¿De qué se trata la matemática?

Gustavo Esteban Romero [1]

1 Instituto Argentino de Radioastronomía

Introducción

Las teorías que usamos para representar el mundo pueden ser extremadamente complejas. Abordan temas tales como electrones, campos cuánticos, estrellas de neutrones, materia oscura, redes neuronales, mercados económicos, la atmósfera y muchas otras entidades que suponemos existen en el universo. Al formular nuestras teorías, recurrimos a lenguajes exactos que nos permiten minimizar la vaguedad y expresarnos lo más precisa y cuantitativamente posible. Recurrimos a la matemática.

Cuando formulamos nuestras teorías fácticas en lenguaje matemático, estas se refieren no solamente a objetos que nosotros interpretamos como materiales, tales como partículas o personas, sino también a entidades más raras de un mundo abstracto: conjuntos, números, funciones, espacios algebraicos, variedades, topologías, y otras entidades similares. Estos objetos no son materiales en el sentido en que nosotros decimos que una manzana es material. Ellos no existen en el espacio-tiempo, no interactúan, no cambian o evolucionan. Sin embargo, allí están, profundamente arraigados en nuestras teorías más apreciadas acerca del mundo.

¿Cuál es su estatus ontológico?

Un nominalista diría que estas entidades no existen en absoluto; que los objetos matemáticos son prescindibles y que nuestro discurso sobre ellos puede traducirse a un lenguaje cuyos referentes finales son entidades materiales concretas. En la filosofía actual se han realizado intentos en esta dirección, desde Goodman y Quine (1947) hasta Field (1980) y más allá (ver Burgess y Rosen 1997). Según este punto de vista, la matemática no se refiere a nada en absoluto. Al menos, la matemática no se refiere a nada más allá del mundo material. Este programa no ha tenido éxito: elementos tan básicos como los conjuntos parecen ser indispensables para la matemática. Los intentos de eliminar toda referencia a entidades abstractas en estructuras matemáticas complejas han encontrado dificultades insuperables (por ejemplo, ver Quine 1960).

Por otro lado, los platonistas toman la matemática al pie de la letra: si las teorías matemáticas refieren a entidades abstractas, y esas teorías son verdaderas, entonces esas entidades deberían existir de alguna forma. Ciertamente, estas entidades platónicas no son materiales en el sentido en que una silla es material; y sin embargo deberían existir en algún sentido, independientemente de la mente humana. Esas entidades deben poseer una realidad autónoma. Para el platonista el mundo no es puramente material.

Pienso que en su forma actual estos puntos de vista parten de un malentendido del papel que tiene la cuantificación lógica en la formulación de nuestros lenguajes. Los lenguajes formales actuales adoptan un operador existencial que actúa como un “particularizador” para las variables. Desde el famoso trabajo de Quine (1948) ha sido popular pensar que el cuantificador existencial agota el concepto de existencia de tal manera que los únicos objetos cuya existencia debería reconocerse en nuestra ontología son aquellos aceptados en el dominio de $\exists$.

La cuantificación lógica, sin embargo, solo establece una correspondencia entre la individuación y la coherencia formal,

$$\exists x\, f\,(x) \leftrightarrow \{x/\,f\,(x)\} \neq \varnothing,$$

donde $\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$ es la clase vacía. La existencia formal, por lo tanto, no significa nada más que estar libre de contradicciones. En ciencia empírica y lenguaje natural, sin embargo, se adoptan otros sentidos de «existencia».

Podemos cuantificar variables que sean números, unicornios, electrones, planetas, funciones de onda, Don Quijote, y muchos otros objetos que requieran una especificación intensional adicional si queremos hablar significativamente sobre ellos. Podemos lograr esto introduciendo un predicado que indique un modo de existencia.

La existencia formal pura apunta a la coherencia en un sistema de enunciados organizado y consistente; la expresión de la existencia ontológica, en cambio, requiere una existencia formal y además un predicado que exprese el modo de existencia previsto.

¿Cuántos modos de existencia hay en realidad? Propongo solo tres modos: material, formal, y ficcional. Una cosa existe materialmente si, y solo si, tiene energía (i. e., si es capaz de experimentar cambios). Una cosa existe formalmente si, y solo si, es parte de un sistema formal bien definido. Por último, una cosa existe ficcionalmente si es caracterizada en algún contexto no formal, e.g. mediante definiciones o descripciones aisladas. En este sentido, podemos decir que un electrón existe materialmente en el mundo, los espacios de Hilbert existen formalmente en el análisis funcional, y Don Quijote existe ficcionalmente en la novela de Cervantes. La existencia formal y ficcional son formas de existencia conceptual, i. e. productos de actividades cognitivas en seres inteligentes. En particular, los objetos matemáticos son artefactos conceptuales: son invenciones de la mente humana creadas de acuerdo a reglas de formación explícitas. En sentido amplio, todos los conceptos son ficciones (ver Bunge 1985, Romero 2018a and Bueno 2009).

Defino a los objetos matemáticos de este modo:

Un objeto x de un sistema formal consistente M es un artefacto conceptual si, y solo si, existe un conjunto C tal que$x \in C$ y C están especificados en M por un conjunto de reglas explícitas.

La especificación se implementa a través de algunos de los axiomas de M. Las reglas semánticas en M relacionan símbolos en el sistema de artefactos conceptuales. Una declaración en M sobre un cierto artefacto conceptual es verdadera si, y solo si, la declaración es derivable del sistema. Las declaraciones matemáticas, entonces, son verdaderas en un sistema si, y solo si, ellas pueden ser comprobadas en el mismo sistema.

A pesar de ser creaciones humanas, los objetos matemáticos no son arbitrarios o puramente subjetivos. Estos objetos están conectados por los axiomas de la misma matemática que los presenta. Cualquier persona que domine estas teorías puede obtener conocimiento de estos objetos conceptuales. En teorías complejas, no todas las implicaciones de los axiomas se pueden discernir inicialmente. Por lo tanto al investigar sistemas matemáticos es necesario dilucidar las consecuencias relevantes de los postulados fundamentales. El matemático no solo inventa nuevos sistemas formales, sino que principalmente busca implicaciones de las teorías ya propuestas. Al hacerlo, el investigador apela tanto a la invención como al descubrimiento. Invención de formas originales de establecer una prueba y descubrimiento de implicaciones imprevistas de algunos axiomas.

En última instancia, los objetos matemáticos no se refieren a entidades materiales si no son interpretados en teorías fácticas o empíricas. Como todos los objetos ficticios, los objetos matemáticos surgen de estipulaciones y declaraciones que los involucran en teorías matemáticas que son transformadas en verdaderas por otras estipulaciones. Esta es esencialmente la visión de David Hilbert de la matemática. Para Hilbert, cualquier estipulación consistente de una entidad matemática genera esa entidad.

Dado que las verdades sobre los artefactos matemáticos dependen siempre del correspondiente contexto formal donde se definen, las verdades matemáticas son analíticas e independientes del mundo (aunque las declaraciones matemáticas no son tautologías como alguna vez pensaron Wittgenstein y sus seguidores). Si presentamos un operador modelo T^M que expresa que «el enunciado $(\ldots x\ldots)$ es verdadero en el sistema M » podemos decir, por ejemplo:

$$(\exists x)T^M(\ldots x\ldots)$$

Si M es la teoría de los números enteros, una instancia de esto podría ser «es verdad que existe un número entero menor que 4 y mayor que 2». Pero esto no implica que haya un objeto material llamado «3». La declaración (1) es verdadera en M, no en el mundo.

Si los objetos matemáticos son ficciones conceptuales, ¿por qué entonces pueden usarse para describir objetos y procesos reales en el mundo material? La respuesta es precisamente porque la matemática pura es ontológicamente neutra y por lo tanto las ideas matemáticas son aplicables en todos los campos de investigación y se pueden utilizar para precisar y exactificar nuestras ideas sobre los hechos del mundo. Nos ayudan a eliminar la vaguedad de nuestro lenguaje. En algunos contextos, las teorías matemáticas pueden ser extremadamente útiles. Por ejemplo, si estamos interesados en capturar ciertas propiedades estructurales de los fenómenos empíricos — como la representación de un estado dinámico o de propiedades radiativas de ciertas partículas — el aparato matemático ofrece un marco rico, preciso y versátil de expresión. En otros contextos, sin embargo, las teorías matemáticas están lejos de ser útiles. Por ejemplo, supongamos que estamos interesados en capturar los estados psicológicos de algunos animales bajo estrés; en este caso, no está claro si, en general, el uso de vocabulario matemático es de mucha relevancia.

No existe una forma *a priori* de determinar si una teoría matemática dada será útil o no para la ciencia fáctica, y esto es porque no sabemos cómo es el universo. Cuanto más ricas sean nuestras teorías matemáticas, más fuerte será nuestra capacidad de representar el mundo real. Por lo tanto, debería alentarse la investigación básica en matemática si queremos expandir nuestras capacidades expresivas para discutir y describir el mundo en su amplia complejidad. Esto no significa que apliquemos la matemática a la realidad, sino que podemos hacer que nuestras ideas sobre la realidad sean más exactas a través de su matematización. Un lenguaje exacto basado en la matemática tiene una mayor expresividad para describir con precisión el mundo que un mero lenguaje natural, que está infectado de vaguedad e imprecisión. El mundo no es matemático, pero nuestras ideas sobre él se pueden expresar, afortunadamente, a través de la matemática.

En resumen: aunque algunas de nuestras teorías matemáticas más primitivas podrían estar inspiradas en observaciones de fenómenos empíricos, la matemática es una creación libre de la mente humana sin existencia independiente. Las entidades matemáticas son artefactos conceptuales formulados en el marco de teorías consistentes a través de estipulaciones. Las verdades matemáticas son analíticas y solo pueden establecerse en el contexto de las teorías que contienen las estipulaciones constitutivas de la formación de objetos matemáticos. La matemática no se refiere a entidades materiales. La matemática refiere a ficciones bien definidas.

Referencias

Bueno, O. 2009. Mathematical fictionalism. In O. Bueno & O. Linnebo (Eds.), *New Waves in Philosophy of Mathematic*s, pp. 59–79. Basingstoke: Palgrave, Macmillan.

Bunge, M. 1985, Treatise on Basic Philosophy. Vol. 7. Epistemology and Methodology III: *Philosophy of Science and Technology. Part I*: Formal and Physical Sciences, Holland: Kluwer.

Burgess, J., & Rosen, G. 1997. A Subject with no Object: Strategies for Nominalistic Interpretation of Mathematics. *Oxford:* Clarendon Press.

Goodman, N., & Quine,W.V. 1947. Steps toward a constructive nominalism. *Journal of Symbolic Logic*, 12, 105–122.

Field, H. 1980. Science without Numbers: A Defense of Nominalism. *Princeton*, NJ: Princeton University Press.

Quine,W. V. 1948. On what there is. In From a Logical Point of View (rev. 2nd ed. 1961), pp. 1–19. *New York: Harper Torchbooks.*

Quine, W. V. 1960, Word and Object, Cambridge, MA: *MIT Press*.

Romero, G.E. 2018a. *Scientific Philosophy.* Cham, Switzerland: Springer.

Romero, G.E. 2018b. Outline of a theory of scientific aesthetics. *Foundations of Science,* 23, 795–80.

2619-2586 *(En línea).*