriorizan verbalmente, simbólicamente o pictóricamente* (Moreira, 1997). Sin embargo, como los modelos se ejecutan y evalúan recursivamente, son imperfectos, incompletos y difusos, de ahí que sean un objeto complicado para el investigador.

Este trabajo asume un enfoque de indagación cualitativo, donde la técnica principal es la entrevista clínica, precedida por una prueba de lápiz y papel. Con anterioridad se hizo un estudio exploratorio (Otero, Papini y Elichiribehety, 1998), a partir del cual obtuvimos información para estructurar las entrevistas y orientar el análisis y categorización posterior. Un aspecto metodológico importante fue la adopción de una perspectiva genética porque nos interesaba analizar el funcionamiento cognitivo en diferentes momentos de la escolaridad con respecto a un mismo problema, razón por la cual se implementó un estudio transversal que permitiera explorar las modificaciones, en caso de que las hubiera. Como el estudio se circunscribía a las representaciones mentales que un estudiante emplea para resolver un problema y que son inobservables, sólo tuvimos acceso a ellas de manera indirecta.

Las preguntas que orientaron la indagación fueron las siguientes:

a) ¿Cuáles son las características de los modelos mentales que subyacen en las diferentes formas de resolución del problema?

b) ¿Se encuentran diferencias en los modelos mentales según el año escolar al que pertenece el sujeto?

c) ¿Qué implicaciones pueden realizarse para la enseñanza y la investigación en educación matemática?

Se llevó a cabo un estudio transversal que abarcó toda la escolaridad secundaria[3], analizando la manera en que un grupo de alumnos resolvía una misma situación matemática que admitía, entre otras soluciones, las basadas en técnicas algebraicas. Cada estudiante resolvió la tarea en forma individual (en un tiempo máximo de una hora) y luego se hizo una entrevista (cuya duración máxima fue de 30 minutos) en la que el sujeto explicó su solución y visión del problema, mientras se obtenían registros grabados en cintas de audio de cada una.

Los alumnos con quienes se hizo el estudio asisten a una escuela secundaria pública de la ciudad de Tandil, que cuenta con seis divisiones en cada año de escolaridad y atiende a una población de sectores sociales medios. Se integraron cinco grupos con estudiantes que estuvieran aprobando la asignatura de Matemáticas (cuya calificación fuese de siete o más); a partir de cada uno de esos cinco subconjuntos se obtuvieron al azar cinco estudiantes, con lo cual surgió un conjunto de 25 sujetos. Cada uno recibió el problema de la siguiente forma:

---

3 En el momento en que se tomaron los datos todavía no se había implementado la Reforma Educativa, razón por la cual adoptamos la denominación de los años escolares previa a dicha situación: Primero, Segundo, Tercero, Cuarto y Quinto Año de Enseñanza Media. En la actualidad, dichos años corresponderían a Octavo y Noveno de Educación General Básica, y Primero, Segundo y Tercero Polimodal, respectivamente.

Un hombre distribuyó una suma de dinero entre sus hijos de la siguiente manera: al mayor le dio 1000 pesos más 1/10 de lo que le restaba, luego le dio 2000 al segundo más 1/10 del restante, al tercero le dio 3000 más 1/10 de lo que en ese momento quedaba y así siguiendo hasta llegar al último hijo. Hecho esto, cada hijo recibió la misma cantidad de dinero. ¿Cuántos hijos tiene el hombre y cuánto dinero repartió?

Se solicitó a los estudiantes que escribieran la resolución completa en la hoja (aun los cálculos), insistiendo en que nuestro interés era conocer cómo se enfrentaban al problema, más allá del resultado. En la instancia escrita no hubo ninguna otra interacción entre los sujetos y el investigador.

III. Análisis de algunas soluciones posibles al problema

Este problema aparece en el libro *3500 ejercicios de álgebra. Primer Curso*, editado en 1960 para el ciclo básico común del Bachillerato, Magisterio y Escuelas de Comercio. Dicho volumen, que tipifica los ejercicios y problemas, se refiere a éste y a otros de estructura similar en el capítulo Problemas de primer grado con una incógnita como «Problemas que se resuelven haciendo sucesivamente las operaciones indicadas en él» (1960, p. 126). Esta clase de problema no se encuentra en los textos para la educación media correspondientes a la década 1990-2000, tampoco en los de la década precedente ni en los libros escolares actuales, originados a partir de la Reforma Educativa. La forma en que el problema es clasificado resulta funcional para una postura epistemológica que sustenta la concepción dominante del álgebra escolar, de la cual deriva una técnica de resolución basada en la traducción del lenguaje verbal al algebraico, en la medida en que los problemas parecen formulados para la adquisición de tal procedimiento. Esta manera de proceder instala un *saber hacer* que enfatiza las prácticas de traducción literal propias de la concepción del álgebra escolar[4] como generalización aritmética.

¿Por qué decidimos presentar esta situación a los estudiantes? En primer lugar, debido a que nuestra investigación sobre las actividades escolares y los problemas que se suelen abordar indicó que los sujetos no la encontrarían familiar, aunque una solución «típica»suponga el uso de conocimientos de álgebra escolar (Bolea, Bosch y Gascón, 2001). En segundo, considerábamos que la construcción de un modelo mental adecuado podía ser inhibida por el número importante de elementos y relaciones a tomar en cuenta, sobre todo cuando no se disponen de técnicas algebraicas que proveen instrumentos poderosos y una ganancia muy grande en simplicidad y memoria. Fundamentalmente, anticipábamos que los sujetos más pequeños tendrían serias dificultades para resolver, inclusive a partir de soluciones numéricas, como las que hicieron durante el estudio exploratorio los alumnos de Quinto Año de Enseñanza Media. En tercero, el problema permite

4 En este trabajo, la noción de *álgebra escolar* debe interpretarse *como «aritmética generalizada"* en el sentido formulado por los trabajos de Bolea, Gascón y Bosch, donde se considera la forma actualmente instalada en las prácticas docentes y la necesidad de elaborar una concepción alternativa a partir de la cual se redefina lo que se denomina la enseñanza y el aprendizaje del álgebra.

investigar el papel de los modelos mentales en las actividades de modelización y la forma en que vinculan el conocimiento esquemático y el situacional.

Una resolución algebraica típica del problema –en el sentido escolar–, se presentaría así:

Resolución Algebraica Típica (RAT)

$$H_1 = 1000 + \frac{1}{10}(x - 1000) \; ; \; H_2 = 2000 + \frac{1}{10}\left\{x - 2000 - \left[1000 + \frac{1}{10}(x - 100)\right]\right\}$$

como $H_1 = H_2$,resolviendo adecuadamente se obtiene que

$x = 81000 \quad H_1 = H_2 = 9000$ y $h = \frac{x}{H_1} = 9$.

Es decir, el hombre repartió 81 000 pesos, tenía nueve hijos y cada uno de ellos recibió 9000 pesos.

Esta forma se centra en la cantidad total de dinero e identifica la resolución con la obtención de ciertas cantidades numéricas, como lo que recibe cada hijo y el total de ellos. Por otro lado, se acepta (sin verbalizar y luego sin escribir ni explorar) que si el reparto es equitativo y si se distribuye totalmente el dinero hasta terminar con todos los hijos, entonces el total es divisible por el monto que recibe cada uno. Dichas asunciones podrían derivarse de las condiciones iniciales o generar otras formas de reparto, variando esas condiciones.

Otra posible solución, más interesante en términos del uso de técnicas algebraicas y de su potencial modelizador, puede presentarse como sigue:

Resolución Algebraica basada en los Restos (RAR)

(1) $H_1 = 1000 + \frac{1}{10}R_1 = 1000 + \frac{1}{10}(x - 1000)$, siendo $R_1 = x - 1000$ (2)

(3) $H_2 = 2000 + \frac{1}{10}R_2 = 2000 + \frac{1}{10}(x - 2000 - H_1)$ con $R_2 = x - 2000 - H_1$ (4)

igualando $H_1 = H_2$ se obtiene $1000 + \frac{1}{10}R_1 = 2000 + \frac{1}{10}R_2 \Rightarrow R_1 - R_2 = 1000$ (5)

a partir de (2) (4) y (5) $x - 1000 - x + 2000 + H_1 = 10000 \Rightarrow H_1 = 9000$

y reemplazando en (1) $x = 81000$ y por (2) y (4) $R_1 = 80000$ y $R_2 = 70000$; como se reparte en partes iguales el total, se tiene que son nueve hijos.

Al adoptar como incógnita la cantidad que recibe el primer hijo se obtienen ecuaciones más sencillas. Además, al trabajar primero con los restos en lugar de la cantidad total a repartir se economizan operaciones y se evidencian aspectos de la situación que no surgen directamente en la resolución típica. Por otro lado, los valores de los restos sucesivos conducen a que el dinero disponible al cabo de cada nuevo reparto sería 81000, 72000, 63000, 54000, etc.

Otra forma posible de plantear la situación para tres o más hijos sería:

Resolución Algebraica formulando más de dos Hijos (RAH)

(1) $H_1 = 1000 + \frac{1}{10} R_1 = 1000 + \frac{1}{10}(x - 1000)$, siendo $R_1 = x - 1000$ (2)

(3) $H_2 = 2000 + \frac{1}{10} R_2 = 2000 + \frac{1}{10}(x - 2000 - H_1)$ con $R_2 = x - 2000 - H_1$ (4)

(5) $H_3 = 3000 + \frac{1}{10} R_3 = 3000 + \frac{1}{10}(x - 3000 - 2H_1)$ con $R_3 = x - 3000 - 2H_1$ (6)

$H_1 = H_2 = H_3 = ... = H_{K-1} = H_K \Rightarrow x = kH_k$ (7)

igualando $H_3 = H_2$ se obtiene que $R_2 - R_3 = 10000$ y con (6) y (4)

$10000 = x - 2000 - H_1 - x + 3000 + 2H_1 \Rightarrow H_1 = 9000 \Rightarrow H_K = 9000$

a partir de (1) $9000 = 1000 + \frac{1}{10}(x - 1000)$, de donde se obtiene que $x = 81000$

por (7) $x = kH_k$ entonces $k = \frac{x}{H_k} = 9$

si se considera el *k-ésimo* hijo $H_k = 1000k + \frac{1}{10} R_k \Rightarrow 9000 = 1000 \times 9 + \frac{1}{10} R_k \Rightarrow R_k = 0$

Es decir, el dinero se reparte totalmente cuando se llegó al último hijo, a partir de lo cual se tiene que $H_k = 1000k$ y también que $x = kH_k = k^2 1000$. Tal procedimiento destaca que la solución puede ser obtenida a partir de igualar las expresiones para cualquier par de hijos consecutivos y plantea una generalidad mayor, restringida a las condiciones del problema, desde las cuales se deriva el comportamiento de la sucesión de los restos. Esta forma de abordar la solución no estaría íntegramente al alcance de los medios de los estudiantes, de acuerdo con las características que asume el tratamiento escolar de los problemas que admiten un planteo algebraico.

Finalmente, al solo efecto de considerar la potencialidad que ofrece el problema, consideremos que si se llama x al dinero a repartir y a es una cantidad positiva, puede escribirse de manera más general esta situación, instaurando la condición de que todos los hijos reciben lo mismo como una de las posibles alternativas de reparto.

Si $n \rangle 1$, $n \in N \wedge x$, $c \in R^+$, entonces puede plantearse una forma de reparto como la siguiente: $H_1 = a + \frac{1}{n}(x - a)$ con $k = 1$ y también $H_1 = \frac{x + (n-1)a}{n}$ (1)

$H_2 = 2a + \frac{1}{n}(x - 2a - H_1)$ con $k = 2$ y que puede expresarse como $H_2 = \frac{2an^2 + (n-1)x - a(3n-1)}{n^2}$ (2)

$H_{k-1} = (k-1)a + \frac{1}{n}\left[x - (k-1)a - (k-2)H_1\right]$ para $k - 1$ (3)

$H_k = ka + \frac{1}{n}\left[x - ka - (k-1)H_1\right]$ (4),siendo k el número total de hijos.

Como $H_1 = H_2 = H_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots H_{K-1} = H_k \Rightarrow x = kH_k$ (5), si k es el total de hijos, igualando (3) y (4), se obtiene que (6) $H_1 = a(n-1)$, y como $n \in N$, entonces lo que recibe cada hijo es múltiplo de a y $x = kH_k = ka(n-1)$ (6); como en particular por (5) $H_1 = H_k$ igualando se obtiene que $x = a(n-1)^2$ (7).

A partir de (6) y (7), se obtiene que $k = n-1$, es decir, el número de hijos queda determinado por las partes que se tomen al repartir según las condiciones asumidas.

Además, si en (4) llamamos $R_k = \left[x - ka - (k-1)H_1\right]$ y sustituimos $k = n-1$, obtenemos que para el último hijo resulta $R_k = 0$,y en consecuencia $H_k = ka$.

Se advierte que, si se acepta la regla de reparto equitativo, las fracciones de los restos fijan el número de hijos y también el total del dinero (dado por un cierto valor de a), de lo cual también se deriva que el dinero se reparte íntegramente. También se aprecia que es suficiente plantear la igualdad para el primer y el segundo hijo para obtener la solución –aún generalizada–, y lo mismo ocurre con dos hijos consecutivos cualesquiera. Además, resulta evidente que hay otras formas de reparto que podrían explorarse, así como sus condiciones de posibilidad; tal $x = kH_k = ka(n-1)$ actividad podría realizarse tanto con técnicas algebraicas como con aritméticas.

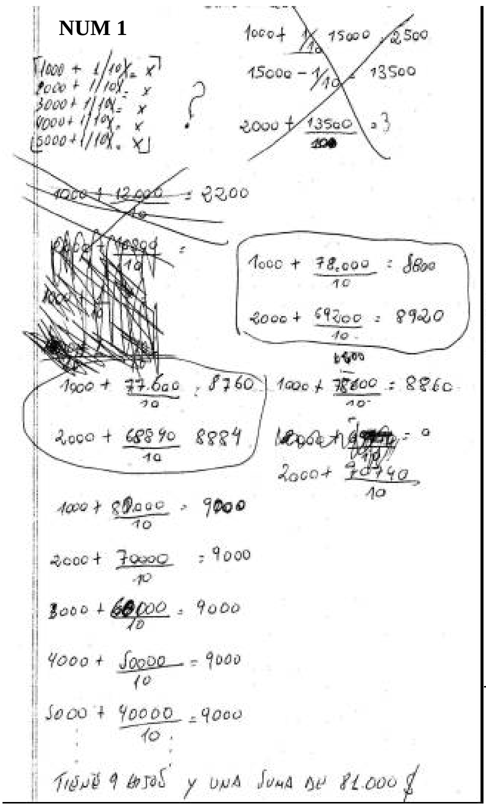
El problema elegido no sería rutinario para los alumnos; de acuerdo con su año escolar, disponen de medios diferentes para hallar la solución y estudiar o no sus condiciones de posibilidad y existencia. Para nuestra investigación, es relevante que el problema presente un número importante de elementos desconocidos, los cuales parecen complicar seriamente la posibilidad de obtener una solución numérica, y mucho más compleja aún resulta una solución verbal, es decir, una estrategia que no utilice registros escritos. Por otro lado, tanto desde nuestro marco teórico como desde los resultados de los estudios exploratorios previos, anticipábamos que los alumnos buscarían por lo menos formas numéricas de resolución.

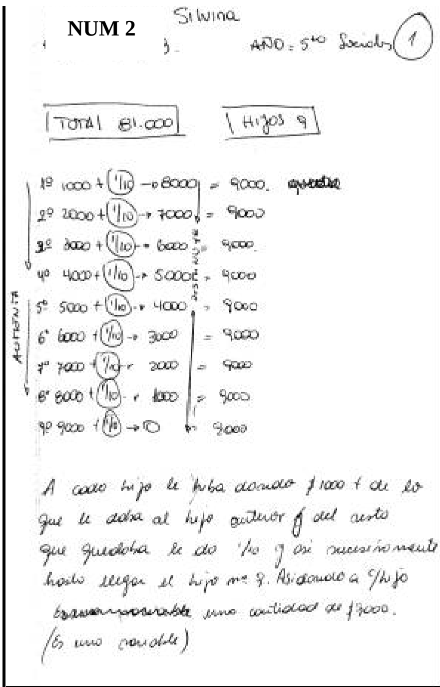
Desde las investigaciones didácticas, aunque relativas a problemas mucho más sencillos (Coulange, 2001), las estrategias numéricas o aritmético-numéricas suelen calificarse como formas de aproximación por “tanteo”. Desde una visión cognitiva, son indicadores de la construcción de modelos mentales numéricos, altamente específicos, que se generan para reducir la complejidad del problema mediante una heurística basada en operaciones elementales y en ciertas relaciones de partida, desde las que se evalúan los resultados. Algunas resoluciones numéricas completas se parecen a ciertas técnicas de modelización de la aritmética tradicional que encontró Bosch (1994) en los antiguos manuales para la formación de maestros, las cuales pueden adoptar una forma enteramente verbal, razón por la que se las suele llamar *pre-algebraicas*.

El análisis de las características de la enseñanza de la aritmética y del álgebra escolar recibida por nuestros sujetos no presenta ni acepta como válidos a los procedimientos analíticos de la aritmética, en la resolución de problemas que admiten un planteo algebraico. Pero cabe preguntarse: ¿cómo surgen las estrategias numéricas? Al parecer, derivan de los intentos por resolver y comprender una situación problemática, y están basados en la capacidad estructural de nuestro funcionamiento cognitivo para construir modelos mentales específicos; en este caso, a partir del conocimiento matemático elemental y del situacional disponible.

A continuación, presentamos algunos protocolos que corresponden a los procedimientos numéricos identificados en un estudio exploratorio anterior (Otero, Papini y Elichiribehety, 1998), los cuales se interpretan como evidencia indirecta de la ejecución de un modelo mental numérico.

De acuerdo con el punto de partida del sujeto, se han hallado dos tipos de heurísticas. Una parte de la pregunta *¿cuál es el total del dinero a repartir?*, y comienza por una cantidad que se aproxima, empleando la condición referida al monto que recibe cada hijo –1000, 2000, etc, más la décima parte de lo que queda–; una vez comprendidas las operaciones involucradas se ajusta recursivamente el valor inicial, buscando que coincidan las cantidades para los dos primeros hijos. Con relación a esta heurística –a la que denominaremos NUM 1–, algunos sujetos emplean ciertas relaciones que les sirve como apoyo para aproximarse a la cantidad buscada (por ejemplo, argumentan que los cuatro últimos dígitos del total tienen que ser mil para que el primer resto sea múltiplo de diez mil, y de manera similar aplican esta idea al segundo resto, luego de restarle dos mil, y así continúan).





La segunda heurística numérica –a la que llamaremos NUM 2– está centrada en la búsqueda de la cantidad que recibe cada hijo. Si se usa la condición invariante de dicha cantidad y su expresión como suma de un número que aumenta de mil en mil, se infiere que el otro debe decrecer en mil para conservar la igualdad. Además, como todos los hijos reciben lo mismo y se supone que queda repartido íntegramente el total, para el último hijo la segunda cantidad tendrá que valer cero; cuando esto sucede, el sujeto infiere el número de hijos según las veces que ha repetido el procedimiento.

Como las anteriores son sólo condiciones necesarias, todavía resta considerar que se verifique la relación *mil más un décimo de lo que queda*. Los sujetos parecen resolver a partir de modelos mentales que contienen relaciones específicamente representadas con números (tomar restos cuya diferencia es diez mil) y proposiciones tales como que los dos primeros hijos tienen que recibir lo mismo. A continuación, presentamos un extracto del protocolo de José, de 17 años (que también obtuvimos en el estudio exploratorio). Su resolución ha sido formulada en un discurso verbal, diferente de las dos anteriores –en las que se emplean símbolos aritméticos y números–; de igual manera, presentar un carácter más analítico y justificado que guarda cierta similitud con las estrategias de la aritmética tradicional mencionadas anteriormente.

> "*Si la diferencia de lo que le da a su respectivo hijo es de* 1000*, la diferencia entre la* 1/10 *parte de lo que resta también será mil. O sea, Juan recibe* 1000 *y Daniel* 2000*, pero Juan además recibe* 1000 *más que Daniel, por lo que le corresponde de* 1/10 *del resto.*
>
> *Para que el reparto sea justo, debo tener en cuenta que cuando se [...]* 1/10 *del resto; ese resto debería tener por los menos las últimas* 4 *cifras cero.*
>
> *Tengo que probar con números terminados en* 1000 *porque al primero le doy* 1000*; entonces en el resto me quedan las últimas cuatro cifras con cero.*
>
> *Probé con* 31 000 *y me da una diferencia de* 500*. Probé con* 41 000 *y me da una diferencia de* 400*. Por lo tanto con* 51 000 *la diferencia será* 300*, con* 61 000 *será* 200*, con* 71000 *será* 100*; por lo tanto la cantidad de dinero a repartir es* 81000*. Al pagarle al primero* 1000 *más* 1/10 *del resto, le paga en total* 9000*.*
>
> *Así que si tiene* 81 000*, y a cada hijo le corresponde* 9000*; tiene* 9 *hijos."*

La resolución de José muestra que tiene una comprensión adecuada y profunda del problema. Interpretamos que ha construido un modelo mental numérico porque, aunque ha enunciado las relaciones verbalmente, también las ha especificado numéricamente mediante cálculos. En el segundo párrafo de su discurso utiliza la igualdad entre las cantidades que recibe cada hijo sin simbolizarla, lo cual evidencia que el modelo captó la estructura de la situación y los aspectos esenciales para hallar una solución, que fueron comentados. La especificidad del modelo mental subyacente se evidencia también en el empleo de nombres propios para denotar al primer y al segundo hijo, así como en los cálculos numéricos que buscan cómo reducir a cero las diferencias entre ellos.

IV. Las resoluciones en cada año escolar y los modelos mentales que subyacen en ellas

Primer Año

Según nuestro marco teórico, las personas construyen modelos mentales cuando enfrentan un problema porque les permiten comprender y obtener una representación cognitivamente manejable de la situación que enfrentan. Una situación es problemática para cierta persona cuando no dispone de esquemas eficientes con los que pueda obtener una respuesta de manera relativamente inmediata (el sentido de *disponible* está relacionado con el de cierto grado de automaticidad y familiaridad).

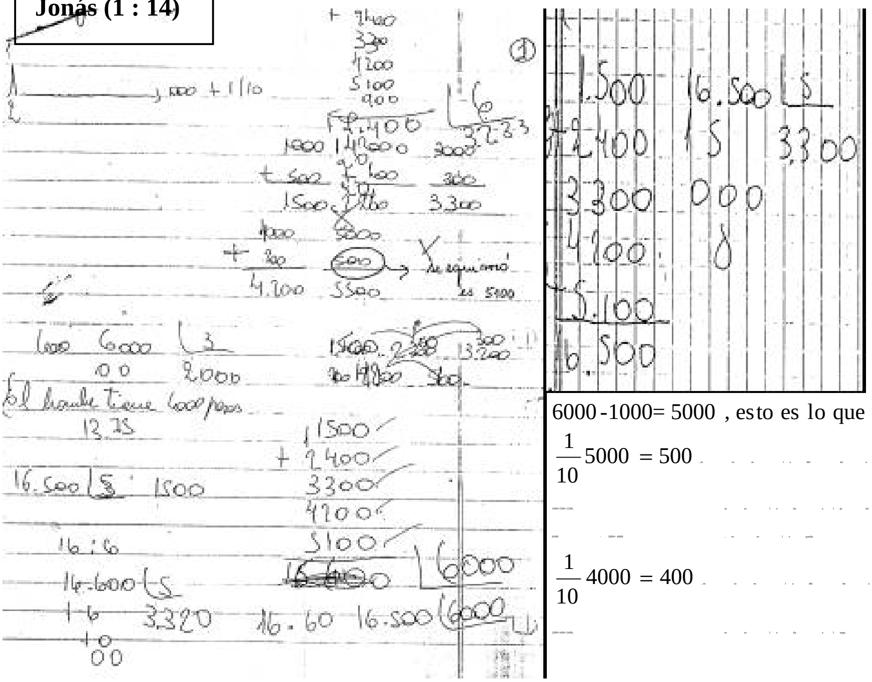
Por tanto, el hecho de que los sujetos estudiados manifiesten, durante las entrevistas, la necesidad de reducir el número de incógnitas del problema es coherente con la visión teórica asumida en nuestra investigación. Sin embargo, también hemos señalado que, cuanto mayor es la complejidad y el número de relaciones que se requieren sostener en la memoria de trabajo, o cuando hay demasiados elementos indeterminados o ambiguos para el sujeto, mayores serán las dificultades para que construya un modelo mental y, sobre todo, aun cuando alguna construcción tenga lugar, más difícil será que resulte adecuada.

El protocolo de Jonás (1 : 14) muestra los rasgos centrales de las resoluciones encontradas en Primer Año y de los modelos mentales numéricos subyacentes. Para reducir el número de cantidades desconocidas, Jonás intenta "fijar" inicialmente el total de dinero que hay que repartir y ejecuta un modelo numérico del tipo NUM1. Como aproximación inicial, supone que la herencia es de seis mil pesos -resultado que obtiene al sumar los tres números mencionados en el enunciado- y así establece indirectamente que son tres hijos. Los números que hace intervenir se relacionan con el hecho de que los modelos mentales se construyen por la percepción, dentro de la cual se incluye también la que concierne al discurso.

Tras varias revisiones recursivas, como los resultados no satisfacen a Jonás, modifica el modelo y supone que son seis mil pesos, pero que el padre tenía cinco hijos. Calcula nuevamente cuánto le toca a cada uno, usando la relación 1000 + 1/10 *de lo que queda* como una manera de comprender las implicaciones de esa relación. De este modo prosigue su revisión, desestimando las suposiciones efectuadas inicialmente y reemplazándolas por otras, hasta que decide terminar, sin que esto implique que logre respuestas correctas.

Según Johnson-Laird, la revisión recursiva se detiene cuando el sujeto está *inferencialmente satisfecho*, lo cual se traduce en que no encuentra ningún modelo alternativo que pueda dar cuenta de la situación como él la percibe o concibe. Jonás interpreta la cantidad que queda siempre con relación a seis mil; así, obtendrá unos montos para los hijos que cumplen sólo en parte las relaciones del problema. Debido a su dificultad para considerar más relaciones y para tomar en cuenta lo que ya había entregado al hacer el cálculo, recorta el enunciado y trabaja con una parte de la información, ejecutando un modelo mental incompleto.

Jonás (1 : 14)

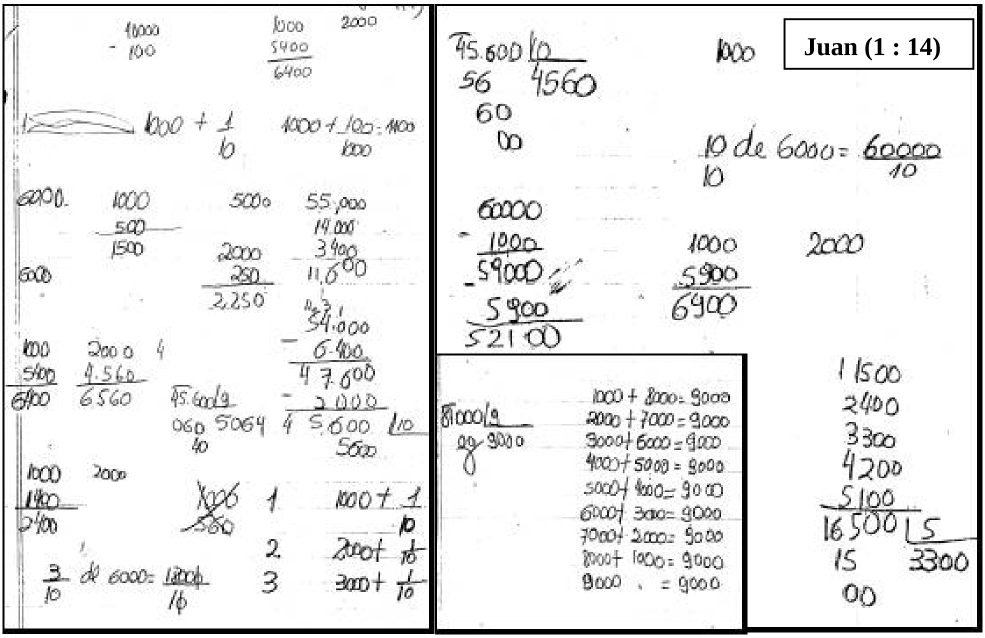


6000 - 1000 = 5000 , esto es lo que le queda

$\frac{1}{10}5000 = 500$

$\frac{1}{10}4000 = 400$

Juan (1 : 14)



El protocolo de Juan (1 : 14) da una versión más completa de la estrategia NUM 1, ya que compara entre una y otra ejecución recursiva y toma en cuenta los restos de manera correcta. Juan parece capaz de controlar al mismo tiempo más relaciones. Empieza con un número (el cual surge de sumar todos los valores que componen la primera parte de lo que le toca a cada hijo) y sabe que son más de tres hijos. Para aproximar el total, se observa en el protocolo que prueba hasta con 10 hijos, de lo cual surge un total de $55 000, que divide entre el correspondiente número de hijos y verifica la relación *1000+1/10 de lo que queda*, esperando que coincidan el resultado de la división y el de aplicar la condición.

En síntesis, en los casos analizados en Primer Año los modelos mentales numéricos subyacentes son incompletos y no conducen a la solución correcta. De acuerdo con nuestro marco teórico, al percibir una situación como nueva, los estudiantes no establecen a priori las características cualitativas del problema y luego definen las herramientas que van a emplear. Por el contrario, desarrollan una heurística de resolución numérica e inductiva que les va proporcionando una comprensión del enunciado –a la cual podríamos denominar a posteriori– y la ajustan en función de los resultados. Los modelos mentales son representaciones muy inestables que se construyen en la memoria de trabajo y permanecen activadas por tiempos muy cortos. Su función sería mediar o enlazar los conceptos incluidos en los esquemas del sujeto con la información situacional

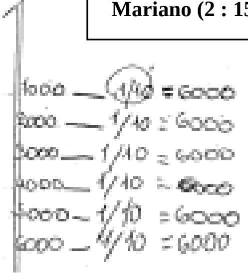
Los modelos mentales cuantitativos permitirían representar las relaciones del problema de un modo económico para el sistema cognitivo, estableciendo una manera particular de manejar lo general. Así, se ha visto cómo a partir de un conjunto finito y específico de números se representan los vínculos del problema que son relevantes para el sujeto; cada nueva ejecución particular del modelo permite representar un conjunto infinito de estados posibles por revisión recursiva. Luego de sucesivas revisiones, parece que Juan consigue extraer relaciones encapsuladas en el modelo numérico, ya que cuando en la entrevista se le proporcionó el resultado 81 000, escribió inmediatamente las relaciones que se encuentran en el recuadro pequeño.

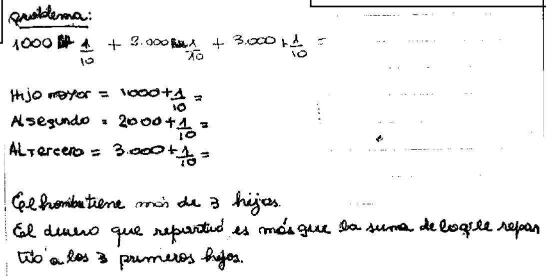
Segundo Año

Las estrategias utilizadas por los sujetos de Segundo Año son similares a las que acabamos de describir para Primer Año, aunque parece que ellos dependen menos de los valores numéricos mencionados en el enunciado. Las entrevistas indican que están preocupados por comprender porqué todos los hijos reciben lo mismo, ya que desde su concepción la manera en que se constituyen los montos asignados es incapaz de garantizar la igualdad del reparto. Por ejemplo, insisten en señalar que, si bien el enunciado habla de tres hijos, en realidad son más; adoptan una actitud más reflexiva que interfiere en sus intentos de solución, lo cual genera protocolos con poco nivel de claridad.

Guadalupe (2 : 15)

Mariano (2 : 15)





A continuación, se presenta parte de la entrevista que se le hizo a Mariano (2 : 15).

- -E: ¿Qué otra cosa pensaste?
- -M*:* Que el hombre no tenía solamente tres hijos; tenía más...
- -E: ¿Cómo te diste cuenta?
- -M*:* Porque el problema dice: "y así siguiendo hasta llegar al último hijo*"*. O sea, el tercero no era el último...
- -E: ¿Y se te ocurrió cuántos podrían ser... o aproximadamente qué cantidad habría?
- -M: No.
- -E: Pusiste que lo que repartió es mayor a la suma que se dio a los tres primeros hijos… léeme esto que no entiendo... El dinero que repartió es mayor al que le dio a los tres hijos. ¿Qué quiere decir?
- -M: Que el dinero que repartió en total, con toda la cantidad de hijos, es más de lo de la suma de los tres primeros...

Esta es una parte de la entrevista que se tuvo con Guadalupe (2 : 15) con respecto a su protocolo.

- -E: ¿No entendiste el enunciado del problema?
- -G: No entiendo porqué le da a uno más que al otro...
- -Y encima te dice que...
- -G: ¡Le tiene que dar a cada uno la misma cantidad de dinero!

Los protocolos de Segundo Año muestran indicios de una mayor riqueza de ideas y posibles anticipaciones; paradójicamente, esto parece inhibir la acción, lo cual concuerda con el descenso en la maestría conductual –propio de la redescripción representacional– que encontró Karmiloff-Smith (1994). El proceso de construcción de modelos mentales está influido por las creencias y representaciones previas del sujeto con relación a la situación ("son más de tres hijos", "el dinero es más que seis mil", "parece que le da uno más que al otro"). Como ello incrementa el ya elevado grado de indeterminación de la situación, es posible que no se puedan construir modelos más articulados y completos que los identificados en el nivel anterior.

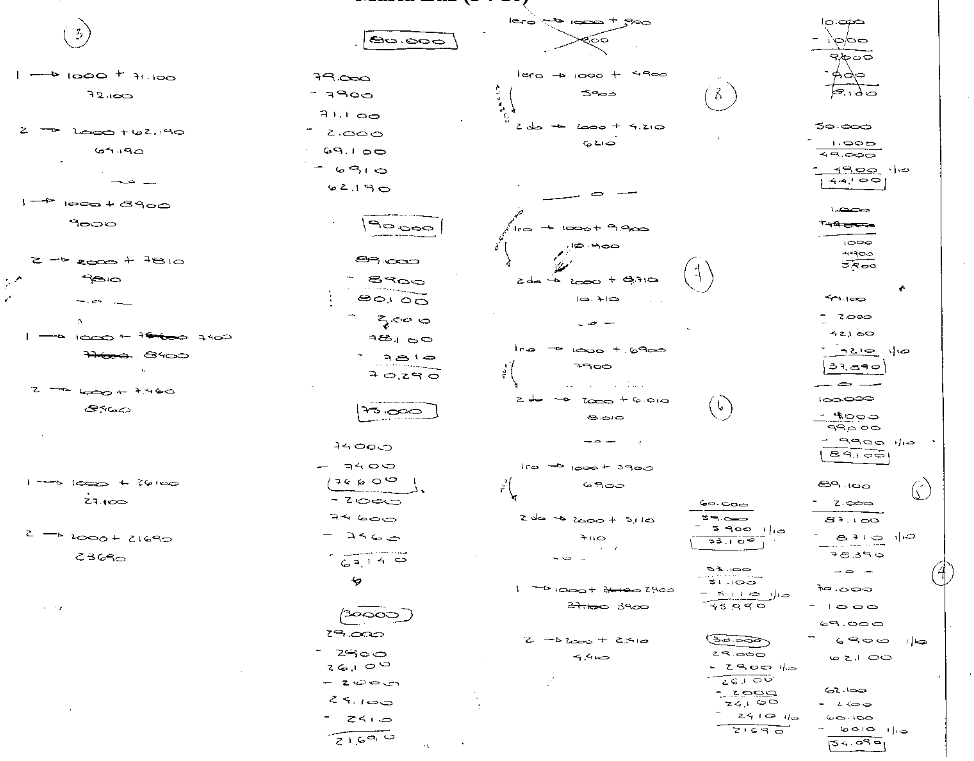
Tercer Año

En este nivel se produce un afianzamiento de las técnicas numéricas, que posiblemente tenga origen en la solvencia para el cálculo y en la capacidad para sostener varias relaciones simultáneas en la memoria de trabajo, lo cual permitiría ejecuciones más eficientes que propicien la aproximación correcta al resultado.

Los sujetos de este nivel ya no piensan que el total de dinero para repartir se relaciona con la suma de los números 1000, 2000 y 3000 porque se mencionan en el enunciado; ellos comienzan con cualquier número. De forma paralela a una mejor competencia numérica, los estudiantes cuestionan su propia forma numérica de resolver y aspiran a utilizar *fórmulas o ecuaciones*, a las que califican como *más matemáticas.* Se advierte una mejora que podría relacionarse con una evolución del sistema cognitivo en general, vinculada con la escolarización.

El caso de María Luz (3 : 16) ejemplifica una resolución numérica del tipo NUM 1, donde se ha dejado de lado la idea tan común en Primer y Segundo Año de sumar los valores iniciales correspondientes al primero, segundo y tercer hijo. María Luz (3:16) trabaja con números naturales "grandes" y efectúa varias revisiones recursivas buscando aproximar por comparación entre un procedimiento y otro, aunque no obtiene la solución correcta.

María Luz (3 : 16)



Otro caso de interés corresponde al de Luciano (3 : 16), quien logra el resultado correcto en una resolución numérica completa del tipo NUM1. La entrevista permite apreciar cómo los modelos mentales numéricos se usan para reducir la complejidad y extraer propiedades y relaciones subyacentes –véanse las líneas resaltadas–, en concordancia con lo que establecimos en nuestro marco teórico.

-E: ¿Te imaginabas al hombre y a los hijos en algún momento?
-L: No, empecé directo con las posibilidades. Cuando vi que no era una ecuación, empecé con los números. No me imagino una situación, a menos que vea un gráfico. Si el problema hubiese sido una ecuación de pintar una mesa y dividirla en partes, sí la puedes llegar a imaginar...
-E: ¿Y qué descubriste del problema?
-L: Que los números respetaban los valores de la tabla del 9: 81 000, 72 000… Que los montos que iban quedando…
-E: ¿Eran múltiplos de 9?
-L: Eran múltiplos de 9, o sea es 81 000 el primero, 72 000 el segundo, 63 000, 54 000, 45 000, después 36 000, 27 000, 18 000 y 9000.
-E: Eso lo descubriste en medio del problema...
-L: Ya cuando vi que me dio el primero, era cierto, pero no tenía para comparar. Entonces, cuando

me dio el segundo, probé cuánto me daba el tercero y ahí me di cuenta y lo terminé de hacer...

Luciano utiliza varias alternativas para controlar la solución y confirmar los resultados:

-E: ¿Encontraste algún otro descubrimiento o regularidad?

-L: Que si sumabas te daba 9 siempre, 7000 más 2000 es 9000; 6000 más 3000 es 9000; entonces era más fácil hacer el porcentaje porque era una confirmación de que me iba saliendo bien el problema.

Asimismo, Luciano busca formas para saber si su procedimiento es correcto y si la solución es única. Según manifiesta en la entrevista, intentó utilizar técnicas algebraicas (a las cuales considera más eficientes y rigurosas), pero al no tener éxito usó el procedimiento numérico, a pesar de la insatisfacción que le produce porque lo considera poco confiable.

-E: ¿Algo más?

-L: Yo estaba intrigado si el problema estaba bien o mal hecho porque la cantidad de dinero y de hijos me había dado. Los resultados estaban bien, pero no el proceso.

-E: ¿Para ti no está verificado el problema con lo que hiciste y con la comprobación?

-L: Porque puede ser ese el resultado del problema, pero no sé si tiene un solo resultado. Eso no me puse a comprobarlo.

-E: ¿Cómo se podría hacer eso o qué herramienta habría que usar para realizarlo?

-L: No se me ocurre. Yo lo que quería saber es si por otra manera se puede resolver o habría que esperar la prueba de los otros chicos.

-E: ¿Con este procedimiento notas que las cuentas te dieron, pero no sabes si es el único resultado?

-L: Primero, no sé si es el único resultado y segundo, no sé si es el único proceso por el cual se puede hacer. A mí se me ocurrió ese o podría haber sido otro.

-E: Habitualmente, ¿cuándo te quedas satisfecho cuando resuelves un problema? ¿Cómo te das cuenta si lo que hiciste está bien o no?

-L: Cuando hago un proceso más confiado que ese.

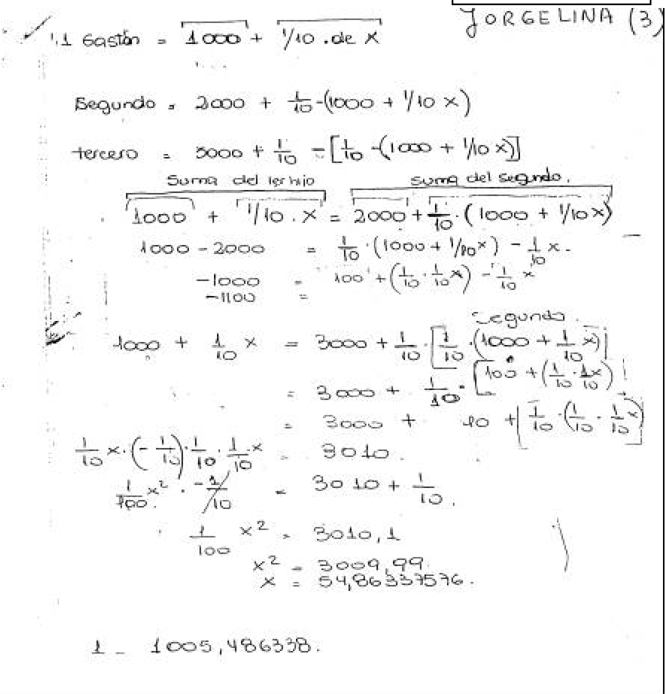
-E: ¿Cuál sería un proceso más confiable?

-L: Con una ecuación o un gráfico que sé que es exacto, porque yo perdía el tiempo y cuando llegaba al último resultado no me daba. En cambio, con una ecuación, cuando veo que no me va dando… o sea, me resulta más confiable...

A continuación se presenta el caso de Jorgelina (3 : 16), quien intentó una solución relacionada con el álgebra escolar. Como se advierte en el protocolo escrito, la entrevista demostró que ella no comprendió adecuadamente cómo se calculaban los montos de los hijos porque verbalizó y escribió incorrectamente las operaciones. Respecto a las características de su resolución, se observa que Jorgelina buscó expresar algebraicamente las operaciones indicadas en el enunciado, haciendo una Resolución Algebraica Típica (RAT), que describimos en el tercer apartado. Dicha forma de resolver corresponde a las características del álgebra escolar concebida como una aritmética generalizada (Bolea, Bosch y Gascón, 2001). Las técnicas basadas en actividades de *traducción literal* se sustentan en una concepción que presenta al álgebra escolar como un “lenguaje algebraico” y al aprendizaje del álgebra como una adquisición de técnicas de traducción. Esos procedimientos se encuentran tanto en los textos escolares (Otero, Elichiribehety y Roa, 2001) como en las prácticas docentes habituales.

El modelo mental que subyace en la resolución de Jorgelina parece incluir la relación de reparto equitativo entre los hijos y ciertos rasgos de especificidad, ya que llama Gastón al primer hijo, formula ecuaciones para tres hijos –en correspondencia con los que menciona el enunciado– e infiere condiciones no dichas, como “el hombre estaba bien económicamente, o sea, tenía bastante dinero y una familia numerosa”. Debido a que incluye información relacional y conceptos abstractos -incógnita y operaciones algebraicas– podría tratarse de un modelo mental parcialmente proposicional.

Jorgelina (3 : 15)

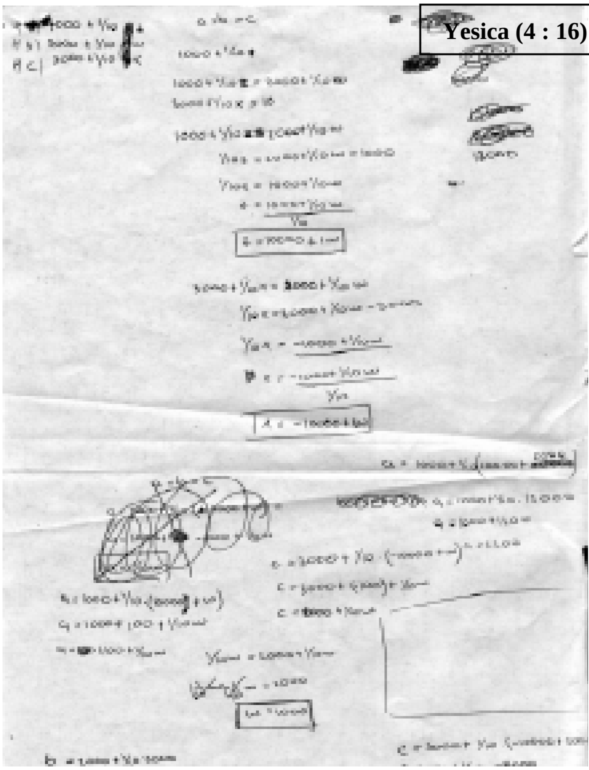


Cuarto Año

En este año, tres protocolos muestran intentos de resolución con herramientas algebraicas. Sólo uno permite inferir un modelo numérico subyacente del tipo NUM 1, mientras en los dos casos restantes se obtienen producciones muy pobres, que sugieren una situación similar a la de Segundo Año. No obstante, en este caso las dificultades que inhiben la acción de los estudiantes residen en que ellos consideran que “tienen que resolver mediante una ecuación y no logran encontrarla”. La preocupación de los sujetos se enfoca en cómo expresar la situación en lenguaje algebraico y parece estar relacionada con las características que asume el álgebra escolar como generalización aritmética y como reemplazo de números por letras.

El caso de Yesica (4 : 16), que puede apreciarse en el protocolo siguiente, es muy interesante porque escribe expresiones para tres hijos (a los que designa como a, b, c) y considera tres incógnitas para los restos (z, w, x). Tal solución es similar a la que en el tercer apartado denominamos como Resolución Algebraica formulando más de dos Hijos (RAH). A partir de su exploración, Yesica llega a la conclusión de que la diferencia entre dos restos sucesivos es diez mil pesos, mas no puede utilizar este resultado, ya que no planteó ningún resto en función a la cantidad total de dinero.

La entrevista dejó en claro que el objetivo de Yesica es *reducir las incógnitas* mediante la técnica de igualación, sin tener demasiada conciencia de la información que proporcionan las relaciones obtenidas. De todos modos, su estrategia es interesante porque no se enfoca en las prácticas de traducción que hemos comentado anteriormente. El modelo mental subyacente sería parcialmente proposicional y, como en los casos anteriores, el hecho de que se trata de un reparto igualitario para todos los hijos fue incorporado y manifestado en la formulación. Sin embargo, con base en la entrevista y el protocolo escrito, el modelo de Yesica carece de una relación que exprese lo que recibe cada hijo en función del total a repartir.



Yesica (4 : 16)

El caso de María Elisa (4 : 17) puede interpretarse desde la idea de *contrato didáctico* (Brousseau, 1986), debido a que utiliza la noción de *sucesión aritmética*, propia del programa para Cuarto Año. Durante la entrevista, justifica su elección con la frase “era el último tema que habíamos visto”.

A partir del protocolo escrito y de la entrevista, se observa que María Elisa utiliza *fórmulas* como la del término *enésimo* de una sucesión aritmética y la expresión para la suma de *ene* términos. Sin embargo, el protocolo escrito y la entrevista sugieren que las expresiones matemáticas se emplearon mecánicamente y en forma aislada, sin considerar relaciones del problema muy relevantes, como la equidad del reparto. En consecuencia, la utilización de las *fórmulas* como proposiciones aisladas y la ausencia de relaciones con la situación planteada indican que no se ha construido un modelo mental. Por ejemplo, según se aprecia en la trascripción siguiente, María Elisa considera que la razón de la sucesión aritmética es un décimo.

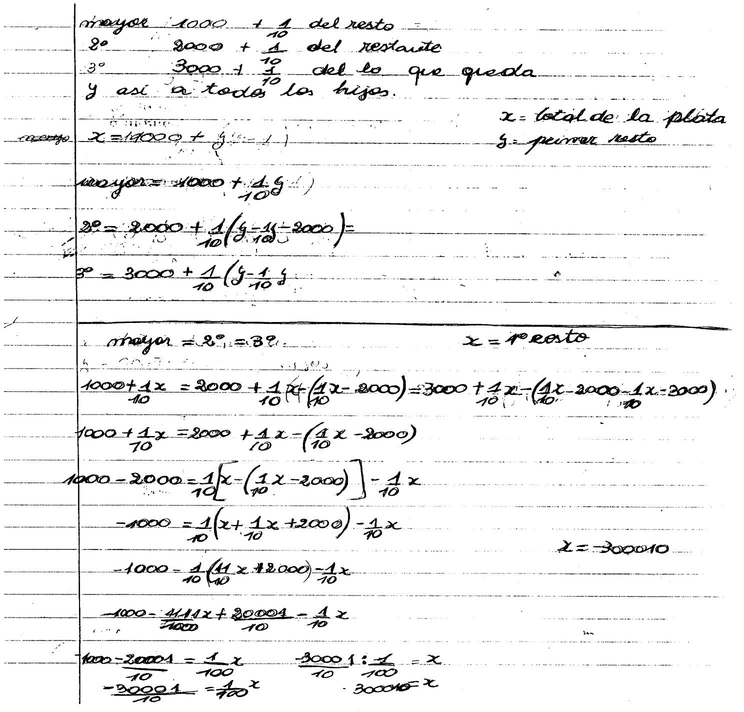
-E: ¿Qué te dio la pista para plantear 1000 más 1/10?

-ME: El primer valor era 1000, entonces era a_1 y la suma no se sabía, el número de hijos tampoco y la razón era 1/10 porque era siempre lo que se sumaba. Después, a_2 es 2000, que era el otro hijo, el tercer hijo era 3000 y saqué que a_n podía ser el mayor número y de ahí hice el otro, pero no dio.

Quinto Año

Todos los sujetos en este año parece que construyeron un modelo mental e hicieron la mayor cantidad de resoluciones correctas. Aquí, los resultados del estudio transversal coinciden con los del exploratorio. Los protocolos muestran desde las versiones más sofisticadas y correctas de los modelos mentales numéricos hasta modelos mentales parcialmente proposicionales, que subyacen en la utilización de instrumentos propios del álgebra escolar.

El mejor desempeño de los sujetos de Quinto Año cuando resuelven el problema se debería al número de relaciones que pueden manejar, a la eficiencia con que pueden operar y a su capacidad de efectuar relaciones adicionales para la validación del resultado. El caso de Alejandra (5 : 18) permite apreciar un proceso que comienza con una exploración algebraica y finaliza con una resolución algebraica correcta, muy diferente a los procedimientos que se basan en traducir las operaciones expresadas en el enunciado.



mayor 1000 + $\frac{1}{10}$ del resto

2° 2000 + $\frac{1}{10}$ del restante

3° 3000 + $\frac{1}{10}$ del lo que queda

y así a todos los hijos.

x = total de la plata

y = primer resto

$x = 1000 + y$

mayor $= 1000 + \frac{1}{10}y$

$2° = 2000 + \frac{1}{10}\left(y - \frac{1}{10}y - 2000\right) =$

$3° = 3000 + \frac{1}{10}\left(y - \frac{1}{10}y\right.$

mayor $= 2° = 3°$

$x = 1°$ resto

$1000 + \frac{1}{10}x = 2000 + \frac{1}{10}\left(x - \left(\frac{1}{10}x - 2000\right)\right) = 3000 + \frac{1}{10}x - \left(\frac{1}{10}x - 2000 - \frac{1}{10}x - 2000\right)$

$1000 + \frac{1}{10}x = 2000 + \frac{1}{10}x - \left(\frac{1}{10}x - 2000\right)$

$1000 - 2000 = \frac{1}{10}\left[x - \left(\frac{1}{10}x - 2000\right)\right] - \frac{1}{10}x$

$-1000 = \frac{1}{10}\left(x + \frac{1}{10}x + 2000\right) - \frac{1}{10}x$

$x = 300010$

$-1000 = \frac{1}{10}\left(\frac{11}{10}x + 2000\right) - \frac{1}{10}x$

$-1000 = \frac{1111}{1000}x + \frac{20001}{10} - \frac{1}{10}x$

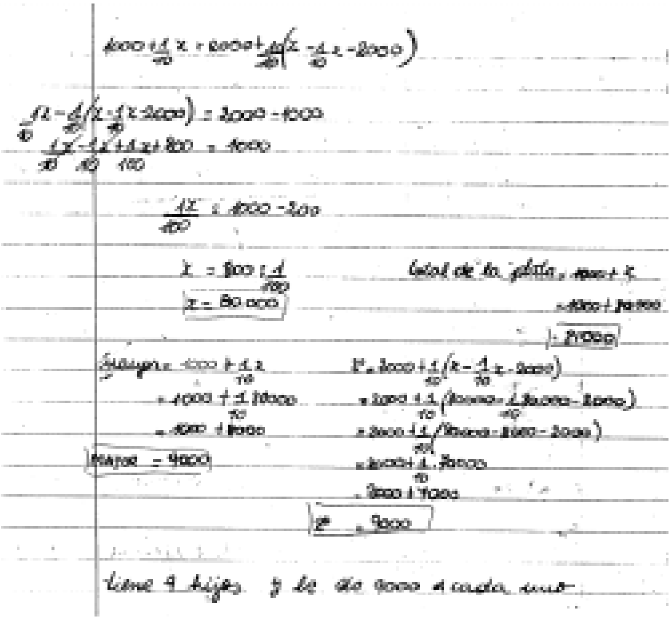
$1000 - \frac{20001}{10} = \frac{1}{100}x$

$-\frac{30001}{10} : \frac{1}{100} = x$

$-\frac{30001}{10} = \frac{1}{100}x$

$300010 = x$

Alejandra (5 : 18)



$1000 + \frac{1}{10}x = 2000 + \frac{1}{10}\left(x - \frac{1}{10}x - 2000\right)$

$\frac{1}{10}x - \frac{1}{10}\left(x - \frac{1}{10}x - 2000\right) = 2000 - 1000$

$\frac{1}{10}x - \frac{1}{10}x + \frac{1}{100}x + 200 = 1000$

$\frac{1}{100}x = 1000 - 200$

$x = 800 : \frac{1}{100}$

$\boxed{x = 80\,000}$

total de la plata $= 1000 + x$

$= 1000 + 80000$

$\boxed{= 81000}$

mayor $= 1000 + \frac{1}{10}x$

$= 1000 + \frac{1}{10}80000$

$= 1000 + 8000$

$\boxed{\text{mayor} = 9000}$

$2° = 2000 + \frac{1}{10}\left(x - \frac{1}{10}x - 2000\right)$

$= 2000 + \frac{1}{10}\left(80000 - \frac{1}{10}80000 - 2000\right)$

$= 2000 + \frac{1}{10}\left(80000 - 8000 - 2000\right)$

$= 2000 + \frac{1}{10}70000$

$= 2000 + 7000$

$\boxed{2° = 9000}$

tiene 9 hijos y le da 9000 a cada uno.

En los primeros ensayos Alejandra escribió tres ecuaciones, una para cada hijo (como mencionaba el enunciado) y señaló que había más de tres hijos. Designó al primero de ellos como “el mayor” –asumiendo que el reparto del dinero se hizo según el orden de edad de los hijos–; tal relación no se menciona en el enunciado y parece ser una inferencia derivada del modelo mental que ella construyó sobre la situación.

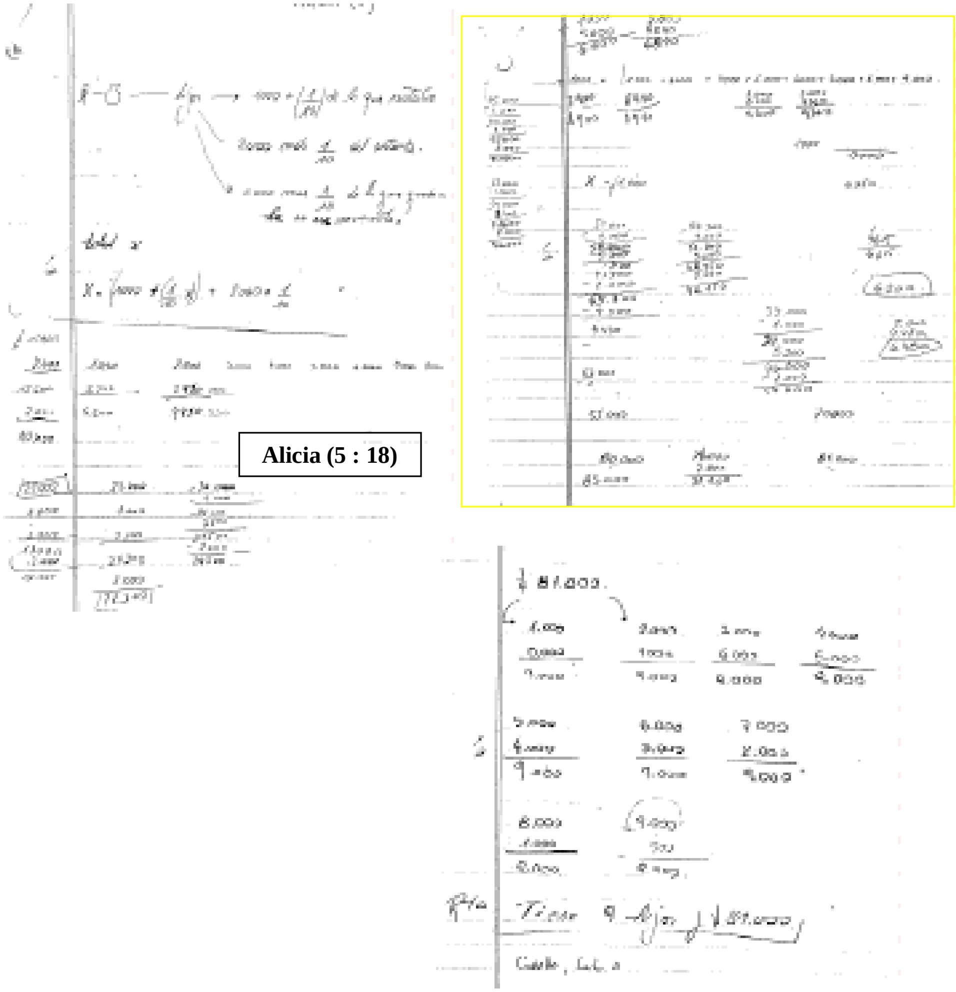
Las primeras ecuaciones de Alejandra tienen dos incógnitas: una se refiere al total de dinero; la otra representa al primer resto. Tras esta exploración sólo trabaja con el primer resto y obtiene una expresión algebraica más sencilla a la que surge con la solución del tipo RAT. La resolución de Alejandra es similar a la RAR y muestra aspectos del problema que no emergen en el caso de la RAT, lo cual señala que esta estudiante halló otras relaciones y amplió el campo de preguntas a partir de su exploración algebraica.

El análisis del protocolo indica que durante la resolución hubo al menos tres revisiones recursivas del modelo mental. En la primera –aunque inconclusa– Alejandra escribe una relación correcta entre el total del dinero y el primer resto (que será el eje de su estrategia), pero no expone la igualdad para los hijos. En la segunda redefine y completa el planteamiento inicial; además, cambia la denominación de las incógnitas y centra la formulación en lo que ella denomina *primer resto*; sin embargo, como ya se afirmó, construir una expresión en función de dicha variable puede dificultar la expresión para el segundo hijo. Debido a que Alejandra no reconoció como válido el resultado –en la entrevista dijo que esperaba que le diera 80 000– efectuó el tercer intento, re-escribiendo la ecuación correctamente y la verificó después de manera muy detallada, sustituyendo en las expresiones originales.

Todo el camino de resolución indica una compresión profunda de la situación y un trabajo de búsqueda de relaciones a partir de las condiciones asumidas. El modelo mental que subyace en esta resolución no sería numérico, sino parcialmente proposicional, con muchas relaciones entre elementos específicos, conceptos y proposiciones. Sin embargo, la entrevista deja en claro que Alejandra conocía el resultado y que lo utilizó para desechar una respuesta, razón por la cual suponemos que quizás construyó primero un modelo mental numérico, del cual extrajo el resultado y la información relacional, y después lo integró al modelo que empleó para resolver algebraicamente.

La última corrección que hizo Alejandra a la ecuación parece haber sido reformulada precisamente a partir del número buscado, no de las relaciones en abstracto. Si las interpretaciones anteriores son correctas, se sostiene la idea de que los modelos numéricos interactúan (afectan, favorecen, inhiben) con el desarrollo de las formulaciones vinculadas al álgebra elemental. Esta interferencia parece tener raíces cognitivas profundas que se presentarán de manera recurrente en las situaciones de aprendizaje, hasta que los estudiantes logren desarrollar esquemas complejos y eficientes para resolver situaciones con técnicas de modelización algebraica, como sucede con un experto.

Entre los sujetos de Quinto Año también se encontraron resoluciones correctas donde subyace un modelo mental numérico con la heurística NUM1. Alicia (5 : 17) señaló en la entrevista que primero intentó “escribir una ecuación” pero después “empezó a hacer cuentas”. Si bien su procedimiento se parece al de los sujetos más pequeños, tiene un sistema de aproximación del resultado e incluso ha inferido que los restos deben ser números terminados en cero.



Alicia (5 : 18)

V. Discusión y conclusiones

Los resultados de esta investigación constatan la relevancia que adquieren los modelos mentales numéricos, en todos los años de la enseñanza media, cuando se buscan soluciones a un problema no familiar. Con relación a los dos primeros años, los procedimientos numéricos parecen ser los únicos que los sujetos tienen a disposición; posiblemente esto se deba a que sus conocimientos se refieren a lo que se denomina *aritmética escolar*, o a nociones muy elementales de álgebra.

A partir de Tercer Año, los estudiantes consideran que el problema *debería* resolverse con instrumentos algebraicos. Empero, cuando no pueden utilizar dichas herramientas recurren a estrategias numéricas que derivan de un modelo mental numérico cuya especificidad les permite comprender y manejar cognitivamente la situación. Si dicho modelo mental numérico o sus revisiones recursivas logran especificar un ejemplo adecuado, los sujetos obtienen una comprensión matemática del problema que, según señalan algunos teóricos cognitivos, podría derivar a posteriori en representaciones mentales más estables, como los esquemas (Moreira 2002, Greca y Moreira, 2002), o en reglas de orden más alto (Schwartz & Moore, 1998).

Varios de los casos que se analizaron en el estudio sugieren lo probable de la afirmación anterior y ofrecen un sendero para próximas investigaciones sobre cómo las resoluciones donde subyacen modelos mentales numéricos pueden utilizarse como punto de partida para generar representaciones esquemáticas superadoras de varios tipos de problemas, eficientes para el aprendizaje de técnicas de modelización algebraica.

Otro punto importante es que los sujetos, en toda la escolaridad media, usan estrategias en las que subyacen modelos mentales numéricos o de otro tipo, las cuales poseen una riqueza matemática que es preciso capitalizar, incluso cuando por la naturaleza misma de los modelos mentales no se trate de procedimientos enteramente correctos. La construcción de estos modelos internos es estructural al funcionamiento cognitivo, ya que se generan cuando enfrentamos situaciones concebidas como problemáticas y durante los procesos de comprensión, predicción e inferencia, usando tanto los elementos presentes en la situación como los conceptos e informaciones previas que pueden o no tener un componente perceptivo.

Los diversos casos analizados muestran que los sujetos elaboran una representación específica de la situación, infiriendo relaciones no mencionadas. Por ejemplo, que son muchos hijos, que el padre tiene mucho dinero, que el primer hijo es el mayor y los demás siguen en orden descendente, que son tres hijos, etc. Además, la presencia de ciertas relaciones en detrimento de otras trazan caminos de resolución diferentes; unos procedimientos se enfocan en el dinero a repartir, otros en lo que va quedando y otros más en lo que recibe cada hijo. También, a medida que el modelo se revisa, las resoluciones numéricas conducen a relaciones inicialmente no percibidas, como inferir que los restos deben ser múltiplos de 9 y de 1000.

Las consideraciones anteriores, y el hecho de que los modelos subyacentes en las estrategias numéricas se presentan tanto en los protocolos de los pequeños como de los mayores –con diferencias sólo operativas–, reafirman que la capacidad de construir modelos mentales es una característica general del pensamiento, como se establece en el marco teórico. En consecuencia, los sujetos tienen siempre a su disposición la posibilidad de hacer modelos mentales de una u otra clase. Si se basan en las operaciones elementales y en los datos cuantitativos frecuentemente recurrirán a modelos numéricos para comprender el problema y tornarlo cognitivamente manejable, incluso frente a una situación como la que se ha presentado, que a priori parecería inhibir intentos numéricos en favor de estrategias más elaboradas. Tal carácter emergente de los modelos numéricos sugiere una vía parcial de respuesta a ciertas dificultades para la adquisición de instrumentos de modelización algebraica, que señalan la persistencia de procedimientos aritméticos (en el sentido escolar).

En este trabajo también se han encontrado y analizado procedimientos en los que subyacen modelos mentales con menor especificidad que los numéricos, los cuales parecen ser muy funcionales para la utilización de técnicas algebraicas. Los casos de Alejandra, Yesica y Luciano indican que los modelos mentales numéricos pueden interferir en la formulación de relaciones del problema en un nivel de mayor abstracción y generalización; en consecuencia, no pueden ser superados desde su negación, sino desde su aceptación.

Posiblemente está ausente en la escuela un trabajo sistemático de modelización, que trascienda el ámbito de lo mental y de lo verbal e ingrese progresivamente a prácticas de argumentación escrita y que podría admitir, entre otras etapas, una aritmética (no en el sentido escolar actual). Esto resulta particularmente claro con relación al problema que nos ocupa, el cual, a partir de un trabajo didáctico adecuado, permitiría plantear caminos alternativos, interesantes tanto desde un abordaje aritmético como algebraico. La relación entre las estrategias numéricas "espontáneas", la aritmética y el álgebra escolar es un campo muy vasto para investigar.

Como han señalado Bosch y Chevallard (1999), el álgebra escolar está restringida por la concepción *logocéntrica* de la cultura occidental, que subestima al lenguaje científico en general y al algebraico en particular, pues lo considera como un subproducto del pensamiento y de la palabra. Esta visión impregna las prácticas docentes $x = kH_k = ka(n-1)$ en demérito de manipulaciones y exploraciones algebraicas necesariamente escritas.

Una restricción importante para la generación de modelos mentales adecuados reside en que tenemos una capacidad de memoria restringida; por ende, los sistemas notacionales que acompañan a la aritmética y al álgebra liberan al sistema cognitivo de sostener esas relaciones y constituyen un instrumento muy poderoso al servicio de la modelización. Las entrevistas y protocolos muestran que la exploración escrita numérica y algebraica permite al sujeto cuestionar su proceso de resolución y modificarlo; a la vez, sustentan la posibilidad de realizar nuevas inferencias. Los casos analizados indican un conjunto de caminos a investigar y constatan la necesidad de asumir una perspectiva que contemple conjuntamente la dimensión didáctica y la cognitiva.

VI. Bibliografía

Bolea, P.; Bosch, M. y Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: el caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques 21* (3), 247-304.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. Barcelona, España: Universitat Autònoma de Barcelona.

Bosch, M. y Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d' étude et problematique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 19* (1), 77-124.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 7* (2), 33-116.

Coulange, L. (2001). Enseigner les systèmes d'écuations en Troisième. Une étude économique et écologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 21* (3), 305-354.

Elichiribehety, I; Otero, M. R. y Fanaro, M. (2002). Los modelos mentales que subyacen a la resolución de problemas algebraicos: un estudio transversal*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5* (2), 169-198.

Greca, I. y Moreira, M. A. (2002). Além da detecção de modelos mentais dos estudantes. Uma proposta representacional integradora. *Investigacoes em Ensino de Ciencias 7* (1). Obtenido de http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n1/v7_n1_a2.html.

Johnson-Laird, P. (1983). *Mental models*. Cambridge, USA: Cambridge University Press.

Johnson-Laird, P. (1990). *El ordenador y la mente*. Barcelona, España: Paidós.

Johnson-Laird, P. (1996). Images, models and propositional representations. En Manuel de Vega, Margaret Jean Intons Peterson, Philip Johnson-Laird, Michel Denis y Marc Marschark (Eds.), *Models of visuospatial cognition* (Cap. 3, pp. 90-126). New York, USA: Oxford University Press.

Karmiloff-Smith, A. (1994). *Mas allá de la modularidad*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Moreira, M. A. (1997). Modelos mentais. *Investigacoes em Ensino de Ciencias* 1 (3). Obtenido de http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/v1_n1_a1.html.

Moreira, M. A. (2002). A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. *Investigações em Ensino de Ciencias 7* (1). Obtenido de http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n1/v7_n1_a1.html.

Otero, M. R. y Banks Leite, L. (1998). *Buscando modelos mentales*. Tesis de maestría, Facultad de Ciencias Humanas, Universidad Nacional del Centro-Universidade Estadual de Campinas.

Otero, M. R. (1999). Psicología cognitiva, Representaciones mentales e investigación en enseñanza de las ciencias. Artículo Invitado. *Investigacoes em Ensino de Ciencias 4* (2). Obtenido de http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol4/n2/v4_n2_a2.htm.

Otero, M. R., Elichiribehety, I. y Roa, M. (2001). El tratamiento dado a las ecuaciones en los textos ¿tiene en cuenta a los alumnos? *Educación Matemática 12* (3), 18-29.

Otero, M. R.; Papini, M. C. y Elichiribehety, I. (1998). Las representaciones mentales y la Enseñanza de la Matemática. *Educación Matemática 10* (3), 90-103.

Schwartz, D. L. & Black, J. B. (1996). Shuttling between depictive models and abstract rules: induction and fallback. *Cognitive Science 20* (2), 457-497.

Schwartz, D. & Moore, J. (1998). On the role of mathematics in explaining material world: mentals models for proportional reasoning. *Cognitive Science 22* (4), 441-516.

Van Dijk, T. A. (1992). *Cognição, discurso e interação.* Sao Paulo, Brasil: Editora Contexto.

María Rita Otero
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional del Centro
Provincia de Buenos Aires, Argentina

E-mail: rotero@exa.unicen.edu.ar

Luci Banks-Leite
Departamento de Psicología Educacional
Faculdade de Educação-Universidade Estadual de Campinas
Brasil

E-mail: lbanks@unicamp.br