Algoritmo de Aceptación Diferida Matricial*

by

Jorge Oviedo y Ana Rubio Duca†

Julio 2006

Resumen En esta nota damos una versión matricial del algoritmo de aceptación diferida para el modelo de matching uno a uno. El algoritmo va modificando la matriz de preferencia de los agentes. Cuando el algoritmo se detiene, se muestra que coincide con un matching estable óptimo de los agentes.

Keywords: Modelo de matching uno a uno. Matching Estable. Algoritmo de Aceptación Diferida. Matriz de preferencia.

*Este artículo fue parcialmente financiado por UNSL, Proico 319502. CONICET,. PIP 6293. FONCYT-SECYT, PAV 120/2003. FONCYT, PICT 03-10814..

†Instituto de Matemática Aplicada San Luis. Departamento de Matemática. Universidad Nacional de San Luis y CONICET. E-mails: joviedo@unsl.edu.ar y rubio-duc@unsl.edu.ar

1 Introducción

En esta nota se da una versión matricial del algoritmo de aceptación diferida para el modelo de matching uno a uno.

El modelo de matching uno a uno se usa para estudiar problemas de asignación bilateral, es decir donde los agentes se dividen en dos conjuntos disjuntos, el conjunto de empresas y el conjunto de trabajadores. El problema consiste en asignar a cada empresa un trabajador. Este problema de asignación se puede generalizar si se le permite a cada empresa contratar a un conjunto de trabajadores y a cada trabajador trabajar para varias empresas. Este modelo se lo conoce como modelo de matching muchos a muchos, también hay un modelo intermedio de matching, conocido como muchos a uno. La generalización de los resultados en general no son inmediatas.

Cada empresa tiene preferencias sobre los potenciales trabajadores y simétricamente los trabajadores tienen preferencias sobre las empresas para las cuales quisieran trabajar. Una solución de este problema de asignación es un matching, que dice que compañero le toca a cada agente. Un matching es estable si a cada agente le toca un compañero aceptable y si no existe un par de agentes empresa-trabajador que ambos prefieran asociarse mejorando en sus preferencias al compañero que le tocaba en la solución propuesta. Gale y Shapley (1962) mostraron que en el modelo de matching uno a uno el conjunto de matching estables es no vacío. Los libros de Roth y Sotomayor (1990) y de Gusfield e Irving (1986) son una importante referencia para estudiar los modelos de matching. El conjunto de matching estables esta bien estructurado ya que contiene dos matching: el optimo de las empresas (denotado por μ_F) y el optimo de los trabajadores (denotado por μ_W). Los matchings μ_F y μ_W son considerados unánimemente por todas las empresas como el mejor y el peor entre todos los matching estables, simétricamente μ_W y μ_F son considerados por los trabajadores como el mejor y el peor de los matching estables. Blair (1988) mostró que el conjunto de matching estables tiene estructura de latís.

Los algoritmos han jugado un rol central en la literatura de matching. El algoritmo NIMP(Programa de médicos internos nacionales) de 1951, y posteriores modificaciones NRMP (Programa de médicos residentes nacionales) 1979, 1987 1999 se usan para asignar a hospitales médicos residentes en Estados Unidos. El Algoritmo de Aceptación Diferida de Gale y Shapley se usa en otros programas de asignación de distintas especialidades de la salud a hospitales. Además del algoritmo de aceptación diferida de Gale y Shapley, Adachi (2000) usó técnicas de punto fijo para construir matching estables. Fleiner (2001) y Echenique y Oviedo (2004) extendieron la técnica de punto fijo al modelo de matching muchos a uno para construir matching estables.

Mc Vitie and Wilson (1971) e Irving a Leather (1986) definieron un algoritmo para computar el conjunto de todos los matching estables en el modelo de matching uno a uno. Martínez, Massó, Neme y Oviedo (2004) extendieron el algoritmo al modelo de matching muchos a muchos.

El algoritmo que presentamos aquí, es una versión del algoritmo de aceptación diferida en forma matricial. Para esto construimos dos matrices, M^F y M^W. La primera contiene en cada fila la información del orden de preferencias de las empresas, asignándole un "1" al trabajador más preferido, "2" al siguiente en su orden de preferencia y así siguiendo; la segunda matriz, contiene en forma simétrica en cada columna la información del orden de preferencias de los trabajadores, asigna un "1" a la empresa más preferida, "2" a la que sigue y así siguiendo. El algoritmo va modificando la matriz M^F, primero ubica todos los "1", es decir, cada empresa ubica al trabajador más preferido, si en alguna columna hay más de un "1", ese trabajador cálcula, usando M^W, el mínimo, o sea, el trabajador elige a la oferta más preferida. Redefinimos la matriz M^F asignandole "∞" a la fila (empresa) donde hay un "1" y columna (trabajador) que no es mínimo, es decir, para el trabajador esa empresa no es la más preferida. En los otros elementos de la fila le restamos "1", es decir, el trabajador que era segundo, en el orden de preferencia original, ahora tendrá un "1", es decir, es el trabajador más preferido, el tercero en el orden de preferencias original ahora sera el "2", y así siguiendo. Se ubican nuevamente los "1" de la matriz modificada M^F y se repite el proceso anterior. El algoritmo se detiene cuando no podemos modificar más M^F. Ubicando los "1" de M^F tenemos que trabajador (si es que hay uno) le toca a cada empresa. Mostramos que este matching coincide con el matching óptimos μ_F de las empresas.

Esta artículo esta organizado como sigue. En Sección 2 damos las definiciones y notaciones preliminares. En Sección 3 contiene el algoritmo y el resultado principal que dice que cuando el algoritmo *se detiene,* los "1" de M^F nos dán el matching estable optimo μ_F de las empresas.

2 Definiciones Básicas

Hay dos conjuntos finitos y disjuntos de agentes F y W, $F = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ el conjunto de empresas y $W = \{w_1, w_2, ..., w_p\}$ el conjunto de trabajadores. Cada agente $g \in F \cup W$ tiene una relación de preferencias $P(g)$ estricta, transitiva y completa sobre los agentes del otro conjunto unido él mismo, por ejemplo:

$$w_1 P(f) w_3 P(f) w_5 P(f) f P(f) w_4 P(f) w_2,$$

dice que la empresa f tiene a w_1, como el trabajador más preferido, luego sigue en orden w_3, w_5, f, w_4 y w_2. Los trabajadores w tales que $wP(f)f$ se dice que son *aceptables*. $fP(f)w_4$ significa que este trabajador no es aceptable para la firma f. Tenemos que los trabajadores w_1, w_3 y w_5, son aceptables para la firma f, mientras que w_4 y w_2, son inaceptables para f. Para expresar el orden anterior en forma concisa, debido a que los agentes no están obligados a contratar o ser contratados por un agente no aceptable, denotaremos en el orden de preferencias, solo a los agentes aceptables, es decir, el orden anterior se denota por:

$$P(f) = w_1, w_3, w_5.$$

Un perfil de preferencias es una $(n + p)-upla$ de relaciones de preferencias y lo representamos por $P = (P(f_1), ...P(f_n), P(w_1), ...P(w_p))$. R denota el orden débil asociado a P.

Un modelo de matching uno a uno se denota por (F, W, P).

Definición 1 *Un matching μ es una aplicación uno a uno de $F \cup W$ en $F \cup W$, donde para todo $f \in F$ y $w \in W$ se cumple que:*

1. $\mu(f) \neq f$ *implica* $\mu(f) \in W$
2. $\mu(w) \neq w$ *implica* $\mu(w) \in F$
3. $w = \mu(f)$ *si y solo si* $f = \mu(w)$

Un matching es representado por

$$\mu = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & w_5 \\ w_2 & w_4 & w_1 & w_3 & w_5 \end{pmatrix}, \text{ o por } \mu = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \\ f_3 & f_1 & f_4 & f_2 & w_5 \end{pmatrix}$$

en este caso $\mu(f_1) = w_2$, $\mu(f_2) = w_4$, $\mu(f_3) = w_1$, $\mu(f_4) = w_3$ y $\mu(w_5) = w_5$

El matching μ es *individualmente racional* si para todo agente $g \in F \cup W$

$$\mu(g)P(g)g,$$

es decir que el matching le asigna a cada agente un compañero aceptable.

El par de agentes (f, w) *bloquea* al matching μ si $\mu(f) \neq w$ y

$$wP(f)\mu(f) \quad y \quad fP(w)\mu(w),$$

esto dice que tanto f como w quieren romper el matching μ para formar una nueva asignación emparejandose entre ellos.

Los matching individualmente racionales que sobrevivan a bloqueos por pares de agentes, juegan un rol fundamental en los modelos de matching, ya que no podrán modificarse, porque en caso de hacerlo, algún o algunos de los agentes intervinientes quedarán con un compañero menos preferido que los que le asignaba el matching original, formalmente:

Definición 2 *Un matching μ es estable, si es individualmente racional y no es bloqueado por ningún par de agentes.*

Sea P un perfil de preferencias, $S(P)$ denota el conjunto de matching estables.

El ejemplo siguiente muestra las definiciones dadas hasta aquí:

Ejemplo 1 *Sea el siguiente modelo de matching (F, W, P) donde $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3\}$,*

$$\begin{array}{llll} P(f_1) = & w_2, w_1, w_3 & P(w_1) = & f_1, f_3, f_2 \\ P(f_2) = & w_1, w_3, w_2 & P(w_2) = & f_3, f_1, f_2 \\ P(f_3) = & w_1, w_2, w_3 & P(w_3) = & f_1, f_3, f_2. \\ P(f_4) = & w_2, w_3, w_1 & & \end{array}$$

Consideremos los matching siguientes:

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & f_1 \\ f_4 & f_2 & f_3 & f_1 \end{pmatrix}, \ \mu_2 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & f_4 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{pmatrix},$$

$$\mu_3 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & f_4 \\ f_3 & f_1 & f_2 & f_4 \end{pmatrix}.$$

El matching μ_1, no es individualmente racional, porque $w_1 P(w_1) f_4 = \mu_1(w_1)$. μ_2 es individualmente racional pero es inestable ya que (f_1, w_2) es un par bloqueante. μ_3 es un matching es estable.

El orden de preferencia $P(g)$ de un agente, se puede extender para que pueda comparar matching. Sea $g \in F \cup W$, decimos que

$$\mu P(g)\mu', \text{ si } \mu\left(g\right)P(g)\mu'(g).$$

Decimos que

$$\mu P(F)\mu' \text{ si } \begin{cases} \mu\left(f\right)R(f)\mu'(f) & \text{para cada } f \in F \\ \mu\left(f'\right)P(f')\mu'(f') & \text{para algún } f' \in F \end{cases}$$

y

$$\mu R(F)\mu' \text{ si } \mu = \mu' \text{ o } \mu P(F)\mu'.$$

En forma análoga se define $\mu P(W)\mu'$ y $\mu R(W)\mu'$. En el ejemplo anterior tenemos que $\mu_3 P(F)\mu_2$.

Gale y Shapley (1962) mostraron que el conjunto de matching estables es distinto del vacío. También mostraron que existe el matching estable μ_F (μ_W) que es el mejor de los matching estables para las empresas (trabajadores). Además el óptimo de los matching estables para un lado del mercado es el peor para el otro lado, es decir para cada $\mu \in S(P)$ se cumple que

$$\mu_F\, R(F)\, \mu\, R(F)\, \mu_W \text{ y } \mu_W\, R(W)\, \mu\, R(W)\, \mu_F.$$

El algoritmo de aceptación diferida definido por Gale y Shapley (1962) construye μ_F o μ_W, dependiendo quien hace las ofertas. En cualquier paso del algoritmo, en el cual las empresas hacen las ofertas, una firma se propone al mejor trabajador de su orden de preferencia que no la ha rechazado aún, mientras que un trabajador acepta, provisionalmente, a la mejor empresa aceptable que le hizo una oferta (si la hubiera) unido con la firma provisionalmente aceptada en un paso anterior. El algoritmo se detiene en cualquier paso en el cual todas las ofertas son aceptadas; el matching provisional que se forma con las propuestas aceptadas se vuelve definitivo. El resultado del algoritmo es el matching estable μ_F. Simétricamente si los trabajadores hacen las ofertas el resultado del algoritmo es el matching estable μ_W.

Ejemplo 1 continuación. *Tenemos que* $\mu_F = \mu_3$ y

$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & f_4 \\ f_1 & f_3 & f_2 & f_4 \end{pmatrix}$$

3 Algoritmo de aceptación diferida matricial

Este algoritmo usa notación matricial. Las filas de la matriz representan a las empresas y las columnas notan a los trabajadores, así que fijaremos un orden para los agentes. Cuando no haya problemas denotamos con i la fila de la matriz que representa a la empresa f_i, simetrícamente la columna j representa al trabajador w_j. Dado el modelo de matching (F, W, P), definimos las siguientes matrices de preferencias M^F y M^W, sean $f_i \in F$ y $w_j \in W$

$$m_{ij}^F := \begin{cases} k+1 & w_j P(f_i) f_i \quad y \quad |\{w_{j'} : w_{j'} P(f_i) w_j\}| = k \\ \infty & f_i P(f_i) w_j \end{cases}$$

y

$$m_{ij}^W := \begin{cases} k+1 & f_i P(w_j) w_j \quad y \quad |\{f_{i'} : f_{i'} P(w_j) f_i\}| = k \\ \infty & w_j P(w_j) f_i \end{cases}$$

Tenemos que el trabajador w_j es *aceptable* para la empresa f_i, si $m_{ij}^F < \infty$ y que la empresa f_i es *aceptable* para el trabajador w_j, cuando $m_{ij}^W < \infty$. La empresa f_i y el trabajador w_j, son *mutuamente aceptables* cuando $m_{ij}^F \; m_{ij}^W < \infty$.

Ejemplo 2 *Construyamos de las matrices de preferencias M^F, y M^W, para $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ y los ordenes de preferencia*

$$\begin{array}{ll} P(f_1) = w_1, w_2, w_3, w_4 & P(w_1) = f_2, f_3, f_1, f_4, f_5 \\ P(f_2) = w_4, w_2, w_3, w_1 & P(w_2) = f_3, f_1, f_2, f_4, f_5 \\ P(f_3) = w_4, w_3, w_1, w_2 & P(w_3) = f_5, f_4, f_1, f_2, f_3 \\ P(f_4) = w_1, w_4, w_3, w_2 & P(w_4) = f_1, f_4, f_5, f_2, f_3 \\ P(f_5) = w_1, w_2, w_4. & \end{array}$$

Como $w_1 P(f_1) f_1$ y $|\{w_{j'} : \; w_{j'} P(f_1) w_1\}| = |\emptyset| = 0 = k$, entonces $m_{11}^F = 1$, similarmente, $m_{12}^F = 2$ pues $w_2 R(f_1) f_1$ y $|\{w_{j'} : \; w_{j'} P(f_1) w_2\}| = |\{w_1\}| = k = 1$, y $m_{13}^F = 3$ pues $w_3 R(f_1) f_1$ y $|\{w_{j'} : \; w_{j'} P(f_1) w_3\}| = |\{w_1, w_2\}| = k = 2$. Notemos que $m_{53}^F = \infty$ pues $f_5 P(f_5) w_3$.Obtenemos las siguientes matrices de preferencias

$$M^F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & \infty & 3 \end{pmatrix} \qquad M^W = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Algoritmo
Entrada: $M^{F,0} = M^F$, *y* M^W, matrices de preferencias de los agentes
Salida: Matriz de a lo más un uno por columna.

1. Si para cada j, $\left|\left\{m_{ij}^{F,t} : m_{ij}^{F,t} = 1\right\}\right| \leq 1$, paro // se ha determinado la matriz.

2. Si no, defino[1]

$$m_{ij}^{F,t+1} = \begin{cases} \infty & j = j' \text{ y } m_{ij'}^W \neq \min\left\{m_{lj'}^W : m_{lj'}^{F,t} = 1\right\}. \\ m_{ij}^{F,t} - 1 & j \neq j' \text{ y } m_{ij'}^W \neq \min\left\{m_{lj'}^W : m_{lj'}^{F,t} = 1\right\} \\ m_{ij}^{F,t} & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Defino $t + 1 := t$. Regresa a 1.

El algoritmo trabaja de la siguiente manera. Dada la matriz de preferencias de las empresas $M^{F,\cdot}$, cuenta cuantos "1", tiene en cada columna, si para todo trabajador w_j hay a lo más un "1", el algoritmo se detiene, pues se encontró la matriz de salida. Si esto no ocurre, construye una nueva matriz de preferencias para las empresas, de la siguiente forma: Sea el trabajador w_j, tal que existe una única empresa f_i, con $m_{ij}^{F,t} = 1$, entonces la fila i, de $M^{F,t+1}$ no se modifica, es decir, $M_{i,\cdot}^{F,t+1} = M_{i,\cdot}^{F,t}$. Si para el trabajador w_j, existen al menos dos empresas f_i e $f_{i'}$, tales que $m_{ij}^{F,t} = m_{i'j}^{F,t} = 1$, sin perdida de generalidad supongamos que $m_{ij}^W = \min\left\{m_{lj}^W : m_{lj}^{F,t} = 1\right\}$, entonces, en este caso la fila i de $M^{F,t+1}$, no se modifica, es decir, $M_{i,\cdot}^{F,t+1} = M_{i,\cdot}^{F,t}$, mientras que la fila i' se modificará por $m_{i'j}^{F,t+1} = \infty$ (notemos que para cada $t' \geq t+1$ $m_{i'j}^{F,t'} = \infty$) y $m_{i'j'}^{F,t+1} = m_{i'j'}^{F,t} - 1$ para todo $w_{j'} \neq w_j$. Luego hace $t + 1 = t$, y vuelve a 1., a contar cuantos "1" tiene por columna.

Si el algoritmo no para, es porque existe w_j, tal que $\left|\left\{m_{ij}^{F,t+1} : m_{ij}^{F,t+1} = 1\right\}\right| > 1$, entonces pasamos a 2, donde modificarán ciertas filas en donde la columna w_j sea tal que $m_{i'j}^W \neq \min\left\{m_{lj}^W : m_{lj}^{F,t} = 1\right\}$. Note que en modificación cambia un "1" por un "∞". Por finitud de las entradas el algoritmo debe parar,

[1] $\min\left\{m_{lj'}^W : m_{lj'}^{F,t} = 1\right\} := \infty$, si no existe l, j' tal que $m_{lj'}^{F,t} = 1$.

es decir existe $\bar{t}$ tal que para cada j se cumple que:

$$\left|\left\{m_{lj}^{F,\bar{t}} : m_{lj}^{F,\bar{t}} = 1\right\}\right| \leq 1.$$

Supongamos que el algoritmo *se detiene* en $\bar{t}$, entonces definimos una aplicación $\overline{\mu}$ de $F \cup W$ en $F \cup W$ por:

$$\overline{\mu}(f_i) = \begin{cases} w_j & \text{si} \quad m_{ij}^{F,\bar{t}} = 1 \text{ y } m_{ij}^{W} < \infty \\ f_i & \text{si} \quad \forall j \quad m_{ij}^{F,\bar{t}} = \infty. \end{cases}$$

$$\overline{\mu}(w_j) = \begin{cases} f_i & \text{si} \quad m_{ij}^{F,\bar{t}} = 1 \text{ y } m_{ij}^{W} < \infty \\ w_j & \text{si} \quad \nexists i : m_{ij}^{F,\bar{t}} = 1. \end{cases}$$

Notemos que $\overline{\mu}(f_i) = f_i$ es cuando en la fila i de $M^{F,\bar{t}}$, todos los elementos son ∞, pues si hubiese un elemento menor que ∞, debe existir un trabajador $w_{j'}$ tal que $m_{ij'}^{F,\bar{t}} = 1$, ya que por construcción de $M^{F,t+1}$, el algoritmo le resta "1" en cada posición de la fila o se cambia un 1 por ∞.
Por otra parte, $\overline{\mu}(w_j) = w_j$, cuando la columna j de $M^{F,\bar{t}}$, no posee ningún 1, es decir el trabajador w_j no recibió ninguna propuesta de las empresas aceptables para él.

El Ejemplo siguiente muestra el algoritmo para el Ejemplo 2

Continuación Ejemplo 2 *Datos* $M^{F,0} = M^F$ *y* M^W.

$$M^{F,0} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & \infty & 3 \end{pmatrix} \qquad M^W = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. El algoritmo no para ya que en la columna 1 y 4 hay más de un "1".
2. Dada $M^{F,0}$y M^W, construimos $M^{F,1}$

$$M^{F,1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & \infty \\ \infty & 3 & 2 & 1 \\ \infty & 1 & \infty & 2 \end{pmatrix}$$

notemos que las filas 3, 4, y 5 se modifican ya que

$$\min\left\{m_{24}^{W}, m_{34}^{W},\right\} = \min\{4,5\} = 4 = m_{24}^{W}, \tag{1}$$

luego $m_{34}^{F,1} = \infty$, y para $j' \neq 4$, $m_{34}^{F,1} = m_{34}^{F,0} - 1$. También (1) implica que para todo $j = 1,2,3,4$, $m_{2,j}^{F,1} = m_{2,j}^{F,0}$. Como

$$\min\left\{m_{11}^{W}, m_{41}^{W}, m_{51}^{W}\right\} = \min\{3,4,5\} = 3 = m_{11}^{W},$$

la fila 1 de la matriz $M^{F,1}$, no se modifica mientras que si lo hacen las filas 4 y 5.

Hacemos $t = 1$.

1. El algoritmo no para ya que en la columna 4 hay dos "1".
2. Dada $M^{F,1} y\ M^{W}$, construimos $M^{F,2}$

$$M^{F,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & \infty \\ 2 & 3 & 1 & \infty \\ \infty & 3 & 2 & 1 \\ \infty & 1 & \infty & 2 \end{pmatrix}.$$

note que se modifica la fila 2 ya que

$$\min\left\{m_{i4}^{W} : m_{i4}^{F,2} = 1\right\} = \min\left\{m_{24}^{W}, m_{44}^{W}\right\} = m_{44}^{W}.$$

Hacemos $t = 2$

1. El algoritmo no para ya que la columna 2 tiene dos "1".
2. Dada $M^{F,2} y\ M^{W}$, construimos $M^{F,3}$

$$M^{F,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & \infty \\ 2 & 3 & 1 & \infty \\ \infty & 3 & 2 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 1 \end{pmatrix}.$$

Hacemos $t = 3$.

1. El algoritmo no para ya que la columna 4 tiene dos "1".
2. Dada $M^{F,3} y\ M^{W}$, construimos $M^{F,4}$

$$M^{F,4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & \infty \\ 2 & 3 & 1 & \infty \\ \infty & 3 & 2 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}.$$

Hacemos $t = 4$.
1. El algoritmo *se detiene*, ya en cada columna hay a lo más un "1". Tenemos que $\overline{t} = 4$.

El matching que se obtiene a partir de $M^{F,4}$, es:

$$\overline{\mu} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & f_5 \end{pmatrix}.$$

Presentamos ahora el resultado principal.

Teorema 1 *$\overline{\mu}$ es un matching estable y $\overline{\mu} = \mu_F$*

Demostración. Supongamos que el algoritmo para en la $\overline{t}$.

Mostremos que $\overline{\mu}$ es matching. De la definición de $\overline{\mu}$, se cumple que si $\overline{\mu}(f) \neq f$, entonces $\overline{\mu}(f) \in W$ y $\overline{\mu}(w) \neq w$, entonces $\overline{\mu}(w) \in F$. También se cumple que si $m_{ij}^{F,\overline{t}} = 1$, implica que $\overline{\mu}(f_i) = w_j$ y $\overline{\mu}(w_j) = f_i$, por lo tanto es un matching.

Veamos que $\overline{\mu}$ es individualmente racional. Supongamos que $\overline{\mu}(f_i) = w_j$, entonces $m_{ij}^{F,\overline{t}} = 1$, y, $m_{ij}^{W} < \infty$, por lo tanto por la definición de M^W tenemos que $f_i P(w_j) w_j$, el algoritmo implica que si $m_{ij}^{F,\overline{t}} = 1$ entonces $m_{ij}^{F,0} = m_{ij}^{F} < \infty$ y por la definición de M^F, $w_j P(f_i) f_i$.

Mostraremos que $\overline{\mu}$ no es bloqueado por ningún par de agentes. Supongamos que existe un par de agentes $(f_i, w_j) \in F \times W$ tal que $\overline{\mu}(f_i) \neq w_j$ y

$$w_j P(f_i) \overline{\mu}(f_i) = w_{j'} \tag{2}$$

es decir que $m_{ij}^{F} < m_{ij'}^{F}$, y como $m_{ij'}^{F,\overline{t}} = 1$, entonces $m_{ij}^{F,\overline{t}} = \infty$, por lo tanto existe $\widehat{t}$ tal que $m_{ij}^{F,\widehat{t}} = 1$, por el algoritmo tenemos que

$$m_{ij}^{W} \neq \min\left\{ m_{lj}^{W} : \ m_{lj}^{F,t} = 1, \text{ para } t = 1, ..., \overline{t} \right\} = m_{i'j}^{W}$$

entonces $m_{i'j}^{W} < m_{ij}^{W}$, (note que $\overline{\mu}(w_j) = f_{i'}$) por lo tanto $f_{i'} P(w_j) f_i$, es decir que (f_i, w_j) no puede bloquear a $\overline{\mu}$.

Veamos que $\overline{\mu} = \mu_F$. Como $\overline{\mu} \in S(P)$ tenemos que $\mu_F \; R(F) \; \overline{\mu} \; R(F) \; \mu_W$. Supongamos que $\mu_F \neq \overline{\mu}$, sin pérdida de generalidad sean $f_1, ..., f_{\bar{i}}$, tales que $\mu_F(f_i) \neq \overline{\mu}(f_i)$. Podemos suponer que existen $w_1, ..., w_{\bar{i}}$ tales que

$$\begin{array}{c}
w_1 = \mu_F(f_1) \quad P(f_1) \quad \overline{\mu}(f_1) = w_2 \\
w_2 = \mu_F(f_2) \quad P(f_2) \quad \overline{\mu}(f_2) = w_3 \\
\vdots \\
w_{\bar{i}} = \mu_F(f_{\bar{i}}) \quad P(f_{\bar{i}}) \quad \overline{\mu}(f_{\bar{i}}) = w_1.
\end{array}$$

Para cada $i = 1, ..., \bar{i}$, sean t_i, l_i tales que

$$\begin{array}{rcl}
m_{ii}^{F,t_i} & = & 1 \text{ y } m_{ii}^{F,t_i+1} = \infty \\
m_{l_i i}^{F,t_i} & = & 1 \text{ y } m_{l_i i}^{F,t_i+1} = 1.
\end{array} \tag{3}$$

Tanto t_i, como l_i existen, ya que al aplicar el algoritmo se cumple que $m_{i,i+1}^{F,\bar{t}} = 1$, $m_{ii}^F < m_{i,i+1}^F$, por lo tanto en algún paso t_i, existe l_i tal que las condiciones (3) son verdaderas. Supongamos que

$$t_1 = \min\left\{t_i : m_{ii}^{F,t_i} = 1,\ m_{ii}^{F,t_i+1} = \infty,\ m_{l_i i}^{F,t_i} = 1 \text{ y } m_{l_i i}^{F,t_i+1} = 1\right\},$$

entonces

$$\begin{array}{rcl}
m_{11}^{F,t_1} & = & 1 \text{ y } m_{11}^{F,t_1+1} = \infty \\
m_{l_i 1}^{F,t_1} & = & 1 \text{ y } m_{l_1 1}^{F,t_1+1} = 1,
\end{array} \tag{4}$$

notemos que

$$m_{l_1 1}^W < m_{11}^W \text{ o } f_{l_1} P(w_1) f_1, \tag{5}$$

si ocurre que $w_1 P(f_{l_1}) w_{l_1}$, entonces (f_{l_1}, w_1) bloquerían a μ_F, por lo tanto se cumple que

$$w_{l_1} P(f_{l_1}) w_1. \tag{6}$$

Supongamos que $\mu_F(f_{l_1}) = \overline{\mu}(f_{l_1})$. $m_{l_1 1}^{F,t_1} = 1$ entonces $w_1 P(f_{l_1}) \overline{\mu}(f_{l_1}) = \mu_F(f_{l_1})$ y condición (5) implica que (f_{l_1}, w_1) bloquean a μ_F. Luego, $\mu_F(f_{l_1}) \neq \overline{\mu}(f_{l_1})$, es decir que $\mu_F(f_{l_1}) = w_{l_1}$. Entonces tenemos que t_{l_1} satisface las condiciones (3), además $t_{l_1} < t_1$ ya que por (6) tenemos que $m_{l_1 l_1}^F < m_{l_1 1}^F$. Esto contradice la elección minimal de t_1. ■

4 Referencias

Adachi, H., 2000. On a Characterization of Stable Matchings. Economic Letters. 68, 43–49.

Echenique, F., Oviedo, J., 2004. Core Many-to-one Matchings by Fixed Point Methods. Journal of Economic Theory 115, 358–376.

Fleiner, T., 2003. A Fixed-Point Approach to Stable Matchings and Some Applications. Mathematics of Operations Research, 28 103–126.

Gale, D., Shapley, L., 1962. College Admissions and the Stability of Marriage. American Mathematical Monthly 69, 9-15.

Gusfield, D., Irving, R., 1989. The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms. MIT Press, Cambridge.

Irving, R., Leather, P., 1986. The Complexity of Counting Stable Marriages. SIAM Journal of Computing 15, 655-667.

Martínez, R., Massó, J., Neme, A., Oviedo, J., 2004. An Algorithm to Compute the Full Set of Many-to-Many Stable Matchings. Mathematical Social Sciences. 47, 187–210.

Roth, A.., Sotomayor, M., 1990. *Two-sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, England. [Econometrica Society Monographs No. 18].

McVitie, D., Wilson, L., 1971. The Stable Marriage Problem. Communications of the ACM 14, 486-493.