



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

Departamento de Física

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR DE LA FACULTAD
DE CIENCIAS EXACTAS

MEDIDAS ENTRÓPICAS DE CORRELACIONES EN SISTEMAS CUÁNTICOS

Tesista: Lic. Nicolás Alejandro Gigena

Director: Dr. Raúl Rossignoli

2018

Resumen

La presente tesis doctoral trata sobre el estudio y cuantificación de correlaciones entre sistemas cuánticos, tópico que ha despertado gran interés en las últimas décadas en el campo de la Teoría Cuántica de la Información y otras áreas de la física. El trabajo se divide en dos partes: en la primera abordamos la extensión a formas entrópicas generales de la entropía condicional cuántica dependiente de la medida y estudiamos el problema de optimización asociado, cuya solución permite obtener la medida que maximiza el acceso local a correlaciones en un estado de un sistema cuántico compuesto, y determina ciertas medidas entrópicas de correlación. En la segunda parte se aborda el problema de extender, de manera consistente, medidas de entrelazamiento y cuantificación de las correlaciones definidas para sistemas constituidos por componentes distinguibles a sistemas de fermiones indistinguibles, analizando las vinculaciones entre las diferentes formas de cuantificar el entrelazamiento en dichos sistemas.

Índice general

Introducción y motivación	7
1. Preliminares	11
1.1. Entropía e información	11
1.1.1. Entropía de Shannon	11
1.1.2. Entropía de von Neumann	17
1.1.3. Entropías generalizadas	23
1.2. Correlaciones entre sistemas cuánticos	27
1.2.1. Entrelazamiento	28
1.2.2. Correlaciones cuánticas más allá del entrelazamiento	34
2. Entropía condicional generalizada en sistemas cuánticos	40
2.1. Entropía condicional generalizada tras una medida local	41
2.1.1. Mínima entropía condicional y entrelazamiento de formación generalizado	44
2.1.2. Casos de medida óptima universal	45
2.2. El caso cuadrático: Pureza condicional tras una medida local	47
2.2.1. Propiedades generales	47
2.2.2. Algunas expresiones explícitas	50
2.2.3. El caso qubit-qudit	52
2.3. Mínima entropía condicional en estados X	54
2.3.1. Estados X	54
2.3.2. Mezcla de un estado puro con el estado máximamente mezclado	56
2.3.3. Mezcla de estados alineados	58
2.3.4. Pares de espines $1/2$ en cadenas XY sometidas a un campo transversal fuerte	59

3. Optimización de la entropía condicional generalizada en sistemas qudit-qubit	62
3.1. Mínima entropía condicional cuadrática y su interpretación geométrica	63
3.1.1. Expresiones generales	63
3.1.2. Entropía cuadrática	66
3.2. Optimización de la entropía condicional generalizada en el límite de correlación débil	69
3.2.1. Sistemas de dos qubits	72
3.2.2. Discordia cuántica en el régimen de correlación débil	76
3.3. Medida optimizante en estados de dos qubits con r_A y r_B paralelos a un eje principal de C	77
3.3.1. Medida óptima para estados X	79
4. Pureza condicional y medidas de correlación en mezclas de estados alineados	83
4.1. Teoría	84
4.1.1. Estado inicial	84
4.1.2. Estado local condicional y pureza condicional tras una medida local remota	87
4.1.3. Pureza condicional promedio	89
4.1.4. Discordia cuántica y su evaluación analítica	92
4.1.5. Pureza del estado posmedido global	93
4.2. Verificación experimental	95
4.2.1. Arreglo experimental	95
4.2.2. Resultados	96
5. Entrelazamiento en sistemas de fermiones	100
5.1. Entrelazamiento “de un cuerpo”: De modos a partículas	103
5.1.1. Entropía de entrelazamiento de un nivel.	103
5.1.2. Entropía de entrelazamiento de un cuerpo	105
5.1.3. Entropía de entrelazamiento de un cuerpo generalizada	106
5.1.4. Desigualdades entrópicas generalizadas y entropía cuadrática	109
5.1.5. Estados mixtos	110
5.2. El caso de 4 modos	111
5.2.1. Estados puros	112

5.2.2.	Evaluación analítica de la concurrencia en estados mixtos	118
6.	Entrelazamiento bipartito en sistemas de fermiones	122
6.1.	Entrelazamiento fermiónico y entrelazamiento bipartito	123
6.1.1.	Entrelazamiento bipartito como entrelazamiento entre dos fermiones	123
6.1.2.	Entrelazamiento bipartito como entrelazamiento fermiónico de cuasipartículas	126
6.1.3.	Entrelazamiento bipartito sin entrelazamiento fermiónico	129
6.1.4.	Entrelazamiento fermiónico como entrelazamiento de dos qubits	130
6.1.5.	Entrelazamiento fermiónico como mínimo entrelazamiento bipartito	132
6.2.	Circuitos cuánticos basados en modos fermiónicos	137
6.2.1.	Teleportación cuántica	138
7.	Pérdida de información “de un cuerpo” en sistemas de fermiones	143
7.1.	Pérdida de información de un cuerpo	144
7.1.1.	Pérdida de información inducida por la medida de un modo	144
7.1.2.	Pérdida de información de un cuerpo	147
7.1.3.	Condición estacionaria general	151
7.1.4.	Pérdida de información de un cuerpo generalizada	153
7.2.	Pérdida de información en una mezcla de un estado puro con el estado máximamente mezclado	155
7.2.1.	El caso de 4 modos	158
7.2.2.	Estados de dos fermiones	160
8.	Conclusiones	162
A.		165
A.1.	Entropía condicional generalizada	165
A.2.	Relación con el entrelazamiento de formación	166
B.		167
B.1.	Apéndice: Vacío de cuasipartículas	167

C.	168
C.1. Entrelazamiento entre particiones del espacio de estados de una partícula	168

Introducción y motivación

La cuantificación de correlaciones en sistemas cuánticos compuestos es uno de los tópicos de mayor interés en el campo de la información cuántica. No solo porque la existencia de formas de correlación sin análogo en el mundo clásico es una de las características distintivas de la mecánica cuántica, sino también porque se ha probado que tales correlaciones permiten la implementación de tareas imposibles de realizar usando sistemas clásicamente correlacionados, como la teleportación cuántica, protocolos de criptografía y comunicación cuántica, además de algoritmos cuánticos exponencialmente más veloces en comparación con su contraparte clásica.

La manifestación más estudiada de estas correlaciones es el entrelazamiento cuántico. Estas correlaciones están definidas como aquellas que no pueden ser generadas mediante un protocolo de operaciones locales y comunicación clásica (LOCC, por sus siglas en inglés) (ver capítulo 1). La presencia de correlaciones de este tipo en un estado cuántico procesado mediante un protocolo LOCC permite entonces la implementación de operaciones no locales y, así, la realización de ciertas tareas que sería imposible llevar adelante usando sistemas clásicamente correlacionados. La imposición del uso de operaciones LOCC en el procesado de estados cuánticos convierte entonces al entrelazamiento en un recurso y por lo tanto su comprensión, cuantificación y generación cobran una importancia obvia. Identificar y cuantificar entrelazamiento en estados cuánticos generales, sin embargo, presenta sus dificultades. Por empezar, determinar si un estado está o no entrelazado implica poder decidir si este puede escribirse como una combinación convexa de estados producto, problema que es en general muy difícil si el estado no es puro y de hecho está clasificado como NP-HARD (ver capítulo 1). Para estados mixtos, además, no se ha dado con una medida única de entrelazamiento y diferentes enfoques han dado lugar al desarrollo de diferentes medidas, entre las que pueden mencionarse el Entrelazamiento de Formación y el Entrelazamiento

Destilable. Por otra parte, la noción misma de “operación local” supone la posibilidad de operar únicamente sobre cierto subsistema de un sistema compuesto, lo que implícitamente asume la capacidad de distinguir los diferentes componentes de un sistema. Como consecuencia, identificar y cuantificar entrelazamiento en sistemas de partículas indistinguibles supone una nueva dificultad, pues surge la necesidad de identificar con precisión subsistemas sobre los que pueda operarse localmente.

El entrelazamiento, vale agregar, no agota las posibilidades en cuanto a las formas en que los sistemas cuánticos pueden correlacionarse. En los últimos años se ha reconocido que el paradigma LOCC no provee una descripción completa de las correlaciones no clásicas que pueden exhibir los sistemas cuánticos compuestos, dando lugar al surgimiento del concepto más amplio de “cuanticidad de las correlaciones”. De este nuevo acercamiento al problema de identificar y cuantificar correlaciones surgieron nuevas medidas de correlación, entre las que destaca la discordia cuántica (ver capítulo 1). Esta cantidad, definida como la diferencia entre dos posibles extensiones cuánticas de la información mutua clásica (o equivalentemente, de la entropía condicional clásica), ha despertado gran interés tras mostrarse que existen algoritmos cuánticos basados en estados no puros en los que una mejora exponencial respecto de los algoritmos clásicos es posible aún usando estados separables que, no obstante, exhiben discordia no nula. La evaluación de la discordia y medidas afines de cuanticidad de correlaciones, sin embargo, no es fácil pues su definición involucra la resolución de un problema de optimización sobre todas las posibles medidas locales en uno de los componentes del sistema global. Como consecuencia, solo se ha logrado evaluar estas cantidades en estados muy particulares de sistemas de dimensión pequeña, como ser un par de qubits.

A lo largo de esta tesis atacaremos dos problemas diferentes: en una primera parte, después de introducir en el capítulo 1 los conceptos básicos con los que vamos a tratar en el resto del trabajo, estudiamos una de las posibles extensiones a estados cuánticos compuestos de la entropía condicional clásica, generalizando su definición a formas entrópicas generales en el capítulo 2. La definición de esta cantidad involucra una medida local sobre uno de los componentes, y cuantifica por tanto las correlaciones entre partes a las que puede accederse mediante medidas locales. De tal definición surge naturalmente la necesidad de conocer qué medida maximiza el acceso local a correlaciones, y por lo tanto minimiza la entropía condicional. Identificamos primero clases de estados en los que la medida óptima

es universal y puede obtenerse analíticamente, y resolvemos en forma analítica el problema de optimización para estados qudit-qubit generales en el caso de la entropía cuadrática. Derivamos entonces en el capítulo 3 una aproximación que nos permite resolver el problema de optimización en estados débilmente correlacionados de sistemas qudit-qubit, y para cualquiera de las formas entrópicas consideradas. El capítulo 4 está dedicado a la verificación experimental, en una clase particular de estados mixtos, de los resultados obtenidos previamente.

La segunda parte de la tesis está dedicada al estudio de correlaciones en sistemas de fermiones indistinguibles. En el capítulo 5 introducimos una medida de entrelazamiento entre modos fermiónicos que involucra valores medios de observables de un cuerpo y mostramos que su mínimo sobre bases del espacio de Hilbert de una partícula cuantifica entrelazamiento entre partículas, estableciéndose entonces por primera vez un vínculo entre estas dos nociones distintas de entrelazamiento. Para el caso en que el espacio de Hilbert de una partícula tiene dimensión 4 derivamos una expresión cerrada que permite evaluar el entrelazamiento de un estado mixto arbitrario, generalizando así la conocida fórmula de Wootters para el caso de dos qubits distinguibles. En el capítulo 6 estudiamos la relación entre la medida de entrelazamiento previamente introducida y el entrelazamiento que pueden exhibir estados de dos qubits basados en sistemas fermiónicos, examinando en particular el caso en el que el espacio de Hilbert de una partícula del sistema fermiónico tiene dimensión 4. Mostramos que el entrelazamiento fermiónico puede ser extraído y utilizado para la implementación de ciertas tareas si se miden los observables apropiados. Finalmente en el capítulo 7 estudiamos la posibilidad de introducir medidas de cuanticidad de correlaciones en sistemas fermiónicos, que resulten compatibles con la medida de entrelazamiento estudiada en los capítulos previos. El resultado es una medida de déficit de información fermiónico que involucra valores medios de observables de un cuerpo y que se reduce, en el caso de estados puros, a la entropía de entrelazamiento mencionada, en completa analogía con sus contraparte definida para sistemas de componentes distinguibles.

Publicaciones

Las investigaciones descritas en esta tesis dieron lugar a las publicaciones científicas [1-7] indicadas a continuación. También he sido coautor de un trabajo sobre tema afín [8], no incluido en esta Tesis.

1. *Generalized conditional entropy in bipartite quantum systems*,
N. Gigena, R. Rossignoli, J. Phys. A **47**, 015302 (2014).
2. *Generalized conditional entropy optimization for qudit-qubit states*,
N. Gigena, R. Rossignoli, Phys. Rev. A **90**, 042318 (2014).
3. *Conditional purity and quantum correlation measures in two qubit mixed states*,
L. Rebón, R. Rossignoli, J. J. Varga, N. Gigena, N. Canosa, C. Iemmi and S. Ledesma, J. Phys. B **49**, 215201 (2016).
4. *Entanglement in fermion systems*,
N. Gigena, R. Rossignoli, Phys. Rev. A **92** 042326 (2015).
5. *One body information loss in fermion systems*,
N. Gigena, R. Rossignoli, Phys. Rev. A **94** 042315 (2016).
6. *Bipartite entanglement in fermion systems*,
N. Gigena, R. Rossignoli, Phys. Rev. A **95** 062320 (2017).
7. *Quantum Discord and Entropic Measures of Quantum Correlations: Optimization and Behavior in Finite XY Spin Chains*,
N. Canosa, M. Cerezo, N. Gigena, R. Rossignoli; en *Lectures on General Quantum Correlations and Their Applications*, Eds. F.F. Fanchini, D. Soares Pinto, G. Adesso, Springer International Publishing AG. 2017. (en prensa), ISBN 9783319534107.
8. *System-time entanglement in a discrete-time model*,
A. Boette, R. Rossignoli, N. Gigena, M. Cerezo, Phys. Rev. A **93** 062127 (2016).

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Entropía e información

1.1.1. Entropía de Shannon

El desarrollo de la teoría de la información por parte de Shannon [1] estuvo motivado por la necesidad de mejorar la eficiencia en la transmisión de señales. Se considera como punto de partida que la cantidad de información transmitida en un mensaje puede ser cuantificada. Si esto es posible, entonces puede compararse la performance de diferentes sistemas de transmisión o protocolos de codificación, lo que deviene en una optimización en tiempos de transmisión o tamaño de memorias.

Los mensajes normalmente tienen un significado, esto es, refieren directamente o están correlacionados con algún sistema con determinadas características. Estas consideraciones de tipo semántico sin embargo son irrelevantes a la hora de estudiar la transmisión de información, y el único aspecto relevante es que el mensaje a transmitir es elegido entre un conjunto de posibles mensajes. Una fuente de información, entonces, puede ser representada por una variable aleatoria X que toma n posibles valores x_i , con alguna distribución de probabilidad $p_i = P(X = x_i)$. La información es así producida por la fuente cuando un mensaje particular es elegido de entre todos los posibles. Esto implica que la cantidad de información producida no depende del significado del mensaje o de cuál es el alfabeto del que se elige, sino simplemente de la elección misma. Cuantificar la cantidad de información producida por la fuente es entonces equivalente a cuantificar “cuánto hay de elección” en la ocurrencia de un evento (un mensaje)

particular, por lo que la cantidad $I(X = x_i)$ que mide esta información debe ser una función decreciente de la probabilidad a priori p_i , es decir, $I(X = x_i) = I(p_i)$. Equivalentemente podemos pensar que esta cantidad mide la *sorpresa* que causa la ocurrencia de un evento particular: obtenemos muy poca información cuando nos enteramos de la ocurrencia de un evento del que teníamos certeza, mientras que la ocurrencia de eventos raros resulta muy informativa. Una última característica deseable de esta cantidad $I(X = x_i)$ es la aditividad: supongamos que dos eventos ocurren con probabilidades p_1 y p_2 . Si los eventos son independientes (en cuyo caso la probabilidad conjunta es $p_{12} = p_1 p_2$) la información obtenida tras la ocurrencia de estos debería ser igual a la suma de la información que obtendríamos por la observación de cada evento por separado, lo que se escribe como $I(p_1 p_2) = I(p_1) + I(p_2)$. Si a estas propiedades sumamos la continuidad, arribamos a que la función que mide la información producida por la fuente, la *función sorpresa*, es

$$I(p) = -\log(p). \quad (1.1)$$

Cabe mencionar que las propiedades anteriores no definen la base del logaritmo. Fijar la base es equivalente a definir una unidad de medida de información. Si la base es dos, por ejemplo, la unidad de medida es el dígito binario o *bit*. Un dispositivo con solo 2 estados es entonces capaz de almacenar un bit de información.

Provistos ahora de la función sorpresa (1.1) como medida de la información que obtenemos al conocer la ocurrencia de un evento podemos cuantificar la información que nos falta *antes* de recibir el mensaje, dado que conocemos la distribución a priori $\{p_i\}$. Esta nueva cantidad es la *Entropía de Shannon*, y se define como el promedio de las sorpresas de cada evento, pesado por las correspondientes probabilidades:

$$H(X) = \sum_i p_i I(p_i) = - \sum_i p_i \log p_i. \quad (1.2)$$

De la definición se sigue que la entropía es una cantidad no negativa, y se anula únicamente cuando las probabilidades de todos los eventos son nulas con excepción de uno, que obviamente ocurre con probabilidad 1. El valor nulo de la entropía indica que la incerteza respecto del valor de la variable es, en este caso, nula. Por otra parte H toma su valor máximo para la distribución uniforme, $H(\{p_i\}) \leq H(\{1/n\})$, situación que intuitivamente entendemos como la de máxima incerteza.

Una característica esencial de la entropía como función de la distribución de

probabilidad es la concavidad. Consideremos un conjunto de procesos mutuamente excluyentes, cada uno con un resultado representado por una variable aleatoria X_i y que suceden en forma aleatoria, con distribución de probabilidad $\{q_i\}$. Cada variable tiene una entropía asociada $H(X_i)$ y también el conjunto, representado por una variable aleatoria \tilde{X} . Si p_j^i es la probabilidad de que X_i tome el valor x_j^i , entonces la probabilidad del evento $\tilde{X} = x_j^i$ es $q_i p_j^i$. La entropía de \tilde{X} será entonces

$$H(\tilde{X}) = - \sum_{ij} q_i p_j^i \log(q_i p_j^i) \quad (1.3)$$

$$= - \sum_i \left(\sum_j p_j^i \right) q_i \log(q_i) - \sum_i q_i \sum_j p_j^i \log(p_j^i) \quad (1.4)$$

$$= H(\{q_i\}) + \sum_i q_i H(X_i) \quad (1.5)$$

Intuitivamente este es un resultado esperado: si la entropía es una medida de la ignorancia acerca de la variable aleatoria X entonces la entropía de la variable conjunta \tilde{X} debe ser mayor que el valor esperado para las variables X_i , puesto que la primera mide no solo la incerteza acerca de las variables X_i sino también la incerteza asociada a la distribución $\{q_i\}$.

1.1.1.1. Entropía conjunta, entropía relativa e información mutua

Tomemos ahora el caso de dos variables aleatorias, X e Y , con posibles valores x_i e y_j respectivamente. Si denotamos con $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ la probabilidad de la ocurrencia conjunta de $X = x_i$ e $Y = y_j$, entonces la *entropía conjunta* del par de variables es igual a la entropía de la variable compuesta XY , dada por

$$H(X, Y) = - \sum_{i,j} p_{ij} \log(p_{ij}). \quad (1.6)$$

De la distribución conjunta $\{p_{ij}\}$ pueden obtenerse las distribuciones marginales, $p_i^x = P(X = x_i) = \sum_j p_{i,j}$ y $p_j^y = P(Y = y_j) = \sum_i p_{i,j}$, a partir de las cuales puede evaluarse la entropía de cada una de las variables X e Y individualmente:

$$H(X) = - \sum_i p_i^x \log p_i^x \quad (1.7)$$

$$H(Y) = - \sum_i p_i^y \log p_i^y. \quad (1.8)$$

Las siguientes desigualdades que relacionan estas cantidades resultan intuitivas y fácilmente demostrables (ver ecuaciones (1.13), (1.17)):

$$H(X) \leq H(X, Y) \quad (1.9)$$

$$H(Y) \leq H(X, Y) \quad (1.10)$$

$$H(X, Y) \leq H(X) + H(Y). \quad (1.11)$$

Las desigualdades (1.9) y (1.10) indican que la incerteza acerca de cualquiera de las variables marginales no puede ser mayor que la incerteza acerca del conjunto, y saturan en el caso en el que una de las variables sea una función de la otra. La última desigualdad establece que la incerteza acerca de la variable conjunta no puede ser nunca mayor que la suma de las incertezas de las variables individuales. Si los valores que toman X e Y están correlacionados, entonces tienen información en común que en la suma de la derecha en (1.11) se cuenta dos veces. La desigualdad (1.11), como es esperable, satura cuando las variables X e Y son independientes, en cuyo caso se verifica $p_{ij} = p_i^x p_j^y$. Estos resultados motivan la definición de una nueva cantidad, la *información mutua* de X e Y

$$H(X : Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y), \quad (1.12)$$

que mide la información que X e Y tienen en común. Por construcción esta cantidad es nula si las variables son independientes y es positiva en caso contrario, tomando un valor máximo cuando la dependencia es completa, en cuyo caso una de las variables puede expresarse como una función de la otra. Esta situación se ilustra en la figura 1.2. La información mutua es entonces una medida entrópica de las correlaciones entre las variables X e Y .

Vamos ahora a definir una cantidad que va a ser de particular interés en los capítulos que siguen: la *entropía condicional*. Supongamos que la variable Y toma el valor y_k . Podemos, por el teorema de Bayes, usar este conocimiento para “actualizar” la distribución de probabilidad de X a la distribución condicional $\{P(X = x_i | Y = y_k) = p_{ik}/p_k^y\}$, con lo cual la entropía asociada a la variable pasa a ser la entropía de esta nueva distribución $H(X|Y = y_k)$. Vemos entonces que la incerteza promedio acerca de X dado que se conoce Y está dada por la entropía

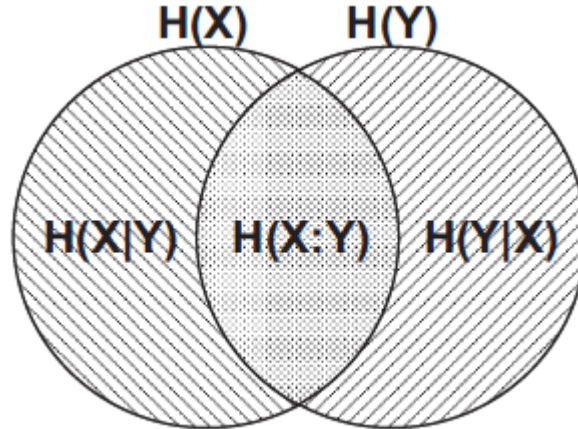


Figura 1.1: Esquema de la relación entre la Información mutua de las variables X e Y , sus entropías y la entropía conjunta [2].

condicional $H(X|Y)$

$$\begin{aligned}
 H(X|Y) &= \sum_k p_k^y H(X|Y = y_k) \\
 &= - \sum_{ik} p_{ik} \log \left(\frac{p_{ik}}{p_k^y} \right) \\
 &= H(X, Y) - H(Y).
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

De la definición se sigue que la entropía condicional es una cantidad no negativa, y la forma (1.13) implica entonces la desigualdad (1.9) (y también (1.10)). Además, de (1.11) vemos que $H(X|Y) = H(X)$ si y solo si X e Y son independientes.

1.1.1.2. Entropía relativa

Resulta de utilidad en este punto introducir una nueva cantidad, la *entropía relativa* o *divergencia de Kullback-Leibler*, en términos de la que pueden escribirse las cantidades ya introducidas, y que es también de importancia en el caso cuántico también. Dadas dos distribuciones de probabilidad $P = \{p_i\}$ y $Q = \{q_j\}$, la entropía de P relativa a Q se define como

$$D(\{p_i\} || \{q_j\}) = \sum_i p_i \log \left(\frac{p_i}{q_i} \right), \tag{1.14}$$

y es una medida de cómo la distribución Q diverge de P . Puede interpretarse como el incremento en la entropía que supone, para una dada variable aleatoria X , asumir la distribución de probabilidad $\{q_j\}$ en lugar de la verdadera distribución de la variable $\{p_i\}$.

De la definición es claro que la entropía relativa solo está definida cuando $q_i = 0 \implies p_i = 0 \forall i$. Además es una cantidad no negativa, como probamos a continuación

Teorema 1.1.

$$D(\{p_i\}||\{q_j\}) \geq 0.$$

Demostración. Puesto que $\forall x \geq 0 : -\log x \geq (1-x)/\ln 2$, con igualdad *sii* $x = 1$, vemos que

$$D(\{p_i\}||\{q_j\}) = \sum_i p_i \log \left(\frac{p_i}{q_i} \right) \geq \frac{1}{\ln 2} \sum_i p_i \left(1 - \frac{q_i}{p_i} \right) = 0,$$

donde la igualdad se da *sii* $p_i = q_i \forall i$ □

La entropía relativa nos es de utilidad porque las cantidades entrópicas ya mencionadas pueden escribirse en términos de esta. Así, por ejemplo, es fácil probar que la entropía de Shannon de una distribución $\{p_i\}$ puede escribirse en términos de la entropía relativa como

$$H(\{p_i\}) = \log d - D(\{p_i\}||\{1/d\}), \tag{1.15}$$

donde d es la dimensión del vector de probabilidades $\{p_i\}$. De la no negatividad de la entropía relativa deducimos entonces que $H(\{p_i\}) \leq \log d$, es decir, la entropía de una distribución es siempre menor que la entropía de la distribución uniforme, propiedad esencial que como vamos a ver más adelante conecta a esta medida de información con la noción de mayorización.

De manera análoga podemos escribir a la entropía condicional y la información mutua usando la entropía relativa. Consideremos una distribución conjunta $\{p_{ij}\}$ para una variable compuesta XY con distribuciones marginales $\{p_i^x\}$ y $\{p_j^y\}$, y a la distribución que surge del producto de $\{p_j^y\}$ con $\{1/d\}$. La entropía de la primera relativa a la segunda es

$$D(\{p_{ij}\}||\{p_j^y \frac{1}{d}\}) = \sum_{i,j} p_{ij} \log \left(\frac{p_{ij}}{p_j^y} \cdot d \right) = -H(X|Y) + \log d, \tag{1.16}$$

de manera que podemos escribir la entropía condicional como $H(X|Y) = \log d - D(XY||YI)$, donde YI representa la composición de la variable Y con otra de la misma dimensión que X (d) pero uniformemente distribuida. Siguiendo la misma idea es fácil ver que también podemos usar la entropía relativa para escribir la información mutua entre X e Y como

$$H(X : Y) = D(XY||X.Y) \quad (1.17)$$

es decir, la información mutua entre X e Y está dada por la entropía de la distribución conjunta relativa al producto de las distribuciones marginales para X e Y . La no negatividad de la entropía relativa asegura la no negatividad de la información mutua, y de hecho constituye una prueba de la propiedad de subaditividad de la entropía de Shannon.

1.1.2. Entropía de von Neumann

En la sección anterior vimos que una fuente clásica de información puede ser modelada por medio de una variable aleatoria. Vamos a considerar ahora el caso en el que la fuente de información es cuántica, lo que implica que el estado de la fuente ya no puede ser representado por una variable aleatoria, sino que viene dado por un *operador (o matriz) densidad*.

1.1.2.1. Formalismo de la mecánica cuántica

El estado de un sistema cuántico está representado por un operador densidad ρ sobre un espacio de Hilbert separable \mathcal{H} de dimensión n . Siguiendo la notación de Dirac representamos a los vectores de este espacio con *kets* $|\psi\rangle$, entendiendo entonces el símbolo $\langle\psi|\phi\rangle$ como el producto escalar entre los estados $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$, y a $|\psi\rangle\langle\psi|$ como el proyector ortogonal sobre $|\psi\rangle$. El operador densidad $\rho : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ es hermítico y semidefinido positivo, con traza igual a la unidad:

$$\rho \geq 0, \quad \text{Tr}\rho = 1.$$

Decimos que el estado ρ del sistema es puro si y solo si $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ para algún $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, es decir, si el operador es un proyector sobre algún vector $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. Esto implica $\rho = \rho^2$ para estados puros. En el caso general el estado ρ del sistema es una mezcla estadística de proyectores de este tipo, con una descomposición

espectral

$$\rho = \sum_k \lambda_k |k\rangle\langle k|,$$

donde los autovalores λ_k , $k = 1, \dots, n$ satisfacen $0 \leq \lambda_k \leq 1$ y $\sum_k \lambda_k = 1$ y los vectores $\{|i\rangle\}$ forman una base ortonormal de \mathcal{H} . Para estos estados generales se verifica $\rho^2 \leq \rho$, a saber, que el operador $\rho - \rho^2$ es semidefinido positivo. Se sigue entonces que $\text{Tr}\rho^2 \leq 1$, con igualdad sii ρ es un estado puro.

Los observables del sistema también están representados por operadores autoadjuntos $\mathcal{O} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, cuyos valores medios vienen dados por

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \text{Tr}\rho\mathcal{O}.$$

Si $\mathcal{O} = \sum_i o_i |\tilde{i}\rangle\langle \tilde{i}|$, con $\{|\tilde{i}\rangle, i = 1, \dots, \dim(\mathcal{H})\}$ una base de \mathcal{H} , es la descomposición espectral de \mathcal{O} entonces la expresión anterior es

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \sum_i o_i \text{Tr}\rho|\tilde{i}\rangle\langle \tilde{i}| = \sum_i o_i p_i, \quad (1.18)$$

con $p_i = \langle \tilde{i}|\rho|\tilde{i}\rangle = \text{Tr}\rho|\tilde{i}\rangle\langle \tilde{i}|$, que interpretamos como la probabilidad de obtener el valor o_i al medir \mathcal{O} ó, equivalentemente, como la probabilidad de encontrar al sistema en el estado $|\tilde{i}\rangle$.

En general una medida sobre el sistema viene descrita por un conjunto de operadores $\{M_i\}$ que satisfacen $\sum_i M_i^\dagger M_i = I$, donde I denota el operador identidad en \mathcal{H} e i es un índice que identifica los posibles resultados, de manera que la probabilidad de obtener el resultado i al realizar la medida está dada por

$$p_i = \text{Tr}\rho M_i^\dagger M_i.$$

Que el conjunto $\{p_i\}$ es una distribución de probabilidad queda asegurado por la positividad de $M_i^\dagger M_i$, la condición $\sum_i M_i^\dagger M_i = I$ y el hecho de que el espectro de ρ es también una distribución de probabilidad. Después de una medida con resultado i el estado del sistema es

$$\tilde{\rho}_i = \frac{M_i \rho M_i^\dagger}{p_i}.$$

Si el resultado de la medida no se leyera, es decir, si no hubiese postselección, entonces la ignorancia en el resultado queda reflejada en el estado del sistema

inmediatamente después de la medida, siendo este

$$\tilde{\rho} = \sum_i p_i \frac{M_i \rho M_i^\dagger}{p_i} = \sum_i M_i \rho M_i^\dagger.$$

Como caso particular de este formalismo general para representar medidas, denominado *POVM* (*positive operator-valued measure*), se encuentran las *medidas proyectivas*. En estas los operadores de medida son operadores de proyección, $M_i = \Pi_i = \Pi_i^2$. Si además estos proyectores tienen rango igual a la unidad, y forman un conjunto ortogonal, entonces decimos que se trata de una *medida de von Neumann*. En tal caso los operadores de medida pueden escribirse como $\Pi_i = |i\rangle\langle i|$, donde los vectores $\{|i\rangle\}$ forman una base ortonormal de $\{\mathcal{H}\}$. La medición de un observable del sistema (1.18) constituye entonces una medida de von Neumann.

Sistemas compuestos

Consideremos ahora un sistema cuántico compuesto por dos constituyentes distinguibles A y B . Si \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B denotan el espacio de estados de A y B respectivamente, entonces el espacio de estados del sistema conjunto AB es $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, donde el símbolo \otimes denota el producto tensorial de espacios. El estado del sistema conjunto entonces será un operador densidad ρ_{AB} sobre este último espacio. Los estados marginales o *reducidos* (análogo cuántico de la distribución marginal clásica) de cada subsistema se obtienen a partir de ρ_{AB} mediante trazas parciales

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB} = \sum_i \langle i_A | \rho_{AB} | i_A \rangle \quad (1.19)$$

$$\rho_B = \text{Tr}_A \rho_{AB} = \sum_j \langle j_B | \rho_{AB} | j_B \rangle, \quad (1.20)$$

donde $\{|i_A\rangle\}$ y $\{|j_B\rangle\}$ forman bases de \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B respectivamente. Estos estados reducidos reproducen la estadística del estado conjunto para observables locales, es decir, si \mathcal{O}_B es un observable en B tenemos $\langle \mathcal{O}_B \rangle = \text{Tr}(\rho_{AB} I_A \otimes \mathcal{O}_B) = \text{Tr}_B \rho_B \mathcal{O}_B$.

1.1.2.2. Entropía en el formalismo cuántico

La noción de entropía puede ahora extenderse al caso en que la fuente de información es un sistema cuántico mediante la *entropía de von Neumann*, definida

para un operador densidad $\rho : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ como

$$S(\rho) = -\text{Tr}\rho \log \rho = -\sum_k \lambda_k \log \lambda_k. \quad (1.21)$$

Vemos entonces que la entropía de von Neumann de un operador ρ es igual a la entropía de Shannon de su distribución de autovalores, y de esta última igualdad sigue inmediatamente que la entropía de von Neumann es no negativa, $S(\rho) \geq 0$, con igualdad *sii* ρ es un estado puro. Por el contrario, vemos también que S será máxima cuando la distribución de autovalores de ρ sea $\{\lambda_k = 1/n, k = 1, \dots, n\}$, en cuyo caso el estado es $\rho = I_n/n$ donde I_n es el operador identidad en \mathcal{H} .

Si el sistema cuántico es bipartito podemos extender la noción clásica de entropía conjunta y marginal simplemente evaluando la entropía de von Neumann del estado conjunto y los estados marginales respectivamente. Tenemos entonces

$$S_{AB} = S(\rho_{AB}) = -\text{Tr}\rho_{AB} \log \rho_{AB} \quad (1.22)$$

$$S_{A(B)} = S(\rho_{A(B)}) = -\text{Tr}\rho_{A(B)} \log \rho_{A(B)}. \quad (1.23)$$

En el caso clásico se dice de un par de variables X e Y que son independientes o no correlacionadas si su distribución de probabilidad conjunta es $p_{ij} = p_i^x p_j^y$, con p_i^x y p_j^y las distribuciones marginales de cada variable. Esta idea se extiende también al caso cuántico tomando a los sistemas A y B como no correlacionados cuando el estado del sistema conjunto es $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$. En efecto, si $\mathcal{O}_A = \sum_i o_i^A |i_A\rangle\langle i_A|$ y $\mathcal{O}_B = \sum_j o_j^B |j_B\rangle\langle j_B|$ son las descomposiciones espectrales de dos observables sobre A y B respectivamente, entonces la probabilidad de obtener el valor o_i^A en A y o_j^B en B es $\text{Tr}(\rho_A \otimes \rho_B |i_A\rangle\langle i_A| \otimes |j_B\rangle\langle j_B|) = \text{Tr}(\rho_A |i_A\rangle\langle i_A|) \text{Tr}(\rho_B |j_B\rangle\langle j_B|)$, por lo que no hay correlación en los resultados de las medidas. En este caso los autovalores del estado ρ_{AB} satisfacen $\lambda_{ij}^{AB} = \lambda_i^A \lambda_j^B$ y entonces vale $S(\rho_{AB}) = S(\rho_A) + S(\rho_B)$ como sucede en el caso clásico. La extensión de estas nociones a un número arbitrario de componentes es directa.

1.1.2.3. Entropía relativa, condicional e información mutua

Como sucede para la entropía de Shannon y medidas afines, resulta de utilidad introducir la noción de entropía relativa. La definición de entropía relativa para el caso de sistemas cuánticos es una generalización directa, a operadores densidad, de la definición en el caso clásico. Si ρ y σ son dos matrices densidad entonces la

entropía de ρ relativa a σ está dada por la expresión

$$S(\rho||\sigma) = \text{Tr}\rho \log \rho - \text{Tr}\rho \log \sigma. \quad (1.24)$$

En analogía con el caso clásico esta cantidad diverge si el núcleo de σ tiene intersección con el soporte de ρ . La versión cuántica de la entropía relativa es también no negativa, propiedad que se sigue de la no negatividad de su contraparte clásica, como mostramos a continuación.

Teorema 1.2. *Teorema de Klein*

$$S(\rho||\sigma) \geq 0.$$

Demostración. Sean $\rho = \sum_i p_i |i_\rho\rangle\langle i_\rho|$ y $\sigma = \sum_j q_j |j_\sigma\rangle\langle j_\sigma|$ las descomposiciones espectrales de ρ y σ respectivamente. De la definición (1.24) tenemos

$$S(\rho||\sigma) = \sum_i p_i \log p_i - \sum_i p_i \langle i_\rho | \left(\sum_j \log q_j |j_\sigma\rangle\langle j_\sigma| \right) | i_\rho \rangle \quad (1.25)$$

$$= \sum_i p_i (\log p_i - \sum_j P_{ij} \log q_j), \quad (1.26)$$

donde $P_{ij} = \langle i_\rho | j_\sigma \rangle \langle j_\sigma | i_\rho \rangle \geq 0$ satisface $\sum_i P_{ij} = \sum_j P_{ij} = 1$ y es por lo tanto una matriz doblemente estocástica, lo que implica $\sum_j P_{ij} \log q_j \leq \log(\sum_j P_{ij} q_j)$ con igualdad *sii* P_{ij} es una matriz de permutación (lo que significa que ρ y σ son diagonalizables en la misma base). De manera que

$$S(\rho||\sigma) \geq \sum_i p_i \log \frac{p_i}{r_i},$$

con $r_i = \sum_j P_{ij} q_j$. Esta última expresión es una entropía relativa entre dos distribuciones de probabilidad clásicas, y por el teorema (1.1) es no negativa. Deducimos entonces

$$S(\rho||\sigma) \geq 0.$$

con igualdad *sii* $p_i = r_i \forall i$ y P_{ij} es una matriz de permutación. Es decir, con igualdad *sii* $\rho = \sigma$. \square

Vale notar que si bien la entropía de cada operador es igual a la entropía de Shannon de su distribución de autovalores, la entropía de ρ relativa a σ es mayor

que la entropía relativa clásica $D(\{p_i\}||\{q_j\})$, y la demostración anterior muestra que esto es así porque $[\rho, \sigma] \neq 0$ en general.

Supongamos ahora un sistema cuántico bipartito AB cuyo estado es ρ_{AB} , con estados marginales ρ_A y ρ_B para los subsistemas A y B respectivamente. Podemos evaluar la entropía de ρ_{AB} relativa al producto tensorial de sus estados marginales, extendiendo así al caso cuántico la definición clásica de información mutua. Tenemos entonces que la información mutua cuántica está dada por

$$I(A : B) = D(\rho_{AB}||\rho_A \otimes \rho_B) \quad (1.27)$$

$$= S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) = S(A) + S(B) - S(AB). \quad (1.28)$$

Al igual que en el caso clásico, esta cantidad es necesariamente no negativa, pues es una entropía relativa. De manera análoga es también posible generalizar la definición clásica de la entropía condicional al caso cuántico. Si evaluamos la entropía de ρ_{AB} relativa a $\frac{1}{d_A}I_A \otimes \rho_B$, donde I_A es la identidad en el espacio de Hilbert \mathcal{H}_A del subsistema A y d_A la dimensión de \mathcal{H}_A , resulta

$$\begin{aligned} S(\rho_{AB}||\frac{1}{d_A}I_A \otimes \rho_B) &= \text{Tr}\rho_{AB} \log \rho_{AB} - \text{Tr}\rho_{AB}(\log \frac{1}{d_A}I_A + \log \rho_B) \\ &= S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) + \log(d_A), \end{aligned}$$

y luego la entropía de A dado B es

$$S(A|B) = S(\rho_{AB}) - S(\rho_B) = \log d_A - S(\rho_{AB}||\frac{1}{d_A}I_A \otimes \rho_B). \quad (1.29)$$

Vale notar en este punto que, a diferencia de lo que se observa en el caso clásico, *la entropía condicional cuántica puede tomar valores negativos*. En particular es fácil ver que esto sucede cuando ρ_{AB} es un estado puro entrelazado, en cuyo caso vale $S(\rho_{AB}) = 0$, y entonces la entropía condicional es $S(A|B) = -S(B)$. Los valores negativos para la entropía condicional indican la existencia de estados globales tales que nuestra incerteza acerca del estado de una de las partes es mayor que aquella respecto al sistema conjunto, lo cual a su vez implica la existencia de correlaciones sin análogo clásico en dichos estados globales. Vamos a volver sobre esto en la próxima sección.

1.1.3. Entropías generalizadas

1.1.3.1. Mayorización

La mayorización es una relación de preorden en \mathbb{R}^d que puede usarse para comparar distribuciones de probabilidad. Es decir, nos permite comparar dos distribuciones dadas y decidir cuál resulta más ordenada. Formalmente,

Definición Sean \mathbf{a} y \mathbf{b} vectores en \mathbb{R}^d tales que $\text{Tr } \mathbf{a} = \sum_i^d a_i = \sum_j^d b_j = \text{Tr } \mathbf{b}$. Decimos que \mathbf{a} *mayoriza a* \mathbf{b} , en símbolos $\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$, si y solo si

$$\sum_i^k a_i^\downarrow \geq \sum_i^k b_i^\downarrow \quad \forall k = 1, \dots, d,$$

donde a_i^\downarrow y b_i^\downarrow son las componentes de \mathbf{a} y \mathbf{b} respectivamente, ordenadas en forma decreciente [5].

La relación definida impone un orden que solo es parcial en \mathbb{R}^d . Esto significa que existen pares de vectores del espacio que no son comparables mediante mayorización, a saber, que verifican $\mathbf{a} \not\succeq \mathbf{b}$ y $\mathbf{b} \not\succeq \mathbf{a}$ valen simultáneamente.

Dada la definición no es evidente que la relación $\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$ implica que \mathbf{a} está más ordenado que \mathbf{b} . Para verlo vamos a apoyarnos en la siguiente propiedad:

Propiedad 1.3. *Dados dos vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$ sii existe una matriz doblemente estocástica tal que*

$$\mathbf{b} = D\mathbf{a}.$$

Una matriz *doblemente estocástica* es una matriz cuadrada de entradas $(D)_{ij} = d_{ij}$ reales y no negativas, que satisfacen

$$\sum_i d_{ij} = \sum_j d_{ij} = 1.$$

Estas matrices forman un conjunto convexo, siendo sus elementos extremales las matrices de permutación $\{\pi_n\}$. Esto implica entonces que cualquier matriz doblemente estocástica puede escribirse como combinación convexa de matrices de permutación, es decir, $D = \sum_n p_n \pi_n$ para alguna distribución de probabilidad $\{p_n\}$. De esta manera resulta que si \mathbf{b} es mayorizado por \mathbf{a} es porque puede escribirse como combinación convexa de las posibles permutaciones de \mathbf{a} ,

$$\mathbf{b} = \sum_n p_n \pi_n \mathbf{a},$$

lo que quiere decir que \mathbf{b} puede obtenerse *mezclando* las componentes de \mathbf{a} . De ahí que \mathbf{a} esté más ordenado que \mathbf{b} . Como ejemplo particular, resulta ahora intuitivo que el vector $(1/d, \dots, 1/d)$ sea mayorizado por todos los vectores $v \in \mathbb{R}^d$, $\text{Tr} v = 1$, pues no es posible obtener a partir de este un vector distinto simplemente mezclando sus componentes.

La definición de mayorización dada puede extenderse de manera directa a operadores densidad sobre un espacio de Hilbert mediante su descomposición espectral. En general si $\rho = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|$ y $\sigma = \sum_j q_j |j\rangle\langle j|$ son dos operadores densidad, entonces

$$\rho \succ \sigma \text{ si y solo si } \{p_i\} \succ \{q_j\}, \quad (1.30)$$

es decir, ρ mayoriza a σ si el vector de autovalores del primero mayoriza al del segundo. De esta manera, un estado está más o menos mezclado (o desordenado) si lo están sus autovalores, según el orden impuesto por la definición de mayorización.

De particular interés en la teoría resulta la siguiente propiedad, que establece una conexión entre la relación de mayorización y el comportamiento de funciones cóncavas.

Propiedad 1.4. *Sean \mathbf{a} y \mathbf{b} vectores en \mathbb{R}^d . La desigualdad*

$$\sum_i f(a_i) \leq \sum_i f(b_i)$$

vale para toda función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cóncava si y solo si $\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$.

Una función cóncava, recordemos, es aquella que satisface

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2), \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Como la entropía de Shannon es una función cóncava, tenemos entonces que si un par de distribuciones dadas satisfacen $\{p_i\} \succ \{q_j\}$, entonces resulta

$$H(\{p_i\}) \leq H(\{q_j\}),$$

relación que justifica la vinculación que usualmente se establece entre entropía y “orden”. Es importante recalcar, no obstante, que el recíproco de esta implicación no vale en general, es decir, $H(\{p_i\}) \leq H(\{q_j\}) \not\Rightarrow \{p_i\} \succ \{q_j\}$ de donde se sigue que el orden impuesto por la mayorización es más restrictivo que el inducido

por la entropía de Shannon. Combinando este resultado con la definición (1.30) es fácil ver que para dos operadores densidad ρ y σ vale $S(\rho) \leq S(\sigma)$ siempre que $\rho \succ \sigma$.

Podemos pensar entonces que la entropía, tanto en el caso clásico como en el cuántico, es una medida del “orden” impuesto por la relación de mayorización. Esta interpretación constituye el punto de partida en la generalización de la entropía a otras formas funcionales.

1.1.3.2. Entropías generalizadas

En su trabajo de 1948 [1] Shannon mostró que la entropía que lleva su nombre es la única función, a menos de un factor constante, que tiene las siguientes propiedades:

- $H(\{p_i\})$ debe ser una función continua de las probabilidades p_i .
- Si todos los p_i son iguales, $p_i = 1/n$, entonces H debe ser una función monótona creciente de n .
- Si una elección se descompone en otras dos elecciones sucesivas, la entropía original debe ser igual a la suma pesada de los valores individuales de H .

Es decir

$$H(X, Y) = H(X) + \sum_x P(X = x)H(Y|X = x).$$

A esta lista posteriormente fue añadido por Kinchin [6] un cuarto axioma, de “expandibilidad”, que exige $H(p_1, p_2, \dots, p_n) = H(p_1, p_2, \dots, p_n, 0)$. La lista completa se conoce como “axiomas de Kinchin-Shannon”.

No es difícil ver que la unicidad de la entropía de Shannon es consecuencia del axioma tres, que exige a la medida de información ser aditiva. Si relajamos este axioma podemos encontrar otras funciones que satisfacen los tres restantes y constituyen también medidas del grado de orden, en el sentido de mayorización, en una distribución. Consideremos, para una distribución de probabilidad dada $\{p_i\}$, funciones de la forma (entropías tipo traza)

$$S_f(\{p_i\}) = \sum_i f(p_i), \tag{1.31}$$

donde $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función cóncava y derivable en $[0, 1]$ que satisface $f(0) = f(1) = 0$ y $f'(p)$ estrictamente decreciente en el mismo intervalo. Estas

condiciones aseguran la concavidad estricta de f . Las funciones S_f así definidas satisfacen las propiedades básicas de la entropía de Shannon:

- $S_f(\{p_i\}) \geq 0$ con igualdad *sii* $p_i = \delta_{ij}, j \in \{1, \dots, n\}$.
- $S_f(\{p_i\})$ es una función cóncava, esto es, si $\{p_i\}$ y $\{q_j\}$ son dos distribuciones de probabilidad, entonces

$$S_f(\lambda\{p_i\} + (1 - \lambda)\{q_j\}) \geq \lambda S_f(\{p_i\}) + (1 - \lambda)S_f(\{q_j\}), \lambda \in [0, 1],$$

donde $\lambda\{p_i\} + (1 - \lambda)\{q_j\}$ es una distribución de elementos $\lambda p_i + (1 - \lambda)q_i$.

- S_f alcanza su valor máximo para la distribución equiprobable, $\{1_n\}$, y además el valor de este máximo crece con n .

Debido a la propiedad (1.4) todas estas funciones, al ser cóncavas verifican $H(\{p_i\}) \leq H(\{q_j\})$ si $\{p_i\} \succ \{q_j\}$, y por lo tanto son todas medidas del orden impuesto por la mayorización. La definición (1.31) incluye como caso particular a la entropía de Shannon, correspondiente al caso $f(x) = -x \log x$, y también a sus generalizaciones más conocidas, entre las que destaca la familia de entropías de Tsallis, definidas como

$$S_q(\{p_i\}) = \frac{1 - \sum_i p_i^q}{q - 1}, \quad q > 0. \quad (1.32)$$

En el caso $q \rightarrow 1$ recuperamos nuevamente la entropía de Shannon, mientras que en el caso $q = 2$ obtenemos la llamada *entropía cuadrática* o *lineal*, correspondiente al caso $f(x) = x(1 - x)$.

La generalización al caso cuántico de la definición (1.31) es inmediata. Dado un estado cuántico ρ con descomposición espectral $\rho = \sum_j p_j |j\rangle\langle j|$, $j = 1, \dots, d$ ($p_j \geq 0$, $\sum_j p_j = 1$), las entropías de traza (ver, por ejemplo [7?, 8])

$$S_f(\rho) = \text{Tr } f(\rho) = \sum_j f(p_j) \quad (1.33)$$

cumplen, para cualquier función real estrictamente cóncava $f : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{R}$ (con $f(0) = f(1) = 0$ y $f'(p)$ estrictamente decreciente en $[0, 1]$), con todas las propiedades de la entropía convencional excepto por la aditividad. En particular para

todas ellas se verifica la propiedad [9, 10] de mayorización

$$\rho \prec \rho' \Rightarrow S_f(\rho) \geq S_f(\rho'), \quad (1.34)$$

donde $\rho \prec \rho'$ (ρ más mezclado que ρ') significa $\sum_{j=1}^i p_j \leq \sum_{j=1}^i p'_j$ para $i = 1, \dots, d-1$, con p_j, p'_j denotando aquí los autovalores de ρ y ρ' ordenados en forma *decreciente* (y completados con 0's si las dimensiones difieren). La ecuación (1.34) provee la base conceptual para considerar a cualquier S_f como una medida generalizada de incerteza, o forma entrópica. Además, mientras el recíproco de (1.34) no necesariamente vale si se verifica para cierta S_f particular (la mayorización es más fuerte que una simple desigualdad entrópica), *sí vale* si se verifica $\forall S_f$ de la forma (1.33): $S_f(\rho) \geq S_f(\rho') \forall S_f \Rightarrow \rho \prec \rho'$ [9].

La entropía de Tsallis [11] $S_q(\rho) = (1 - \text{Tr} \rho^q)/(q - 1)$, $q > 0$, corresponde a $f(\rho) = (\rho - \rho^q)/(q - 1)$ en (1.33). Se reduce a la entropía cuadrática, $S_2(\rho) = 1 - \text{Tr} \rho^2$ para $q = 2$, y a la de von Neumann para $q \rightarrow 1$. Podemos también hacer $S_q(\rho) = (1 - \text{Tr} \rho^q)/(1 - 2^{1-q})$, de manera que $S_q(\rho) = 1$ para un estado máximamente mezclado de un qubit $\rho = I_2/2$, en cuyo caso $S_2(\rho) = 2(1 - \text{Tr} \rho^2)$ y $S_q(\rho) \rightarrow -\text{Tr} \rho \log_2 \rho$ para $q \rightarrow 1$. Resulta también evidente que si $g(x)$ es una función creciente de x , con $g(0) = 0$, entonces $g(S_f(\rho))$ cumple también la propiedad de mayorización, si bien $g(S_f(\rho))$ no es necesariamente cóncava. En particular las entropías de Renyi [12] son simplemente funciones crecientes de las entropías de Tsallis.

1.2. Correlaciones entre sistemas cuánticos

En la sección anterior vimos que pueden usarse cantidades entrópicas para cuantificar correlaciones. En particular encontramos en la entropía condicional el primer punto en el que la teoría cuántica de la información se separa de su contraparte clásica. Efectivamente, la existencia de estados cuánticos bipartitos para los cuales la entropía condicional toma valores negativos es un indicador de que los sistemas cuánticos pueden exhibir correlaciones imposibles de generar clásicamente. En esta sección vamos a hacer un breve resumen de los principales avances en el estudio de estas nuevas formas de correlación.

1.2.1. Entrelazamiento

El entrelazamiento es el fenómeno que caracteriza a la mecánica cuántica y la distingue de la mecánica clásica; una forma de correlación entre sistemas cuánticos que no tiene análogo en el mundo clásico. Si bien el término fue acuñado por Schrödinger en 1935 [13] no fue sino hasta 1964, con el impulso del trabajo de John Bell [14], que esta característica tan distintiva de la teoría empezó a estudiarse de manera seria, tomando hasta la década de 1980 para que físicos, criptógrafos y científicos de la computación comenzaran a ver en el entrelazamiento un nuevo recurso a explotar en computación y comunicaciones.

1.2.1.1. El paradigma LOCC

Para entender por qué el entrelazamiento es una forma no-clásica de correlación es necesario definir de manera precisa la noción de *correlación clásica*. Tomemos el sistema bipartito AB con espacio de Hilbert \mathcal{H}_{AB} y supongamos que los componentes se encuentran en laboratorios distantes: el subsistema A en el laboratorio de *Alice*, y el subsistema B en el de *Bob*. Permitamos que tanto Alice como Bob puedan operar sobre su parte del sistema y realizar mediciones, y además tengan la capacidad de comunicarse a través de un canal clásico, mas no por un canal cuántico. Este esquema de procesamiento de estados cuánticos, ilustrado en la figura 1.2, recibe el nombre de *operaciones locales y comunicación clásica* (LOCC). Esta restricción en las operaciones permitidas está principalmente motivado por las dificultades tecnológicas actuales en la comunicación de datos cuánticos, pero también resulta de utilidad para estudiar correlaciones cuánticas y otros efectos no locales [15].

Alice y Bob pueden preparar estados correlacionados ateniéndose a estas restricciones de la siguiente forma: supongamos que cada uno tiene la capacidad de preparar en su laboratorio n estados distintos $\rho_r^{A(B)}$, $r = 1, \dots, n$, y además disponen de un generador de números aleatorios, que puede producir n números distintos con alguna distribución de probabilidad $\{p_r\}$. En cada corrida el generador da el número r , este resultado se comunica a Alice y Bob, y estos preparan el estado ρ_r^A y ρ_r^B respectivamente. El operador densidad del estado conjunto preparado de esta manera será

$$\rho_{AB} = \sum_r p_r \rho_r^A \otimes \rho_r^B. \quad (1.35)$$

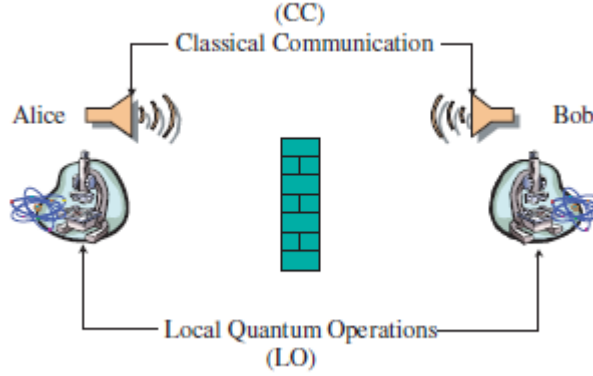


Figura 1.2: Esquema de procesamiento mediante un protocolo de operaciones locales y comunicación clásica (LOCC) [17].

Los valores esperados de observables \mathcal{O}_A y \mathcal{O}_B medidos conjuntamente en A y B no factorizan, $\langle \mathcal{O}_A \otimes \mathcal{O}_B \rangle \neq \langle \mathcal{O}_A \rangle \langle \mathcal{O}_B \rangle$, por lo que claramente el estado está correlacionado. La fuente de correlación es un generador de números aleatorios que puede elegirse como un dispositivo completamente clásico, por lo que la correlación es clásica. Podemos extraer de esta construcción una definición de correlación clásica: son aquellas correlaciones que pueden ser generadas con un protocolo de operaciones locales y comunicación clásica. Los estados de la forma (1.35), que puede extenderse fácilmente a un número arbitrario N de partes como $\rho = \sum_r p_r \rho_r^1 \otimes \rho_r^2 \otimes \dots \otimes \rho_r^N$, son entonces estados clásicamente correlacionados [16] o *separables*.

Evidentemente los estados de la forma (1.35) no agotan la totalidad de los estados en $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Tomemos por ejemplo un estado puro arbitrario, esto es, $\rho_{AB}^2 = \rho_{AB}$. El operador densidad es entonces un proyector sobre un vector $|\psi_{AB}\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$, $\rho_{AB} = |\psi_{AB}\rangle \langle \psi_{AB}|$. Este vector puede expandirse en una base producto $\{|i\rangle_A \otimes |j\rangle_B\}$ de \mathcal{H}_{AB} con $\{|i\rangle_A, i = 1, \dots, \dim(\mathcal{H}_A)\}$ y $\{|j\rangle_B, j = 1, \dots, \dim(\mathcal{H}_B)\}$ bases de \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B respectivamente,

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_{ij} C_{ij} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B, \quad (1.36)$$

donde por normalización la matriz de entradas complejas C satisface $\text{Tr} C^\dagger C = 1$. Esta matriz admite una descomposición en valores singulares $C = U \Sigma V^\dagger$, con $\Sigma_{\mu\nu} = \sqrt{c_\mu} \delta_{\mu\nu}$, $c_\mu \in \mathbb{R}$, $\sum_\mu c_\mu = 1$ y U, V matrices unitarias, lo que implica que siempre existen bases $\{|\tilde{i}\rangle_A, i = 1, \dots, \dim(\mathcal{H}_A)\}$ y $\{|\tilde{i}\rangle_B, i = 1, \dots, \dim(\mathcal{H}_B)\}$ en

\mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B respectivamente en las que $|\psi_{AB}\rangle$ toma la forma

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_i \sqrt{c_i} |\tilde{i}\rangle_A \otimes |\tilde{i}\rangle_B, \quad (1.37)$$

conocida como *descomposición de Schmidt*. En el caso en que solo uno de los coeficientes c_i sea no nulo el estado conjunto es simplemente un producto de estados puros de A y de B , $\rho_{AB} = |\tilde{i}\rangle_A \langle \tilde{i}| \otimes |\tilde{i}\rangle_B \langle \tilde{i}|$, y por lo tanto separable. Pero si hay m

ás de un coeficiente no nulo entonces el estado no puede escribirse en la forma (1.35), es decir, no puede ser preparado mediante un protocolo LOCC. Esta es precisamente la definición de estado *entrelazado*: son aquellos estados que no pueden ser preparados mediante un protocolo LOCC.

El entrelazamiento en un estado cuántico se convierte en un recurso si el procesamiento de información está restringido a la implementación de operaciones LOCC. En efecto, supongamos que tenemos un estado cuántico y lo procesamos usando operaciones LOCC de manera que resulte posible implementar alguna tarea que no pueda simularse por correlaciones clásicas, tal como violar una desigualdad de Bell o teleportar otro estado. Claramente estos efectos no pueden atribuirse al protocolo de procesamiento, sino que han de deberse a correlaciones ya existentes en el estado [17].

1.2.1.2. Criterios de separabilidad

De la definición de separabilidad se sigue que para determinar si un dado estado ρ_{AB} de AB es separable, hay que decidir si este puede escribirse como una combinación convexa de la forma (1.35). Resolver este problema es en general muy difícil, y de hecho está clasificado como un problema NP-HARD [18]. No obstante existen ciertas condiciones necesarias para la separabilidad de un estado, que de no satisfacerse permiten asegurar que este está entrelazado. Algunos de estos criterios de separabilidad se listan a continuación.

- *Criterio de Peres*. Si ρ_{AB} es separable, entonces $\rho_{AB}^{t_B} \geq 0$, donde el superíndice t_B denota la operación de traspuesta parcial [19]. Efectivamente, si el estado ρ_{AB} es de la forma (1.35), con $p_r > 0$, entonces después de la

traspuesta parcial queda

$$\rho_{AB}^{t_B} = \sum_r p_r \rho_A^r \otimes \rho_B^{r t_B},$$

que claramente es positivo si ρ_{AB} lo es. Para un estado general el test representa una condición necesaria mas no suficiente para la separabilidad, pues pueden encontrarse estados entrelazados con traspuesta parcial positiva. Sin embargo puede probarse que en el caso de sistemas qubit-qubit o qubit-qutrit el criterio constituye una condición necesaria y suficiente [19, 20]

- *Criterio del rango* [21]. Este criterio se basa en el hecho de que para todo estado separable ρ_{AB} en el espacio $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ de dimensión m existe un conjunto de $N \leq m^2$ vectores $\{|\psi_i\rangle|\phi_k\rangle \in \mathcal{H}_{AB}, \{i, k\} \in I\}$ (donde I es un conjunto de pares de índices con cardinal menor a m^2) tales que

$$\rho_{AB} = \sum_{i,k} p_{ik} |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \otimes |\phi_k\rangle\langle\phi_k|$$

para alguna distribución de probabilidad $\{p_{ik}\}$, o bien el conjunto genera el rango de ρ_{AB} .

- *Criterio de reducción* [22]. Este criterio utiliza el mapeo $\Gamma : \rho \rightarrow (\text{Tr}\rho) - \rho$. El producto tensorial de esta transformación con la identidad mapea cualquier estado separable en un operador no-negativo, proveyendo así una condición necesaria para la separabilidad de un estado. En el caso en que uno de los subsistemas es un qubit, Γ se reduce a la transformación de inversión temporal, por lo que el criterio es equivalente a la trasposición parcial.
- *Testigos de entrelazamiento* [20]. Los criterios previos requieren necesariamente el conocimiento del estado del sistema, pues en todos se realiza alguna operación sobre la matriz densidad. Existe, sin embargo, una forma de detectar entrelazamiento en términos de observables que pueden medirse directamente. Estos observables son *testigos de entrelazamiento*

Definición Un observable \mathcal{O} es llamado *testigo de entrelazamiento* si

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\rho_s\mathcal{O} &\geq 0 \text{ para todo } \rho_s \text{ separable en } \mathcal{H}_{AB} \\ \mathrm{Tr}\rho_e\mathcal{O} &< 0 \text{ para algún } \rho_e \text{ entrelazado en } \mathcal{H}_{AB}\end{aligned}$$

Esta definición tiene una interpretación geométrica clara: en el espacio euclídeo un plano está definido por su vector normal \hat{n} . El plano separa a los vectores que tienen producto escalar negativo con \hat{n} de aquellos que tienen producto escalar positivo con este, y aquellos vectores ortogonales a \hat{n} obviamente pertenecen al plano. Una situación similar se da al calcular el valor medio de un operador \mathcal{O} . El valor medio es el producto escalar entre \mathcal{O} y el estado ρ del sistema, por lo que la ecuación $\mathrm{Tr}\rho\mathcal{O} = 0$ define un hiperplano que separa a los estados que verifican $\mathrm{Tr}\rho\mathcal{O} \geq 0$ de los que verifican $\mathrm{Tr}\rho\mathcal{O} \leq 0$.

De esta interpretación se sigue, dado que el conjunto de estados separables es compacto y convexo, que todos los estados entrelazados pueden ser detectados mediante testigos:

Teorema 1.5. *Para todo estado entrelazado $\rho_e \in \mathcal{H}_{AB}$ existe un testigo de entrelazamiento que puede detectarlo.*

1.2.1.3. Medidas de entrelazamiento

Visto el entrelazamiento como un recurso surge la necesidad de cuantificarlo, es decir, encontrar una manera de poder decir si un estado particular está más o menos entrelazado que otro. Dada la restricción en las operaciones a protocolos LOCC, podemos imponer un orden según el cual un estado ρ está más entrelazado que otro estado σ si la transformación $\rho \rightarrow \sigma$ es posible usando operaciones LOCC. El siguiente teorema muestra que se puede establecer tal orden en el conjunto de estados puros comparando los coeficientes de Schmidt de cada estado.

Teorema 1.6 (Nielsen). *Sean $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ estados en $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ con descomposición de Schmidt $|\psi_1\rangle = \sum_i \sqrt{\alpha_i} |i_A\rangle |i_B\rangle$ y $|\psi_2\rangle = \sum_i \sqrt{\alpha'_i} |i'_A\rangle |i'_B\rangle$. La transformación $|\psi_1\rangle \rightarrow |\psi_2\rangle$ es posible con operaciones LOCC si y solo si la distribución $\{\alpha\}$ es mayorizada por la distribución $\{\alpha'\}$.*

Tenemos así que si la distribución de coeficientes de Schmidt de $|\psi_1\rangle$ es mayorizada por la correspondiente a $|\psi_2\rangle$, entonces $|\psi_1\rangle$ está más entrelazado que

$|\psi_2\rangle$. De la ecuación (1.37) se sigue que los estados marginales de un estado puro tienen los mismos autovalores y que estos son los coeficientes de Schmidt, lo que implica entonces que un estado puro está más entrelazado que otro si sus estados marginales están *más mezclados*, siendo así máximamente entrelazados aquellos estados que tienen marginales proporcionales al operador identidad $I_{n_A(n_B)}$.

Puesto que la mayorización impone un orden parcial en \mathcal{H}_{AB} existen pares de estados que son incomparables, esto es, que no pueden convertirse uno en el otro usando operaciones LOCC. Para tales pares no es posible entonces definir si uno está más entrelazado que el otro. Este problema se salva considerando transformaciones en *régimen asintótico*: en lugar de intentar transformar un estado ρ de un solo par de partículas en otro σ por operaciones LOCC, podemos preguntarnos si para enteros suficientemente grandes m, n es posible implementar la transformación $\rho^{\otimes n} \rightarrow \sigma^{\otimes m}$ con errores arbitrariamente pequeños (esto es, el estado resultante es η con $\text{tr}|\sigma - \eta|$ arbitrariamente chico en el límite $n \rightarrow \infty$). La mayor tasa m/n a la cual la transformación puede lograrse será una medida del entrelazamiento relativo entre los dos estados, que se vuelve una medida del entrelazamiento del estado σ si el estado de partida ρ es un estado máximamente entrelazado [17].

Considerar transformaciones asintóticas lleva a la imposición de un orden único y total en \mathcal{H}_{AB} , y como consecuencia, a una medida natural y única de entrelazamiento en estados puros, la entropía de entrelazamiento, definida como

$$E(|\psi_{AB}\rangle) = S(\text{Tr}_{B(A)}|\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|) = S(\rho_A) = S(\rho_B). \quad (1.38)$$

La entropía de entrelazamiento $E(|\psi_{AB}\rangle)$ mide entonces (en régimen asintótico) el número de estados máximamente entrelazados necesarios para, localmente, preparar el estado $|\psi_{AB}\rangle$, o equivalentemente, el número de estados máximamente entrelazados que pueden prepararse localmente a partir del estado $|\psi_{AB}\rangle$.

El caso general, en el que los estados pueden no ser puros, es bastante más complicado y no existe una única medida de entrelazamiento. Entre las medidas más conocidas están el *Entrelazamiento destilable*, *Costo de entrelazamiento*, y la *Entropía relativa de entrelazamiento* [17]. De particular interés en este trabajo es el *Entrelazamiento de formación*, definido para un estado ρ como

$$E_f(\rho) = \inf\left\{\sum_i p_i E(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|) : \rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right\}, \quad (1.39)$$

es decir, como el entrelazamiento promedio minimizado sobre todas las descomposiciones de ρ como combinación convexa de estados puros (denominado *techo convexo* de la entropía de entrelazamiento). Puesto que la definición involucra una optimización sobre todas las posibles representaciones de ρ como combinación convexa de estados puros, evaluar el entrelazamiento de formación de un estado arbitrario es en general extremadamente difícil. Sin embargo para el caso particular de sistemas de dos qubits existe una fórmula cerrada propuesta por W.K. Wootters [23]: el entrelazamiento de un estado arbitrario ρ de dos qubits está dado por

$$E_f(\rho) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2(\rho)}}{2}\right), \quad (1.40)$$

donde $C(\rho)$ es la *conurrencia* de ρ definida como el techo convexo de la misma cantidad definida para estados puros como

$$C(|\psi\rangle) = |\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle| = |\langle\psi|\sigma_y|\psi^*\rangle|, \quad (1.41)$$

y dada por

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (1.42)$$

donde los coeficientes λ_i son, en orden decreciente, las raíces de los autovalores de la matriz $\rho\sigma_y \otimes \sigma_y\rho * \sigma_y \otimes \sigma_y$ y el símbolo $*$ denota conjugación compleja en la base estándar.

1.2.2. Correlaciones cuánticas más allá del entrelazamiento

Si bien el entrelazamiento ha mostrado ser un ingrediente clave en el procesamiento de información cuántica [2], en los últimos años otras características más generales de las correlaciones entre sistemas cuánticos han atraído creciente interés, principalmente tras descubrirse que existen estados cuánticos no entrelazados que permiten la realización de tareas como *quantum state preparation* [24] y *quantum state merging* [25]. Esto ha llevado al desarrollo del concepto de *cuanticidad de las correlaciones*, acercamiento en el que se busca cuantificar el total de las correlaciones entre sistemas cuánticos separándolas entre *clásicas* y *cuánticas*. Entre las medidas de correlaciones introducidas con este propósito [26] se encuentran aquellas inducidas a través de mediciones. En estas medidas de correlaciones se

identifica a un estado como clásicamente correlacionado si existe una medida local que no lo perturba. Según esta definición entonces los estados clásicamente correlacionados son aquellos de la forma

$$\rho_{AB} = \sum_{ij} p_{ij} |i\rangle\langle i|_A \otimes |j\rangle\langle j|_B, \quad (1.43)$$

donde los estados $\{|i\rangle_A, i = 1, \dots, \dim(\mathcal{H}_A)\}$ y $\{|j\rangle_B, j = 1, \dots, \dim(\mathcal{H}_B)\}$ forman una base de \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B respectivamente. Efectivamente, es inmediato verificar que una medida local proyectiva en cualquiera de estas dos bases deja al estado inalterado. Podemos definir de manera similar aquellos estados que son “clásicos en una dirección” o “cuánticos-clásicos”, es decir, aquellos en los que solo en una de las partes existe una medida local que deja el estado inalterado. Estos estados son de la forma

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|_A \otimes \rho_i^B. \quad (1.44)$$

Una medida en la base $\{|i\rangle_A, i = 1, \dots, \dim(\mathcal{H}_A)\}$ sobre el sistema de Alice deja el estado inalterado. Sin embargo, si los operadores ρ_i^B no conmutan no hay medida local de von Neumann en el sistema de Bob que no perturbe al estado.

Este nuevo acercamiento al estudio de las correlaciones entre sistemas cuánticos provee una definición más restrictiva de clasicidad, pues es evidente que para un estado separable general (1.35) que no sea de la forma (1.43) o (1.44) no es posible encontrar una medida local, sobre ninguno de los subsistemas, que no perturbe al sistema.

Entre las medidas de correlación inducidas por mediciones destacan dos, que van a ser de importancia en este trabajo: el *Déficit de información* o *déficit cuántico* y la *Discordia cuántica*. Terminamos este capítulo haciendo un breve repaso de las definiciones de estas cantidades.

1.2.2.1. Discordia cuántica

La discordia cuántica es la primera medida propuesta para cuantificar correlaciones cuánticas más allá del entrelazamiento. La definición de esta cantidad se basa en el hecho de que en la teoría clásica de la información la entropía

condicional puede expresarse en dos formas distintas, a saber

$$H(X : Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) \quad (1.45)$$

$$H(X : Y) = H(X) - H(X|Y), \quad (1.46)$$

donde $H(X|Y) = \sum_y P(Y = y)H(X|Y = y)$, como ya vimos. La igualdad entre estas dos cantidades se sigue de la regla de Bayes $P(X = x|Y = y) = P(X = x, Y = y)/P(Y = y)$ y la aditividad de la entropía de Shannon, que aseguran $H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y)$.

En el caso cuántico, dado un operador densidad $\rho_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ con marginales $\rho_A \in \mathcal{H}_A$ y $\rho_B \in \mathcal{H}_B$, la generalización de (1.45) es (ver (1.28))

$$I(A : B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}), \quad (1.47)$$

la cual se sigue simplemente de la aditividad de la entropía de von Neumann. Alternativamente podemos escribir (1.45) como la entropía de la variable conjunta XY relativa al producto de las distribuciones de X e Y , siendo entonces su versión cuántica (1.47) la entropía de ρ_{AB} relativa al producto de marginales $\rho_A \otimes \rho_B$, como se muestra en la sección 1.1.2. La generalización de (1.46), por otra parte, no es tan directa. Ollivier y Zurek [27] notaron que para pasar al caso cuántico hay que definir el estado del sistema A dado el estado del sistema B , y para poder decir que este último está dado es necesario realizar una medida. Si tal medida está descrita por operadores $\{\Pi_j\}$, entonces el estado de A dado que el resultado de la medida es j será

$$\rho_{A|B=\Pi_j} = \frac{\Pi_j \rho_{AB} \Pi_j}{\text{Tr} \rho_{AB} \Pi_j}, \quad (1.48)$$

con probabilidad $p_j = \text{Tr} \rho_{AB} \Pi_j$. Con esto podemos entonces generalizar la entropía condicional al caso cuántico evaluando la entropía promedio de los estados condicionales $\rho_{A|B=j}$, resultando

$$J(A : B)_{\{\Pi_j\}} = S(\rho_A) - \sum_j p_j S(\rho_{A|B=\Pi_j}). \quad (1.49)$$

Claramente $J(A : B)_{\{\Pi_j\}}$ es una cantidad que depende de la medida realizada, y puede interpretarse como la cantidad de información acerca del estado del sistema A que se gana tras hacer una medida en el sistema B .

Puede probarse [27] que estas dos cantidades son diferentes a menos que el

estado conjunto sea clásico-cuántico en dirección de Bob hacia Alice, es decir, si existe una medida local sobre el sistema B que no perturbe el estado. Para estados generales la diferencia entre las dos, minimizada sobre todas las posibles medidas locales en B

$$D(A|B) = I(A : B) - J(A : B), \quad (1.50)$$

lleva el nombre de *discordia cuántica*. La discordia $\delta(\rho_{AB})$ es una cantidad no negativa que se anula, como ya dijimos, para estados de la forma $\rho_{AB} = \sum_j p_j \rho_j^A \otimes |j\rangle\langle j|_B$, y en el caso en que ρ_{AB} es puro coincide con la entropía de entrelazamiento, pues entonces $I(A : B) = 2S(A)$ y $J(A : B) = S(A)$. Puesto que la definición de la discordia involucra una minimización sobre todas las bases posibles de medida su evaluación en el caso general resulta extremadamente difícil, conociéndose una solución exacta solo en algunos casos muy particulares de estados de dos qubits.

1.2.2.2. Déficit cuántico

El déficit cuántico [28] fue propuesto inicialmente como una medida del trabajo que puede extraerse de un baño térmico mediante operaciones locales, por lo que si bien es una medida de cuanticidad de correlaciones la noción de clasicidad que involucra tiene el espíritu del paradigma LOCC. Según esta propuesta, un sistema cuántico bipartito AB exhibe solo correlaciones clásicas si la cantidad de trabajo W_t que puede extraerse del sistema como un todo puede también extraerse de sus subsistemas mediante un protocolo LOCC. Llamemos a este último trabajo W_l . Esta idea motiva la definición del *déficit cuántico* como la diferencia entre el trabajo que puede extraerse de estas dos formas

$$\Delta = W_t - W_l. \quad (1.51)$$

Ahora bien, la cantidad de trabajo extraíble del sistema AB como un todo está vinculada a la entropía de su estado ρ_{AB} [28, 29], de manera que

$$W_t = \log d_{AB} - S(\rho_{AB}), \quad (1.52)$$

donde d_{AB} es la dimensión del espacio de estados \mathcal{H}_{AB} . Es decir que cuanto más puro es el estado, más trabajo puede extraerse del sistema. Siguiendo esta

línea encontramos que solo un subconjunto del conjunto LOCC resulta adecuado para la extracción local de trabajo, puesto que el uso de sistemas auxiliares por ejemplo, permitido en operaciones LOCC generales, incrementaría artificialmente el trabajo extraíble de los subsistemas. Este subconjunto es denominado CLOCC (Closed LOCC) e incluye solo las operaciones unitarias locales y el envío de sistemas por un canal de *dephasing*, que tiene el efecto de eliminar todos los elementos no diagonales de la matriz densidad en una base determinada. Este efecto es equivalente a la realización de una medida proyectiva local en la cual no se lee el resultado.

Vale notar que la ecuación (1.52) establece una equivalencia entre el trabajo que puede extraerse del sistema y la información contenida en su estado, por lo que podemos reescribir la definición (1.51) como $\Delta = I_t - I_l$, donde $I_t = W_t$ es la información contenida en el estado conjunto e $I_l = W_l$ es la *información localizable* [30], definida como la información en el estado conjunto tras su transformación por operaciones CLOCC, ρ'_{AB} . Por esta razón el déficit cuántico es también denominado *déficit de información*. Puesto que el trabajo que puede extraerse localmente de los subsistemas es la suma del trabajo extraíble de A y de B , resulta entonces que el déficit cuántico puede escribirse cómo

$$\Delta = \text{Min}[S(\rho'_A) + S(\rho'_B)] - S(\rho_{AB}), \quad (1.53)$$

donde el mínimo se toma sobre las posibles operaciones CLOCC que pueden realizarse sobre los subsistemas. También se conoce a esta expresión como *déficit cuántico en dos direcciones*, debido a que la comunicación es posible en ambas direcciones. Si solo fuese posible la comunicación en una sola dirección, por ejemplo, de A hacia B , entonces el déficit cuántico es en *una dirección*. El estado que resulta de implementar operaciones con esta restricción es de la forma (1.44). En este caso entonces el déficit cuántico es la diferencia

$$\Delta = \text{Min}_{\{\Pi_A\}}[S(\rho'_{AB})] - S(\rho_{AB}), \quad (1.54)$$

donde el mínimo es sobre las posibles medidas locales en A .

Vale mencionar, finalmente, que si bien la noción de cuanticidad de correlaciones es esencialmente diferente de la idea de correlación construida desde el paradigma LOCC, la discordia y el déficit no están completamente desconectados de las medidas de entrelazamiento. Puede probarse que durante una medida

local en un sistema cuántico bipartito AB , en general, se crea entrelazamiento entre el sistema y el aparato de medida M , de manera que el mínimo entrelazamiento destilable creado durante una medida sobre el sistema A es igual al déficit de información en dirección del sistema A hacia B . Además, la discordia del sistema (para medidas en A) coincide con el mínimo entrelazamiento parcial destilable entre sistema y aparato, definido como la cantidad de entrelazamiento que se pierde cuando se ignora el subsistema B [31]. Como sucede en el caso de la discordia cuántica (1.50), el déficit cuántico (1.54) coincide con la entropía de entrelazamiento cuando el estado ρ_{AB} es puro.

Capítulo 2

Entropía condicional generalizada en sistemas cuánticos

En este capítulo estudiamos la generalización, a formas entrópicas generales, de la entropía condicional cuántica dependiente de la medida que introdujimos en el capítulo anterior. Esta entropía se define, para el estado ρ_{AB} de un sistema bipartito AB , como el promedio de las entropías de los estados condicionales de, por ejemplo, el sistema A , que resultan de una medida local sobre el sistema B . Esta cantidad cuantifica, en promedio, el grado de mezcla o desorden en el estado de A tras realizarse dicha medida, y su mínimo sobre todas las posibles medidas locales cuantifica además el entrelazamiento de formación entre A y un tercer sistema C que purifica al estado ρ_{AB} , es decir, tal que $\rho_{AB} = \text{Tr}_C |\psi_{ABC}\rangle\langle\psi_{ABC}|$. En el caso particular de la entropía de von Neumann, este mínimo determina la evaluación de la discordia cuántica entre A y B . Para estados clásicamente correlacionados y mezclas de estados puros con el estado máximamente mezclado mostramos que la medida minimizante puede determinarse analíticamente y es universal, esto es, la misma para todas las formas entrópicas. En el caso especial de la entropía cuadrática (o lineal), directamente ligada a la pureza del estado, mostramos que es posible obtener una expresión analítica para la mínima entropía condicional en sistemas qudit-qubit, en términos de los autovalores de una matriz de 3×3 que denominamos *tensor de correlaciones*. Como aplicación de estos resultados evaluamos la mínima entropía condicional en estados de dos qubits tipo X , y mostramos que la medida minimizante para la entropía de von Neumann coincide normalmente con aquella que minimiza la entropía cuadrática en estos estados.

Este capítulo está basado en los resultados publicados en [32].

2.1. Entropía condicional generalizada tras una medida local

Consideremos nuevamente un sistema bipartito AB en el estado inicial ρ_{AB} , con marginales $\rho_A = \text{Tr}_B \rho$, $\rho_B = \text{Tr}_A \rho$. Supongamos que se realiza una medida local POVM M_B sobre B , definida por operadores $M_j = I_A \otimes M_j^B$, $j = 1, \dots, j_m$, de manera que el estado tras obtener el resultado j es proporcional $M_j \rho M_j^\dagger$. Como vimos en el capítulo anterior, los operadores semidefinidos positivos

$$\Pi_j = M_j^\dagger M_j = I_A \otimes \Pi_j^B, \quad (2.1)$$

deben satisfacer la condición $\sum_j \Pi_j = I \equiv I_A \otimes I_B$.

Recordemos que el estado reducido de A tras obtener el resultado j depende solo de Π_j y está dado por

$$\rho_{A/\Pi_j} = p_j^{-1} \text{Tr}_B \rho \Pi_j, \quad p_j = \text{Tr} \rho \Pi_j, \quad (2.2)$$

donde $p_j > 0$ es la probabilidad de tal resultado. A fin de cuantificar la incertidumbre promedio o grado de mezcla en el estado de A después de tal medida, consideraremos la entropía condicional generalizada

$$S_f(A|B_{\{\Pi_j\}}) = \sum_j p_j S_f(\rho_{A/\Pi_j}), \quad (2.3)$$

donde

$$S_f(\rho) = \text{Tr} f(\rho), \quad (2.4)$$

representa una forma entrópica generalizada, o medida de incertidumbre [7, 8] (Ver sección 1.1.3.2 y apéndice A.1). Aquí $f : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{R}$ es una función suave y estrictamente cóncava que satisface $f(0) = f(1) = 0$. Para $f(\rho) = -\rho \log_a \rho$ (usamos $a = 2$ o e), $S_f(\rho)$ coincide con la entropía de von Neumann $S(\rho) = -\text{Tr} \rho \log_a \rho$, y la ecuación (2.3) con la entropía condicional de von Neumann dependiente de la medida, introducida en [27] para la definición de la discordia cuántica, ya definida en la sección 1.1.3.2.

La concavidad de estas formas,

$$S_f\left(\sum_\alpha q_\alpha \rho_\alpha\right) \geq \sum_\alpha q_\alpha S_f(\rho_\alpha), \quad (2.5)$$

si $\{q_\alpha\}$ es una distribución de probabilidad ($q_\alpha \geq 0$, $\sum_\alpha q_\alpha = 1$) y todos los ρ_α son estados cuánticos, se sigue directamente de la concavidad de f , e implica algunas de las propiedades fundamentales de la entropía condicional generalizada (2.3). Primero, puesto que $\rho_A = \sum_j p_j \rho_{A/\Pi_j}$, de la ecuación (2.5) se sigue que $S_f(A) \equiv S_f(\rho_A) \geq \sum_j p_j S_f(\rho_{A/\Pi_j})$, esto es,

$$S_f(A) \geq S_f(A|B_{\{\Pi_j\}}), \quad (2.6)$$

lo que indica que el grado de mezcla condicional de A tras una medida en B , no excederá el grado de mezcla del estado marginal original, para *ninguna* elección de S_f . Además, si f es estrictamente cóncava, la igualdad en (2.5) vale si todos los ρ_α con $q_\alpha > 0$ son idénticos. De ahí que la igualdad en (2.6) para *toda* M_B valga solo si $\rho = \rho_A \otimes \rho_B$, pues solo en tal caso $\rho_{A/\Pi_j} = \rho_A \forall \Pi_j$. La cantidad

$$I_f(A|B_{\{\Pi_j\}}) = S_f(A) - S_f(A|B_{\{\Pi_j\}}), \quad (2.7)$$

es entonces no negativa para cualquier S_f , anulándose para toda M_B solo en el caso de estados producto. Esta representa la reducción promedio en la incertidumbre sobre el estado de A (o la ganancia de información generalizada acerca de tal estado) como lo mide S_f , tras una medida local en B .

La ecuación (2.5) implica también la concavidad de la entropía condicional: Si $\rho = \sum_\alpha q_\alpha \rho^\alpha$, entonces $\rho_{A/\Pi_j} = \sum_\alpha p_j^{-1} q_\alpha p_j^\alpha \rho_{A/\Pi_j}^\alpha$, con $p_j^\alpha = \text{Tr} \rho^\alpha \Pi_j$, $p_j = \sum_\alpha q_\alpha p_j^\alpha$. Luego, $S_f(\rho_{A/\Pi_j}) \geq \sum_\alpha p_j^{-1} q_\alpha p_j^\alpha S_f(\rho_{A/\Pi_j}^\alpha)$, lo que lleva a

$$S_f(A|B_{\{\Pi_j\}}) \geq \sum_\alpha q_\alpha S_f(A^\alpha|B_{\{\Pi_j\}}^\alpha), \quad (2.8)$$

donde $S_f(A^\alpha|B_{\{\Pi_j\}}^\alpha) = \sum_j p_j^\alpha S_f(\rho_{A/\Pi_j}^\alpha)$: La incertidumbre promedio acerca de A tras mezclar el estado no puede ser menor que el promedio de las incertidumbres originales. Además, si

$$\Pi_j = \sum_k r_j^k \tilde{\Pi}_k, \quad r_j^k \geq 0, \quad (2.9)$$

donde $\tilde{\Pi}_k = I_A \otimes \tilde{\Pi}_k^B$, con $\sum_k \tilde{\Pi}_k = I$, son operadores positivos que representan una medida local más detallada (por ejemplo, todos los $\tilde{\Pi}_k^B$ son de rango 1) y $\sum_j r_j^k = 1$, entonces $\rho_{A/\Pi_j} = \sum_k p_j^{-1} r_j^k q_k \rho_{A/\tilde{\Pi}_k}$, con $q_k = \text{Tr} \rho \tilde{\Pi}_k$, $\sum_k r_j^k q_k = p_j$.

Luego, $S_f(\rho_{A/\Pi_j}) \geq \sum_k p_j^{-1} r_j^k q_k S_f(\rho_{A/\tilde{\Pi}_k})$ y

$$S_f(A|B_{\{\Pi_j\}}) \geq \sum_k q_k S_f(\rho_{A/\tilde{\Pi}_k}) = S_f(A|B_{\{\tilde{\Pi}_k\}}), \quad (2.10)$$

es decir, la entropía condicional generalizada no crecerá (y en general decrecerá) si se realiza una medida local más detallada. De hecho, $S_f(A)$ puede considerarse como la entropía condicional $S_f(A|B_I)$ de A tras una medida trivial de la identidad I_B en B , de manera que la ecuación (2.6) es un caso particular de (2.10).

La mínima incertidumbre acerca del estado de A se obtendrá entonces para medidas basadas en operadores de rango 1

$$\Pi_j^B = r_j |j_B\rangle \langle j_B|, \quad r_j > 0, \quad (2.11)$$

donde los $|j_B\rangle$ son estados normalizados de manera que $\sum_j \Pi_j^B = I_B$. Una medida de von Neumann estándar corresponde a $r_j = 1$ y $\{|j_B\rangle\}$ una base ortonormal ($\Pi_j \Pi_{j'} = \delta_{jj'} \Pi_j$). En particular, para estados puros

$$\rho = |\Psi\rangle \langle \Psi|, \quad |\Psi\rangle = \sum_k \sqrt{q_k} |\tilde{k}_A \tilde{k}_B\rangle, \quad (2.12)$$

donde la última expresión es la descomposición de Schmidt (1.37), ρ_{A/Π_j} es *puro* $\forall j$ con $p_j > 0$, para *cualquier* medida local basada en los operadores (2.11):

$$\rho_{A/\Pi_j} = |j_A\rangle \langle j_A|, \quad |j_A\rangle = (r_j/p_j)^{1/2} \sum_k \sqrt{q_k} \langle j_B | \tilde{k}_B \rangle |\tilde{k}_A\rangle, \quad (2.13)$$

donde $p_j = r_j \sum_k q_k |\langle j_B | \tilde{k}_B \rangle|^2$. Luego, en el caso puro $S_f(A|B_{\{\Pi_j\}}) = 0$, y la ecuación (2.7) se convierte en la entropía de entrelazamiento generalizada [10]:

$$I_f(A|B_{\{\Pi_j\}}) = S_f(A) = S_f(B) = \sum_k f(q_k). \quad (2.14)$$

2.1.1. Mínima entropía condicional y entrelazamiento de formación generalizado

Consideremos ahora el mínimo de la entropía condicional generalizada (2.3) sobre todas las medidas locales sobre B ,

$$S_f(A|B) = \text{Min}_{\{\Pi_j\}} S_f(A|B_{\{\Pi_j\}}). \quad (2.15)$$

De la ecuación (2.10) se sigue que tal mínimo se alcanza para medidas basadas en proyectores de la forma (2.11). La ecuación (2.15) lleva a la máxima ganancia de información generalizada

$$I_f(A|B) = \text{Max}_{\{\Pi_j\}} I_f(A|B_{\{\Pi_j\}}) = S_f(A) - S_f(A|B). \quad (2.16)$$

Si el sistema AB es purificado [2] mediante la adición de un tercer sistema C , entonces la mínima entropía condicional (2.15) coincide con el f -entrelazamiento de formación $E_f(A, C)$ entre A y C en el estado reducido ρ_{AC} [33]:

$$S_f(A|B) = E_f(A, C) = \text{Min}_{\sum_j p_j \rho_{AC}^j = \rho_{AC}} \sum_j p_j S_f(\rho_A^j) \quad (2.17)$$

donde la minimización se lleva a cabo sobre todas las posibles representaciones de ρ_{AC} como combinación convexa de estados puros $\rho_{AC}^j = |j_{AC}\rangle\langle j_{AC}|$ y $S_f(\rho_A^j) = S_f(\rho_C^j)$ es la f -entropía de entrelazamiento entre A y C en $|j_{AC}\rangle$. La expresión en (2.17) es el techo convexo [34] de la f -entropía de entrelazamiento (2.14) y es un monótono de entrelazamiento [35]. La identidad (2.17) fue derivada para la entropía de von Neumann [33], donde $E_f(A, C)$ se reduce al entrelazamiento de formación [36], pero el argumento vale para formas entrópicas generales (ver Apéndice A.2)

La ecuación (2.17) implica que la expresión (2.16) puede reescribirse como

$$I_f(A|B) = E_f(A, BC) - E_f(A, C), \quad (2.18)$$

donde $E_f(A, BC) = S_f(\rho_A) = S_f(\rho_{BC})$ es la entropía de entrelazamiento entre A y BC en el estado puro $|\psi_{ABC}\rangle$.

La discordia cuántica $D(A|B)$ (1.50) resultante de una medida local en B está directamente relacionada a la entropía condicional de von Neumann ($f(x) =$

$-x \log x$) $S(A|B_{\{\Pi_j\}})$ a través de su definición (ver sección 1.2.2.1)

$$D(A|B) = \text{Min}_{\{\Pi_j\}} S(A|B_{\{\Pi_j\}}) - [S(A, B) - S(B)],$$

donde entre corchetes reconocemos la versión cuántica estándar (independiente de la medida) de la entropía condicional (la cual puede tomar valores negativos para estados entrelazados como ya se discutió en el capítulo anterior).

2.1.2. Casos de medida óptima universal

Vamos ahora a revisar clases de estados mixtos de AB para los que la medida que minimiza la entropía condicional es *universal*, esto es, coincide para todas las formas entrópicas S_f .

Estados clásicamente correlacionados

Una de esas clases es la de los estados cuántico-clásicos en la dirección $B \rightarrow A$, es decir, estados de la forma [26]

$$\rho_{AB} = \sum_k q_k \rho_{A/k} \otimes |\tilde{k}_B\rangle\langle\tilde{k}_B|, \quad (2.19)$$

donde $\{q_k\}$ es una distribución de probabilidad y $\{|\tilde{k}_B\rangle\}$ es una base del espacio de estados de B . Una medida local sobre B en esta base, es decir, descrita por operadores $\tilde{\Pi}_k^B = |\tilde{k}_B\rangle\langle\tilde{k}_B|$, no perturba al estado pues

$$\sum_k (I_A \otimes \tilde{\Pi}_k) \rho_{AB} (I_A \otimes \tilde{\Pi}_k) = \sum_{k,k'} |\langle k|k'\rangle|^2 q_{k'} \rho_{A/k'} \otimes |k_B\rangle\langle k_B| = \sum_k q_k \rho_{A/k} \otimes |\tilde{k}_B\rangle\langle\tilde{k}_B|.$$

Es fácil probar [32] que la mínima entropía condicional se obtiene para una medida en esta base, para *toda* S_f :

$$S_f(A|B) = S_f(A|B_{\{\tilde{\Pi}_k\}}) = \sum_k q_k S_f(\rho_{A/k}). \quad (2.20)$$

Demostración. Para cualquier medida basada en los operadores (2.11) tenemos

$$\rho_{A/\Pi_j} = \sum_k r_j p_j^{-1} q_k |\langle j_B|\tilde{k}_B\rangle|^2 \rho_{A/k}, \quad (2.21)$$

con $p_j = r_j \sum_k q_k |\langle j_B|\tilde{k}_B\rangle|^2$. La concavidad y la relación $\sum_j r_j |\langle j_B|\tilde{k}_B\rangle|^2 = 1$

implican

$$S_f(A|B_{\{\Pi_j\}}) \geq \sum_{k,j} r_j q_k |\langle j_B | \tilde{k}_B \rangle|^2 S_f(\rho_{A/k}) = \sum_k q_k S_f(\rho_{A/k}), \quad (2.22)$$

desigualdad que satura para una medida en la base puntero $\{|\tilde{k}_B\rangle\}$, formada por los autoestados de $\rho_B = \sum_k q_k \tilde{\Pi}_k^B$. La máxima I_f es entonces

$$I_f(A|B) = S_f\left(\sum_k q_k \rho_{A/k}\right) - \sum_k q_k S_f(\rho_{A/k}). \quad (2.23)$$

□

Mezcla de un estado puro con el estado máximamente mezclado

Un segundo caso es aquel de una mezcla de un estado puro general $|\psi\rangle$ con el estado máximamente mezclado I/d :

$$\rho = w|\Psi\rangle\langle\Psi| + (1-w)I_d/d, \quad |\Psi\rangle = \sum_k \sqrt{q_k} |\tilde{k}_A \tilde{k}_B\rangle, \quad (2.24)$$

donde $w \in [0, 1]$ y $d = d_A d_B$ es la dimensión del espacio de Hilbert de AB . El mínimo para *cualquier* S_f está dado de nuevo para una medida en la base $\{|\tilde{k}_B\rangle\}$ de autoestados de ρ_B [32]:

$$\begin{aligned} S_f(A|B) &= S(A|B_{\{\tilde{\Pi}_k\}}) = \sum_k q_k^w S_f(\rho_{A/\tilde{\Pi}_k}) \\ &= \sum_k q_k^w \left[f\left(\frac{wq_k + (1-w)/d}{q_k^w}\right) + (d_A - 1)f\left(\frac{1-w}{dq_k^w}\right) \right], \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde $q_k^w = wq_k + \frac{1-w}{d_B}$ es la probabilidad del resultado k en B y $\rho_{A/\tilde{\Pi}_k} = [wq_k |\tilde{k}_A\rangle\langle\tilde{k}_A| + (1-w)I_A/d]/q_k^w$ el estado de A tras obtener dicho resultado.

Demostración. Para cualquier medida basada en los operadores (2.11) obtenemos, usando (2.12)–(2.13),

$$\rho_{A/\Pi_j} = \frac{wp_j |j_A\rangle\langle j_A| + r_j(1-w)I_A/d}{p_j^w} = \sum_k \frac{r_j q_k^w}{p_j^w} |\langle j_B | \tilde{k}_B \rangle|^2 U_k^j \rho_{A/\tilde{\Pi}_k} U_k^{j\dagger}, \quad (2.26)$$

donde $p_j = r_j \sum_k q_k |\langle j_B | \tilde{k}_B \rangle|^2$ y $p_j^w = wp_j + r_j \frac{1-w}{d_B}$ son, respectivamente, la probabilidad del resultado j en $|\Psi\rangle$ y en ρ , y U_k^j son unitarias que satisfacen

$U_k^j |\tilde{k}_A\rangle = |j_A\rangle$. Así la concavidad, la invariancia de S_f frente a transformaciones unitarias y la relación de completitud implican nuevamente

$$S_f(A|B_{\{\Pi_j\}}) \geq \sum_k q_k^w S_f(\rho_{A/\tilde{\Pi}_k}) = S_f(A|B_{\{\tilde{\Pi}_k\}}). \quad (2.27)$$

La igualdad en (2.27) para cualquier medida de la forma (2.11) vale para i) $w = 0$ (ρ máximamente mezclado), ii) $w = 1$ (ρ puro) y iii) $|\Psi\rangle$ *máximamente entrelazado* ($q_k = 1/d_B \forall k$, asumiendo $d_A \geq d_B$), donde $p_j = r_j/d_B \forall j$ y todos los $\rho_{A/\Pi_j} = w|j_A\rangle\langle j_A| + \frac{1-w}{d_A}I_A$ tienen el mismo espectro. \square

Es fácil verificar que (2.25) es una función *cóncava* de ambos, w y la distribución de probabilidad $\mathbf{q} = \{q_k\}$. Puesto que $S_f(A|B)$ alcanza su máximo $S_f(I_A/d_A) = d_A f(1/d_A)$ para $w = 0$, la concavidad implica que (2.25) es una función *decreciente* de w para $w \in [0, 1] \forall S_f$: Disminuir el grado de mezcla hace decrecer la incerteza sobre A . La concavidad también provee una cota inferior inmediata $S_f(A|B) \geq (1-w)d_A f(1/d_A)$.

Además, para estados $|\Psi\rangle, |\Psi'\rangle$ caracterizados por distribuciones \mathbf{q} y \mathbf{q}' en su descomposición de Schmidt, tenemos $S_f(\mathbf{q}) \geq S_f(\mathbf{q}') \forall S_f$ si $\mathbf{q} \prec \mathbf{q}'$ (es decir, \mathbf{q} mayorizado por \mathbf{q}'). Tal condición asegura entonces que $|\Psi\rangle$ *está más entrelazado que $|\Psi'\rangle$ para cualquier S_f* , y es la misma condición que garantiza que $|\Psi'\rangle$ puede obtenerse de $|\Psi\rangle$ mediante operaciones LOCC [2, 37] (Teorema 1.6). En tal caso, la concavidad de $S_f(A|B)$ respecto a \mathbf{q} implica que a un valor fijo de $w \in (0, 1)$, $S_f(A|B)_{|\Psi\rangle} \geq S_f(A|B)_{|\Psi'\rangle}$ para *cualquier S_f* , es decir, un mayor entrelazamiento implica una mayor entropía condicional $S_f(A|B) \forall S_f$ en la mezcla (2.24), en contraste con el caso puro $w = 1$ (donde $S_f(A|B) = 0$ para todo estado puro $|\psi\rangle$).

2.2. El caso cuadrático: Pureza condicional tras una medida local

2.2.1. Propiedades generales

Vamos a considerar ahora el caso particular en que la f cóncava en las definiciones anteriores es $f(x) = \alpha x(1-x)$, $\alpha > 0$. Para $\alpha = 1$ esto lleva a

$S_f(\rho) = S_2(\rho)$, con

$$S_2(\rho) = 1 - \text{Tr}\rho^2, \quad (2.28)$$

denominada *entropía cuadrática* o también *lineal*, pues corresponde con la aproximación lineal $-\ln \rho = I - \rho$. Es también el caso $q = 2$ en la familia de entropías de Tsallis $S_q(\rho)$ [11] y provee una cota inferior para la entropía de von Neumann (tomando e como base del logaritmo), puesto que $p(1-p) \leq -p \ln p$, $\forall p \in [0, 1]$. La ecuación (2.28) está trivialmente relacionada con la pureza del estado ρ , $P(\rho) = \text{Tr}\rho^2$, que satisface $P(\rho) \leq 1$ con igualdad *sii* ρ es un estado puro, esto es, $\rho = \rho^2$. También está directamente relacionada con el cuadrado de la distancia de Hilbert-Schmidt entre ρ y el estado máximamente mezclado I/d :

$$\|\rho - I/d\|^2 = \text{Tr}\rho^2 - 1/d, \quad (2.29)$$

donde $\|O\|^2 = \text{Tr}O^\dagger O$ y $S_2(I/d) = 1 - 1/d$. Siguiendo entonces la definición (2.28) la entropía condicional cuadrática de A tras una medida local en B es

$$S(A|B_{\{\Pi_j\}}) = 1 - \sum_j p_j \text{Tr}\rho_{A/\Pi_j}^2, \quad (2.30)$$

y está trivialmente relacionada con la pureza condicional promedio de A tras dicha medida, $P(A|B_{\{\Pi_j\}}) = \sum_j p_j \text{Tr}\rho_{A/\Pi_j}^2$, determinando además el promedio del cuadrado de la distancia de los estados condicionales al estado máximamente mezclado en A :

$$\sum_j p_j \|\rho_{A/\Pi_j} - I_A/d_A\|^2 = S_2(I_A/d_A) - S_2(A|B_{\{\Pi_j\}}). \quad (2.31)$$

La correspondiente ganancia de información cuadrática $I_2(A|B)$ respresenta así el incremento promedio en la pureza del estado de A debido a la medida local en B , y puede también interpretarse como el promedio del cuadrado de la distancia entre el estado marginal ρ_A y los estados posmedidos ρ_{A/Π_j} :

$$I_2(A|B_{\{\Pi_j\}}) = S_2(A) - S_2(A|B_{\{\Pi_j\}}) \quad (2.32)$$

$$= \sum_j p_j \text{Tr}\rho_{A/\Pi_j}^2 - \text{Tr}\rho_A^2 \quad (2.33)$$

$$= \sum_j p_j \|\rho_A - \rho_{A/\Pi_j}\|^2, \quad (2.34)$$

donde usamos que $\rho_{A/\Pi_j} = p_j^{-1} \text{Tr}_B \rho_{AB} \Pi_j$, con $p_j = \text{Tr} \rho_{AB} \Pi_j$. Podemos definir también, mediante I_2 y S_2 , el ratio de ganancia de pureza [32],

$$R_2(A|B_{\{\Pi_j\}}) = 1 + \frac{I_2(A|B_{\{\Pi_j\}})}{1 - S_2(A)} = \frac{\sum_j \text{Tr} \rho_{A/\Pi_j}^2}{\text{Tr} \rho_A^2}, \quad (2.35)$$

que satisface $1 \leq R_2(A|B_{\{\Pi_j\}}) \leq d_A$. Este ratio no es alterado frente a la adición de un sistema auxiliar o *ancilla* ($\rho_{AB} \rightarrow \rho_C \otimes \rho_{AB}$).

En el límite en que ρ está suficientemente cerca del estado máximamente mezclado I/d , la ecuación (2.29) implica que *todas las entropías* $S_f(\rho)$ (con $f''(p) < 0 \forall p$) se vuelven funciones lineales de $S_2(\rho)$: un desarrollo a segundo orden de $S_f(\rho)$ alrededor de I/d conduce a

$$S_f(\rho) - S_f(I/d) \approx \frac{1}{2} |f''(\frac{1}{d})| |\rho - I/d|^2 \quad (2.36)$$

$$= \frac{1}{2} |f''(\frac{1}{d})| [S_2(\rho) - S_2(I/d)]. \quad (2.37)$$

Así, en la vecindad del estado máximamente mezclado todas las entropías S_f (con $f''(1/d) < 0$), incluyendo por supuesto a la entropía de von Neumann, están determinadas por $S_2(\rho)$. En este límite ρ_{A/Π_j} está también cerca de $I/d_A \forall \Pi_j$, por lo que

$$S_f(A|B_{\{\Pi_j\}}) \approx S_f(I/d_A) + \frac{1}{2} |f''(\frac{1}{d_A})| [S_2(A|B_{\{\Pi_j\}}) - S_2(I/d_A)], \quad (2.38)$$

lo que indica que *todas* las entropías condicionales $S_f(A|B_{\{\Pi_j\}})$ (con $f''(1/d_A) < 0$) también se vuelven funciones de la entropía condicional cuadrática. La medida que minimiza $S_2(A|B_{\{\Pi_j\}})$ se vuelve entonces *universal* en este límite, esto es, es la misma para todas las S_f .

Vale notar que el *discord geométrico* [26, 38] está definido como la mínima distancia cuadrada de Hilbert-Schmidt entre ρ_{AB} y un estado cuántico-clásico ρ_c y es equivalente al incremento mínimo en la entropía S_2 del estado global debido a una medida local proyectiva no leída en B [10]:

$$D_2(A|B) = \text{Min}_{\rho_c} \|\rho_{AB} - \rho_c\|^2 = \text{Min}_{\{\Pi_j\}} S_2(\sum_j \Pi_j \rho \Pi_j) - S_2(\rho_{AB}), \quad (2.39)$$

donde nuevamente $\Pi_j = I_A \otimes \Pi_j^B$. A diferencia de $S_2(A|B)$, el discord geométrico busca el estado posmedido promedio más cercano $\sum_j \Pi_j \rho_{AB} \Pi_j$. Esto lleva a

diferencias significativas en la medida que minimiza estas cantidades en ciertos estados, como se discutirá más adelante.

2.2.2. Algunas expresiones explícitas

La ventaja obvia de la entropía $S_2(\rho)$ frente a otras formas entrópicas es que su evaluación no requiere una previa determinación de los autovalores del operador densidad ρ . Pueden obtenerse expresiones convenientes, para un sistema con espacio de Hilbert de dimensión d , considerando un conjunto completo de operadores hermíticos y ortogonales $(I, \boldsymbol{\sigma})$, con $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_{d^2-1})$, que satisfacen

$$\text{Tr } \sigma_i = 0, \quad \text{Tr } \sigma_i \sigma_j = d \delta_{ij}. \quad (2.40)$$

Para el caso en que la dimensión es $d = 2$ estos operadores se reducen a los conocidos operadores de Pauli, por lo que en dimensión mayor constituyen una generalización de la representación de Bloch. En términos de estos operadores un estado general del sistema puede escribirse como

$$\rho = \frac{1}{d}(I + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad (2.41)$$

con $\mathbf{r} = \text{Tr} \rho \boldsymbol{\sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$, siendo entonces la entropía cuadrática de ρ

$$S_2(\rho) = 1 - (1 + |\mathbf{r}|^2)/d. \quad (2.42)$$

Para un estado puro $\rho^2 = \rho \implies |\mathbf{r}|^2 = d - 1$, y resulta $S_2(\rho) = 0$ como se espera. Si el sistema es bipartito, con componentes A y B , podemos reescribir (2.41) como

$$\rho_{AB} = \frac{1}{d}[I + \mathbf{r}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_A \otimes I_B + I_A \otimes \mathbf{r}_B \cdot \boldsymbol{\sigma}_B + \boldsymbol{\sigma}_A^t J \otimes \boldsymbol{\sigma}_B], \quad (2.43)$$

donde $\mathbf{r}_A = \langle \boldsymbol{\sigma}_A \rangle$, $\mathbf{r}_B = \langle \boldsymbol{\sigma}_B \rangle$ y $J = \langle \boldsymbol{\sigma}_A \otimes \boldsymbol{\sigma}_B^t \rangle$ es una matriz de $(d_A^2 - 1) \times (d_B^2 - 1)$ con elementos $J_{ij} = \langle \sigma_{Ai} \otimes \sigma_{Bj} \rangle$. Los estados marginales de A y B en este formalismo toman la forma

$$\rho_\alpha = \frac{1}{d_\alpha}(I_\alpha + \mathbf{r}_\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma}_\alpha), \quad \alpha = A, B. \quad (2.44)$$

Si consideramos ahora una medida local sobre B caracterizada por los operadores (2.11), encontramos que queda representada por vectores

$$\mathbf{k}_j = \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}_B |j_B\rangle\langle j_B|), \quad (2.45)$$

de manera que los operadores de medida en representación de Bloch son $\Pi_j^B = r_j(I_B + \mathbf{k}_j \cdot \boldsymbol{\sigma}_B)/d_B$. Los vectores \mathbf{k}_j satisfacen $|\mathbf{k}_j|^2 = d_B - 1$ y

$$\sum_j r_j \mathbf{k}_j = 0, \quad (2.46)$$

puesto que la condición $\sum_j \Pi_j^B = I_B$ debe satisfacerse. La probabilidad de obtener el resultado j , y el correspondiente estado posmedido ρ_{A/Π_j} , están dados entonces por

$$p_j = \frac{r_j}{d_B} (1 + \mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k}_j), \quad \rho_{A/\Pi_j} = \frac{1}{d_A} \left[I_A + \frac{(\mathbf{r}_A + J\mathbf{k}_j) \cdot \boldsymbol{\sigma}_A}{1 + \mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k}_j} \right], \quad (2.47)$$

expresiones que solo involucran a las componentes de \mathbf{r}_B y J a lo largo de \mathbf{k}_j . Las ecuaciones (2.42)-(2.47) conducen así a

$$\begin{aligned} S_2(A|B_{\{\Pi_j\}}) &= 1 - \frac{1}{d_A} \left[1 + \sum_j p_j \frac{|\mathbf{r}_A + J\mathbf{k}_j|^2}{(1 + \mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k}_j)^2} \right] \\ &= S_2(A) - \frac{1}{d} \sum_j r_j \frac{\mathbf{k}_j^t C^t C \mathbf{k}_j}{1 + \mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k}_j}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

donde $S_2(A) = S_2(\rho_A) = 1 - (1 + |\mathbf{r}_A|^2)/d_A$ y $\mathbf{k}_j^t C^t C \mathbf{k}_j = |C\mathbf{k}_j|^2$, con

$$C = J - \mathbf{r}_A \mathbf{r}_B^t = \langle \boldsymbol{\sigma}_A \otimes \boldsymbol{\sigma}_B^t \rangle - \langle \boldsymbol{\sigma}_A \rangle \langle \boldsymbol{\sigma}_B^t \rangle, \quad (2.49)$$

el *tensor de correlación*, de elementos $C_{ij} = \langle \sigma_{Ai} \otimes \sigma_{Bj}^t \rangle - \langle \sigma_{Ai} \rangle \langle \sigma_{Bj}^t \rangle$ ($C = 0$ si $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$). Reconocemos en el segundo término de (2.48) la ganancia de información cuadrática (2.33), esto es, el incremento promedio en la pureza tras la medida local en B :

$$I_2(A|B_{\{\Pi_j\}}) = \frac{1}{d} \sum_j r_j \frac{\mathbf{k}_j^t C^t C \mathbf{k}_j}{1 + \mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k}_j} \quad (2.50)$$

Es claro entonces que este incremento está determinado por la contracción de \mathbf{r}_B y la matriz $C^t C$, de $(d_B^2 - 1) \times (d_B^2 - 1)$, con los vectores \mathbf{k}_j que representan a los

elementos de medida.

2.2.3. El caso qubit-qudit

Vamos ahora a mostrar que cuando el componente B es un qubit puede obtenerse una expresión analítica para la mínima entropía condicional cuadrática S_2 de A (que equivale a la máxima pureza condicional promedio de A) sobre todas las medidas proyectivas en B , válida para toda dimensión del espacio de estados de A y para todo estado conjunto inicial ρ_{AB} . Podemos tomar en este caso los operadores de Pauli para σ_B y entonces los vectores \mathbf{k}_j son vectores unitarios en \mathbb{R}^3 . Para una medida proyectiva en la dirección del vector \mathbf{k} tenemos, en (2.11), $r_j = 1, j = 1, 2$ y $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$. En tal caso la ecuación (2.50) se reduce a

$$I_2(A|B_{\mathbf{k}}) = \frac{1}{d_A} \frac{\mathbf{k}^t C^t C \mathbf{k}}{1 - (\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k})^2} = \frac{1}{d_A} \frac{\mathbf{k}^t C^t C \mathbf{k}}{\mathbf{k}^t N_B \mathbf{k}} \quad (2.51)$$

donde N_B es la matriz semidefinida positiva de 3×3

$$N_B = I_3 - \mathbf{r}_B \mathbf{r}_B^t. \quad (2.52)$$

La última expresión en (2.51) es un cociente de formas cuadráticas y es por lo tanto independiente de la norma de \mathbf{k} . Su máximo puede entonces obtenerse diagonalizando la matriz de 3×3 $C^t C$ sujeta a la métrica N_B : Haciendo $\mathbf{k} = N_B^{-1/2} \tilde{\mathbf{k}}$, con $\tilde{\mathbf{k}}^t \tilde{\mathbf{k}} = 1$, tenemos

$$\frac{\mathbf{k}^t C^t C \mathbf{k}}{\mathbf{k}^t N_B \mathbf{k}} = \tilde{\mathbf{k}}^t \tilde{C}^t \tilde{C} \tilde{\mathbf{k}} \leq \lambda_{\max}, \quad (2.53)$$

donde $\tilde{C} = C N_B^{-1/2}$ y λ_{\max} es el máximo autovalor de $\tilde{C}^t \tilde{C}$, y el máximo se alcanza cuando $\tilde{\mathbf{k}}$ es el autovector asociado a dicho autovalor. La ecuación de autovalores $\tilde{C}^t \tilde{C} = \lambda \tilde{\mathbf{k}}$ es simplemente la ecuación de autovalores para $C^t C$ con métrica N_B ,

$$C^t C \mathbf{k} = \lambda N_B \mathbf{k}, \quad (2.54)$$

de manera que λ_{\max} es la raíz más grande de la ecuación

$$\text{Det}[C^t C - \lambda N_B] = 0, \quad (2.55)$$

con \mathbf{k} el autovector asociado. En otras palabras, $\sqrt{\lambda_{\max}}$ es el máximo valor singular del tensor de correlación C con métrica N_B . La correspondiente entropía condicional y máxima ganancia de información están dados entonces por

$$S_2(A|B) = \underset{\mathbf{k}}{\text{Min}} S_2(A|B_{\mathbf{k}}) = S_2 - \lambda_{\max}/d_A. \quad (2.56)$$

$$I_2(A|B) = \underset{\mathbf{k}}{\text{Max}} I_2(A|B_{\mathbf{k}}) = \lambda_{\max}/d_A. \quad (2.57)$$

Si $\mathbf{r}_B = 0$, entonces $N_B = I_3$ y λ_{\max} es simplemente el autovalor máximo de $C^t C$. Por otra parte, si $|\mathbf{r}_B| = 1$, ρ_{AB} es un estado producto por lo que $\mathbf{k}^t C^t C \mathbf{k} = 0 \forall \mathbf{k}$.

Por ejemplo, el estado clásicamente correlacionado $\rho_{AB} = \sum_k q_k \rho_{A/k} \otimes \tilde{\Pi}_{\mathbf{k}}^B$ corresponde, eligiendo el eje z en B tal que $\tilde{\Pi}_{\pm \mathbf{k}^B} = \frac{1}{2}(I_B \pm \sigma_z)$, a $(\mathbf{r}_B)_\nu = \delta_{\nu z} r_B$, $J_{\mu\nu} = \delta_{\nu z} J_{\mu z}$, lo que implica que $(C^t C)_{\nu\nu'} = \delta_{\nu\nu'} \delta_{\nu z} |\mathbf{J} - r_B \mathbf{r}_A|^2$, con \mathbf{J} el vector de componentes $J_{\mu z}$. Luego,

$$\frac{\mathbf{k}^t C^t C \mathbf{k}}{\mathbf{k}^t N_B \mathbf{k}} \leq \lambda_{\max} = \frac{|\mathbf{J} - r_B \mathbf{r}_A|^2}{1 - r_B^2}, \quad (2.58)$$

verificándose que el máximo se alcanza para \mathbf{k} a lo largo de z , esto es, para una medida en la dirección de \mathbf{r}_B (en la base de autoestados de ρ_B). Para un estado general, sin embargo, la dirección de la medida minimizante va a diferir de la correspondiente a \mathbf{r}_B , siguiendo la dirección de *máxima correlación* determinada por $C^t C$.

Si A es también un qubit ($d_A = 2$), es conveniente usar $S_2 = 2(1 - \text{Tr}\rho^2)$ en las ecuaciones anteriores, de manera que $S_2(\rho_A) = 1$ si ρ_A es máximamente mezclado. En tal caso, si ρ_{AB} tiene rango 2 puede purificarse adicionando un tercer qubit C , verificándose entonces que $S_2(A|B)$ coincide con el cuadrado de la concurrencia (1.42) entre A y C , dado que esta cantidad se reduce para estados puros de dos qubits a la entropía S_2 de cualquiera de los subsistemas, y coincide con el techo convexo $E_2(A, C)$ para estados mezcla de dos qubits [34]. Remarcamos finalmente que para un estado de un sistema qudit-qubit el discord geométrico está determinado por el mayor autovalor de una matriz de 3×3 diferente [26, 38]:

$$D_2(A|B) = \frac{1}{d} (|\mathbf{r}_B|^2 + \|\mathbf{J}\|^2 - \tilde{\lambda}_{\max}), \quad (2.59)$$

donde $\tilde{\lambda}_{\max}$ es el autovalor más grande de $M_2 = \mathbf{r}_B \mathbf{r}_B^t + J^t J$. Esta matriz depende entonces de J más que de la matriz de correlación C , coincidiendo las dos solo

en el caso en que $r_B = 0$.

Vale mencionar finalmente que, si bien el presente formalismo considera solo medidas de von Neumann (1.18), el mínimo en (2.56) es también el mínimo sobre todas las medidas generalizadas en B , como demostraremos en el próximo capítulo.

2.3. Mínima entropía condicional en estados X

Terminamos este capítulo aplicando los resultados derivados en las secciones anteriores a estados X de dos qubits. Estos estados resultan de interés no solo porque aparecen naturalmente en el estudio de sistemas físicos particulares, como las cadenas de espines, sino también porque la evaluación de medidas de entrelazamiento y otras propiedades en ellos puede realizarse de manera analítica [40]. La misma situación se da en el caso de la mínima entropía condicional cuadrática, cuya evaluación en estos estados es inmediata, lo que permite entender más fácilmente las características de la medida minimizante.

2.3.1. Estados X

Consideremos ahora un sistema de dos qubits. La matriz J es entonces de 3×3 y siempre pueden elegirse bases locales en las que esta toma una forma diagonal $J_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} J_\mu$. Los correspondientes ejes x, y, z quedan determinados por la descomposición en valores singulares de J . Si r_A y r_B están en la dirección del mismo eje principal de J , que denominaremos z , obtenemos un *estado* X [41],

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{4} (I + r_A \sigma_z \otimes I_2 + r_B I_2 \otimes \sigma_z + \sum_{\mu=x,y,z} J_\mu \sigma_\mu \otimes \sigma_\mu) \quad (2.60) \\ &= \begin{pmatrix} p_+ & 0 & 0 & \alpha_- \\ 0 & q_+ & \alpha_+ & 0 \\ 0 & \alpha_+ & q_- & 0 \\ \alpha_- & 0 & 0 & p_- \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} p_\pm &= \frac{1 \pm (r_A + r_B) + J_z}{4} \\ q_\pm &= \frac{1 \pm (r_A - r_B) - J_z}{4} \\ \alpha_\pm &= \frac{J_x \pm J_y}{4} \end{aligned} \quad (2.61) \end{aligned}$$

donde la ecuación (2.61) es la representación del estado en la base estándar. Este estado conmuta con el operador de paridad en z , $P_z = \sigma_z \otimes \sigma_z$. En consecuencia, los estados reducidos de pares arbitrarios de espines en un estado térmico de una cadena con acoplamiento de Heisenberg XY o XYZ de rango arbitrario

en un campo en dirección z son de esta forma, puesto que el correspondiente Hamiltoniano conmuta con la paridad total respecto de z .

Las matrices C y N_B de estos estados, en las bases locales indicadas, son simultáneamente diagonales,

$$C = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z - r_A r_B \end{pmatrix}, \quad N_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - r_B^2 \end{pmatrix},$$

por lo que la mínima entropía condicional $S_2(A|B)$ entre todas las medidas proyectivas se obtiene para una medida en la dirección de alguno de los ejes principales x, y, z de C . Obtenemos entonces las siguientes expresiones para la mínima entropía condicional cuadrática y la correspondiente máxima ganancia de información tras una medida en B

$$S_2(A|B) = 1 - |\mathbf{r}_A|^2 - I_2(A|B), \quad (2.62)$$

$$I_2(A|B) = \text{Max}_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}^t C^t C \mathbf{k}}{\mathbf{k}^t N_B \mathbf{k}} = \text{Max} \left[J_x^2, J_y^2, \frac{(J_z - r_A r_B)^2}{1 - r_B^2} \right], \quad (2.63)$$

lo que implica una transición $z \rightarrow x$ o $z \rightarrow y$ en la dirección de la medida minimizante cuando J_x o J_y crecen por encima de $\lambda_z = (J_z - r_A r_B)^2 / (1 - r_B^2)$. Tal dirección está entonces determinada esencialmente por la dirección principal de correlación en $C^t C$. Esto provee una base conceptual para los resultados de [42] en relación a la medida minimizante en la evaluación de la discordia para estados X , que también sigue la dirección principal de correlación. Esta dirección puede ser significativamente diferente de aquella que minimiza la discordia geométrica. Para el estado (2.60) obtenemos [10, 38] (2.59)

$$D_2(A|B) = \frac{1}{2} \{ r_B^2 + \|J\|^2 - \text{Max}[J_x^2, J_y^2, J_z^2 + r_B^2] \}, \quad (2.64)$$

implicando una transición $z \rightarrow x$ o $z \rightarrow y$ en cuanto J_x^2 o J_y^2 crecen por encima de $J_z^2 + r_B^2$. La coincidencia de las dos medidas puede asegurarse entonces solo para $r_B = 0$, esto es, para el caso en que el marginal ρ_B está máximamente mezclado, donde la medida minimizante es en la dirección definida por el autovalor más grande de $|J_\mu|$ para ambas $S_2(A|B)$ y $D_2(A|B)$.

Para una forma entrópica general S_f la entropía condicional es

$$S_f(A|B_{\mathbf{k}}) = \sum_{\mu, \nu = \pm 1} \frac{1 + \nu \mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k}}{2} f \left[\frac{1}{2} \left(1 + \mu \left| \mathbf{r}_A + \frac{\nu C \mathbf{k}}{1 + \nu \mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k}} \right| \right) \right]. \quad (2.65)$$

Se verifica que para un estado X , medidas en la dirección de cualquiera de los ejes principales de J son siempre estacionarias ($\delta S_f(A|B_{\mathbf{k}}) = 0$ a primer orden en $\delta \mathbf{k}$), esto es, candidatas a medidas minimizantes de (2.65), aunque otras direcciones no pueden descartarse (típicamente en la región de transición entre z y x o y). Por otra parte para estados de dos qubits con marginales máximamente mezclados, que pueden escribirse como estados X con $r_A = r_B = 0$, se ve de (2.63) y (2.65) que la medida minimizante es en la dirección del eje con mayor $|J_\mu|$, esto es, \mathbf{k} en la dirección del mayor autovalor de $J^t J = C^t C$ para cualquier entropía S_f (mínimo universal).

Finalmente mencionamos que la discordia geométrica $D_2(A|B)$, como se muestra en ([43]), es una cota superior al cuadrado de la negatividad $\mathcal{N}(\rho_{AB})$ [44], dada para dos qubits por $\text{Tr}|\rho^{T_B}| - 1$ (con ρ^{T_B} la traspuesta parcial), coincidiendo ambas medidas para ρ_{AB} puro. Para estados X obtenemos aquí una relación similar entre $I_2(A|B)$ y el cuadrado de la concurrencia $\mathcal{C}(\rho)$, con ambas coincidiendo cuando ρ es puro: para el estado X , la concurrencia es $\mathcal{C}(\rho) = 2\text{Max}[|\alpha_+| - \sqrt{p_+ p_-}, |\alpha_-| - \sqrt{q_+ q_-}]$, de donde se sigue que $\mathcal{C}(\rho) \leq 2\text{Max}[|\alpha_+|, |\alpha_-|]$, y así, como $|\alpha \pm| \leq \text{Max}[|J_x|, |J_y|]/2$, resulta

$$\mathcal{C}^2(\rho) \leq \text{Max}[J_x^2, J_y^2] \leq I_2(A|B). \quad (2.66)$$

2.3.2. Mezcla de un estado puro con el estado máximamente mezclado

Como ejemplo específico de estados de la forma (2.60), consideramos la mezcla (2.24) en el caso de dos qubits. Eligiendo apropiadamente los ejes locales, podemos siempre escribir el estado como

$$\rho = w|\Psi\rangle\langle\Psi| + (1-w)I_4/4, \quad |\Psi\rangle = \sqrt{q}|00\rangle + \sqrt{1-q}|11\rangle, \quad (2.67)$$

que corresponde a un estado X con

$$r_A = r_B = w(2q - 1), \quad J_x = -J_y = 2w\sqrt{q(1-q)}, \quad J_z = w.$$

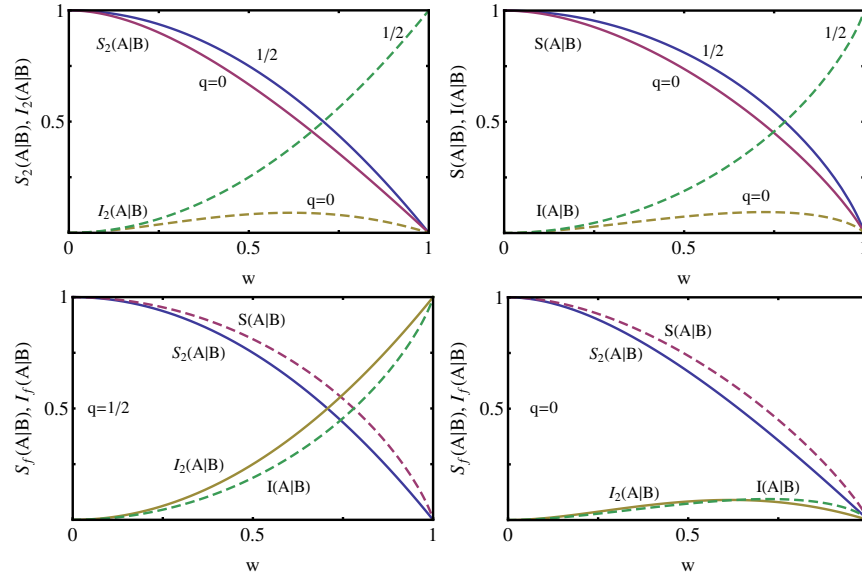


Figura 2.1: Arriba: Resultados para la mínima entropía condicional (línea sólida) $S_f(A|B)$ cuadrática (izquierda) y de von Neumann (derecha), y máxima ganancia de información $I_f(A|B)$ (línea punteada), tras una medida en B para la mezcla (2.67) en el caso máximamente entrelazado ($q = 1/2$) y separable ($q = 0$). Todas las $S_f(A|B)$ son funciones cóncavas y decrecientes de w , anulándose en el límite puro $w = 1$. Abajo: Comparación de los resultados de la entropía cuadrática (líneas sólidas) y de von Neumann (líneas punteadas) para $q = 1/2$ (izquierda) y $q = 0$ (derecha). Se verifica que $S_2(A|B) \leq S(A|B) \forall w, q$.

Se verifica entonces que $\frac{(J_z - r_A r_B)^2}{1 - r_B^2} - J_x^2 = \frac{w^2(1-w)^2(1-2q)^2}{1 - w^2(1-2q)^2} \geq 0$, lo que implica que $S_2(A|B_{\mathbf{k}})$ alcanza su mínimo para una medida en la dirección z (es decir, en la base de autoestados de ρ_B), en concordancia con el mínimo universal para este estado discutido anteriormente. Se ve también, entonces, que para $w = 1$ (ρ puro), $w = 0$ (ρ máximamente mezclado) o $q = 1/2$ ($|\Psi\rangle$ máximamente entrelazado) la diferencia se anula, indicando que todas las direcciones \mathbf{k} llevan al mismo resultado, en acuerdo con consideraciones previas. En cualquier caso obtenemos, para $S_2(\rho) = 2(1 - \text{Tr } \rho^2)$,

$$S_2(A|B) = \frac{(1-w)(1+w-2w^2(1-2q)^2)}{1-w^2(1-2q)^2}, \quad (2.68)$$

$$I_2(A|B) = \frac{w^2(1-w(1-2q)^2)^2}{1-w^2(1-2q)^2}, \quad (2.69)$$

con $S_2(A) = 1 - w^2(1 - 2q)^2$. Se verifica que la ecuación (2.68) es una función estrictamente cóncava y decreciente de w para $q \in [0, 1]$ fijo, y una

función estrictamente cóncava de q si $w \in (0, 1)$, alcanzando su valor máximo en $q = 1/2$ (estado de Bell). Vale notar que $(1 - 2q)^2 = 1 - \mathcal{C}^2(|\Psi\rangle)$, con $\mathcal{C}(|\Psi\rangle) = 2\sqrt{q(1-q)}$ la *conurrencia* [39] de $|\Psi\rangle$, de manera que la ecuación (2.68) es, para $w \in (0, 1)$, una función creciente de $\mathcal{C}(|\Psi\rangle)$, es decir, del entrelazamiento, como se afirmó previamente. La desigualdad en (2.66) también es satisfecha ($\mathcal{C}(\rho) = \text{Max}[w\mathcal{C}(|\Psi\rangle) - (1-w)/2, 0]$).

$I_2(A|B)$ en (2.69) es también una función estrictamente cóncava de q si $w \in (0, 1]$, con máximo en $q = 1/2$, es decir, una *función creciente* de la conurrencia $\mathcal{C}(|\Psi\rangle)$. Por el contrario (2.69) no es necesariamente una función creciente de w . Su comportamiento con w puede no ser monótono si $|\Psi\rangle$ es separable o casi separable (q muy chico o cercano a 1), como se muestra en figura 2.1, donde también se muestran los resultados para la entropía condicional y la ganancia de información de von Neumann ($S(\rho) = -\text{Tr}\rho \log_2 \rho$). Tal comportamiento es universal, es decir, vale para cualquier S_f : Cuando $|\Psi\rangle$ es separable, el ruido induce un valor no nulo de $I_f(A|B)$, dado que ρ_{AB} deja de ser un estado producto para $w \in (0, 1)$.

Como se aprecia en la figura 2.1, el comportamiento cualitativo de la mínima entropía condicional lineal y de von Neumann es completamente análogo, y lo mismo vale para la correspondiente máxima ganancia de información $I_f(A|B)$. No obstante, mientras $S_2(A|B) \leq S(A|B)$, no hay en general una relación de orden fija entre $I_2(A|B)$ y $I(A|B)$.

2.3.3. Mezcla de estados alineados

Consideremos ahora el siguiente estado de dos qubits

$$\rho = \frac{1}{2}(|\theta\theta\rangle\langle\theta\theta| + |-\theta\theta\rangle\langle-\theta-\theta|), \quad (2.70)$$

donde $|\theta\rangle = \exp[-i\theta\sigma_y/2]|0\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$ es el estado con espín formando un ángulo θ con el eje z . Este estado separable representa, a grandes rasgos, el estado reducido de un par de espines 1/2 en el estado fundamental exacto de paridad definida de una cadena ferromagnética XY , para campos $|B| < B_c$ si $\cos\theta = B/B_c$ [45]. Además, si la cadena no es muy chica, es el estado *exacto* del par en la vecindad inmediata del campo factorizante [45–47].

La ecuación (2.70) corresponde a un estado X con

$$r_A = r_B = \cos\theta, \quad J_z = \cos^2\theta, \quad J_x = \sin^2\theta, \quad J_y = 0.$$

Por lo tanto, no hay correlación en la dirección z ($J_z = r_A r_B$, y entonces $C_z = 0$) pero hay correlación finita en la dirección x ($C_x = J_x^2$). Así, notablemente, $S_2(A|B_{\mathbf{k}})$ alcanza su mínimo para \mathbf{k} en dirección $x \forall \theta \in (0, \pi/2]$, lo que lleva a

$$S_2(A|B) = 1 - \cos^2 \theta - \sin^4 \theta = \frac{1}{4} \sin^2 2\theta, \quad I_2(A|B) = \sin^4 \theta. \quad (2.71)$$

La mínima entropía condicional S_2 es entonces simétrica alrededor de $\theta = \pi/4$, anulándose para $\theta = 0$ (estado producto) y $\pi/2$ (estado cuántico-clásico (2.19) con $\rho_{A/\mathbf{k}}$ puro), mientras que la máxima $I_2(A|B)$ crece con θ (figura 2.2), alcanzando su máximo absoluto en $\theta = \pi/2$. Así, las medidas de espín en dirección z no son minimizantes para ningún $\theta > 0$ (aunque la diferencia con (2.71) es de orden $O(\theta^4)$ para $\theta \rightarrow 0$). En el caso de la entropía de von Neumann, el comportamiento de $S(A|B)$ y $I(A|B)$ es nuevamente análogo al de $S_2(A|B)$ y $I_2(A|B)$, como puede apreciarse en la figura 2.2. Además, la medida minimizante es también para \mathbf{k} en dirección $x \forall \theta \in (0, \pi/2]$ [10, 45], coincidente con la correspondiente a la entropía $S_2 \forall \theta$. Los resultados para S_2 permiten entender fácilmente la medida minimizante de la discordia para este estado [45]. Por el contrario, la medida que minimiza la discordia geométrica corresponde a \mathbf{k} en dirección x solo si $\theta > \theta_c$, con $\cos^2 \theta_c = \frac{1}{3}$, prefiriendo \mathbf{k} en dirección z si $\theta < \theta_c$ [10].

2.3.4. Pares de espines 1/2 en cadenas XY sometidas a un campo transverso fuerte

Consideremos finalmente un arreglo de espines 1/2 con acoplamientos XY en un campo magnético transverso fuerte, descrito por un Hamiltoniano

$$H = -B \sum_i \sigma_{iz} - \sum_{i < j} (J_{ij}^x \sigma_{ix} \sigma_{jx} + J_{ij}^y \sigma_{iy} \sigma_{jy}). \quad (2.72)$$

Como se muestra en [10] la mínima discordia cuántica en estados reducidos de dos espines, en el estado fundamental de este tipo de cadenas, está determinada por medidas locales de espín a lo largo de la dirección x , incluso para valores grandes del campo transverso. Este resultado puede explicarse y entenderse a partir del

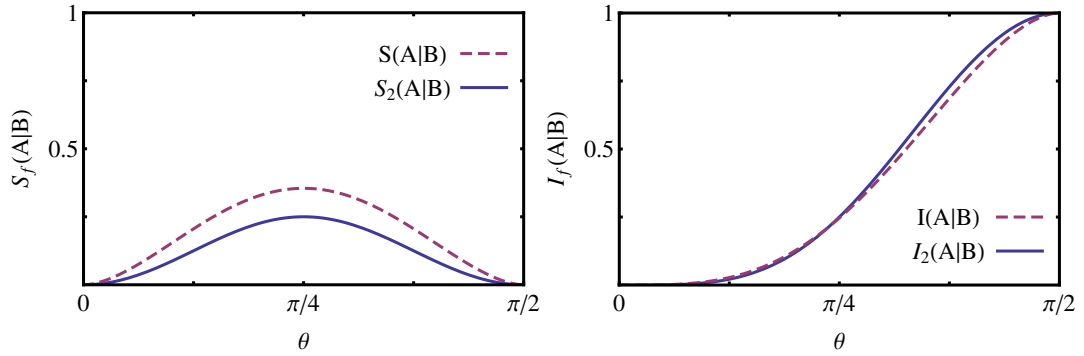


Figura 2.2: (Izquierda) Resultados para la mínima entropía condicional cuadrática (línea sólida) y de von Neumann (línea de trazos), en la mezcla de estados alineados (2.70). (Derecha) Comparación de la máxima ganancia de información en los casos mencionados. Ambas entropías condicionales se minimizan para medidas en dirección $x \forall \theta \in (0, \pi/2]$.

presente formalismo.

Para campos suficientemente intensos, $B \gg |J_{ij}^\mu| \forall \mu, i, j$, el sistema está débilmente acoplado y el estado fundamental es de la forma

$$|\Psi\rangle \approx |0\rangle + \sum_{i < j} \alpha_{ij} |ij\rangle \quad (2.73)$$

al orden más bajo no trivial, donde $|0\rangle = |0 \dots 0\rangle$ denota el estado con todos los espines alineados en la dirección del campo ($+z$), $|ij\rangle = \sigma_{i-} \sigma_{j-} |0\rangle$ y $\alpha_{ij} \approx (J_{ij}^x - J_{ij}^y)/(2B)$. El estado reducido de un par i, j es entonces un estado X con (definiendo $\alpha_{ji} = \alpha_{ij}$)

$$\alpha_- = \alpha_{ij}, \quad p_- = |\alpha_{ij}|^2, \quad \alpha_+ = \sum_{k \neq i, j} \alpha_{ik} \bar{\alpha}_{kj}, \quad q_\pm = \sum_{k \neq i, j} |\alpha_{jk}|^2. \quad (2.74)$$

Eligiendo apropiadamente los ejes locales en los sitios i, j podemos tomar α_\pm real y positivo. Luego, hasta $O(|\alpha|^2)$ obtenemos $r_{A,B} = 1 - 2(|\alpha_{ij}|^2 + q_\mp)$ (en dirección z) y

$$J_y = 2 \left(\sum_{k \neq i, j} \alpha_{ik} \bar{\alpha}_{kj} \pm \alpha_{ij} \right), \quad J_z - r_A r_B \approx 4 |\alpha_{ij}|^2. \quad (2.75)$$

Por lo tanto, para $\alpha_{ij} \neq 0$ (par interactuante) C_{xx} es $O(\alpha_{ij})$ mientras que C_{zz} es $O(\alpha_{ij}^2)$, verificándose que al orden más bajo *la medida minimizante es en dirección x en vez de z* , pues la correlación en z es de orden superior. *El mismo*

comportamiento se observa en la medida que minimiza la entropía condicional de von Neumann y por tanto también la discordia en este régimen (\mathbf{k} en dirección x a campos intensos [45, 48]). La medida que minimiza la discordia geométrica o el déficit de información [10, 49], por el contrario, sigue la componente principal del estado y es por lo tanto en dirección z para campos intensos [48].

Capítulo 3

Optimización de la entropía condicional generalizada en sistemas qudit-qubit

En el capítulo anterior analizamos las propiedades generales de la entropía condicional dependiente de la medida, considerando formas entrópicas generales. Esto permite considerar entropías cuya evaluación es simple en comparación con la entropía de von Neumann, como es el caso de la entropía lineal (una forma cuadrática en el estado ρ). Esta entropía está trivialmente relacionada con la pureza del estado y su minimización sobre medidas proyectivas en un estado qudit-qubit puede determinarse exactamente, como ya vimos. En este capítulo primero proveemos una descripción geométrica clara de este problema y su correspondiente solución en términos de un *elipsoide de correlación* que representa al conjunto de estados posmedidos en el componente no medido del sistema. La ecuación de este elipsoide involucra al tensor de correlación C del estado conjunto y a los vectores de Bloch de los estados marginales.

Extendemos después el análisis del caso cuadrático a formas entrópicas generales derivando una aproximación cuadrática (en C) para la entropía condicional, válida para elipsoides de correlación suficientemente pequeños. El problema de optimización en el caso general se reduce entonces a un problema de minimización de una forma cuadrática de 3×3 , siendo entonces exactamente soluble y completamente análogo al problema de optimización de la entropía cuadrática, con un tensor de correlación *efectivo* que tiene en cuenta la concavidad local de la forma entrópica considerada. El nuevo formalismo se aplica luego a derivar una

aproximación cuadrática de la discordia cuántica, exacta en el límite de correlación débil. Finalmente proveemos resultados ilustrativos para estados X de dos qubits, que evidencian la validez de la aproximación incluso más allá del límite de correlación débil.

Este capítulo está basado en los resultados publicados en [50].

3.1. Mínima entropía condicional cuadrática y su interpretación geométrica

3.1.1. Expresiones generales

Como vimos en el capítulo anterior, si en el sistema bipartito AB el componente B es un qubit y el componente A es un sistema con espacio de Hilbert de dimensión d_A (qudit), podemos describir su estado en términos de los operadores de Pauli $\boldsymbol{\sigma}_B = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ para el sistema B y un conjunto análogo de $D_A = d_A^2 - 1$ operadores hermíticos y mutuamente ortogonales $\boldsymbol{\sigma}_A$ para el sistema A , que satisfacen (para $\mu, \mu' = 1, \dots, D_A$)

$$\text{Tr } \sigma_{A\mu} = 0, \quad \text{Tr } \sigma_{A\mu} \sigma_{A\mu'} = d_A \delta_{\mu\mu'}. \quad (3.1)$$

En términos de estos operadores el estado conjunto de AB puede escribirse como [51],

$$\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B + \frac{1}{2d_A} \sum_{\mu, \nu} C_{\mu\nu} \sigma_{A\mu} \otimes \sigma_{B\nu}, \quad (3.2)$$

donde los estados marginales $\rho_{A(B)}$ están dados, como se mostró anteriormente, por

$$\rho_A = \frac{1}{d_A} (I_A + \mathbf{r}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_A), \quad \rho_B = \frac{1}{2} (I_B + \mathbf{r}_B \cdot \boldsymbol{\sigma}_B), \quad (3.3)$$

con $\mathbf{r}_{A(B)} = \langle \boldsymbol{\sigma}_{A(B)} \rangle \equiv \text{Tr } \rho_{AB} \boldsymbol{\sigma}_{A(B)}$. Los elementos del tensor de correlación, que en este caso es una matriz de $d_A \times 3$, son

$$C_{\mu\nu} = \langle \sigma_{A\mu} \otimes \sigma_{B\nu} \rangle - \langle \sigma_{A\mu} \rangle \langle \sigma_{B\nu} \rangle. \quad (3.4)$$

C puede verse como un objeto análogo a un tensor de inercia, en el sentido que para un vector unitario \mathbf{k} en \mathbb{R}^3 el número $|C\mathbf{k}|$ cuantifica las correlaciones en la

dirección de espín \mathbf{k} en B . Mediante una descomposición en valores singulares

$$C = UDV^T, \quad D_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}C_\mu, \quad (3.5)$$

donde U, V son matrices reales y ortonormales de $D_A \times D_A$ y 3×3 ($U^T = U^{-1}$, $V^T = V^{-1}$, T indica trasposición) y C_μ^2 los autovalores de la matriz de 3×3 $C^T C$ (idénticos a los autovalores no nulos de CC^T), podemos seleccionar siempre operadores ortogonales $\tilde{\sigma}_{A\mu} = \sum_{\mu'} U_{\mu'\mu} \sigma_{A\mu'}$, $\tilde{\sigma}_{B\nu} = \sum_{\nu'} V_{\nu'\nu} \sigma_{B\nu'}$ que verifiquen las ecuaciones (3.1), tales que solo tres operadores en A estén conectados a través de C con aquellos en B :

$$\sum_{\mu,\nu} C_{\mu\nu} \sigma_{A\mu} \otimes \sigma_{B\nu} = \sum_{\mu=1}^3 C_\mu \tilde{\sigma}_{A\mu} \otimes \tilde{\sigma}_{B\mu}. \quad (3.6)$$

Como ya vimos también, una medida proyectiva sobre el qubit B está caracterizada por los operadores de medida $\Pi_{\pm\mathbf{k}}^B = \frac{1}{2}(I \pm \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}_B)$, donde \mathbf{k} es un vector unitario en \mathbb{R}^3 . Podemos reescribir al estado marginal de A tras la medida (2.47) y su correspondiente probabilidad como

$$\rho_{A/\Pi_{\pm\mathbf{k}}} = \rho_A \pm \frac{1}{d_A} \left(\frac{C\mathbf{k}}{1 \pm \mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k}} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma}_A, \quad (3.7)$$

$$p_{\pm\mathbf{k}} = \frac{1}{2}(1 \pm \mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k}), \quad (3.8)$$

lo que implica que el vector de Bloch que representa al estado posmedido de A en \mathbb{R}^3 es

$$\mathbf{r}_{A/\pm\mathbf{k}} = \mathbf{r}_A \pm \frac{C\mathbf{k}}{1 \pm \mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k}}. \quad (3.9)$$

La consiguiente entropía condicional $S_f(A|B_{\mathbf{k}}) \equiv S_f(A|B_{\{\Pi_{\mathbf{k}}, \Pi_{-\mathbf{k}}\}})$ resulta entonces

$$S_f(A|B_{\mathbf{k}}) = \sum_{\nu=\pm 1} p_{\nu\mathbf{k}} S_f(\rho_{A/\Pi_{\nu\mathbf{k}}}), \quad (3.10)$$

con $S_f(\rho_{A/\Pi_{\nu\mathbf{k}}}) = \sum_{i=1}^{d_A} f(p_{i/\nu\mathbf{k}}^A)$ y $p_{i/\pm\mathbf{k}}^A$ los autovalores de $\rho_{A/\pm\Pi_{\mathbf{k}}}$. Para una medida POVM M_B basada en el conjunto de operadores de rango uno $\sqrt{r_{\mathbf{k}}} \Pi_{\mathbf{k}}^B$, con $\sum_{\mathbf{k}} r_{\mathbf{k}} \Pi_{\mathbf{k}}^B = I_B$, simplemente reemplazamos (3.10) por

$$S_f(A|B_{\{r_{\mathbf{k}}\Pi_{\mathbf{k}}\}}) = \sum_{\mathbf{k}} r_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}} S_f(\rho_{A/\Pi_{\mathbf{k}}}). \quad (3.11)$$

3.1.1.1. Variedad de estados posmedidos: El elipsoide de correlación

El conjunto de todos los vectores de Bloch que representan estados posmedidos (3.9) es un elipsoide tridimensional, al que nos referiremos como *elipsoide de correlación* (figura 3.1). Si $\mathbf{r}_B = \mathbf{0}$ (ρ_B máximamente mezclado), $\delta\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_{A/\mathbf{k}} - \mathbf{r}_A = C\mathbf{k}$, y el elipsoide estará centrado en \mathbf{r}_A . Sus ejes principales estarán en las direcciones asociadas a los operadores $\tilde{\sigma}_{A\mu}$ en (3.6), y sus longitudes estarán dadas por los valores singulares C_μ .

Para valores generales de \mathbf{r}_B , definiendo primero $\tilde{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{1+\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k}}$, tal que $1 - \mathbf{r}_B \cdot \tilde{\mathbf{k}} = \frac{1}{1+\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k}}$, la esfera unidad $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$ queda mapeada en el elipsoide desplazado $\tilde{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{k}} = (1 - \mathbf{r}_B \cdot \tilde{\mathbf{k}})^2$, el cual puede escribirse explícitamente como

$$\left(\tilde{\mathbf{k}} + \tilde{\mathbf{r}}_B\right)^T (1 - r_B^2) N_B \left(\tilde{\mathbf{k}} + \tilde{\mathbf{r}}_B\right) = 1, \quad (3.12)$$

$$N_B = I - \mathbf{r}_B \mathbf{r}_B^T, \quad (3.13)$$

donde $r_B = |\mathbf{r}_B|$, $\tilde{\mathbf{r}}_B = \mathbf{r}_B/(1 - r_B^2)$ y N_B es una matriz de 3×3 (definida positiva si $r_B < 1$). Este elipsoide tiene excentricidad \mathbf{r}_B , con el origen en uno de sus focos. El tensor de correlación C en (3.9), entonces, mapea (3.13) en un elipsoide desplazado con centro en $\mathbf{r}_A - C\tilde{\mathbf{r}}_B$:

$$(\delta\mathbf{r}_A + C\tilde{\mathbf{r}}_B)^T (1 - r_B^2) (CN_B^{-1}C^T)^{-1} (\delta\mathbf{r}_A + C\tilde{\mathbf{r}}_B) = 1, \quad (3.14)$$

donde $CN_B^{-1}C^T$ es una matriz semidefinida positiva (su inversa en (3.14) se toma dentro del subespacio asociado a los operadores $\tilde{\sigma}_{A\mu}$ en (3.6)). Los ejes principales de este elipsoide están determinados por los autovectores \mathbf{k}_μ^A ,

$$CN_B^{-1}C^T \mathbf{k}_\mu^A = \lambda_\mu \mathbf{k}_\mu^A, \quad (3.15)$$

asociados con los autovalores no nulos λ_μ , y las longitudes de sus semiejes están dadas por $\sqrt{\lambda_\mu/(1 - r_B^2)}$. Para estados puros el estado condicional $\rho_{A/\Pi_{\mathbf{k}}}$ es puro $\forall \mathbf{k}$, de manera que $|\mathbf{r}_{A/\mathbf{k}}|^2 = d_A - 1 \forall \mathbf{k}$. Por ejemplo, en un sistema de dos qubits, eligiendo apropiadamente los ejes locales x, y, z , la descomposición de Schmidt habilita a escribir cualquier estado puro como $|\Psi_{AB}\rangle = \sqrt{p}|00\rangle + \sqrt{1-p}|11\rangle$. Esto lleva a $C_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}C_\mu$ y $r_{A\mu} = r_{B\mu} = \delta_{\mu z}r_B$, con $C_x = -C_y = 2\sqrt{p(1-p)}$, $r_B = 2p - 1$ y $C_z = 1 - r_B^2 = C_x^2$. Se verifica entonces que para $p \in (0, 1)$, el elipsoide (3.14) coincide con la esfera de Bloch de A ($CN_B^{-1}C^T = (1 - r_B^2)I$, $C\tilde{\mathbf{r}}_B = \mathbf{r}_B$).

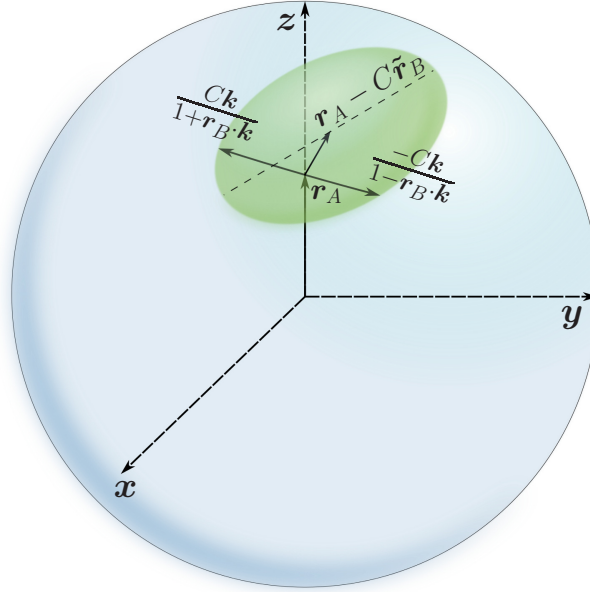


Figura 3.1: Representación esquemática del elipsoide de correlación (3.14) ilustrando los posibles vectores de Bloch de los estados posmedidos de A . Está centrado en $\mathbf{r}_A - C\tilde{\mathbf{r}}_B$, con $\tilde{\mathbf{r}}_B = \mathbf{r}_B/(1 - r_B^2)$. Para una dada dirección \mathbf{k} en la esfera unidad de B , los vectores $\mathbf{r}_{A/\pm\mathbf{k}}$ en A son los extremos de una cuerda que pasa por \mathbf{r}_A . Si $\mathbf{r}_B = \mathbf{0}$, el elipsoide pasa a estar centrado en \mathbf{r}_A .

3.1.2. Entropía cuadrática

3.1.2.1. Expresiones explícitas y entropía condicional mínima

Vimos en el capítulo anterior que, en el formalismo de Bloch, la entropía del estado de A viene dada por

$$S_2(\rho_A) = 2 \left(1 - \frac{1 + |\mathbf{r}_A|^2}{d_A} \right). \quad (3.16)$$

y que la entropía condicional y la correspondiente ganancia de información están entonces dadas por

$$S_2(A|B_{\mathbf{k}}) = S_2(\rho_A) - \Delta S_2(A|B_{\mathbf{k}}), \quad (3.17)$$

$$\Delta S_2(A|B_{\mathbf{k}}) = \frac{2}{d_A} \frac{|C\mathbf{k}|^2}{1 - (\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k})^2} = \frac{2}{d_A} \frac{\mathbf{k}^T C^T C \mathbf{k}}{\mathbf{k}^T N_B \mathbf{k}}, \quad (3.18)$$

donde $C^T C$ y N_B (ecuación (3.13)) son matrices semidefinidas positivas de 3×3 (estas expresiones resultan, claramente, de reemplazar (3.8) y (3.9) en (3.16)).

La dirección \mathbf{k} para la cual se obtiene la máxima reducción en la entropía es aquella asociada al máximo autovalor $\lambda = \lambda_{\max}$ en la ecuación de autovalores generalizada

$$C^T C \mathbf{k} = \lambda N_B \mathbf{k}, \quad (3.19)$$

siendo λ solución de la ecuación $\text{Det}[C^T C - \lambda N_B] = 0$. Esto conduce a $\Delta S_2(A|B_{\mathbf{k}}) \leq 2\lambda_{\max}/d_A \forall \mathbf{k}$, o sea,

$$\text{Min}_{\mathbf{k}} S_2(A|B_{\mathbf{k}}) = S_2(\rho_A) - \frac{2}{d_A} \lambda_{\max}. \quad (3.20)$$

Podemos también expresar (3.18) como la forma cuadrática

$$\Delta S_2(A|B_{\mathbf{k}}) = \frac{2}{d_A} \mathbf{k}_N^T C_N^T C_N \mathbf{k}_N, \quad C_N = C N_B^{-1/2}, \quad (3.21)$$

donde $\mathbf{k}_N = N_B^{1/2} \mathbf{k} / |N_B^{1/2} \mathbf{k}|$ es un vector unitario. La ecuación (3.19) es de hecho equivalente $C_N^T C_N \mathbf{k}_N = \lambda \mathbf{k}_N$, lo que muestra que $\sqrt{\lambda_{\max}}$ es el *valor singular máximo* de C_N .

Mínimo sobre medidas generalizadas.

Es importante remarcar en este punto que para esta entropía una medida generalizada (POVM) en el qubit B *no puede reducir la entropía condicional por debajo del mínimo* (3.20).

Demostración. Para una medida basada en los operadores de rango uno $\sqrt{r_{\mathbf{k}}} \Pi_{\mathbf{k}}^B$, $\Pi_{\mathbf{k}}^B = \frac{1}{2}(I_B + \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}_B)$, con $\sum_{\mathbf{k}} r_{\mathbf{k}} \Pi_{\mathbf{k}}^B = I_B$, la ecuación (3.11) conduce, para $\Delta S_2(A|B_M) \equiv S_2(\rho_A) - S_2(A|B_{M_B})$, a

$$\begin{aligned} \Delta S_2(A|B_{\{r_{\mathbf{k}} \Pi_{\mathbf{k}}\}}) &= \frac{1}{d_A} \sum_{\mathbf{k}} r_{\mathbf{k}} \frac{|C \mathbf{k}|^2}{1 + \mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k}} \\ &= \frac{1}{d_A} \sum_{\mathbf{k}} r_{\mathbf{k}} (1 - \mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k}) \frac{|C \mathbf{k}|^2}{1 - (\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k})^2} \\ &\leq \frac{\lambda_{\max}}{d_A} \sum_{\mathbf{k}} r_{\mathbf{k}} (1 - \mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k}) = \frac{2}{d_A} \lambda_{\max}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde usamos la ecuación (3.20). Esto asegura que la mínima entropía condicional (máximo $\Delta S_2(A|B_M)$) es resultado de la medida proyectiva en (3.19). \square

3.1.2.2. Descripción geométrica de la medida óptima

La expresión en (3.19) es también la contraparte en B de la ecuación de autovalores (3.15) (equivalente a $C_N C_N^T \mathbf{k}^A = \lambda \mathbf{k}^A$), que determina los ejes del elipsoide de correlación, teniendo ambas *los mismos* autovalores no nulos λ_μ , con autovectores asociados ($C^T C \mathbf{k} = \lambda N_B \mathbf{k} \Rightarrow C N_B^{-1} C^T \mathbf{k}^A = \lambda \mathbf{k}^A$ para $\mathbf{k}^A \propto C \mathbf{k}$). Luego la medida que minimiza la entropía cuadrática es precisamente aquella que conduce a $\delta \mathbf{r}_A \propto C \mathbf{k}$ paralelo al semieje mayor del elipsoide de correlación (Fig. 3.2).

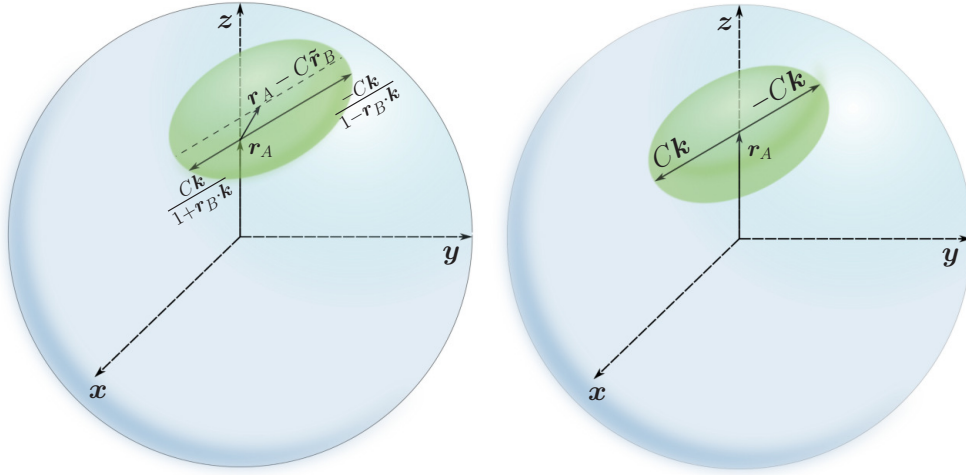


Figura 3.2: Vectores de Bloch de los estados condicionales de A tras la medida que minimiza la entropía condicional cuadrática (3.17). El panel izquierdo ilustra el caso general, mientras en el derecho se muestra el caso $\mathbf{r}_B = \mathbf{0}$. El incremento $\delta \mathbf{r}_A = \mathbf{r}_{A/k} - \mathbf{r}_A$ es paralelo al semieje mayor del elipsoide de correlación, y coincide con este cuando $\mathbf{r}_B = \mathbf{0}$.

Si $\mathbf{r}_B = \mathbf{0}$, el vector de Bloch del estado posmedido de A es simplemente $\mathbf{r}_{A/\pm \mathbf{k}} = \mathbf{r}_A \pm C \mathbf{k}$, con probabilidades iguales para \mathbf{k} y $-\mathbf{k}$, y el elipsoide de correlación pasa a estar centrado en \mathbf{r}_A (panel derecho en Fig. 3.2). Así, para una dada dirección \mathbf{k} , los dos posibles vectores representando a los estados posmedidos se ubican diametralmente opuestos en este elipsoide. El vector \mathbf{k} que minimiza la entropía cuadrática conduce entonces a $\delta \mathbf{r}_A = \pm C \mathbf{k}$ directamente *coincidente* con el semieje mayor, con $\lambda_{\max} = \max_\mu \{C_\mu^2\}$, representando el cuadrado de su longitud. Notar que en este caso $N_B = I$ y entonces la ecuación (3.19) se reduce a $C^T C \mathbf{k} = \lambda \mathbf{k}$. Por lo tanto, el vector \mathbf{k} minimizante conduce a la *máxima correlación*: $|C \mathbf{k}| = \sqrt{\mathbf{k}^T C^T C \mathbf{k}} = \sqrt{\lambda_{\max}}$, con $|C \mathbf{k}'| \leq |C \mathbf{k}|$ para cualquier otra dirección \mathbf{k}' . Dado que la entropía condicional es una medida de la incerteza pro-

medio acerca de A como resultado de una medida en B , su minimización implica hacer uso de la mayor cantidad de correlaciones accesibles mediante una medida en B . Si el tensor de correlación mide la distribución espacial de correlaciones, entonces la medida que maximiza el acceso a estas correlaciones debería en principio ser aquella que lleva a una máxima longitud para $C\mathbf{k}$, que es precisamente la medida que minimiza la entropía condicional cuadrática.

Para $\mathbf{r}_B \neq \mathbf{0}$ la métrica N_B^{-1} en la ecuación (3.14) deforma el elipsoide del caso $\mathbf{r}_B = \mathbf{0}$, expandiéndolo en la dirección de $C\mathbf{r}_B$. Consecuentemente, en las ecuaciones (3.18)–(3.21) N_B induce una preferencia hacia aquellas medidas con \mathbf{k} en la dirección de \mathbf{r}_B o cercana, esto es, en la base de autoestados de ρ_B . Podemos entender mejor este resultado notando que, para $\mathbf{r}_B \neq \mathbf{0}$, el tensor C en (3.9) actúa sobre vectores $\tilde{\mathbf{k}}_{\pm} = \pm\mathbf{k}/(1 \pm \mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k})$ que tienen una norma dependiente de la dirección y yacen en la superficie del elipsoide desplazado (3.12), haciendo que el acceso a correlaciones dependa no solo de C sino también de \mathbf{r}_B . No obstante, se ve de la ecuación (3.12) que los vectores $N_B^{1/2}\tilde{\mathbf{k}}_{\pm}$ viven en una esfera desplazada, formando una cuerda que pasa a través del origen. El origen de coordenadas corta esta cuerda en dos segmentos tales que el producto de sus longitudes es $|N_B^{1/2}\tilde{\mathbf{k}}_+||N_B^{1/2}\tilde{\mathbf{k}}_-| = \frac{\mathbf{k}^T N_B \mathbf{k}}{1 - (\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k})^2} = 1$. Puesto que $C\tilde{\mathbf{k}}_{\pm} = C_N N_B^{1/2}\tilde{\mathbf{k}}_{\pm}$ (ver la ecuación (3.21)), el elipsoide (3.14) puede verse como la imagen de la esfera mencionada bajo la transformación lineal C_N . Como antes, si C_N mide la distribución espacial efectiva de correlaciones entonces el producto

$$|C_N(N_B^{1/2}\tilde{\mathbf{k}}_+)||C_N(N_B^{1/2}\tilde{\mathbf{k}}_-)| = \frac{|C\mathbf{k}|^2}{1 - (\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k})^2},$$

que es proporcional a $\Delta S_2(A|B_{\mathbf{k}})$ (ecuación (3.18)), es una medida de las correlaciones en la dirección \mathbf{k} en B . La dirección \mathbf{k} que minimiza $S_2(A|B_{\mathbf{k}})$ es precisamente aquella que maximiza este producto.

3.2. Optimización de la entropía condicional generalizada en el límite de correlación débil

Discutimos ahora el resultado principal de este capítulo. Vamos a extender los resultados obtenidos en la optimización de la entropía cuadrática a una *entropía general* S_f , dentro del *régimen de correlación débil*. Este régimen refiere al caso en que el elipsoide de correlación (figura 3.1) es *suficientemente pequeño*, $|\delta\mathbf{r}_A| =$

$|\frac{C\mathbf{k}}{1\pm\mathbf{r}_B\cdot\mathbf{k}}| \ll 1 \forall \mathbf{k}$ en (3.9). En esta situación podemos considerar una expansión de la entropía condicional (3.10) alrededor de ρ_A , a segundo orden en $\delta\rho_A = \delta\mathbf{r}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_A/d_A$. El resultado de tal aproximación es

$$S_f(A|B_{\mathbf{k}}) \approx S_f(\rho_A) - \frac{2}{d_A} \frac{\mathbf{k}^T C^T \Lambda_f(\rho_A) C \mathbf{k}}{\mathbf{k}^T N_B \mathbf{k}}, \quad (3.23)$$

donde N_B es la matriz de 3×3 (3.13) y $\Lambda_f(\rho_A)$ denota una matriz Hessiana escalada de $D_A \times D_A$, con entradas

$$[\Lambda_f(\rho_A)]_{\mu\mu'} = \frac{1}{4d_A} \sum_{i,j} R_{ij} \langle i|\sigma_{A\mu}|j\rangle \langle j|\sigma_{A\mu'}|i\rangle, \quad (3.24)$$

$$R_{ij} = (1 - \delta_{ij}) \frac{f'(p_i^A) - f'(p_j^A)}{p_j^A - p_i^A} - \delta_{ij} f''(p_i^A), \quad (3.25)$$

donde $\rho_A|i\rangle = p_i^A|i\rangle$. De hecho, solo la submatriz de 3×3 de $\Lambda_f(\rho_A)$, correspondiente a las tres direcciones principales seleccionadas por C en la ecuación (3.6), es requerida en (3.23).

Demostración. Comenzamos por el desarrollo a segundo orden de los autovalores $p_{i/\mathbf{k}}^A$ del estado posmedido (3.7),

$$p_{i/\mathbf{k}}^A \approx p_i^A + \langle i|\delta\rho_A|i\rangle + \sum_{j \neq i} \frac{|\langle j|\delta\rho_A|i\rangle|^2}{p_i^A - p_j^A}, \quad (3.26)$$

donde p_i^A son los autovalores de ρ_A y $\delta\rho_A = \frac{1}{d_A} \frac{\pm C\mathbf{k}}{1\pm\mathbf{r}_B\cdot\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_A$. La consiguiente expansión a segundo orden de la entropía en (3.10),

$$S_f(\rho_{A/\Pi_{\mathbf{k}}}) \approx S_f(\rho_A) + \sum_i [f'(p_i^A)\delta p_i^A + \frac{1}{2}f''(p_i^A)\delta p_i^A{}^2], \quad (3.27)$$

donde $\delta p_i^A = p_{i/\mathbf{k}}^A - p_i^A$, conduce entonces a las ecuaciones (3.23)- (3.25), después de usar (3.26) y desprestigiar términos de orden superior. Notar que $R_{ij} = -f''(p_{ij}^*)$, con p_{ij}^* entre p_i^A y p_j^A , lo que implica $R_{ij} > 0 \forall i, j$, con $R_{ij} \rightarrow -f''(p_i)$ si $p_j \rightarrow p_i$. Si $p_i^A > 0 \forall i$, entonces R_{ij} es finito $\forall i, j$ para cualquier f de la forma considerada. \square

La positividad de $R_{ij} \forall i, j$ implica que $\Lambda_f(\rho_A)$ es definida positiva, y por lo

tanto que $C^T \Delta_f(\rho_A) C$ es semidefinida positiva. La reducción en la entropía

$$\Delta S_f(A|B_{\mathbf{k}}) = S_f(A) - S_f(A|B_{\mathbf{k}}) \approx \frac{2}{d_A} \frac{\mathbf{k}^T C^T \Lambda_f(\rho_A) C \mathbf{k}}{\mathbf{k}^T N_B \mathbf{k}} \quad (3.28)$$

permanece entonces no negativa en la presente aproximación.

En el caso de la entropía cuadrática $R_{ij} = 4 \forall i, j$, y las ecuaciones (3.1) y (3.24) llevan a $\Lambda_2(\rho_A) = I$, reduciendo la ecuación (3.23) a las ecuaciones (3.17)-(3.18). Por otra parte, para $\mathbf{r}_A \rightarrow \mathbf{0}$ (ρ_A máximamente mezclado), $p_i^A = 1/d_A \forall i$ y $R_{ij} \rightarrow -f''(1/d_A) \forall i, j$, lo que implica que (3.24) pasa a ser nuevamente proporcional a la matriz identidad $\forall S_f$:

$$\Lambda_f(I_A/d_A) = \frac{1}{4} |f''(1/d_A)| I. \quad (3.29)$$

De esta manera las ecuaciones (3.28)–(3.29) conducen a $\Delta S_f(A|B_{\mathbf{k}}) \propto \Delta_2(A|B_{\mathbf{k}}) \forall S_f$. En este límite la medida que optimiza $S_f(A|B_{\mathbf{k}})$ es entonces *universal*, esto es, la misma que optimiza la entropía cuadrática $\forall S_f$.

En el caso general la matriz (3.24) introducirá una anisotropía adicional, que dependerá de ρ_A y de la elección de f , y que representa el efecto del “exceso de concavidad” de S_f en ρ_A respecto de la entropía cuadrática. No obstante, la ecuación (3.23) muestra que en el límite débilmente correlacionado, $S_f(A|B_{\mathbf{k}})$ se vuelve equivalente a la entropía condicional cuadrática (3.17) para un tensor de correlación efectivo

$$C_f = \sqrt{\Lambda_f(\rho_A)} C. \quad (3.30)$$

La minimización de la ecuación (3.23) sobre \mathbf{k} lleva entonces nuevamente a un problema de autovalores de 3×3 para $C_f^T C_f$, con métrica N_B :

$$C^T \Lambda_f(\rho_A) C \mathbf{k} = \lambda_f N_B \mathbf{k}, \quad (3.31)$$

que implica $\text{Det}[C^T \Lambda_f(\rho_A) C - \lambda N_B] = 0$. El mínimo, análogamente, se obtiene para \mathbf{k} en la dirección del autovector asociado con el mayor autovalor $\lambda_{f_{\max}}$ de (3.31):

$$\text{Min}_{\mathbf{k}} S_f(A|B_{\mathbf{k}}) \approx S_f(\rho_A) - \frac{2}{d_A} \lambda_{f_{\max}}. \quad (3.32)$$

Además, la expresión en (3.28) puede reescribirse como

$$\Delta S_f(A|B_{\mathbf{k}}) \approx \frac{2}{d_A} \mathbf{k}_N^T C_N^T \Lambda_f(\rho_A) C_N \mathbf{k}_N, \quad (3.33)$$

con C_N y \mathbf{k}_N definidos como en (3.21).

La descripción geométrica de estos resultados es, por lo tanto, similar a aquella de la entropía cuadrática, tras reemplazar C por el tensor de correlación efectivo (3.30). Como sucede en el caso cuadrático, en la aproximación (3.27) las medidas POVM no van a dar un mínimo por debajo de aquel alcanzado con medidas proyectivas (3.32). El argumento es el mismo que el dado en (3.22), tras reemplazar C por C_f .

3.2.1. Sistemas de dos qubits

Examinemos ahora el caso $d_A = 2$. La entropía $S_f(\rho_A)$ de un estado general de un qubit $\rho_A = \frac{1}{2}(I_A + \mathbf{r}_A \cdot \boldsymbol{\sigma})$ dependerá únicamente de la longitud de su vector de Bloch \mathbf{r}_A :

$$S_f(\rho_A) = \sum_{\nu=\pm 1} f\left(\frac{1+\nu|\mathbf{r}_A|}{2}\right) = h_f(|\mathbf{r}_A|), \quad (3.34)$$

donde $h_f(r)$ es una función cóncava y *estrictamente decreciente* de r para cualquier f estrictamente cóncava. La entropía condicional (3.10) puede entonces escribirse como

$$S_f(A|B_{\mathbf{k}}) = \sum_{\nu=\pm 1} p_{\nu\mathbf{k}} h_f\left(\left|\mathbf{r}_A + \nu \frac{C\mathbf{k}}{1 + \nu\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k}}\right|\right), \quad (3.35)$$

donde C es ahora una matriz de 3×3 .

Si $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B = \mathbf{0}$ (marginales máximamente mezclados), la ecuación (3.35) se reduce a

$$S_f(A|B_{\mathbf{k}}) = h_f(|C\mathbf{k}|) \quad (\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B = \mathbf{0}). \quad (3.36)$$

Luego en este caso el mínimo se alcanza, para toda S_f , para aquel \mathbf{k} que maximiza $|C\mathbf{k}|$, es decir,

$$\text{Min}_{\mathbf{k}} S_f(A|B_{\mathbf{k}}) = h_f(\sqrt{\lambda_{\max}}) \quad (\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B = \mathbf{0}), \quad (3.37)$$

donde λ_{\max} es el mayor autovalor de $C^T C$ y \mathbf{k} el autovector asociado ($\sqrt{\lambda_{\max}} = C_{\max}$ es el valor singular más grande de C). Medidas no proyectivas no llevarán a valores menores, pues $h_f(|C\mathbf{k}|) \geq h_f(\sqrt{\lambda_{\max}}) \forall \mathbf{k}$. Por lo tanto entonces, en este caso hay una *medida optimizante universal* determinada por el semieje mayor del elipsoide de correlación.

Consideremos ahora el régimen de correlación débil. En el caso de dos qubits

las ecuaciones (3.23) y (3.34) conducen a

$$S_f(A|B_{\mathbf{k}}) \approx h_f(|\mathbf{r}_A|) - \frac{\mathbf{k}^T C^T \Lambda_f(\mathbf{r}_A) C \mathbf{k}}{\mathbf{k}^T N_B \mathbf{k}}, \quad (3.38)$$

donde la matriz Hessiana (3.24) pasa a ser ahora una matriz de 3×3 que depende solo de \mathbf{r}_A y que puede expresarse como

$$\Lambda_f(\mathbf{r}_A) = -\frac{h'_f(r_A)}{2r_A} \left[I + [\eta_f(r_A) - 1] \frac{\mathbf{r}_A \mathbf{r}_A^T}{r_A^2} \right], \quad (3.39)$$

$$\eta_f(r) = r h''_f(r) / h'_f(r), \quad (3.40)$$

donde $r_A = |\mathbf{r}_A|$. Se verifica entonces que, para f cóncava, $\Lambda_f(\mathbf{r}_A)$ es una matriz definida positiva de 3×3 , pues $\eta_f(r) > 0$.

Para la entropía cuadrática $h_f(r) = \frac{1-r^2}{2}$ y $\eta_f(r) = 1$, por lo que $\Lambda_f(\mathbf{r}_A) = I$. Se verifica también que para $\mathbf{r}_A \rightarrow \mathbf{0}$ y S_f arbitraria $h'_f(r_A) \rightarrow 0$, con $h'_f(r_A)/r_A \rightarrow h''_f(0)$ y $\eta_f(r_A) \rightarrow 1$, implicando $\Lambda_f(\mathbf{0}) = \frac{1}{2}|h''_f(0)|I$, en concordancia con (3.29). En este límite $\Delta S_f(A|B_{\mathbf{k}}) \approx \frac{1}{2}|h''_f(0)|\Delta S_2(A|B_{\mathbf{k}}) \forall S_f$ en la aproximación (3.38).

Sin embargo, para \mathbf{r}_A general, $\Lambda_f(\mathbf{r}_A)$ introducirá una anisotropía en la dirección de \mathbf{r}_A siempre que $\eta_f(r_A) \neq 1$. Este factor es una medida local de la concavidad de h_f en la dirección de \mathbf{r}_A , tomando como referencia a la entropía cuadrática, y favorecerá la dirección \mathbf{r}_A si $\eta_f(r_A) > 1$. Esto ocurre en el caso de la entropía de von Neumann (figura 3.3), donde $h_f(r) = h(r) = -\sum_{\nu=\pm 1} \frac{1+\nu r}{2} \log_2 \frac{1+\nu r}{2}$ y $\eta_f(r) = \eta(r)$, con

$$\eta(r) = \frac{2r}{(1-r^2) \ln \frac{1+r}{1-r}} > 1, \quad (3.41)$$

para $r > 0$ ($\eta(r) \approx 1 + 2r^2/3$ para $r \rightarrow 0$). No obstante, $\eta_f(r) < 1$ es también posible para una función f cóncava general. Por ejemplo, para las entropías de Tsallis [11] $S_q(\rho) = (1 - \text{Tr} \rho^q)/c_q$, obtenidas para $f(p) = (p - p^q)/c_q$, con $c_q = 1 - 2^{1-q}$ y $q > 0$ (se utiliza la normalización $S_f(I_2/2) = 1$),

$$\eta_q(r) = \frac{(q-1)r}{1+r} \frac{1 + \gamma^{q-2}}{1 - \gamma^{q-1}},$$

donde $\gamma = \frac{1-r}{1+r}$. Esto conduce a $\eta_q(r) > 1$ para $q \in (0, 2)$ o $q > 3$ pero $\eta_q(r) < 1$ para $q \in (2, 3)$, con $\eta_q(r) = 1$ para $q = 2$ o $q = 3$ ($\eta_q(r) \approx 1 + \frac{(q-2)(q-3)}{3}r^2$ para $r \rightarrow 0$). Notar que $S_q(\rho)$ coincide con la entropía de Neumann para $q \rightarrow 1$ y con la entropía cuadrática para $q = 2$, coincidiendo nuevamente con $S_2(\rho)$ para $q = 3$

en el caso de un qubit [10].

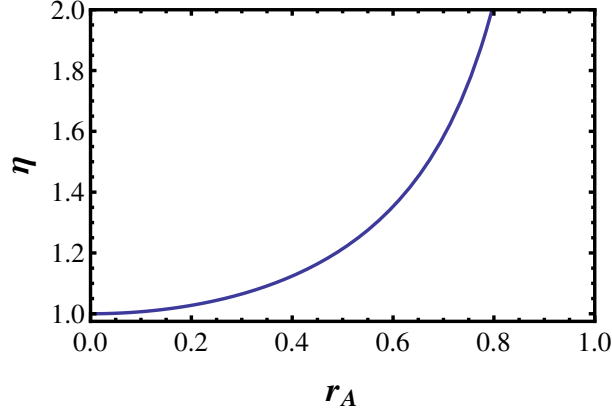


Figura 3.3: Gráfico del factor $\eta(r_A) = \frac{r_A h''(r_A)}{h'(r_A)}$ en la ecuación (3.39) para la entropía de von Neumann. Dado que es una función creciente, las diferencias con los resultados para la entropía cuadrática (para la cual $\eta(r_A) = 1 \forall r_A$) se incrementarán a medida que $r_A = |\langle \sigma_A \rangle|$ crezca. Las cantidades graficadas son adimensionales.

Podemos ahora entender fácilmente las características principales de la medida proyectiva que minimiza $S_f(A|B_{\mathbf{k}})$ para una S_f general. Para estados marginales máximamente mezclados el acceso a correlaciones depende únicamente del tensor de correlación y de la dirección de máxima correlación. La dirección del eje mayor del elipsoide de correlación es la preferida $\forall S_f$. Esta preferencia es afectada si el vector marginal \mathbf{r}_B es no nulo, lo que introduce una normalización anisotrópica en los vectores de medida y lleva a reemplazar C por $C_N = C N_B^{-1/2}$, el cual va a favorecer la dirección de \mathbf{r}_B . Finalmente, para $\mathbf{r}_A \neq \mathbf{0}$ la concavidad local induce una anisotropía adicional dependiente de f alrededor de la dirección de \mathbf{r}_A , la cual en el régimen de correlación débil lleva a reemplazar C_N por $\sqrt{\Lambda_f(\mathbf{r}_A)} C_N$. Para $r_B \rightarrow 1$ o en el límite de estado puro, la aproximación (3.38) normalmente dejará de valer, pues el elipsoide de correlación típicamente se volverá muy grande.

Incremento equivalente a la medida. En un sistema de dos qubits la reducción en la entropía de A debido a la medida en B puede ser caracterizada por un incremento efectivo Δ_f en la longitud del vector de Bloch en A , que llamaremos *incremento equivalente*. Para una medida proyectiva este incremento queda definido por la igualdad (Fig. 3.4)

$$h_f(|\mathbf{r}_A| + \Delta_f) = S_f(A|B_{\mathbf{k}}). \quad (3.42)$$

Como $S_f(A|B_{\mathbf{k}}) \leq S_f(A)$, $\Delta_f \geq 0$ para f cóncava, creciendo a medida que \mathbf{k} se aproxima a la dirección óptima.

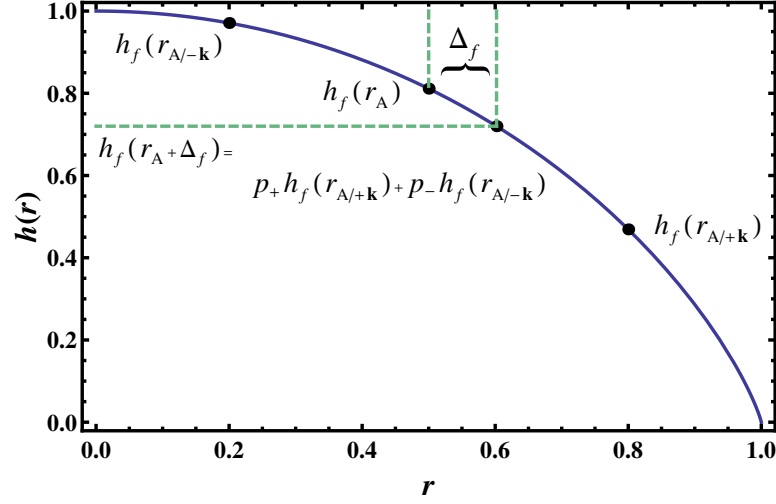


Figura 3.4: Se realiza una medida en la dirección del vector \mathbf{k} sobre el qubit B y la entropía S_f del estado posmedido de A es $h_f(|\mathbf{r}_{A/\pm\mathbf{k}}|)$. El *incremento equivalente* Δ_f se define como el incremento en la norma del vector \mathbf{r}_A que satisface $h_f(\mathbf{r}_A + \Delta_f) = p_{\mathbf{k}} h_f(|\mathbf{r}_{A/\mathbf{k}}|) + p_{-\mathbf{k}} h_f(|\mathbf{r}_{A/-\mathbf{k}}|)$ (h y r adimensionales).

En el régimen débilmente correlacionado, Δ_f será pequeño. Si $\mathbf{r}_A \neq \mathbf{0}$, tenemos entonces $h_f(r_A + \Delta_f) \approx h_f(r_A) + h'_f(r_A)\Delta_f$, y la ecuación (3.38) conduce a Δ_f de orden $\|C_N\|^2$:

$$\Delta_f \approx \frac{1}{|h'_f(r_A)|} \frac{\mathbf{k}^T C^T \Lambda_f(\mathbf{r}_A) C \mathbf{k}}{\mathbf{k}^T N_B \mathbf{k}} \quad (r_A > 0). \quad (3.43)$$

Por otra parte, si $\mathbf{r}_A \rightarrow \mathbf{0}$, $h'_f(0) = 0$ y tenemos $h_f(\Delta_f) \approx h_f(0) + \frac{1}{2} h''_f(0) \Delta_f^2$. Como $\Lambda_f(\mathbf{0}) = \frac{1}{2} |h''_f(0)| I$, la ecuación (3.38) conduce en este caso a

$$\Delta_f \approx \sqrt{\frac{\mathbf{k}^T C^T C \mathbf{k}}{\mathbf{k}^T N_B \mathbf{k}}} = \frac{|C \mathbf{k}|}{\sqrt{1 - (\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k})^2}} \quad (\mathbf{r}_A = 0). \quad (3.44)$$

Así, para $\mathbf{r}_A \rightarrow \mathbf{0}$, Δ_f se independiza de f (*límite universal*) y es de orden $\|C_N\|$.

3.2.2. Discordia cuántica en el régimen de correlación débil

Dado un estado cuántico bipartito ρ_{AB} con marginales $\rho_{A(B)}$, la discordia cuántica para una medida local sobre B puede escribirse como (ver sección 1.2.2.1)

$$D(A|B) = \text{Min}_{\{\Pi_j\}} D(A|B_{\{\Pi_j\}}), \quad (3.45)$$

$$D(A|B_{\{\Pi_j\}}) = S(A|B_{\{\Pi_j\}}) - [S(\rho_{AB}) - S(\rho_B)] \quad (3.46)$$

donde $S(A|B_{\{\Pi_j\}})$ es la entropía condicional (2.3) en el caso de von Neumann, con el mínimo en (3.45) tomado sobre todas las posibles medidas locales en B , mientras el corchete en (3.46) es la entropía condicional independiente de la medida. Podemos también reescribir la expresión en (3.46) como

$$D(A|B_{\{\Pi_j\}}) = I(A, B) - \Delta S(A|B_{\{\Pi_j\}}), \quad (3.47)$$

donde $\Delta S(A|B_{\{\Pi_j\}}) = S(A) - S(A|B_{\{\Pi_j\}})$ y

$$I(A, B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}), \quad (3.48)$$

es la información mutua cuántica.

Para sistemas qudit-qubit, los resultados previos pueden aplicarse para estimar (3.45)-(3.47) en el régimen débilmente correlacionado. Para una medida proyectiva en la dirección \mathbf{k} en B , la ecuación (3.28) conduce a

$$D(A|B_{\mathbf{k}}) \approx I(A, B) - \frac{2}{d_A} \frac{\mathbf{k}^T C^T \Lambda(\rho_A) C \mathbf{k}}{\mathbf{k}^T N_B \mathbf{k}}, \quad (3.49)$$

donde $\Lambda(\rho_A)$ es la matriz Hessiana (3.24) en el caso de von Neumann. La minimización en (3.45) implica entonces el problema de autovalores (3.31), y el mínimo es

$$D(A|B) \approx I(A, B) - \frac{2}{d_A} \lambda_{\max}, \quad (3.50)$$

con λ_{\max} la mayor raíz de $\text{Det}[C^T \Lambda(\rho_A) C - \lambda N_B] = 0$. Mientras $I(A, B)$ es una medida del total de las correlaciones entre A y B , el segundo término en (3.50) representa la máxima información mutua “clásica” accesible tras una medida local en B , en el presente régimen.

En este régimen podemos también hacer una aproximación cuadrática de la

información mutua en (3.48) usando la representación (3.2) de ρ_{AB} . Una expansión de $S(\rho_{AB})$ a segundo orden en el tensor de correlación C , extendiendo las ecuaciones (3.26)–(3.27) a este caso ($|i\rangle \rightarrow |i_A j_B\rangle$, $p_i^A \rightarrow p_i^A p_j^B$, $\delta\rho_A \rightarrow \delta\rho_{AB} = \rho_{AB} - \rho_A \otimes \rho_B$, con $\rho_{A(B)}|i_{A(B)}\rangle = p_i^{A(B)}|i_{A(B)}\rangle$), conduce a

$$I(A, B) \approx \frac{1}{2} \mathbf{C}^T \Lambda(\rho_A, \rho_B) \mathbf{C}, \quad (3.51)$$

donde \mathbf{C} denota un vector de elementos $C_{\mu\nu}$ y Λ es ahora la matriz de $3D_A \times 3D_A$

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mu\nu}^{\mu'\nu'}(\rho_A, \rho_B) &= \frac{1}{4d_A^2} \sum_{i,j,k,l} R_{ik}^{jl} \langle i_A | \sigma_{A\mu'} | j_A \rangle \langle j_A | \sigma_{A\mu} | i_A \rangle \\ &\quad \times \langle k_B | \sigma_{B\nu'} | l_B \rangle \langle l_B | \sigma_{B\nu} | k_B \rangle, \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$R_{ik}^{jl} = \frac{1}{\ln 2} \left[(1 - \delta_i^j \delta_k^l) \frac{\ln[p_i^A p_k^B / (p_j^A p_l^B)]}{p_i^A p_k^B - p_j^A p_l^B} + \delta_i^j \delta_k^l \frac{1}{p_i^A p_k^B} \right].$$

Los términos lineales en C se anulan para la entropía de von Neumann. La expresión en (3.49) se convierte entonces en una forma cuadrática en los elementos del tensor de correlación, el cual es semidefinido positivo pues $D(A|B) \geq 0$ y la aproximación cuadrática se vuelve exacta para C suficientemente pequeño.

La descomposición (3.6) habilita a reducir (3.51) a una forma cuadrática en los tres valores singulares C_μ . Por ejemplo, en el caso de marginales máximamente mezclados, $R_{ik}^{jl} = 2d_A / \ln 2 \forall i, j, k, l$, lo que implica $\Lambda_{\mu'\nu'}^{\mu\nu}(\frac{I_A}{d_A}, \frac{I_B}{2}) = \frac{1}{\ln 2} \delta_\mu^\mu \delta_{\nu'}^{\nu'}$. La ecuación (3.51) se reduce entonces a $I(A, B) \approx \frac{1}{2 \ln 2} \text{Tr } C^T C = \frac{1}{2 \ln 2} \sum_{\mu=1}^3 C_\mu^2$.

3.3. Medida optimizante en estados de dos qubits con r_A y r_B paralelos a un eje principal de C

En el caso especial en que \mathbf{r}_A y \mathbf{r}_B son paralelos a uno de los ejes principales seleccionados por C en la representación diagonal (3.6) (por lo que deben ser autovectores de CC^T y $C^T C$ respectivamente), los tensores $\Lambda_f(\mathbf{r}_A)$, C y $N_B = I - \mathbf{r}_B \mathbf{r}_B^T$ pueden hacerse *simultáneamente diagonales*: Podemos elegir los ejes locales x, y, z en A y B de manera que para $\mu, \nu = x, y, z$,

$$C_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} C_\mu, \quad (3.53)$$

con C_μ los valores singulares de C , y \mathbf{r}_A y \mathbf{r}_B paralelos a uno de estos ejes. Las ecuaciones (3.19) y (3.31) implican entonces que la medida óptima para la entropía condicional en el régimen débilmente correlacionado (y en todos los casos para la entropía cuadrática) ha de encontrarse *entre estos ejes principales*.

Si \mathbf{r}_A y \mathbf{r}_B están ambos dirigidos en dirección \mathbf{z} (esto es, $\mathbf{r}_A \propto C\mathbf{r}_B$), las ecuaciones (3.28), (3.39) y (3.53) conducen a

$$\Delta S_f(A|B_{\mathbf{k}}) \approx \frac{|h'_f(r_A)|}{2r_A} \frac{C_x^2 k_x^2 + C_y^2 k_y^2 + \eta_f(r_A) C_z^2 k_z^2}{1 - r_B^2 k_z^2}, \quad (3.54)$$

con máximo dado por

$$\text{Max}_{\mathbf{k}} \Delta S_f(A|B_{\mathbf{k}}) \approx \frac{|h'_f(r_A)|}{2r_A} \text{Max}[C_x^2, C_y^2, \frac{\eta_f(r_A)}{1 - r_B^2} C_z^2]. \quad (3.55)$$

Por otro lado, si \mathbf{r}_A y \mathbf{r}_B están sobre ejes principales ortogonales ($\mathbf{r}_A \perp C\mathbf{r}_B$), por ejemplo \mathbf{r}_B en dirección \mathbf{z} y \mathbf{r}_A en dirección \mathbf{x} , obtenemos

$$\Delta S_f(A|B_{\mathbf{k}}) \approx \frac{|h'_f(r_A)|}{2r_A} \frac{\eta_f(r_A) C_x^2 k_x^2 + C_y^2 k_y^2 + C_z^2 k_z^2}{1 - r_B^2 k_z^2}, \quad (3.56)$$

con máximo dado por

$$\text{Max}_{\mathbf{k}} \Delta S_f(A|B_{\mathbf{k}}) \approx \frac{|h'_f(r_A)|}{2r_A} \text{Max}[\eta_f(r_A) C_x^2, C_y^2, \frac{C_z^2}{1 - r_B^2}]. \quad (3.57)$$

Para uso en la próxima subsección, citamos aquí las expresiones explícitas para el caso de la entropía de von Neumann cuando \mathbf{r}_A y \mathbf{r}_B están ambos paralelos a \mathbf{z} :

$$\Delta S(A|B_{\mathbf{k}}) \approx \frac{\frac{1}{2r_A} \ln \frac{1+r_A}{1-r_A} (C_x^2 k_x^2 + C_y^2 k_y^2) + \frac{1}{1-r_A^2} C_z^2 k_z^2}{2 \ln 2 (1 - r_B^2 k_z^2)}, \quad (3.58)$$

Mientras que la aproximación cuadrática (3.51) resulta

$$I(A, B) \approx \frac{1}{2 \ln 2} \left[\sum_{\nu=\pm 1} \frac{(C_x - \nu C_y)^2 \ln \left(\frac{1+r_A}{1-r_A} \frac{1+\nu r_B}{1-\nu r_B} \right)}{4(r_A + \nu r_B)} + \frac{C_z^2}{(1-r_A)^2 (1-r_B)^2} \right]. \quad (3.59)$$

Se verifica entonces que dentro de las aproximaciones (3.58)–(3.59), $D(A|B_{\mathbf{k}}) = I(A, B) - \Delta S(A|B_{\mathbf{k}})$ se convierte en una forma cuadrática no negativa en los C_μ 's.

3.3.1. Medida óptima para estados X

Aplicamos ahora las aproximaciones previas al conjunto de estados de dos qubits tipo X [45, 52, 53]. Recordemos que estos estados pueden siempre escribirse como

$$\rho_{AB} = \frac{1}{4}(I \otimes I + r_A \sigma_z \otimes I + r_B I \otimes \sigma_z + \sum_{\mu} J_{\mu} \sigma_{\mu} \otimes \sigma_{\mu}) \quad (3.60)$$

$$= \begin{pmatrix} p_+ & 0 & 0 & \alpha_- \\ 0 & q_+ & \alpha_+ & 0 \\ 0 & \alpha_+ & q_- & 0 \\ \alpha_- & 0 & 0 & p_- \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} p_{\pm} &= \frac{1 \pm (r_A + r_B) + J_z}{4} \\ q_{\pm} &= \frac{1 \pm (r_A - r_B) - J_z}{4} \\ \alpha_{\pm} &= \frac{J_x \pm J_y}{4} \end{aligned} \quad (3.61)$$

con (3.61) la representación del estado en la base estándar. Los parámetros verifican las condiciones de positividad $p_{\pm} \geq 0$, $q_{\pm} \geq 0$, $|\alpha_-| \leq \sqrt{p_+ p_-}$, $|\alpha_+| \leq \sqrt{q_+ q_-}$, con $p_+ + p_- + q_+ + q_- = 1$. Como el tensor de correlación $C = J - \mathbf{r}_A \mathbf{r}_B^T$ satisface la ecuación (3.53), con

$$C_x = J_x, \quad C_y = J_y, \quad C_z = J_z - r_A r_B,$$

es claro que en estos estados los vectores de Bloch de los estados marginales \mathbf{r}_A y \mathbf{r}_B yacen sobre el mismo eje principal (z) de C , lo que implica que estos estados corresponden al caso de la expresión (3.54). En el límite de correlación débil $S_f(A|B_{\mathbf{k}})$ alcanzará entonces su mínimo para una medida en dirección de alguno de estos ejes principales (ecuación (3.55)).

En este régimen la medida minimizante depende no solo de C y r_B , sino también de la concavidad local de la función $h_f(r)$ en $r = |\mathbf{r}_A|$. Esto implica, en general, que diferentes entropías pueden alcanzar su valor mínimo para medidas en diferentes ejes. Vamos a comparar ahora la medida óptima para la entropía condicional de von Neumann con aquella correspondiente al caso cuadrático, para estados con $J_x = J_y$, para los cuales el mínimo se encuentra midiendo en dirección z o en alguna dirección en el plano x, y , que tomaremos como x . Una *transición* entre estas dos direcciones tiene lugar, dependiendo de la concavidad de la entropía. De la ecuación (3.55) se sigue que la zona en la que se da esta transición es

$$C_x^2 = \eta_f(r_A) C_z^2 / (1 - r_B^2), \quad (3.62)$$

con $\eta_f(r_A) = 1$ para la entropía cuadrática y $\eta_f(r) = \eta(r)$, ecuación (3.41), para la entropía de von Neumann. Como $\eta(r_A) > 1$ para $r_A \neq 0$, se ve que en el caso de von Neumann la zona de transición está desplazada respecto de aquella correspondiente a la entropía cuadrática, siempre que $r_A \neq 0$, y esta discrepancia crecerá a medida que r_A aumente, favoreciendo la dirección z .

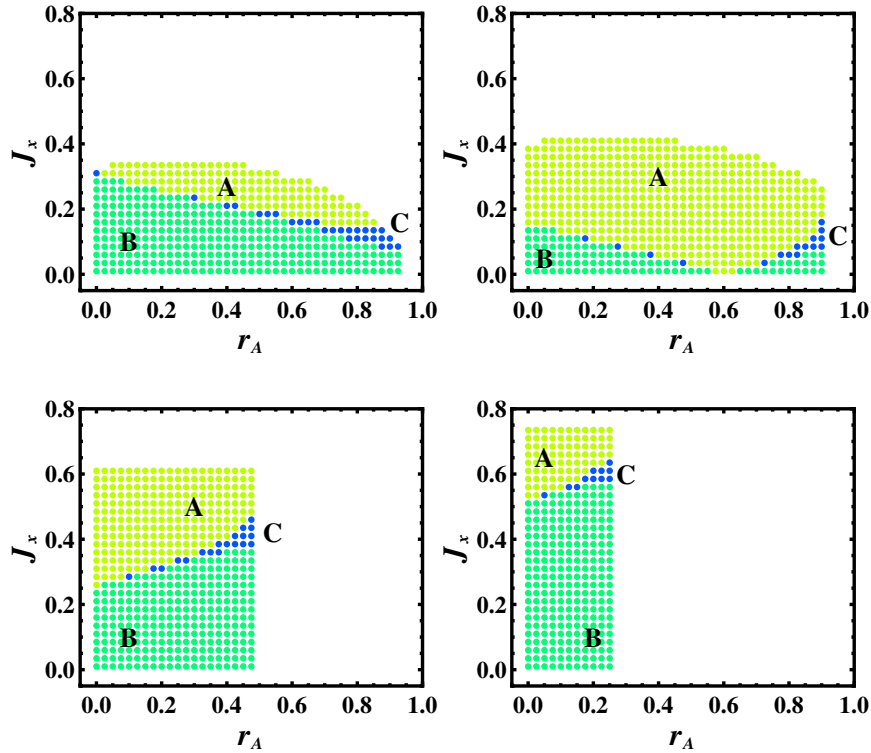


Figura 3.5: Comparación entre la medida proyectiva minimizante para la entropía condicional de von Neumann y aquella correspondiente a la entropía condicional cuadrática, para estados X (ecuación (3.60)) con $r_B = 0,25$ y $J_z = 0,3$ (arriba-izquierda), $0,15$ (arriba-derecha), $-0,25$ (abajo-izquierda), $-0,5$ (abajo-derecha). Los discos amarillos (sector A) y verdes (sector B) muestran el conjunto de estados en los que la medida minimizante es la misma para las dos entropías (en dirección \mathbf{x} en A y en dirección \mathbf{z} en B), mientras que los discos azules (C) indican aquellos estados para los que la medida minimizante es diferente (J_x y r_A adimensionales).

Resultados típicos para la medida proyectiva minimizante para estas entropías son ilustrados en la figura 3.5 como función de r_A y $J_x = C_x$, para r_B fijo y diferentes valores de J_z . Se observa que estas medidas coinciden para la mayoría de los estados, difiriendo solo en la región de transición C (discos azules), donde la medida que minimiza la entropía cuadrática ya cambió de \mathbf{z} a \mathbf{x} , pero la entropía de von Neumann todavía alcanza su mínimo para medidas en \mathbf{z} . Como

se esperaba, la región de discrepancia se vuelve más grande al incrementarse r_A . Vale mencionar que mientras la transición $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x}$ al crecer J_x es siempre abrupta para la entropía condicional cuadrática, como se sigue de (3.18), en el caso de la entropía de Neumann esta puede suavizarse mediante direcciones de medida intermedias en un pequeño intervalo de valores de J_x , efecto que no puede apreciarse en la aproximación (3.54)–(3.58). De hecho, en estos pequeños intervalos de cruce pueden preferirse medidas no proyectivas [54, 55] (Si una medida proyectiva minimiza la entropía condicional de von Neumann para un estado X , esta debe ser en la dirección de uno de los ejes principales de C [55]), aunque las diferencias con el mínimo proyectivo son muy pequeñas.

La figura 3.6 muestra la reducción en la entropía (“ganancia de información”) $\Delta S_f = S_f(A) - S_f(A|B_{\mathbf{k}})$ como función de la dirección $\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z)$ de la medida en B , para estados X ubicados debajo, sobre, y por encima de la zona de transición en el panel inferior izquierdo de la figura 3.5. Se muestran ambas, la entropía condicional cuadrática y la de von Neumann, que exhiben típicamente el mismo perfil, junto con la aproximación a segundo orden (3.58) de esta última, la cual se observa que provee una buena estimación. Mientras se encuentra una clara preferencia por la dirección \mathbf{z} (\mathbf{x}) para pequeños (grandes) valores de J_x , la anisotropía de ΔS_f en la región de transición ($J_x = 0,325$) es muy pequeña, por lo que la diferencia existente entre las medidas minimizantes en esta zona no es muy relevante. Ilustramos también resultados para la discordia (3.47) y su estimación cuadrática obtenida a partir de las ecuaciones (3.58)–(3.59), que resulta muy precisa en el caso considerado.

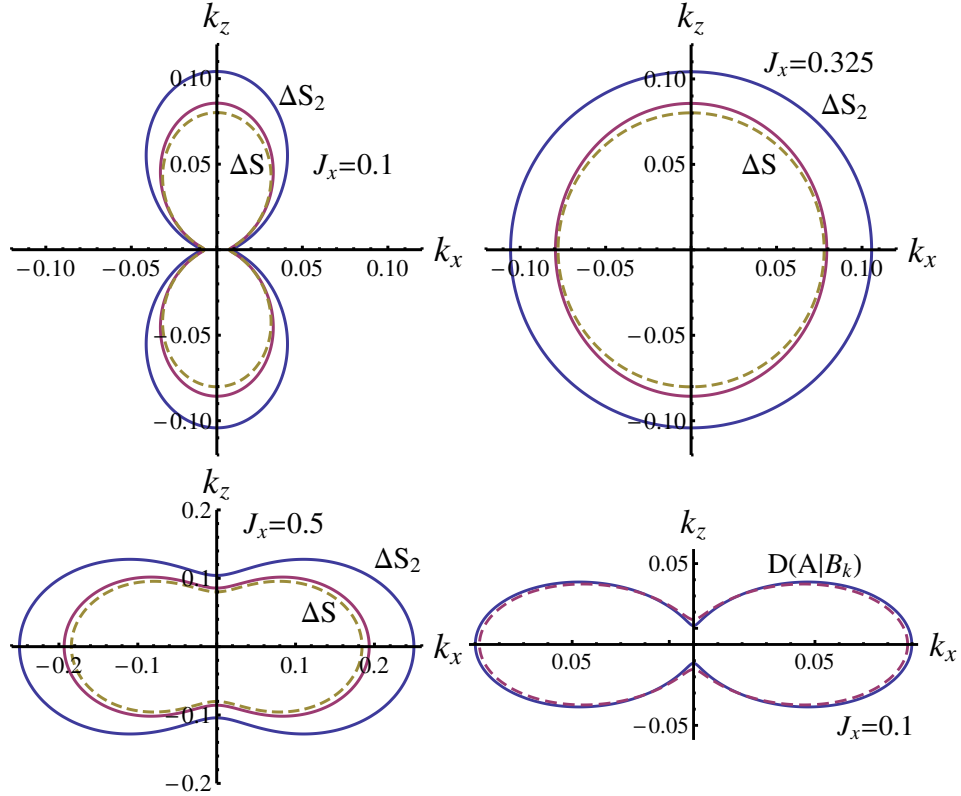


Figura 3.6: La reducción en la entropía $\Delta S_f = S(A) - S(A|B_{\mathbf{k}})$ tras una medida local en B en dirección $\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z)$ para la entropía cuadrática (ΔS_2) y la de von Neumann (ΔS), junto con la aproximación cuadrática (3.54)–(3.58) para esta última (líneas punteadas). Consideramos aquí un estado X con $r_A = r_B = 0,25$, $J_z = -0,25$ y $J_x = 0,1, 0,325, 0,5$, correspondiendo a estados en los sectores B, C, y A, respectivamente, del panel inferior izquierdo en la figura 3.5. El panel inferior derecho ilustra la discordia cuántica (3.47) y su aproximación cuadrática (3.58)–(3.59) (línea punteada) para $J_x = 0,1$ (las cantidades graficadas son adimensionales).

Capítulo 4

Pureza condicional y medidas de correlación en mezclas de estados alineados

En los capítulos anteriores revisamos la extensión a formas entrópicas generales de la entropía condicional dependiente de la medida. Mostramos que esta generalización permite el uso de formas simples, como es el caso de la entropía cuadrática, para la cual puede hallarse una solución analítica y clara del problema de optimización asociado (a saber, aquel de encontrar la medida local que minimiza la entropía condicional) en estados arbitrarios de sistemas qudit-qubit [32]. Vimos además que esta entropía está directamente ligada a la pureza del estado, una cantidad experimentalmente accesible cuya determinación no requiere una tomografía completa del estado [57, 58], y que en el caso de un qubit representado por la polarización de un fotón está formalmente relacionada con el grado de polarización clásica [59].

El objetivo en este capítulo es analizar y determinar experimentalmente la pureza condicional, la discordia cuántica y otras medidas relacionadas de cuantificación de las correlaciones [10, 38] en mezclas de estados alineados, los cuales pueden ser simulados fielmente mediante sistemas fotónicos y óptica lineal [60, 61]. Estos estados, que ya tratamos en la sección 2.3.3, aparecen naturalmente en diferentes contextos; en particular como estados reducidos en el estado fundamental exacto de cadenas de espines $1/2$ con acoplamiento anisotrópico XY XYZ , en la vecindad inmediata del campo magnético factorizante [46, 62, 63]. En estas cadenas estos estados también proveen una descripción básica del estado reduci-

do de pares en fases de ruptura de simetría en la aproximación de campo medio ($B < B_c$) [45].

Para tales estados, descritos en detalle en la sección 4.1.1, primero derivamos en 4.1.2–4.1.3 expresiones analíticas para el estado marginal condicional tras una medida local en uno de los qubits y su pureza, incluyendo la pureza condicional promedio y su máximo sobre todas las posibles medidas proyectivas locales. Derivamos luego en 4.1.4 una expresión analítica cerrada para la discordia cuántica de estos estados en términos de la máxima pureza condicional. Vale notar nuevamente que la evaluación de la discordia para estados arbitrarios es una tarea difícil debido al problema de optimización asociado, habiéndose mostrado recientemente que es un problema NP-completo [64]. Además, en 4.1.5 presentamos expresiones para la pureza del estado posmedido global y su medida minimizante, la cual permite evaluar el asociado déficit de información y la discordia geométrica, y compararlos. Testeamos luego experimentalmente estos resultados teóricos usando estados de polarización de fotones obtenidos de una fuente que emite pares en el mismo estado de polarización. En la sección 4.2.1 se da una descripción del arreglo experimental usado para preparar los estados y realizar las medidas locales pertinentes, mientras que en 4.2.2 se presentan los resultados experimentales, que muestran un muy buen acuerdo con las predicciones teóricas.

Este capítulo está basado en los resultados publicados en [56].

4.1. Teoría

4.1.1. Estado inicial

Consideramos el estado mezcla de dos qubits

$$\rho_{AB} = p|\theta\theta\rangle\langle\theta\theta| + q|-\theta-\theta\rangle\langle-\theta-\theta|, \quad (4.1)$$

donde $|\theta\theta\rangle\langle\theta\theta| \equiv |\theta\rangle\langle\theta| \otimes |\theta\rangle\langle\theta|$, con

$$|\pm\theta\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle \pm \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle, \quad (4.2)$$

estados puros de un qubit formando ángulos $\pm\theta$ con el eje z en la esfera de Bloch, y $p \in [0, 1]$, $q = 1 - p$ las probabilidades de preparar a ambos qubits en los estados $|\theta\rangle$ y $|-\theta\rangle$ respectivamente. Cualquier mezcla de rango 2 de la forma

$\rho_{AB} = p|\Omega\Omega\rangle\langle\Omega\Omega| + q|\Omega'\Omega'\rangle\langle\Omega'\Omega'|$, con $|\Omega\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$ un estado general de un qubit, puede reescribirse en la forma (4.1) eligiendo un nuevo eje z en la esfera de Bloch a mitad de camino entre las direcciones $\Omega = (\theta, \phi)$ y $\Omega' = (\theta', \phi')$ (y el eje x en el plano determinado por ellos). Además, *cualquier* mezcla $\rho_{AB} = p|\Omega_1\Omega_2\rangle\langle\Omega_1\Omega_2| + q|\Omega'_1\Omega'_2\rangle\langle\Omega'_1\Omega'_2|$, donde el ángulo entre Ω'_2 y Ω_2 es idéntico a aquel entre Ω'_1 y Ω_1 , puede también llevarse a la forma (4.1) aplicando rotaciones locales sobre uno de los qubits que desplacen Ω_2 a Ω_1 y Ω'_2 a Ω'_1 . Estas rotaciones no afectarán a las medidas de correlación.

Mezclas de la forma (4.1) surgen en diferentes contextos. Por ejemplo, emergen naturalmente como estados marginales de un par de espines en el estado fundamental de un arreglo tipo ferromagnético de espines con acoplamiento anisotrópico XY o XYZ en la vecindad inmediata del campo transversal factorizante [45, 46, 63], donde el estado fundamental exacto pasa a estar doblemente degenerado, siendo una combinación lineal arbitraria de estados uniformes completamente separables, es decir,

$$|GS\rangle = \alpha|\theta\theta\dots\rangle + \beta|-\theta-\theta\dots\rangle, \quad (4.3)$$

donde θ está determinado por la anisotropía del del acoplamiento [46] (supuesto constante para todos los pares acoplados). Para $s = 1/2$ el estado (4.3) conduce al estado reducido de dos espines (4.1) con $p = |\alpha|^2$, $q = |\beta|^2$ para *cualquier* par $i \neq j$, tras trazar los qubits restantes y despreciar el *overlap* complementario $\langle-\theta|\theta\rangle^{n-2} = \cos^{n-2}\theta$, el cual decrece exponencialmente al crecer n si $|\cos\theta| < 1$. Y en la aproximación de campo medio, un estado reducido de la forma (4.1) con $p = q = 1/2$ aparece naturalmente en la fase con ruptura de paridad, tras una restauración de esta simetría [45, 46, 63], volviéndose exacto en el punto de factorización.

El estado (4.1) puede también generarse usando una fuente que emita un par de fotones en el mismo estado de polarización, por ejemplo, por Conversión Paramétrica Espontánea Descendente (SPDC) producida en cristales no lineales tipo I [65, 66], de manera que los estados

$$|\pm\theta\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|V\rangle \pm \sin\frac{\theta}{2}|H\rangle \quad (4.4)$$

están linealmente polarizados en ángulos $\pm\theta/2$ con la dirección vertical. Aquí $|V\rangle \equiv |0\rangle$, $|H\rangle \equiv |1\rangle$ denotan los estados linealmente polarizados en dirección

vertical y horizontal respectivamente.

La pureza del estado (4.1) está dada por

$$P_{AB} = \text{Tr } \rho_{AB}^2 = 1 - 2pq(1 - \cos^4 \theta), \quad (4.5)$$

y es una función creciente del *overlap* $|\langle -\theta | \theta \rangle| = |\cos \theta|$. Como ρ_{AB} es un estado de rango 2, la pureza (4.5) determina completamente sus dos autovalores no nulos,

$$\lambda_{AB}^{\pm} = \frac{1}{2}[1 \pm \sqrt{2P_{AB} - 1}], \quad (4.6)$$

y por lo tanto el valor de cualquier entropía

$$S_f(\rho_{AB}) = \text{Tr } f(\rho_{AB}) = f(\lambda_{AB}^+) + f(\lambda_{AB}^-). \quad (4.7)$$

En particular, la entropía de von Neumann $S(\rho)$ corresponde a $f(\rho) = -\rho \log_2 \rho$, mientras que la entropía lineal $S_2(\rho)$ a $f(\rho) = -2\rho(1 - \rho)$, en cuyo caso

$$S_2(\rho_{AB}) = 2(1 - \text{Tr } \rho_{AB}^2) = 2(1 - P_{AB}). \quad (4.8)$$

Todas las entropías (7.40) serán funciones decrecientes de P_{AB} , anulándose sii $P_{AB} = 1$.

El estado (4.1) es *separable*, esto es, una combinación convexa de estados producto [16]. No obstante, si $\theta \in (0, \pi/2)$ y $pq \neq 0$, dicho estado no está clásicamente correlacionado, o sea, no es diagonal en una base producto, teniendo autoestados *entrelazados*. Tendrá, por lo tanto, discordia no nula (sec. 4.1.4).

El estado reducido de cada uno de los qubits (o fotones) es

$$\rho_{A(B)} = \text{Tr}_{(B)A} \rho_{AB} = p|\theta\rangle\langle\theta| + q|-\theta\rangle\langle-\theta| \quad (4.9)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & (p - q) \sin \theta \\ (p - q) \sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

donde (4.10) es la representación en la base estándar $\{|V\rangle, |H\rangle\}$, y corresponde al vector de Bloch $\mathbf{r}_B = \text{Tr } \rho_B \boldsymbol{\sigma} = ((p - q) \sin \theta, 0, \cos \theta)$. La pureza *local* $P_A = P_B$ es entonces

$$P_B = \text{Tr } \rho_B^2 = 1 - 2pq \sin^2 \theta, \quad (4.11)$$

con los autovalores de ρ_B dados por $\lambda_B^{\pm} = (1 \pm \sqrt{2P_B - 1})/2$. Se verifica que $P_B \geq P_{AB}$, $\lambda_B^+ \geq \lambda_{AB}^+$, en concordancia con las propiedades de mayorización [67]

$\rho_{AB} \prec \rho_{B(A)}$ válida para estados separables ρ_{AB} [9, 68].

4.1.2. Estado local condicional y pureza condicional tras una medida local remota

Consideremos ahora una medida proyectiva de polarización sobre el fotón B , definida por los proyectores ortogonales

$$\Pi_+ = |\phi\rangle\langle\phi|, \quad \Pi_- = |\phi + \pi\rangle\langle\phi + \pi|, \quad (4.12)$$

donde $|\phi\rangle = \cos\frac{\phi}{2}|V\rangle + \sin\frac{\phi}{2}|H\rangle$, $|\phi + \pi\rangle = -\sin\frac{\phi}{2}|V\rangle + \cos\frac{\phi}{2}|H\rangle$ y $\Pi_+ + \Pi_- = 1$. Esto implica proyectar sobre estados linealmente polarizados en ángulos $\phi/2$ y $\phi/2 + \pi/2$ respectivamente. La probabilidad de obtener el resultado $+$ o $-$ es

$$r_{\pm} = \text{Tr}(\rho_{AB} I_A \otimes \Pi_{\pm}) = \frac{1}{2}[1 \pm p \cos(\phi - \theta) \pm q \cos(\phi + \theta)] \quad (4.13)$$

(Obviamente, un resultado “+” para el ángulo ϕ es equivalente a un resultado “-” para un ángulo de medida $\phi + \pi$). Como una función de ϕ , r_{\pm} es extremo para

$$\tan \phi = (p - q) \tan \theta, \quad (4.14)$$

con r_+ máximo para $\phi = 0$ si $p = q$ y ϕ entre 0 y θ si $p > q$ (Fig. 4.1). Tras una medida en B con resultado conocido, el estado posmedido de A tendrá nuevamente la forma (4.9), pero con probabilidades modificadas p'_{\pm}, q'_{\pm} , que dependen tanto del ángulo de medida ϕ como del resultado de la medida \pm :

$$\rho_{A/B_{\pm}} = r_{\pm}^{-1} \text{Tr}_B(\rho_{AB} I_A \otimes \Pi_{\pm}) = p'_{\pm} |\theta\rangle\langle\theta| + q'_{\pm} |-\theta\rangle\langle-\theta|, \quad (4.15)$$

con $q'_{\pm} = 1 - p'_{\pm}$ y

$$p'_{\pm} = p \frac{1 \pm \cos(\theta - \phi)}{2r_{\pm}}. \quad (4.16)$$

Se verifica, por supuesto, que $r_+ \rho_{A/B_+} + r_- \rho_{A/B_-} = \rho_A$, esto es, que el estado posmedido de A queda inalterado si el resultado de la medida es desconocido. Se observa también que si $\phi = 0$ (o $\phi = \pi$), $p'_{\pm} = p$, o sea, $\rho_{A/B_{\pm}} = \rho_A$ independientemente de los valores de θ , p y el resultado de la medida. Tal medida deja entonces inalterado al estado marginal del fotón no medido (pero no el estado

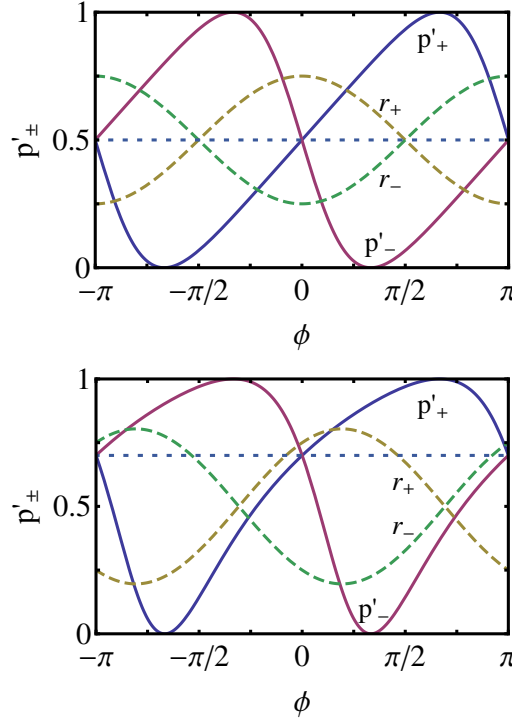


Figura 4.1: Las probabilidades p'_\pm (ver ecuación (4.16)) de los estados marginales condicionales (4.15) de A tras una medida en ángulo ϕ con resultado \pm en B , para $\theta = \pi/3$ y valores iniciales $p = 0,5$ (arriba) y $p = 0,7$ (abajo), indicadas por las líneas punteadas horizontales. Se observa que p'_\pm cubre todos los valores entre 0 y 1, con $p'_+ = 1$ en $\phi = \pi - \theta$ y 0 en $\phi = \theta - \pi$, mientras $p'_- = 0$ en $\phi = \theta$ y 1 en $\phi = -\theta$. Las líneas de trazo ilustran las probabilidades r_\pm en (ecuación (4.13)) de obtener el resultado \pm en B .

global ρ_{AB}).

Como se ve en la figura 4.1, las nuevas probabilidades p'_\pm cubren todos los valores posibles entre 0 y 1 al variar el ángulo de medida ϕ . Para $p > q$, p'_+ (p'_-) se mantiene por encima (debajo) del valor inicial p para $\phi \geq 0$, y el comportamiento opuesto tiene lugar para $\phi \leq 0$. La pureza de los estados (4.15) está dada por

$$P_{A/B_\pm} = 1 - 2p'_\pm q'_\pm \sin^2 \theta = 1 - 2pq \frac{[1 \pm \cos(\theta - \phi)][1 \pm \cos(\theta + \phi)]}{4r_\pm^2} \sin^2 \theta, \quad (4.17)$$

y pueden entonces ser *mayores o menores* que la pureza original (4.11), satisfaciendo

$$1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \leq P_{A/B_\pm} \leq 1. \quad (4.18)$$

Para P_{A/B_-} , el límite superior se alcanza siempre para $\phi = \pm\theta$, pues en este

caso un resultado – implica con certeza un estado posmedido puro $|\mp\theta\rangle$ en A , es decir, $p'_- = 0$ o 1 , como se observa en la figura 4.1. Tal resultado tiene probabilidad $r_- = q \sin^2 \theta$ ($p \sin^2 \theta$) si $\phi = \theta$ ($-\theta$). Lo mismo ocurre para P_{A/B_+} si $\phi = \mp(\pi - \theta)$. Por otra parte, el límite inferior en (4.18) corresponde a $p'_\pm = 1/2$ y puede alcanzarse para ángulos ϕ que satisfagan

$$\tan \phi = \frac{(p - q) \sin \theta}{\cos \theta \pm 2\sqrt{pq}}, \quad (4.19)$$

en cuyo caso $p'_- = 1/2$ para las raíces de (4.19) $\in [0, \pi]$ mientras que $p'_+ = 1/2$ para aquellas en $[-\pi, 0]$, como se ve en la figura 4.1. Se sigue entonces que mediante medidas y resultados apropiados en B es siempre posible tener un estado condicional posmedido *puro* en A , o también “*equilibrado*”, es decir, con pesos iguales para los dos estados en la mezcla [32].

4.1.3. Pureza condicional promedio

La pureza condicional *promedio* de A tras la previa medida en B está dada por

$$\begin{aligned} P_{A/B_\phi} &= r_+ P_{A/B_+} + r_- P_{A/B_-} \\ &= 1 - 2pq\gamma \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde

$$\gamma = \frac{r_+ p'_+ q'_+ + r_- p'_- q'_-}{pq} = \frac{p \sin^2(\theta - \phi) + q \sin^2(\theta + \phi)}{1 - [p \cos(\theta - \phi) + q \cos(\theta + \phi)]^2} \leq 1. \quad (4.21)$$

Luego, al contrario de P_{A/B_\pm} , P_{A/B_ϕ} nunca es menor que la pureza original,

$$P_{A/B_\phi} \geq P_A, \quad (4.22)$$

en concordancia con los resultados generales de los capítulos anteriores. La ecuación (4.20) está de hecho linealmente ligada a la entropía condicional cuadrática S_2 dependiente de la medida, la cual resulta aquí

$$\begin{aligned} S_2(A/B_\phi) &= r_+ S_2(\rho_{A/B_+}) + r_- S_2(\rho_{A/B_-}) \\ &= 2(1 - P_{A/B_\phi}) = 4pq\gamma \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (4.23)$$

y nunca es mayor que la entropía local original $S_2(\rho_A) = 4pq \sin^2 \theta$.

La diferencia $P_{A/B_\phi} - P_A = 2pq(1 - \gamma) \sin^2 \theta$ es el incremento promedio en la pureza de A debido a la medida local en B , y depende del ángulo de medida ϕ . Mientras siempre se anula para $\phi = 0$, donde $\gamma = 1$, en cualquier otro caso es positiva. Su máximo se alcanza para

$$\tan \phi = \frac{\tan \theta}{p - q}, \quad (4.24)$$

en cuyo caso $\gamma = \cos^2 \theta$, lo que conduce a

$$P_{A/B} \equiv \text{Max}_\phi P_{A/B_\phi} = 1 - 2pq \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \quad (4.25)$$

Además en este punto $p'_+ = q'_-$, por lo que

$$P_{A/B_+} = P_{A/B_-} = P_{A/B}, \quad (4.26)$$

de manera que el máximo incremento promedio se alcanza para un ángulo donde la pureza del estado local posmedido (pero no el estado mismo) es *independiente* del resultado de la medida (ver también la figura 4.4 en la sección 4.2.2). El máximo incremento promedio en la pureza es así $2pq \sin^4 \theta$.

La máxima pureza condicional promedio (4.25) tiene un significado profundo. La mínima entropía condicional S_2 asociada

$$S_2(A/B) = \text{Min}_\phi S_2(A/B_\phi) = 2(1 - P_{A/B}) = pq \sin^2 2\theta, \quad (4.27)$$

representa el cuadrado de la concurrencia [23] entre A y un tercer sistema C que purifica al sistema tripartito ABC [25, 32, 33]. C puede elegirse en este caso como un qubit, pues ρ_{AB} tiene rango 2. Como consecuencia (ver siguiente subsección), la máxima pureza condicional promedio (4.25) determinará también la discordia cuántica del estado (4.1), permitiendo obtener una expresión analítica simple para esta última. El comportamiento de $P_{A/B}$ como función del ángulo de “apertura” θ del estado (4.1) se ilustra en la figura 4.2, donde se observa que alcanza su máximo 1 solo para $\theta = 0$ o $\pi/2$, o sea, cuando el estado (4.1) es o bien producto ($\theta = 0$) o un estado clásicamente correlacionado ($\theta = \pi/2$), es decir, un estado de discordia nula en ambos casos.

El ángulo ϕ optimizante determinado por (4.24) difiere de $\pm\theta$ si $\theta > 0$, $pq > 0$,

como se observa en el panel inferior de la figura 4.2. Este satisface $\phi \geq \theta$ si $p \geq q$, con $\phi \approx \theta + (1 - p) \sin 2\theta$ para p cercano a 1 y $\phi \approx \frac{\pi}{2} - 2(p - \frac{1}{2})/\tan \theta$ para p por encima y cercano a 1/2. Luego, para $p = q$ se vuelve *independiente* de θ , prefiriendo siempre una medida en dirección x en la esfera de Bloch (proyectando sobre estados linealmente polarizados en ángulos $\pm\pi/4$), como se observa en la figura 4.2.

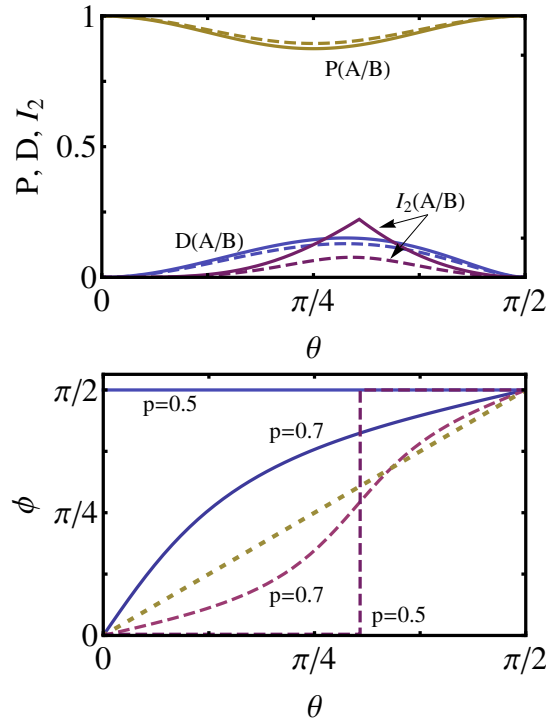


Figura 4.2: (Arriba) La máxima pureza condicional promedio $P(A/B) \equiv P_{A/B}$ (4.25) junto con la discordia cuántica (4.31) y la mínima diferencia en la pureza global (4.36), como función del ángulo de apertura θ del estado (4.1) para $p = 0,5$ (línea sólida) y $p = 0,7$ (línea de trazos). (Abajo) Los ángulos de medida que maximizan la pureza condicional promedio (4.20) (líneas sólidas) y la pureza global del estado posmedido (4.33) (líneas de trazos), como función del ángulo de apertura θ para $p = 0,5$ y $p = 0,7$. La línea punteada muestra a θ para referencia. Para $p = 0,5$ el ángulo que maximiza (4.33) sufre una transición abrupta $0 \rightarrow \pi/2$ en $\theta = \arccos 1/\sqrt{3}$, que origina el pico marcado en I_2 que se observa en el panel superior. Esta transición se suaviza para $p > 1/2$. El ángulo que minimiza la discordia cuántica (4.28) coincide aquí exactamente con aquel que maximiza la pureza condicional (4.20) (ver texto).

Los resultados expuestos están en concordancia con las consideraciones generales del capítulo dos. La dirección de medida \mathbf{k} en la esfera de Bloch de B que maximiza la pureza condicional de A es esencialmente aquella en la que la correlación

es máxima y satisface la ecuación de autovalores generalizada $C^T C \mathbf{k} = \lambda N_B \mathbf{k}$, con λ el mayor autovalor, donde de nuevo $C_{\mu\nu} = \langle \sigma_\mu^A \otimes \sigma_\nu^B \rangle - \langle \sigma_\mu^A \rangle \langle \sigma_\nu^B \rangle$ es el tensor de correlación del sistema y $N_B = I_3 - \mathbf{r}_B \mathbf{r}_B^T$, con $\mathbf{r}_B = \langle \boldsymbol{\sigma}^B \rangle$ el vector de Bloch original del qubit B . Aquí $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B = ((p-q) \sin \theta, 0, \cos \theta)$ y $C_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu x} 4pq \sin^2 \theta$, de manera que las correlaciones surgen solo en la dirección x . La ecuación de autovalores anterior conduce entonces a un vector de medida optimizante \mathbf{k} en el plano xz , esto es, $\mathbf{k} = (\sin \phi, 0, \cos \phi)$, con ϕ satisfaciendo la ecuación (4.24). Y para $p = q$, \mathbf{k} pasa a ser paralelo al eje x al quedar N_B diagonal. Explicando entonces la preferencia de la discordia por la medida a lo largo del eje x en este caso.

4.1.4. Discordia cuántica y su evaluación analítica

Como se mencionó previamente, el estado (4.1) tiene discordia finita para $\theta \in (0, \pi)$ y $pq \neq 0$. Como función del ángulo de medida ϕ , esta cantidad [27, 69] puede evaluarse como la mínima diferencia

$$D(A|B_\phi) = S(A|B_\phi) - S(A|B), \quad (4.28)$$

donde $S(A|B) = S(\rho_{AB}) - S(\rho_B) = -\sum_{\nu=\pm} (\lambda_{AB}^\nu \log_2 \lambda_{AB}^\nu - \lambda_B^\nu \log_2 \lambda_B^\nu)$ es la entropía condicional de von Neumann independiente de la medida [7] y

$$S(A|B_\phi) = r_+ S(\rho_{A/B_+}) + r_- S(\rho_{A/B_-}), \quad (4.29)$$

aquella dependiente de la medida, determinada por los estados condicionales (4.15) (análoga a (4.23)). Todas las cantidades pueden evaluarse así en términos de las purzas P_{AB} , P_A y P_{A/B_\pm} ((4.5), (4.11) y (4.17) respectivamente).

La discordia $D(A|B)$ es de hecho el mínimo sobre ϕ de la ecuación (4.28) [27, 70]. La optimización debería, en principio, extenderse a medidas generales (POVM), pero en el presente caso de un estado de rango 2 es suficiente considerar solo medidas proyectivas [72, 73], las cuales pueden reducirse aquí a medidas en el plano xz . Además, el mínimo de (4.28) puede evaluarse aquí *analíticamente*: el ángulo de la medida minimizante ϕ es *exactamente aquel que maximiza la pureza condicional promedio*, determinado por (4.24), y el consiguiente mínimo es *una función decreciente de la máxima pureza condicional promedio* $P_{A/B}$ (4.25) (aún

cuando para un ϕ general, (4.28) no es una función directa de (4.20):

$$D(A|B) = \text{Min}_{\phi} D(A|B_{\phi}) = -f_{+} \log_2 f_{+} - f_{-} \log_2 f_{-} - S(A|B), \quad (4.30)$$

donde

$$f_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{2P_{A/B} - 1}}{2}. \quad (4.31)$$

Demostración: Como se discutió en el capítulo 2, el mínimo de $S(A|B_{\phi})$ es el entrelazamiento de formación $E(A, C)$ entre A y un tercer sistema C que purifica el estado global tripartito, que puede elegirse aquí como un qubit. En tal caso, $E(A, C)$ está determinado por la concurrencia C_{AC} entre A y C a través de $E(A, C) = -\sum_{\nu=\pm} f_{\nu} \log f_{\nu}$, con $f_{\pm} = (1 \pm \sqrt{1 - C_{AC}^2})/2$. Pero C_{AC}^2 no es más que la mínima entropía condicional S_2 (4.27) de A dada una medida en B , es decir, $C_{AB}^2 = S_2(A|B) = 2(1 - P_{A/B})$, lo que conduce a las ecuaciones (4.30)–(4.31). Este resultado fue también verificado numéricamente.

Para $\theta = 0$ (ρ_{AB} producto) o $\theta = \pi/2$ (ρ_{AB} clásicamente correlacionado), $P_{A/B} = 1$ y luego $D(A|B) = 0$. En cualquier otro caso $P_{A/B} < 1$ y $D(A|B) > 0$, como puede apreciarse en la figura 4.2. Vale notar, no obstante, que como función de θ , $P_{A/B}$ es mínima en $\pi/4$ (ecuación (4.25)), mientras $D(A|B)$ es máxima para un ángulo de apertura ligeramente mayor $\theta \approx 0,29\pi$, debido a la dependencia con θ del término $S(A|B)$.

4.1.5. Pureza del estado posmedido global

El estado promedio del sistema conjunto tras la medida local en B es

$$\rho'_{AB} = r_{+} \rho_{A/B_{+}} \otimes \Pi_{+} + r_{-} \rho_{A/B_{-}} \otimes \Pi_{-}. \quad (4.32)$$

Su pureza $P'_{AB} = \text{Tr}(\rho'_{AB})^2$ está entonces dada por

$$\begin{aligned} P'_{AB} &= r_{+}^2 P_{A/B_{+}} + r_{-}^2 P_{A/B_{-}} \\ &= \frac{1}{2} \{ [p \cos(\theta - \phi) + q \cos(\theta + \phi)]^2 - 2pq \sin^2 \theta [1 + \cos(\theta + \phi) \cos(\theta - \phi)] \}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

A diferencia de la pureza condicional local (4.22), la pureza de este estado global posmedido no puede ser mayor que la pureza del estado global original (4.5), en

concordancia con las consideraciones generales de [10]:

$$P'_{AB} \leq P_{AB}, \quad (4.34)$$

con $P'_{AB} < P_{AB}$ para $\theta \in (0, \pi/2)$ y $pq > 0$. La diferencia $P_{AB} - P'_{AB}$ es proporcional al déficit de información cuadrático [10],

$$I_2(A, B_\phi) = S_2(\rho'_{AB}) - S_2(\rho_{AB}) = 2(P_{AB} - P'_{AB}), \quad (4.35)$$

el cual es siempre no negativo. La ecuación (4.33) muestra que su evaluación puede llevarse a cabo conociendo solo las purzas condicionales P_{A/B_\pm} , la pureza inicial P_{AB} y las probabilidades r_\pm .

Su mínimo,

$$I_2(A, B) = \text{Min}_\phi I_2(A, B_\phi), \quad (4.36)$$

que corresponde a la *máxima* pureza del estado posmedido global P'_{AB} , es proporcional a la *discordia geométrica* [10, 38, 74]. Será entonces no nulo para $\theta \in (0, \pi/2)$ y $pq \neq 0$, siendo máximo, como la discordia cuántica, en un ángulo θ superior a $\pi/4$, como se aprecia en la figura 4.2. El déficit de información basado en la entropía de Renyi $I_2^R(A, B_\phi) = -\log P'_{AB}/P_{AB}$ puede también obtenerse directamente de I_2 [75].

El ángulo de medida ϕ que maximiza P'_{AB} (y minimiza $I_2(A, B_\phi)$) satisface

$$\tan 2\phi = \frac{(p - q) \sin 2\theta}{pq + (1 - pq) \cos 2\theta}. \quad (4.37)$$

Este no es mayor que aquel que maximiza P_{A/B_ϕ} (ecuación (4.24)) y puede ser mayor o menor que θ , con $\phi \approx \theta - (1 - p) \cos^2 \theta \sin 2\theta$ para $p \rightarrow 1$. Por otra parte, para $p \rightarrow 1/2$, $\phi \rightarrow \pi/2$ solo para $\cos \theta \leq 1/\sqrt{3}$, es decir, $\theta > \theta_c \gtrsim 0,309\pi$, con $\phi \rightarrow 0$ para $\cos \theta > 1/\sqrt{3}$. Por lo tanto, para $p = 1/2$ ocurre en $\theta = \theta_c$ una *transición abrupta* de 0 a $\pi/2$ en el ángulo ϕ de la medida maximizante de P'_{AB} [10]. Tal transición abrupta se suaviza para $p > q$, como se observa en la figura 4.2.

Como para θ fijo el ángulo minimizante ϕ de (4.35) puede diferir de aquel que minimiza la discordia cuántica, el comportamiento de (4.35) como función del ángulo de la medida ϕ puede desfasarse respecto de aquel correspondiente a la discordia cuántica, como se aprecia en la figura 4.5. En particular, para $p = q$ y

$\theta < \theta_c$, $I(A, B)$ (4.35) es mínimo en $\phi = 0$, donde P_{A/B_ϕ} es mínima y por lo tanto $D(A|B_\phi)$ es máxima (como función de ϕ). Esto refleja el diferente significado del ángulo óptimo de P_{A/B_ϕ} y $D(A|B_\phi)$ por un lado, y $I_2(A, B_\phi)$ por el otro. Mientras la primera elige esencialmente la dirección local asociada con la máxima correlación, el último representa la dirección de la medida local que menos perturba al estado [10]. Consecuentemente, las diferencias pueden ser significativas para pequeños ángulos de apertura θ , donde el último estará cercano al eje z , pero decrecerá al crecer θ , como se observa en el panel inferior de la figura 4.2. Para $p = q$ se anulan, de hecho, para $\theta > \theta_c$.

Remarquemos finalmente que la dirección \mathbf{k} , en la esfera de Bloch de B , de la medida minimizante (4.35) satisface la ecuación de autovalores [10, 38] $(J^T J + \mathbf{r}_B \mathbf{r}_B^T) \mathbf{k} = \lambda \mathbf{k}$, con λ el autovalor máximo, donde $J_{\mu\nu} = \langle \sigma_\mu^A \otimes \sigma_\nu^B \rangle = C_{\mu\nu} + \langle \sigma_\mu^A \rangle \langle \sigma_\nu^B \rangle$. En la presente situación \mathbf{k} va a estar en el plano xz , esto es, $\mathbf{k} = (\sin \phi, 0, \cos \phi)$, con ϕ satisfaciendo la ecuación (4.37). De hecho, el ángulo ϕ optimizante es la menor raíz positiva de (4.37), correspondiendo la otra raíz al ángulo que minimiza P'_{AB} (menor autovalor).

4.2. Verificación experimental

4.2.1. Arreglo experimental

El arreglo experimental, realizado en el marco de una colaboración con el laboratorio de procesamiento de imágenes de la Universidad de Buenos Aires, se ilustra en la figura 4.3. Este puede dividirse en tres etapas. En la primera parte, usada para la preparación del estado, un cristal no lineal LiIO3 tipo I es bombeado por un laser de $405nm$ polarizado horizontalmente, el cual por Conversión Paramétrica Espontánea Descendente (SPDC) produce pares de fotones gemelos con longitud de onda $\lambda = 810nm$ en el estado de polarización de dos qubits $|VV\rangle$. Una lámina de media onda (HWP_1) es utilizada para rotar la polarización de cada fotón a una dirección arbitraria θ_L en el referencial del laboratorio, donde $\theta_L = 0$ corresponde a fotones verticalmente polarizados. Este ángulo define el estado $|\theta\rangle$ en la esfera de Bloch por medio de la relación $\theta = 2 \theta_L$. Con el fin de generar el estado mezcla de dos qubits descrito por la ecuación (4.1), seguimos la idea presentada en [76], alternando HWP_1 entre los dos ángulos $\theta_L/2$ y $-\theta_L/2$ para obtener una mezcla de las dos polarizaciones deseadas con probabilidades p y q .

En la segunda parte del “setup”, una medida local proyectiva de polarización se realiza sobre uno de los subsistemas. Con este fin un polarizador lineal (P_1) en el camino B , ajustado en un ángulo ϕ_L o $\phi_L + \pi/2$ en el referencial del laboratorio, implementa la acción del proyector Π_+ o Π_- de la ecuación (4.12) sobre el estado de un qubit. Después de esto la luz se colecta en el detector D_B . El detector está constituido por un iris que actúa como filtro espacial, y un filtro de interferencia centrado en $810nm$ (ancho de banda $10nm$), seguido por una lente que colecta la luz y la enfoca en una fibra óptica multi modos acoplada a un módulo contador de fotones PerkinElmer SPCM-AQRH-13-FC. Durante el tiempo total T en el que P_1 se ajusta en el ángulo ϕ_L , D_B mide el número de eventos n_+ , y lo mismo cuando P_1 se ajusta en el ángulo complementario $\phi_L + \pi/2$ para registrar n_- . Entonces, la probabilidad de medir $+$ o $-$ en la dirección ϕ (r_{\pm}) dada en la ecuación (4.13) se obtiene de $n_{\pm}/(n_+ + n_-)$.

Finalmente, la tercera etapa del *setup* se usa para realizar una tomografía completa del estado del qubit A . Un arreglo de una lámina de cuarto de onda (QWP), una de media onda (HWP₂), y un polarizador lineal (P_2) en el camino del subsistema se utilizan para proyectar el estado de polarización sobre el conjunto informacionalmente completo de bases mutuamente no sesgadas[77, 78], antes de ser detectado por D_A . Este detector consiste de los mismos componentes que D_B , descrito arriba. Las medidas se realizan en coincidencia, usando el subsistema B como disparador. De esta forma es posible reconstruir la matriz densidad condicional $\rho_{A/B=\pm}$ del estado reducido de A tras obtener el resultado \pm de la medida proyectiva en la dirección ϕ en B . Aunque estos observables pueden obtenerse realizando una medida de la pureza condicional, el *setup* usado permite verificar que el estado condicional tras la medida local es de la forma (4.15).

4.2.2. Resultados

Como se mencionó arriba, la primera etapa del arreglo experimental genera un estado de dos fotones en el estado de polarización dado por la ecuación (4.1). A fin de validar el proceso de generación, previamente se llevó a cabo una tomografía completa de diferentes estados de dos qubits [79]. Luego, la técnica de máxima verosimilitud (ML) se aplicó para obtener la mejor estimación del estado, consistente con los requerimientos de un estado físico [80]. Cuantificamos la calidad del proceso de preparación mediante la fidelidad $F \equiv \text{Tr} \left(\sqrt{\sqrt{\sigma} \rho \sqrt{\sigma}} \right)$ entre la matriz densidad del estado que se busca preparar, σ , y la matriz densidad

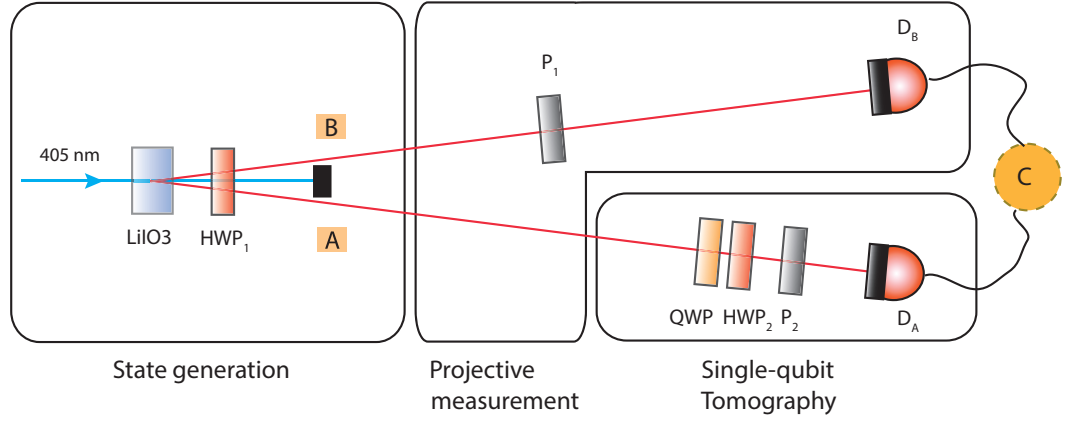


Figura 4.3: Arreglo experimental usado para la preparación de un estado mezcla de polarización de dos qubits, y la caracterización de estado del qubit A condicional a la medida proyectiva en B . QWP: lámina de cuarto de onda; HWP: lámina de media onda; P: polarizador lineal; D: detector de fotones individuales.

del estado efectivamente preparado y reconstruido por tomografía, ρ . En todos los casos, se obtuvieron fidelidades $F > 0,98$ para el estado inicial ρ_{AB} .

Tras esta caracterización realizamos las medidas proyectivas y la tomografía del estado condicional implementadas en la segunda y tercera etapa del arreglo experimental (figura 4.3). El estado posmedido $\rho_{A/B_{\pm}}$ en la ecuación (4.15) se obtuvo aplicando la técnica ML a los resultados experimentales. Los gráficos en la figura 4.4 muestran las probabilidades para las medidas proyectivas r_{\pm} y las purzas condicionales $\text{Tr}\rho_{A/B_{\pm}}^2$ para dos estados iniciales diferentes, junto con las predicciones teóricas dadas por las ecuaciones (4.13) y (4.17). Además, graficamos la pureza condicional promedio $P_{A/B_{\phi}} = r_{+}P_{A/B_{+}} + r_{-}P_{A/B_{-}}$ que se obtuvo de los resultados experimentales junto con el resultado teórico $1 - 2pq\gamma \sin^2 \theta$ (ecuación (4.20)). En la figura 4.5 graficamos los resultados teóricos y experimentales para $D(A/B)$ y $I_2(A, B_{\phi})$, cuyos valores mínimos como función de la medida proyectiva Π_{ϕ} corresponden a la discordia cuántica y la discordia geométrica, respectivamente. Como se sigue de las secciones 4.1.4 y 4.1.5, ambas cantidades pueden evaluarse a partir de las purzas P_{AB} , P_A , y $P_{A/B_{\pm}}$. Con este propósito, la matriz densidad del estado reducido ρ_A se obtuvo en un modo similar a $\rho_{A/B_{\pm}}$ pero considerando las detecciones en D_A sin tener en cuenta el resultado en D_B .

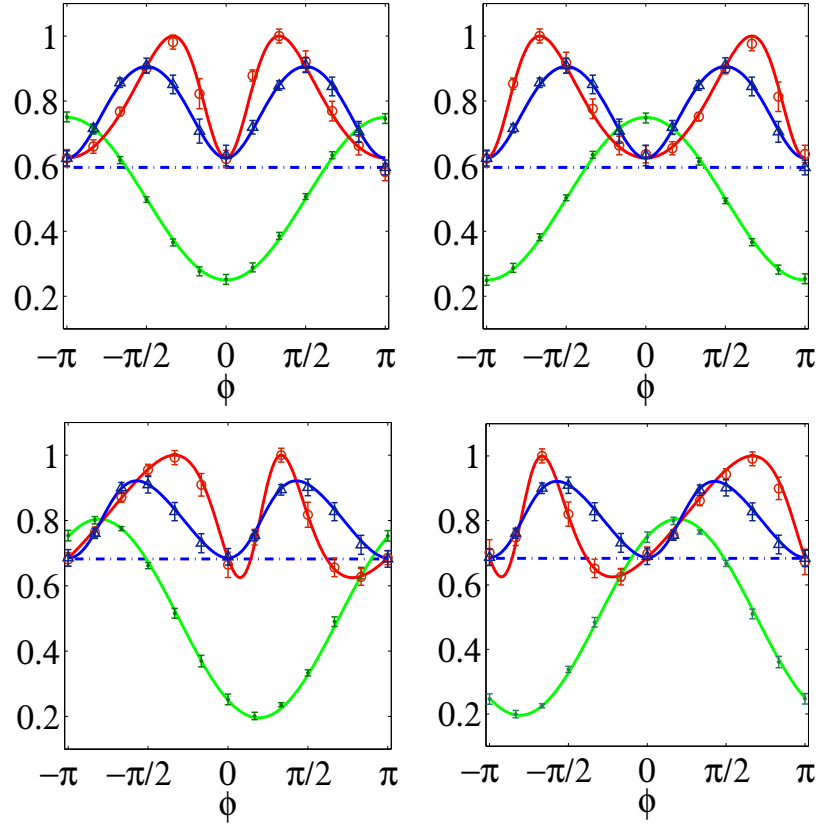


Figura 4.4: Resultados experimentales obtenidos para cada medida proyectiva descrita por Π_{\pm} . Se muestra la pureza del estado de A tras obtener el resultado $-$ (paneles izquierdos) o $+$ (paneles derechos) en B , $P_{A/B_{\pm}}$ (ecuación (4.17), círculos rojos), y la probabilidad de obtener tal resultado, r_{\pm} (ecuación (4.13), puntos verdes). Cada gráfico muestra además la pureza condicional promedio $P_{A/B_{\phi}}$ (4.20) (triángulos azules). En todos los casos, el estado inicial es un estado de dos qubits de polarización de dos fotones de la forma (4.1), con $\theta = \pi/3$. En los paneles superiores $p = 0,5$ y en los inferiores $p = 0,7$. Las líneas sólidas corresponden a valores teóricos de estas medidas como función de ϕ . La línea de trazos indica el valor de la pureza local en el estado inicial, P_A , previo a la medida condicional.

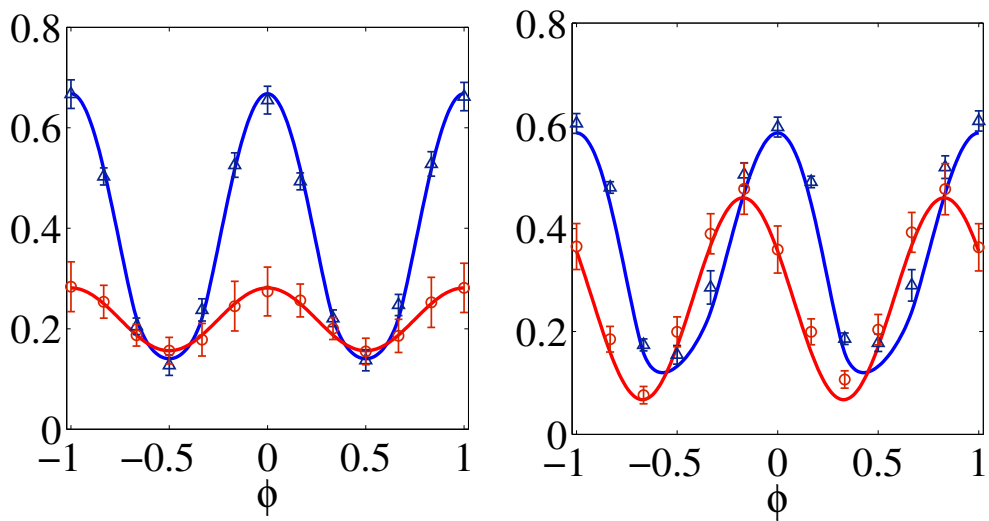


Figura 4.5: Resultados experimentales obtenidos de cada medida proyectiva descrita por Π_{\pm} como función del ángulo de medida ϕ . El mínimo en la línea azul (triángulos) es el valor de la discordia cuántica mientras que el mínimo en la línea roja (círculos) es el valor de la discordia geométrica (mínima diferencia en la pureza global). El estado inicial es el mismo de la figura anterior, con $\theta = \pi/3$, $p = 0,5$ (panel izquierdo) y $p = 0,7$ (panel derecho). Las líneas sólidas corresponden a los valores teóricos para estas medidas.

Capítulo 5

Entrelazamiento en sistemas de fermiones

Como vimos en el primer capítulo, el entrelazamiento es una de las formas de correlación que distinguen a los sistemas cuánticos de su contraparte clásica, constituyendo un recurso esencial en el procesado de información cuántica [2]. Como recurso desempeña un papel central en protocolos de teleportación cuántica [82] como así también en computación cuántica [83]. Consecuentemente, la comprensión y cuantificación de este recurso se ha convertido en un problema fundamental en la teoría de información cuántica [84]. También su estudio ha colaborado a develar aspectos profundos en la estructura de las correlaciones y transiciones de fase cuánticas en sistemas de muchos cuerpos [85–87].

Como se discutió en el capítulo 1, si $|\Psi_{AB}\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ es un estado puro de un sistema cuántico bipartito, su entrelazamiento está cuantificado por la entropía de entrelazamiento $S(\rho_A) = S(\text{Tr}_B |\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}|) = S(\rho_B)$, donde $S(\rho) = -\text{Tr} \rho \log_2 \rho$ es la entropía de von Neumann. Está claro entonces que la forma de cuantificar el entrelazamiento en estos sistemas se apoya en la estructura de producto tensorial de su espacio de estados [88]. Todavía más, la noción misma de entrelazamiento depende de tal estructura, pues lo hace el paradigma mismo de Operaciones Locales y Comunicación Clásica (LOCC). En estados fermiónicos, sin embargo, la indistinguibilidad implica que el espacio de estados accesibles no puede exhibir tal estructura, ya que solo son posibles estados antisimétricos frente al intercambio de partículas. Esto impide una extensión directa a tales sistemas de las medidas de entrelazamiento introducidas para sistemas con componentes distinguibles.

Pueden agruparse los intentos de generalizar la noción de entrelazamiento

a sistemas de componentes indistinguibles [89–98] dentro de dos paradigmas distintos: *Entrelazamiento de modos* [92–94, 99, 100] y *Correlaciones cuánticas/Entrelazamiento de partículas* [89–91, 95–98, 101, 103, 104]. En el primer caso los “subsistemas” sobre los que puede operarse localmente están constituidos por grupos de modos de una base dada del espacio de Hilbert de una partícula. El entrelazamiento entre modos, por lo tanto, no permanece invariante frente a transformaciones en el espacio de estados de una partícula (sp). El segundo acercamiento al problema considera como subsistemas a los componentes indistinguibles, buscando cuantificar correlaciones en el estado más allá de la antisimetrización, es decir, definiendo como estados puros separables a los determinantes de Slater. En las referencias [89, 91], que tratan sobre entrelazamiento entre partículas, se deriva un análogo fermiónico de la descomposición de Schmidt para estados de dos fermiones y se introduce un “número de Schmidt fermiónico” bajo el nombre de *Slater Rank*, que cuantifica el entrelazamiento en estos estados. En dicho trabajo se muestra también la existencia de un análogo fermiónico de la *conurrencia* definida para sistemas de dos qubits. Si bien estas medidas permanecen invariantes frente a transformaciones unitarias en el espacio sp , su validez está restringida a estados con número fijo de partículas, los cuales distan de ser estados generales en el caso de sistemas fermiónicos. Un problema similar surge en [95], donde con la finalidad de compartir partículas entre partes es necesario proyectar el estado original sobre otros que tengan un número definido de partículas en ciertos subespacios del espacio sp .

En lo que sigue vamos a considerar, primeramente, estados puros de sistemas fermiónicos en el formalismo gran canónico, de manera que el número de partículas en el sistema no se considera necesariamente fijo. Tales estados aparecen, por ejemplo, al considerar el vacío de cuasipartículas definido a través de una transformación de Bogoliubov [100–102], como así también al aplicar transformaciones partícula-hueco, tales que el estado puede verse como un vacío para ciertos operadores fermiónicos, más excitaciones partícula-hueco. La paridad del número de fermiones de estos estados está, no obstante, bien definida, en concordancia con la regla de superselección fermiónica [105]. En tales estados consideramos primero el entrelazamiento entre un único modo fermiónico y su complemento ortogonal en el espacio de una partícula, y se define una entropía de entrelazamiento que lo cuantifica. Proponemos entonces la suma, sobre todos los modos de una base elegida, de esta entropía de entrelazamiento como una medida del entrelazamiento.

to total en el estado (relativo a dicha base) y mostramos que su mínimo sobre todas las bases del espacio sp depende solo de los autovalores de la matriz densidad de un cuerpo del sistema $\rho_{ij}^{sp} = \langle c_j^\dagger c_i \rangle$, siendo por lo tanto invariante frente a transformaciones unitarias en dicho espacio y anulándose cuando el estado es un determinante de Slater, como se espera para una medida de entrelazamiento de partículas. De esta manera, entonces, encontramos que las dos nociones de entrelazamiento introducidas arriba quedan conectadas por un problema de optimización. Además, mostramos que si dicha minimización se extiende a todas las bases de cuasipartículas, es decir, a bases vinculadas por transformaciones de Bogoliubov, la mínima entropía de entrelazamiento es simplemente la entropía de von Neumann de la matriz densidad de un cuerpo generalizada ρ^{qsp} , que contiene además las contracciones de pares de operadores de creación y destrucción $\langle c_j^\dagger c_i^\dagger \rangle$ y $\langle c_j c_i \rangle$. Se introduce luego el techo convexo de esta entropía de entrelazamiento, lo que permite no solo identificar rigurosamente estados mixtos que no pueden escribirse como combinación convexa de determinantes de Slater o vacíos de cuasipartículas (o en general estados fermiónicos gaussianos [101, 103]), como por ejemplo estados térmicos de sistemas de fermiones interactuantes a temperaturas suficientemente bajas, sino también cuantificar sus correlaciones.

Nos enfocamos después en sistemas fermiónicos con un espacio sp de dimensión 4. Para estados puros generales de tales sistemas mostramos que la entropía de entrelazamiento anterior (minimizada sobre todas las bases de cuasipartículas) puede escribirse en términos de un análogo fermiónico de la concurrencia [23, 103, 104], que se reduce a la medida de correlación de Slater introducida en [89, 91] para sistemas de dos fermiones. Su techo convexo puede también evaluarse analíticamente, extendiendo explícitamente los resultados de [89] a estados mixtos arbitrarios con paridad de número fija [103]. Es decir, generalizamos la conocida fórmula de la concurrencia para estados mezcla generales de dos qubits, ecuación (1.42), a estados mezcla generales de sistemas fermiónicos con espacio sp de dimensión 4, incluyendo mezclas de estados puros sin un número fijo de partículas (aunque sí con paridad de número definida). Esto habilita la evaluación analítica de la entropía de entrelazamiento previamente definida. Finalmente, a modo de ejemplo, cuantificamos el entrelazamiento en un estados tipo Werner.

Este capítulo está basado en los resultados publicados en [81].

5.1. Entrelazamiento “de un cuerpo”: De modos a partículas

5.1.1. Entropía de entrelazamiento de un nivel.

Consideramos primeramente un estado puro $|\Psi\rangle$ de un sistema de fermiones con un estado de Hilbert de una partícula (sp) \mathcal{H} de dimensión n . El sistema está descrito por un conjunto de operadores fermiónicos de creación y destrucción $\{c_j, c_j^\dagger\}$ que satisfacen las relaciones de anticonmutación

$$c_i c_j + c_j c_i = 0, \quad c_i c_j^\dagger + c_j^\dagger c_i = \delta_{ij}. \quad (5.1)$$

El conjunto $\{c_j^\dagger|0\rangle, j = 1, \dots, n\}$ constituye entonces una base ortonormal de \mathcal{H} ($|0\rangle$ denota el vacío para los operadores c_j). Trabajaremos con el formalismo gran canónico, de manera que $|\Psi\rangle$ no es necesariamente un estado con número de fermiones definido $N = \sum_j c_j^\dagger c_j$. Puede ser, por ejemplo, un vacío para operadores de cuasipartículas a_ν vinculados a los c_j 's mediante una transformación de Bogoliubov [102]. En tal caso el estado es una superposición de estados con diferente número de fermiones (ver apéndice B.1) pero con la misma paridad de número, de manera que $P|\Psi\rangle = \pm|\Psi\rangle$,

$$P = \exp[i\pi \sum_j c_j^\dagger c_j]. \quad (5.2)$$

Recordemos también que la transformación elemental partícula-hueco

$$c_j \rightarrow c_j^\dagger, \quad c_j^\dagger \rightarrow c_j, \quad (5.3)$$

preserva las relaciones de conmutación, por lo que formalmente es una cuestión de elección el considerar que las partículas o los huecos son los “verdaderos fermiones”. Tomaremos en cuenta esta simetría básica en todas las medidas de correlación, exigiendo invariancia frente a las transformaciones mencionadas. Asumimos, además, que todos los estados puros involucrados tienen paridad de número fija [105], lo que implica $\langle c_j \rangle = 0$ y también $\langle O \rangle = 0$ para cualquier operador O que sea producto de un número impar de operadores fermiónicos c_j, c_j^\dagger .

Tomemos ahora una partición (A, B) de \mathcal{H} , donde A denota el modo o nivel j

y B su complemento ortogonal en \mathcal{H} . La ecuación (5.1) implica que los operadores

$$\Pi_j = c_j^\dagger c_j, \quad \Pi_{\bar{j}} = c_j c_j^\dagger, \quad \Pi_j + \Pi_{\bar{j}} = 1, \quad (5.4)$$

conforman un conjunto de proyectores ortogonales que definen una medida proyectiva (de von Neumann) de la ocupación del nivel j . Consecuentemente, podemos descomponer cualquier estado $|\Psi\rangle$ en la forma

$$|\Psi\rangle = c_j^\dagger c_j |\Psi\rangle + c_j c_j^\dagger |\Psi\rangle \quad (5.5)$$

$$= \sqrt{p_j} |\Psi_j\rangle + \sqrt{p_{\bar{j}}} |\Psi_{\bar{j}}\rangle, \quad (5.6)$$

donde el primer (segundo) término en (5.5) selecciona la componente de $|\Psi\rangle$ en la que el modo j está ocupado (vacío) y $|\Psi_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_j}} c_j^\dagger c_j |\Psi\rangle$, $|\Psi_{\bar{j}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_{\bar{j}}}} c_j c_j^\dagger |\Psi\rangle$ son los correspondientes estados normalizados. Aquí p_j ($p_{\bar{j}}$) es la probabilidad de encontrar el nivel j ocupado (vacío) en $|\Psi\rangle$:

$$p_j = \langle \Psi | c_j^\dagger c_j | \Psi \rangle, \quad p_{\bar{j}} = \langle \Psi | c_j c_j^\dagger | \Psi \rangle = 1 - p_j. \quad (5.7)$$

Para un operador O_A que dependa solo de c_j, c_j^\dagger y O_B que dependa solo del conjunto complementario $\{c_k, c_k^\dagger, k \neq j\}$ obtenemos entonces, asumiendo $P|\Psi\rangle = \pm|\Psi\rangle$,

$$\begin{aligned} \langle \Psi | O_{A(B)} | \Psi \rangle &= p_j \langle \Psi_j | O_{A(B)} | \Psi_j \rangle + p_{\bar{j}} \langle \Psi_{\bar{j}} | O_{A(B)} | \Psi_{\bar{j}} \rangle \\ &= \text{tr}_{A(B)} \rho_{A(B)} O_{A(B)}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

donde $\rho_A = p_j c_j^\dagger |0\rangle \langle 0| c_j + p_{\bar{j}} |0\rangle \langle 0|$ y $\rho_B = p_j c_j | \Psi_j \rangle \langle \Psi_j | c_j^\dagger + p_{\bar{j}} | \Psi_{\bar{j}} \rangle \langle \Psi_{\bar{j}} |$ representan los operadores densidad reducidos para los sistemas A y B respectivamente.

El entrelazamiento entre A y B puede cuantificarse entonces mediante la entropía de la distribución binaria $\{p_j, p_{\bar{j}} = 1 - p_j\}$:

$$S(\rho_A) = S(\rho_B) = -p_j \log_2 p_j - (1 - p_j) \log_2 (1 - p_j), \quad (5.9)$$

$$= h(p_j), \quad (5.10)$$

donde $S(\rho) = -\text{Tr} \rho \log_2 \rho$ es la entropía de von Neumann y $h(p) = -p \log_2 p - (1 - p) \log_2 (1 - p)$ ($0 \leq h(p) \leq 1$). Esta entropía se mantiene, obviamente, invariante frente a transformaciones partícula hueco (5.3). Para un estado puro $|\Psi\rangle$,

la expresión en (5.9) se anula *si y solo si* $|\Psi\rangle$ es separable respecto de este nivel, o sea, sii el nivel j está ocupado ($p_j = 1$) o vacío ($p_j = 0$) en $|\Psi\rangle$, de manera que $|\Psi\rangle = c_j^\dagger c_j |\Psi\rangle$ o $|\Psi\rangle = c_j c_j^\dagger |\Psi\rangle$ respectivamente. Su valor máximo, 1, se alcanza para $p_j = 1/2$.

5.1.2. Entropía de entrelazamiento de un cuerpo

La suma

$$S_c = \sum_j h(p_j) \quad (5.11)$$

es una medida del entrelazamiento del estado asociado a la base del espacio sp determinada por los operadores c_j^\dagger . La ecuación (5.11) se anula sii cada nivel j de la base es separable respecto de su complemento ortogonal, esto es, sii cada nivel está o bien vacío o bien ocupado en $|\Psi\rangle$. Por lo tanto S_c ve como separable al estado $|\Psi\rangle$ si este es un determinante de Slater en esta base, $|\Psi\rangle = c_{j_1}^\dagger \dots c_{j_m}^\dagger |0\rangle$ para algún subconjunto de niveles $\{j_1, \dots, j_m\}$.

La expresión en (5.11) depende de la base de \mathcal{H} elegida, es decir, de la elección de los operadores $\mathbf{c} = (c_1 \dots, c_n)^T$. Consideremos ahora el mínimo de (5.11) sobre todas las bases \mathcal{H} ,

$$S^{\text{sp}} = \text{Min}_{\mathbf{c}'} S_{\mathbf{c}'}, \quad (5.12)$$

donde $S_{\mathbf{c}'} = \sum_j h(p'_j)$, $p'_j = \langle \Psi | c_j'^\dagger c_j' | \Psi \rangle$ y $\mathbf{c}' = (c'_1, \dots, c'_n)^T$ es un conjunto de operadores fermiónicos vinculados a los c_j 's por alguna transformación unitaria,

$$\mathbf{c}' = U^\dagger \mathbf{c}, \quad (5.13)$$

con U una matriz unitaria de $n \times n$ (de manera que las relaciones (5.1) son preservadas). La ecuación (5.12) se anula *sii* $|\Psi\rangle$ es un determinante de Slater, o sea, $|\Psi\rangle = c_{k_1}^\dagger \dots c_{k_m}^\dagger |0\rangle$ para algunos operadores c'_k de la forma (5.13). Por lo tanto, $S^{\text{sp}} = 0$ sii existe una base de \mathcal{H} en la que cada nivel es separable de su complemento ortogonal.

Definiendo la matriz densidad de un cuerpo $\rho^{\text{sp}} = 1 - \langle \mathbf{c} \mathbf{c}^\dagger \rangle$ (con $\langle O \rangle \equiv \langle \Psi | O | \Psi \rangle$), de elementos

$$\rho_{ij}^{\text{sp}} = \langle c_j^\dagger c_i \rangle, \quad (5.14)$$

se ve que el mínimo (5.12) se alcanza para aquellos operadores \mathbf{c}' que *diagonalizan*

ρ^{SP} , esto es, que satisfacen

$$\langle c'_k{}^\dagger c'_l \rangle = (U^\dagger \rho^{\text{SP}} U)_{lk} = p'_k \delta_{kl}, \quad (5.15)$$

con p'_k los autovalores de ρ^{SP} .

Demostración: Las ecuaciones (5.13)–(5.15) implican que $p_j = \rho^{\text{SP}}_{jj} = \sum_k |U_{jk}^2| p'_k$. Por lo tanto, la concavidad de la función $h(p)$ implica $\sum_j h(p_j) \geq \sum_{j,k} |U_{jk}^2| h(p'_k) = \sum_k h(p'_k)$, saturando la desigualdad sii p_j 's son ya los autovalores de ρ^{SP} . \square

El valor mínimo (5.12) puede entonces escribirse como

$$S^{\text{SP}} = \sum_k h(p'_k) = \text{tr } h(\rho^{\text{SP}}), \quad (5.16)$$

siendo ahora evidente que S^{SP} se anula sii los autovalores p'_k son o bien 0 o 1, o sea, sii $(\rho^{\text{SP}})^2 = \rho^{\text{SP}}$, condición que asegura que $|\Psi\rangle$ es un determinante de Slater [102]. También resulta evidente ahora que (5.12) es invariante frente a unitarias en \mathcal{H} , pues lo son los autovalores de ρ^{SP} . Por lo tanto la *entropía de entrelazamiento de un cuerpo*, como denominamos a la cantidad (5.12), verifica las propiedades esperadas de una medida de entrelazamiento de partículas. Encontramos así que las nociones de entrelazamiento entre modos y entrelazamiento entre partículas, si bien esencialmente diferentes, quedan conectadas por un problema de optimización.

5.1.3. Entropía de entrelazamiento de un cuerpo generalizada

Un vacío de cuasipartículas, como por ejemplo un estado superfluido o superconductor en la aproximación BCS [102], conducirá a $S^{\text{SP}} > 0$, pues ρ^{SP} estará *mezclada*, es decir, tendrá autovalores diferentes de 0 o 1 (ver apéndice B.1). Tal estado es, no obstante, un determinante de Slater si se lo expresa en una base de cuasipartículas adecuada, siendo entonces cada modo de esta base separable de su complemento ortogonal, según lo visto en la secciones anteriores.

Si consideramos también accesibles a los estados de cuasipartículas, podemos extender la minimización en (5.12) a *todas las bases de cuasipartículas*, esto es,

$$S^{\text{qSP}} = \text{Min}_{\mathbf{a}} S_{\mathbf{a}}, \quad (5.17)$$

donde $S_{\mathbf{a}} = \sum_{\nu} h(\langle a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} \rangle)$ y \mathbf{a} denota ahora un conjunto de operadores fermiónicos a_{ν} linealmente vinculados con los operadores originales $\{c_j, c_j^{\dagger}\}$ por un *transformación de Bogoliubov* [102]:

$$a_{\nu} = \sum_j \bar{U}_{j\nu} c_j + V_{j\nu} c_j^{\dagger}. \quad (5.18)$$

La ecuación (5.18) puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^{\dagger} \end{pmatrix} = \mathcal{W}^{\dagger} \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^{\dagger} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{W} = \begin{pmatrix} U & V \\ \bar{V} & \bar{U} \end{pmatrix}, \quad (5.19)$$

donde se exige que la matriz de $2n \times 2n$ \mathcal{W} sea unitaria (lo que equivale a pedir $UU^{\dagger} + VV^{\dagger} = 1$, $UV^T + VU^T = 0$) con el fin de que los operadores $a_{\nu}, a_{\mu}^{\dagger}$ satisfagan las relaciones de anticonmutación fermiónicas (5.1).

Debe considerarse entonces la matriz densidad *extendida* de $2n \times 2n$

$$\rho^{\text{qsp}} = 1 - \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^{\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}^{\dagger} & \mathbf{c} \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} \rho^{\text{sp}} & \kappa \\ -\bar{\kappa} & 1 - \bar{\rho}^{\text{sp}} \end{pmatrix}, \quad (5.20)$$

donde κ es una matriz antisimétrica de $n \times n$ conteniendo los promedios de aniquilación de pares

$$\kappa_{ij} = \langle c_j c_i \rangle, \quad (5.21)$$

con $-\bar{\kappa}_{ij} = \langle c_j^{\dagger} c_i^{\dagger} \rangle$ y $(1 - \bar{\rho}^{\text{sp}})_{ij} = \langle c_j c_i^{\dagger} \rangle$. La matriz en (5.20) es hermítica, por lo que siempre puede diagonalizarse mediante una transformación apropiada (5.19), de manera que

$$1 - \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^{\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{a}^{\dagger} \end{pmatrix} \right\rangle = \mathcal{W}^{\dagger} \rho^{\text{qsp}} \mathcal{W} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1 - f \end{pmatrix}, \quad (5.22)$$

con $f_{\mu\nu} = f_{\nu} \delta_{\mu\nu}$ y $f_{\nu}, 1 - f_{\nu}$ los autovalores de ρ^{qsp} (que vienen siempre en pares $(f_{\nu}, 1 - f_{\nu})$, con $f_{\nu} \in [0, 1]$), que implica

$$\langle a_{\nu}^{\dagger} a_{\mu} \rangle = \delta_{\mu\nu} f_{\nu}, \quad \langle a_{\mu} a_{\nu} \rangle = 0. \quad (5.23)$$

Puede mostrarse fácilmente que el mínimo (5.17) es

$$S^{\text{qsp}} = - \sum_{\nu} f_{\nu} \log_2 f_{\nu} + (1 - f_{\nu}) \log_2(1 - f_{\nu}) \quad (5.24)$$

$$= -\text{tr}' \rho^{\text{qsp}} \log_2 \rho^{\text{qsp}}. \quad (5.25)$$

donde tr' denota la traza en el espacio sp extendido.

Demostración: Como ambos, $p_j = \langle c_j^{\dagger} c_j \rangle$ y $1 - p_j$, son los elementos diagonales de ρ^{qsp} , denotando con q_j y λ_{ν} el conjunto completo de elementos diagonales y autovalores de ρ^{qsp} , obtenemos $q_j = \sum_{\nu} |\mathcal{W}_{j\nu}^2| \lambda_{\nu}$ y por lo tanto, de la concavidad de $f(p) = -p \log_2 p$ se sigue que $S_{\mathbf{c}} = \sum_j f(q_j) \geq \sum_{j,\nu} |\mathcal{W}_{j\nu}^2| f(\lambda_{\nu}) = \sum_{\nu} f(\lambda_{\nu}) = S^{\text{qsp}}$. \square

La expresión en (5.25) se anula sii f_{ν} es 0 o 1 para todo ν , es decir, *sii* $|\Psi\rangle$ es un determinante de Slater en una base de partículas o cuasipartículas. Mediante una transformación partícula-hueco podemos siempre transformar tal estado en un vacío de cuasipartículas, de manera que podemos decir que $S^{\text{qsp}} = 0$ sii $|\Psi\rangle$ es un vacío de cuasipartículas. En otras palabras, $S^{\text{qsp}} = 0$ sii existe una base de cuasipartículas en la que *todo* nivel es separable respecto de los demás.

La cantidad (5.17) mide también el grado de mezcla de $|\Psi\rangle$ respecto al conjunto de todos los operadores generalizados de un cuerpo, de la forma

$$O = \sum_{i,j} o_{ij}^{11} c_i^{\dagger} c_j + \frac{1}{2} (o_{ij}^{20} c_i c_j + o_{ij}^{02} c_i^{\dagger} c_j^{\dagger}) - \frac{1}{2} \text{tr} o^{11} \quad (5.26)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{c}^{\dagger} & \mathbf{c} \end{pmatrix} \mathcal{O} \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^{\dagger} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{O} = \begin{pmatrix} o^{11} & o^{02} \\ o^{20} & -(o^{11})^T \end{pmatrix}, \quad (5.27)$$

o sea, funciones cuadráticas generales de \mathbf{c} , \mathbf{c}^{\dagger} (el término constante en (5.26) se agrega solo por conveniencia), pues sus valores medios están completamente determinados por ρ^{qsp} :

$$\langle \Psi | O | \Psi \rangle = \text{tr} [\rho^{\text{sp}} o^{11} - \frac{1}{2} o^{11} + \frac{1}{2} (\kappa o^{20} - \bar{\kappa} o^{02})] = \frac{1}{2} \text{tr}' \rho^{\text{qsp}} \mathcal{O}. \quad (5.28)$$

El presente esquema permite entonces tratar de manera apropiada estados que no tienen un número de partículas definido y conducen a contracciones no nulas $\langle c_i c_j \rangle$. El formalismo completo se vuelve así estrictamente invariante frente a transformaciones partícula-hueco arbitrarias (5.3) aplicadas a algún subconjunto

de modos, las cuales moverán elementos de ρ^{sp} a κ y viceversa, pero no alterarán el espectro de ρ^{qsp} . Esta última permanece de hecho invariante frente a transformaciones unitarias *arbitrarias* de cuasipartículas

$$|\Psi\rangle \rightarrow \exp[-iO]|\Psi\rangle,$$

donde O es un operador generalizado de un cuerpo de la forma (5.26), pues estas llevan a una transformación unitaria de ρ^{qsp} , es decir, $\rho^{\text{qsp}} \rightarrow \mathcal{W}\rho^{\text{qsp}}\mathcal{W}^\dagger$, con $\mathcal{W} = e^{-i\mathcal{O}}$.

Notar que una transformación $a_\nu \leftrightarrow a_\nu^\dagger$ obviamente cambia $f_\nu \leftrightarrow 1 - f_\nu$, de manera que no hay una forma única de seleccionar cuál de los autovalores de ρ^{qsp} será f_ν 's y cuál será $1 - f_\nu$'s. Uno puede elegir los f_ν 's como los menores autovalores (tal que $|\Psi\rangle$ se vuelve un vacío de cuasipartículas cuando $S^{\text{qsp}} = 0$), pero también es posible hacer $\text{Det}[U] \neq 0$, lo que asegura que el vacío de los operadores a_ν tiene la misma paridad que $|0\rangle$ (ecuación (B.1)). Estas elecciones no afectan a la entropía S^{qsp} . Remarcamos también que el estado máximamente entrelazado, es decir, aquel con máxima S^{qsp} , corresponde al caso excepcional $f_\nu = 1/2 \forall \nu$, donde $S^{\text{qsp}} = n$ y $\rho^{\text{qsp}} = I_{2n}/2$ resulta proporcional a la matriz identidad, permaneciendo invariante por lo tanto frente a *cualquier* transformación de Bogoliubov.

5.1.4. Desigualdades entrópicas generalizadas y entropía cuadrática

De las definiciones de las entropías (5.11), (5.16) y (5.25) se sigue que satisfacen la cadena de desigualdades

$$S_c \geq S^{\text{sp}} \geq S^{\text{qsp}}. \quad (5.29)$$

La ecuación (5.29) de hecho vale para formas entrópicas más generales. Si $\tilde{\rho}^{\text{sp}} = \begin{pmatrix} \rho^{\text{sp}} & 0 \\ 0 & 1 - \rho^{\text{sp}} \end{pmatrix}$ es la ρ^{sp} extendida y $\tilde{\rho}_d^{\text{sp}}$ la diagonal de $\tilde{\rho}^{\text{sp}}$ obtenemos, con los argumentos previos,

$$S_f(\tilde{\rho}_d^{\text{sp}}) \geq S_f(\tilde{\rho}^{\text{sp}}) \geq S_f(\rho^{\text{qsp}}), \quad (5.30)$$

donde

$$S_f(\rho) = \text{tr } f(\rho), \quad (5.31)$$

con $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente cóncava que satisface $f(0) = f(1) = 0$, representa una forma entrópica generalizada (ver sección 1.1.3.2). Además, estas matrices verifican la relación de mayorización (ver 1.1.3.1)

$$\tilde{\rho}_d^{\text{SP}} \prec \tilde{\rho}^{\text{SP}} \prec \rho^{\text{qSP}}. \quad (5.32)$$

Recordemos que $\rho \prec \rho'$ significa que $\sum_{i=1}^j \lambda_i \leq \sum_{i=1}^j \lambda'_i$ para $j = 1, \dots, 2n - 1$, con λ_i, λ'_i los autovalores de ρ y ρ' ordenados en orden decreciente. La ecuación (5.32) permite extender (5.30) a cualquier función Schur-cóncava [5] de la matriz densidad extendida.

Un ejemplo particularmente útil, que desempeñará un papel importante en la siguiente sección, es el de la entropía cuadrática (2.28)

$$\begin{aligned} S_2(\rho^{\text{qSP}}) &= 2 \operatorname{tr}' [\rho^{\text{qSP}}(1 - \rho^{\text{qSP}})] \\ &= 4 \operatorname{tr}[\rho^{\text{SP}}(1 - \rho^{\text{SP}}) - \kappa^\dagger \kappa] \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$= 4 \sum_{\nu} f_{\nu}(1 - f_{\nu}), \quad (5.34)$$

donde el factor 2 se elige de manera que su valor máximo para un nivel sea 1. A diferencia de la entropía de von Neumann (5.25), $S_2(\rho^{\text{qSP}})$ puede evaluarse simplemente tomando la traza en (5.33), sin necesidad de conocer explícitamente los autovalores de f_{ν} of ρ^{qSP} . Aún así, como S^{qSP} , es una cantidad no negativa y se anula sii $|\Psi\rangle$ es un vacío de cuasipartículas o determinante de Slater. La ecuación (5.30) implica en particular que $\sum_j p_j(1 - p_j) \geq \sum_k p'_k(1 - p'_k) \geq \sum_{\nu} f_{\nu}(1 - f_{\nu})$.

5.1.5. Estados mixtos

Consideremos estados fermiónicos mixtos, entendiendo a estos como combinaciones convexas (mezclas estadísticas) de estados puros con paridad de número definida, esto es,

$$\rho = \sum_i q_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|, \quad (5.35)$$

donde $q_i \geq 0$, $\sum_i q_i = 1$ y $P|\Psi_i\rangle = \pm|\Psi_i\rangle$, tal que $[\rho, P] = 0$. Podemos definir una medida de entrelazamiento para estos estados mixtos siguiendo la misma idea que dio origen al entrelazamiento de formación [106, 107], haciendo una extensión por

techo convexo de S^{qsp} ,

$$E^{\text{qsp}}(\rho) = \text{Min}_{\{q'_i, |\Psi'_i\rangle\}} \sum_i q'_i S^{\text{qsp}}(|\Psi'_i\rangle), \quad (5.36)$$

donde $\rho = \sum_i q'_i |\Psi'_i\rangle \langle \Psi'_i|$, $q'_i \geq 0$, y la minimización realiza sobre todas las descomposiciones de ρ como combinación convexa de estados puros, asumiendo nuevamente que estos tienen paridad de número definida. La expresión (5.36) se anula *sii* ρ es una combinación convexa de determinantes de Slater en alguna base de partículas o cuasipartículas, y se reduce a S^{qsp} para estados puros. Esta cantidad será evaluada exactamente para un sistema particular en la siguiente sección.

Como aplicación general de E^{qsp} , consideremos un sistema de fermiones interactuantes a temperatura finita T . Para acoplamientos atractivos entre pares, la aproximación de camino estático [108, 109] conducirá a un operador densidad “clásicamente correlacionado” ρ_{SPA} , el cual es una mezcla estadística de estados térmicos de Hamiltonianos fermiónicos de un cuerpo (no necesariamente conmutantes) asociados a distintos valores de los parámetros de orden efectivos. Estos estados no puros serán pues cada uno diagonal en su base de determinantes de Slater (de partículas o cuasipartículas). Por lo tanto, $E^{\text{qsp}}(\rho_{\text{SPA}}) = 0$, en concordancia con el hecho de que ρ_{SPA} contiene solo fluctuaciones estáticas alrededor del campo medio. Tal estado aproximado, correlacionado pero sin entrelazamiento, puede derivarse de la representación de integral de camino [110] y se vuelve exacto a temperatura T suficientemente alta [109]. Que esta aproximación deje de valer a baja temperatura T refleja la aparición del entrelazamiento, es decir, de un valor finito de $E^{\text{qsp}}(\rho)$. La ecuación (5.36) define una temperatura límite de entrelazamiento T_L , tal que $E^{\text{qsp}} = 0$ para toda $T > T_L$.

5.2. El caso de 4 modos

Examinaremos ahora en detalle el caso especial de un sistema de fermiones tal que el espacio sp de estados de una partícula tiene dimensión $n = 4$. Esta es la dimensión más baja en la que se observa entrelazamiento fermiónico, es decir, donde S^{qsp} puede ser no nula, como se va a verificar más adelante. Tales sistemas son físicamente relevantes, pues incluyen el escenario básico de dos fermiones 1/2 en dos sitios diferentes o, más generalmente, estados de fermiones con espín 1/2 ocupando dos orbitales, como en un escenario de “doble pozo”. Extenderemos los

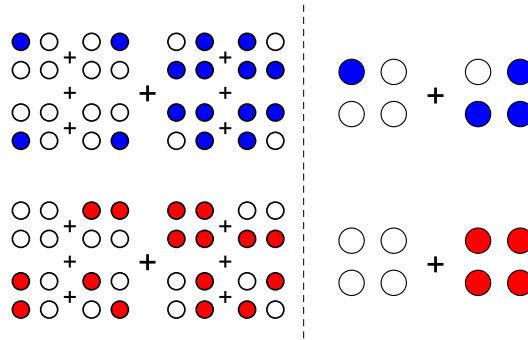


Figura 5.1: Representación esquemática de estados fermiónicos puros con paridad de número impar (arriba) o par (abajo). Un estado general con paridad de número definida es una superposición de los 8 estados indicados a la izquierda de la línea vertical de trazos, donde un disco lleno indica un nivel ocupado. En la forma normal (ρ^{qsp} diagonal), obtenida tras una transformación de Bogoliubov apropiada, esta superposición se reduce a una de solo dos estados, como se indica en la derecha. El estado está entrelazado (en el sentido de no ser un vacío de cuasipartículas o determinante de Slater) sii el producto C (ecuación (5.42)) de los coeficientes de los grupos de 4 estados en la izquierda y la derecha es no nulo, lo que implica un peso no nulo para ambos estados en la representación normal en la derecha del dibujo.

resultados de [89], en los que se consideran solo estados puros o estados mixtos con número de fermiones definido, a estados generales en los que el número de partículas no está necesariamente definido, aunque sí está definida la paridad de número P (ver también [103, 104]). Este espacio sp puede sostener hasta 8 estados puros de la misma paridad y linealmente independientes, de manera que la dimensión del espacio de Hilbert para P fija es 8.

5.2.1. Estados puros

5.2.1.1. Estados impares

Consideramos primero estados puros $|\Psi\rangle$ de este sistema con paridad impar, $P|\Psi\rangle = -|\Psi\rangle$. Estos son entonces combinaciones lineales de estados con un fermión y estados con tres fermiones, de manera que un estado impar general puede escribirse como (figura 5.1, arriba)

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^4 (\alpha_i c_i^\dagger |0\rangle + \bar{\beta}_i c_i |\bar{0}\rangle), \tag{5.37}$$

donde $|\bar{0}\rangle = c_1^\dagger c_2^\dagger c_3^\dagger c_4^\dagger |0\rangle$ es el estado completamente ocupado y $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, con α, β vectores complejos de dimensión 4. Es fácil ver que los estados de un hueco $c_i|\bar{0}\rangle$ son

$$c_i|\bar{0}\rangle = \frac{1}{3!} \sum_{j,k,l} \epsilon_{ijkl} c_j^\dagger c_k^\dagger c_l^\dagger |0\rangle, \quad (5.38)$$

donde ϵ_{ijkl} denota el tensor completamente antisimétrico de Levi-Civita en dimensión 4. Los elementos de la matriz densidad de un cuerpo generalizada (5.20) están dados por

$$\rho_{ij}^{\text{sp}} = \langle c_j^\dagger c_i \rangle = \alpha_i \bar{\alpha}_j - \beta_i \bar{\beta}_j + |\beta|^2 \delta_{ij}, \quad (5.39)$$

$$\kappa_{ij} = \langle c_j c_i \rangle = \sum_{k,l} \epsilon_{ijkl} \bar{\alpha}_l \bar{\beta}_k, \quad (5.40)$$

es decir, $\rho^{\text{sp}} = \alpha\alpha^\dagger - \beta\beta^\dagger + |\beta|^2 I_4$. Mostraremos ahora que los consiguientes autovalores f_ν de la matriz de 8×8 ρ^{qsp} son *cuádruplemente degenerados* y están dados por

$$f_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - C^2(|\Psi\rangle)}}{2}, \quad (5.41)$$

donde $C(|\Psi\rangle)$ está completamente determinada por la entropía S_2 (5.33),

$$\begin{aligned} C(|\Psi\rangle) &= \sqrt{S_2(\rho^{\text{qsp}})/4} = \sqrt{\text{tr}[\rho^{\text{sp}}(I_4 - \rho^{\text{sp}}) - \kappa^\dagger \kappa]} \\ &= 2|\beta^\dagger \alpha| = 2 \left| \sum_{i=1}^4 \bar{\beta}_i \alpha_i \right|, \end{aligned} \quad (5.42)$$

y desempeña un papel análogo al de la concurrencia para estados puros fermiónicos. Satisface $0 \leq C \leq 1$, y como veremos en la próxima subsección, es una generalización de la medida de correlación de Slater introducida en [89, 91] para estados de dos fermiones. Coincide también con el invariante cuadrático derivado en [104] usando una clasificación de espinores. La entropía de entrelazamiento (5.24) resulta

$$S^{\text{qsp}} = 4h(f_+) = -4(f_+ \log_2 f_+ + f_- \log_2 f_-). \quad (5.43)$$

Demostración: Consideramos primero una transformación unitaria $\mathbf{c} \rightarrow U\mathbf{c}$ de los operadores c_j , tal que

$$\alpha \rightarrow U^\dagger \alpha, \quad \beta \rightarrow \text{Det}[U^\dagger] U^\dagger \beta, \quad (5.44)$$

en (5.37), la cual no afecta el valor de $C(|\Psi\rangle)$ (ecuación (5.42)). Eligiendo una base ortonormal de \mathbb{C}^4 tal que los vectores originales α y β están generados por los primeros dos elementos (por ejemplo, $e_1 \propto \alpha$ y $e_2 \propto \beta - (\alpha^\dagger \beta)\alpha/|\alpha|^2$), podemos usar esta primera transformación para fijar $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$, $\beta_3 = \beta_4 = 0$ en la nueva base. En este caso, las ecuaciones (5.39)–(5.40) conducen a

$$\rho^{\text{sp}} = \begin{pmatrix} |\alpha_1|^2 + |\beta_2|^2 & \alpha_1 \bar{\alpha}_2 - \beta_1 \bar{\beta}_2 & 0 & 0 \\ \alpha_2 \bar{\alpha}_1 - \beta_2 \bar{\beta}_1 & |\alpha_2|^2 + |\beta_1|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\beta|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\beta|^2 \end{pmatrix}, \quad (5.45)$$

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_1 - \bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_2 \\ 0 & 0 & \bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_2 - \bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.46)$$

Se observa que la diagonalización de ρ^{qsp} se logra mediante i) una transformación unitaria de los operadores c_1, c_2 ,

$$c_1 = ua_1 + va_2, \quad c_2 = -\bar{v}a_1 + ua_2, \quad (5.47)$$

con $\frac{u}{|v|} = \sqrt{\frac{f_+ - f_- \pm 2\epsilon}{2(f_+ - f_-)}}$ y $\epsilon = |\alpha_1^2| + |\beta_2^2| - \frac{1}{2}$, que diagonaliza el primer bloque de 2×2 de ρ^{sp} y $1 - \bar{\rho}^{\text{sp}}$, seguida de ii) una transformación de Bogoliubov de los operadores c_3, c_4 ,

$$c_3 = u'a_3 + v'a_4^\dagger, \quad c_4^\dagger = -\bar{v}'a_3 + u'a_4^\dagger, \quad (5.48)$$

con $\frac{u'}{|v'|} = \sqrt{\frac{f_+ - f_- \pm 2\epsilon'}{2(f_+ - f_-)}}$ y $\epsilon' = |\beta|^2 - \frac{1}{2}$, la cual diagonaliza el resto de ρ^{qsp} , abarcando nuevamente dos bloques de 2×2 ($\frac{|\beta|^2 \pm \kappa_{34}}{\pm \bar{\kappa}_{34} |\alpha|^2}$). Estos cuatro bloques de 2×2 tienen todos traza 1 y determinante $C^2(|\Psi\rangle)/4$, lo que lleva entonces a *los mismos* autovalores f_\pm de la ecuación (5.41) (una matriz de 2×2 con traza t y determinante d tiene autovalores $\frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4d}}{2}$). \square

Notar de (5.46) que si ρ^{qsp} es diagonal (ρ^{sp} diagonal y $\kappa = 0$) y $C(|\Psi\rangle) < 1$, entonces necesariamente $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ o $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ en (5.46). Esto implica que tras las previas transformaciones, $|\Psi\rangle$ puede escribirse en la forma normal

(esquema superior derecho en la figura 5.1)

$$|\Psi\rangle = \alpha' a_1^\dagger |0_{\mathbf{a}}\rangle + \bar{\beta}' a_1 |\bar{0}_{\mathbf{a}}\rangle, \quad (5.49)$$

esto es, $\beta' \propto \alpha'$, con $|0_{\mathbf{a}}\rangle$ el vacío de los operadores \mathbf{a} , $|\bar{0}_{\mathbf{a}}\rangle = a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger a_4^\dagger |0_{\mathbf{a}}\rangle$, y $|\alpha'|^2 = f_+$, $|\beta'|^2 = f_-$ if $|\alpha'| \geq |\beta'|$, de manera que $C(|\Psi\rangle) = 2|\alpha'\bar{\beta}'|$. Este estado conduce a

$$\rho_a^{\text{qsp}} = 1 - \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^\dagger & \mathbf{a} \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} |\alpha'|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\beta'|^2 I_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\beta'|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\alpha'|^2 I_3 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, en el caso máximamente mezclado $C(|\Psi\rangle) = 1$, $f_{\pm} = 1/2$ y $\rho^{\text{qsp}} = I_8/2$ en *cualquier* base, esto es, tras *cualquier* transformación de Bogoliubov. En este caso $\beta = e^{i\phi}\alpha$, con $|\alpha| = |\beta| = 1/\sqrt{2}$, y la forma (5.49) se obtiene simplemente eligiendo \mathbf{e}_1 en la dirección de α .

Resulta evidente que si $\beta = \mathbf{0}$ in (5.37), $|\Psi\rangle$ puede escribirse como un estado de un único fermión $a_1^\dagger |0\rangle$, donde $a_1^\dagger = \sum_i \alpha_i c_i^\dagger$. Similarmente, si $\alpha = \mathbf{0}$ $|\Psi\rangle$ puede escribirse como un estado de un único hueco $a_1 |\bar{0}\rangle$, con $a_1 = \sum_i \bar{\beta}_i c_i$. Como se espera, $C(|\Psi\rangle) = 0$ en estos dos casos. Que $C(|\Psi\rangle)$ se anule para α y β no nulos pero *ortogonales* (ecuación (5.42)) generaliza el resultado previo, mostrando que en este caso $|\Psi\rangle$ puede aún escribirse como un estado de una sola cuasipartícula ($\beta' = 0$) o un solo cuasihueco ($\alpha' = 0$) tras una transformación de Bogoliubov apropiada sobre los operadores originales. Esto incluye el caso de tres modos donde, por ejemplo, el cuarto modo está vacío, lo que implica $\alpha_4 = 0$ y $\beta_i = 0$ para $i = 1, 2, 3$ y conduce necesariamente a $\beta^\dagger \alpha = 0$.

Mencionamos también que los cuatro autovalores de ρ^{sp} en la ecuación (5.45) son f_{\pm} y $|\beta|^2$, doblemente degenerados. Como $C(|\Psi\rangle) \leq 2|\alpha||\beta|$, resulta

$$f_+ \geq \frac{1 + \sqrt{1 - 4|\alpha|^2|\beta|^2}}{2} = \text{Max}[|\alpha|^2, |\beta|^2],$$

verificándose entonces que los autovalores de ρ^{sp} son mayorizados por aquellos de ρ^{qsp} , y por lo tanto que

$$S^{\text{sp}} \geq S^{\text{qsp}}, S_2^{\text{sp}} \geq S_2^{\text{qsp}} = 4C^2(|\Psi\rangle).$$

Dualización. Las ecuaciones (5.37) y (5.42) indican que el estado $c_i|\bar{0}\rangle$ desempeña el papel de “compañero” o dual del estado $c_i^\dagger|0\rangle$. Podemos obtener el estado dual aplicando el operador hermítico

$$T = -\frac{1}{3!} \sum_{i,j,k,l} \varepsilon_{ijkl} [c_i^\dagger c_j^\dagger c_k^\dagger c_l + c_i^\dagger c_j c_k c_l] \quad (5.50)$$

de manera que para $i = 1, \dots, 4$, $Tc_i^\dagger|0\rangle = c_i|\bar{0}\rangle$, $Tc_i|\bar{0}\rangle = c_i^\dagger|0\rangle$. Podemos entonces expresar (5.42) como

$$C(|\Psi\rangle) = |\langle \tilde{\Psi} | \Psi \rangle|, \quad |\tilde{\Psi}\rangle = T|\Psi\rangle^* \quad (5.51)$$

donde $|\Psi\rangle^* = \sum_j \bar{\alpha}_j c_j^\dagger|0\rangle + \beta_j c_j|\bar{0}\rangle$ denota conjugación compleja en esta base. Notar que la matriz de 8×8 que representa a T en la base $(c_1^\dagger|0\rangle, \dots, c_4^\dagger|0\rangle, c_1|\bar{0}\rangle, \dots, c_4|\bar{0}\rangle)$ es simplemente

$$T = \begin{pmatrix} 0 & I_4 \\ I_4 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.52)$$

Una generalización de (5.50) a dimensiones superiores se considera en [104].

5.2.1.2. Estados pares

Consideramos ahora estados puros de paridad de número par, $P|\Psi\rangle = |\Psi\rangle$. Estos pueden escribirse siempre como combinación lineal de los ocho estados que se muestran en la parte inferior de la figura 5.1: el vacío $|0\rangle$, seis estados de dos fermiones y el estado totalmente ocupado $|\bar{0}\rangle = c_1^\dagger c_2^\dagger c_3^\dagger c_4^\dagger|0\rangle$. Un estado par general es entonces de la forma

$$|\Psi\rangle = \alpha_1|0\rangle - \bar{\beta}_1|\bar{0}\rangle + \sum_{j=2}^4 \alpha_j c_j^\dagger c_1^\dagger|0\rangle + \bar{\beta}_j c_1 c_j|\bar{0}\rangle, \quad (5.53)$$

y puede obtenerse de aquel en (5.37) tras la transformación elemental de Bogoliubov $c_1^\dagger \leftrightarrow c_1$ y $|0\rangle \leftrightarrow c_1^\dagger|0\rangle$ (que implica $|\bar{0}\rangle \leftrightarrow -c_1|\bar{0}\rangle$). Notar que

$$c_1 c_j|\bar{0}\rangle = \frac{1}{2!} \sum_{k,l} \varepsilon_{1kjl} c_k^\dagger c_l^\dagger|0\rangle. \quad (5.54)$$

Los autovalores de ρ^{qsp} , para el estado (5.53), están dados nuevamente por las ecuaciones (5.41) y (5.42), y la entropía de entrelazamiento S^{qsp} por la expresión

(5.43). Vale notar, sin embargo, el signo negativo en el término asociado a $\bar{\beta}_1$. La expresión (5.42) se reduce a aquella de [89] en el caso de estados de dos fermiones ($\alpha_1 = \beta_1 = 0$).

El estado (5.53) es entonces un determinante de Slater o vacío de cuasipartículas si $C(|\Psi\rangle) = 0$. Como comprobación, el vacío de cuasipartículas (B.1) (ver apéndice B.1) corresponde en el presente caso a

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha} &\propto (1, T_{21}, T_{31}, T_{41}), \\ \bar{\boldsymbol{\beta}} &\propto (-T_{21}T_{43} - T_{31}T_{24} - T_{41}T_{32}, T_{43}, T_{24}, T_{32}),\end{aligned}\quad (5.55)$$

verificándose que $\sum_{i=1}^4 \bar{\beta}_i \alpha_i = 0$. Se observa también que en el caso de tres modos (es decir, el modo 4 vacío, lo que implica $\alpha_4 = 0$ y $\beta_j = 0$ para $j = 1, 2, 3$) $C(|\Psi\rangle)$ es siempre cero.

La forma normal (5.49) pasa a ser en este caso

$$|\Psi\rangle = \alpha' |0_{\mathbf{a}}\rangle - \bar{\beta}' |\bar{0}_{\mathbf{a}}\rangle, \quad (5.56)$$

es decir, *una superposición del vacío y el estado completamente ocupado* (esquema inferior derecho de la figura 5.1) para los operadores de cuasipartículas diagonalizantes. Por supuesto, tras una transformación partícula-hueco trivial $a_j \leftrightarrow a_j^\dagger$, $j = 1, 2$, podemos reescribir (5.56) como una suma de dos estados de dos fermiones,

$$|\Psi\rangle = \alpha' a_2^\dagger a_1^\dagger |0_{\mathbf{a}}\rangle + \bar{\beta}' a_4^\dagger a_3^\dagger |0_{\mathbf{a}}\rangle, \quad (5.57)$$

extendiendo así los resultados de [89], válidos para estados de dos fermiones, a *estados arbitrarios de paridad definida*.

El operador de dualización (5.50) toma ahora la forma

$$T = -c_1^\dagger c_2^\dagger c_3^\dagger c_4^\dagger - c_4 c_2 c_3 c_1 - \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l} \epsilon_{ijkl} c_i^\dagger c_j^\dagger c_k c_l, \quad (5.58)$$

que satisface

$$T|0\rangle = -|\bar{0}\rangle, \quad T|\bar{0}\rangle = -|0\rangle, \quad Tc_i^\dagger c_j^\dagger |0\rangle = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \epsilon_{ijkl} c_k^\dagger c_l^\dagger |0\rangle,$$

es decir, $Tc_i^\dagger c_1^\dagger |0\rangle = c_1 c_i |\bar{0}\rangle$, $Tc_1 c_i |\bar{0}\rangle = c_i^\dagger c_1^\dagger |0\rangle$. Está representado en la base especial $\{|0\rangle, c_2^\dagger c_1^\dagger |0\rangle, c_3^\dagger c_1^\dagger |0\rangle, c_4^\dagger c_1^\dagger |0\rangle, -|\bar{0}\rangle, c_4^\dagger c_3^\dagger |0\rangle, c_2^\dagger c_4^\dagger |0\rangle, c_3^\dagger c_2^\dagger |0\rangle\}$ por *la misma*

matriz (5.52), por lo que podemos escribir nuevamente a $C(|\Psi\rangle)$ en la forma (5.51). Si $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, la consiguiente expresión se reduce a aquella de [89].

Los estados de dos fermiones considerados en [89, 91] son solo un caso particular de los estados pares más generales (5.53). Para estados de dos fermiones las contracciones $\langle c_i c_j \rangle$ obviamente se anulan ($\kappa = 0$), y los autovalores f_ν de la matriz de un cuerpo generalizada ρ^{qsp} se reducen a aquellos de la matriz densidad de un cuerpo ρ^{sp} , resultando entonces $S^{\text{sp}} = S^{\text{qsp}}$.

5.2.2. Evaluación analítica de la concurrencia en estados mixtos

Para estados mixtos la concurrencia fermiónica puede definirse como el techo convexo de (5.42), como se propone en [89] para el caso de estados de dos fermiones. Extenderemos aquí dicha definición a estados completamente generales, derivando una expresión analítica para la concurrencia.

Sea

$$\rho = \sum_k \lambda_k |\Psi_k\rangle \langle \Psi_k| \quad (5.59)$$

un estado mixto con autovectores $|\Psi_k\rangle$ y autovalores λ_k , donde $k = 1 \dots, r$, siendo $r \leq 8$ el rango de ρ . Asumimos que todos los estados $|\Psi_k\rangle$ tienen la misma paridad, de manera que son de la forma (5.37) o (5.53), esto es, $|\Psi_k\rangle = \sum_{i=1}^4 \alpha_{ki} c_i^\dagger |0\rangle + \bar{\beta}_{ki} c_i |\bar{0}\rangle$ en el caso impar y de la forma (5.53) en el caso par, por lo que $r \leq 8$. Cualquier descomposición $\rho = \sum_{j=1}^{r'} p_j |\Phi_j\rangle \langle \Phi_j|$ puede obtenerse a partir de estos autovectores mediante una matrix U de $r' \times r$ con columnas ortonormales ($U^\dagger U = I_r$), tal que $\sqrt{p_j} |\Phi_j\rangle = \sum_{k=1}^r U_{jk} \sqrt{\lambda_k} |\Psi_k\rangle$. Notar que los estados $|\Phi_j\rangle$ están normalizados, de manera que $p_j = \sum_{k=1}^r \lambda_k |U_{jk}|^2$.

La concurrencia fermiónica promedio de tal descomposición es

$$\begin{aligned} \langle C(\{p_j, |\Phi_j\rangle\}) \rangle &= \sum_j p_j C(|\Phi_j\rangle) = \sum_j p_j |\langle \tilde{\Phi}_j | \Phi_j \rangle| \\ &= \sum_j \left| \sum_{k,l} U_{jk} U_{jl} \sqrt{\lambda_k \lambda_l} \langle \tilde{\Psi}_k | \Psi_l \rangle \right|, \end{aligned} \quad (5.60)$$

anulándose sii $C(|\phi_j\rangle) = 0 \forall j$, es decir, sii ρ puede escribirse como combinación convexa de determinantes de Slater con la misma paridad de número. La matriz

C , de elementos

$$C_{kl} = \sqrt{\lambda_k \lambda_l} \langle \tilde{\Psi}_k | \Psi_l \rangle = \sqrt{\lambda_k \lambda_l} (\beta_l^\dagger \alpha_k + \beta_k^\dagger \alpha_l), \quad (5.61)$$

es compleja y simétrica. Admite entonces una descomposición de la forma [89] $C = VDV^T$, donde V es una matriz unitaria y D es una matriz real y diagonal cuyos elementos no nulos $d_k \geq 0$ son las raíces cuadradas de los autovalores de $CC^\dagger = C\bar{C}$, en orden *decreciente*. Definiendo $S = UV$, la ecuación (5.60) toma entonces la forma

$$\langle C(\{p_j, |\Phi_j\rangle\}) \rangle = \sum_j \left| \sum_k S_{jk}^2 d_k \right|. \quad (5.62)$$

Como $\sum_j \left| \sum_k S_{jk}^2 d_k \right| \geq \sum_j (d_1 |S_{j1}^2| - \sum_{k \geq 2} |S_{jk}^2| d_k) = d_1 - \sum_{k \geq 2} d_k$, una condición necesaria para la separabilidad de ρ , es decir, para $C(|\phi_j\rangle) = 0 \forall j$, es

$$d_1 \leq \sum_{k \geq 2} d_k. \quad (5.63)$$

Como sucede en el caso de estados de dos fermiones, vamos a mostrar ahora -siguiendo el esquema de [89] para estados de dos fermiones- que esta es también *una condición suficiente para la separabilidad*.

Demostración: Efectivamente, de (5.62) se sigue que ρ es separable sii existe una matriz S con columnas ortonormales tal que para todo j se cumple

$$\left| \sum_{k=1}^r d_k S_{jk}^2 \right| = 0. \quad (5.64)$$

Ahora, si se satisface la condición (5.63), siempre existen fases θ_k , $k = 2, \dots, r$, tales que $d_1 = \left| \sum_{k=2}^r d_k e^{i\theta_k} \right|$. Entonces una matriz con elementos $S_{jk} = \frac{e^{i(\theta_k + \mu_{jk}\pi)}}{\sqrt{r'}}$, donde $\mu_{jk} = 0, 1$ y $\theta_1 = 0$, dará la descomposición deseada si los signos $e^{i\mu_{jk}\pi}$ pueden arreglarse de manera que la condición $S^\dagger S = I_r$ se satisfaga. Esto puede asegurarse tomando $r' = 2$ si $r = 2$, $r' = 4$ si $r = 3, 4$ [89] y $r' = 8$ si $5 \leq r \leq 8$, donde podemos definir $\mu_{j1} = 0 \forall j$ y $(\mu_{1k}, \dots, \mu_{8k})$ como $(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$, $(0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1)$, $(0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$, $(0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1)$ para $k = 2, \dots, 8$. Esto completa la prueba. \square

Por otra parte, si la condición (5.63) no se satisface el valor medio (5.62) no puede ser menor que $d_1 - \sum_{k=2}^r d_k$. Esta cota inferior puede alcanzarse con

la misma construcción de arriba, eligiendo $\theta_k = \pi/2$ para $k \geq 2$. Entonces, la descomposición minimizante es aquella en la que todos los componentes tienen la misma concurrencia, que coincide por lo tanto con la concurrencia de la mezcla ρ ,

$$C(\rho) = \text{Min}_{\{p_j, |\Phi_j\rangle\}} \sum_j p_j C(|\Phi_j\rangle) = \text{Max}[d_1 - \sum_{k=2}^r d_k, 0]. \quad (5.65)$$

Usando la matriz de dualización (5.52) podemos también obtener los autovalores d_k como aquellos de

$$R = \sqrt{\rho^{1/2} T \rho^* T \rho^{1/2}}, \quad (5.66)$$

donde ρ^* denota conjugación en la base donde T toma la forma (5.52). Las expresiones (5.65) y (5.66) permiten así una evaluación analítica de la concurrencia en estados mixtos generales de paridad definida en espacios sp de dimensión 4.

Una vez obtenida C , podemos evaluar el techo convexo (5.36) de S^{qsp} como

$$E^{\text{qsp}}(\rho) = 4h\left(\frac{1+\sqrt{1-C^2(\rho)}}{2}\right), \quad (5.67)$$

de la misma forma que en el caso de dos qubits [23], pues para estados puros tenemos análogamente $S^{\text{qsp}} = 4h\left(\frac{1+\sqrt{1-C^2(|\Psi\rangle)}}{2}\right)$ (ecuación (5.43)), que es una función creciente y convexa de $C(|\Psi\rangle)$. La cantidad $\frac{1+\sqrt{1-C^2(\rho)}}{2}$ es también la fidelidad máxima entre ρ y una mezcla convexa de estados gaussianos, como se muestra en [103] con un tratamiento diferente basado en métodos de teoría de grupos.

Un estado mezcla general ρ que satisfaga $[\rho, P] = 0$ será una mezcla convexa de estados con paridad par o impar. Tal estado puede escribirse como mezcla convexa de una parte par y otra impar, esto es,

$$\rho = p_+ \rho_+ + p_- \rho_-, \quad (5.68)$$

donde $\rho_{\pm} = \frac{1}{2p_{\pm}}(1 \pm P)\rho$ son las componentes par e impar de ρ y $p_{\pm} = \text{Tr} \rho(1 \pm P)/2$ las correspondientes probabilidades. Como consideramos solamente estados puros con paridad de número definida, para estados mixtos generales (5.68) podemos tomar simplemente $E^{\text{qsp}}(\rho) = p_+ E^{\text{qsp}}(\rho_+) + p_- E^{\text{qsp}}(\rho_-)$, con $E^{\text{qsp}}(\rho_{\pm})$ evaluado con las expresiones en (5.65) y (5.67).

Mezcla de un estado puro con un estado máximamente mezclado

Para ilustrar estos resultados, consideremos una mezcla de paridad definida del estado máximamente entrelazado $|\Psi\rangle$ ($C(|\Psi\rangle) = 1$) con aquel máximamente mezclado,

$$\rho = p|\Psi\rangle\langle\Psi| + (1-p)I_8/8, \quad (5.69)$$

donde $0 \leq p \leq 1$. En el caso de paridad impar, $|\Psi\rangle$ puede escribirse en la forma

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1^\dagger|0\rangle + c_1|\bar{0}\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1^\dagger + c_2^\dagger c_3^\dagger c_4^\dagger)|0\rangle, \quad (5.70)$$

mientras en el caso par podemos tomar $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |\bar{0}\rangle)$ o $\frac{1}{\sqrt{2}}(c_1^\dagger c_2^\dagger + c_3^\dagger c_4^\dagger)|0\rangle$. El cálculo directo usando (5.65) conduce a

$$C(\rho) = \text{Max}\left[\frac{7p-3}{4}, 0\right], \quad (5.71)$$

lo que indica que hay entrelazamiento para $p > 3/7$, esto es, $q > 1/2$, donde $q = \langle\Psi|\rho|\Psi\rangle = p + (1-p)/8$ es el peso total de $|\Psi\rangle$. Un cálculo similar pero considerando solo estados de dos fermiones, $\rho_2 = p|\Psi\rangle\langle\Psi| + (1-p)I_6/6$, lleva por otro lado a $C(\rho_2) = \text{Max}\left[\frac{5p-2}{3}, 0\right]$, lo que implica que hay entrelazamiento por sobre un valor ligeramente menor de p ($p > 2/5$, implicando nuevamente $q = p + (1-p)/6 > 1/2$), con $C(\rho_2) > C(\rho)$ para $p \in (2/5, 1)$. Como en el caso de dos qubits, la existencia de un valor umbral de p para C no nula y por lo tanto también E^{qsp} no nula, implica una temperatura límite finita para la aparición de entrelazamiento T_L si ρ representa un estado térmico $(\frac{q}{(1-p)/8} \propto e^{-\beta(E_0-E_1)})$, con E_0 la energía de $|\Psi\rangle$ y $E_1 > E_0$ aquella de los 7 niveles restantes), la cual es mayor en el segundo caso.

Capítulo 6

Entrelazamiento bipartito en sistemas de fermiones

En el capítulo anterior introdujimos una medida entrópica de entrelazamiento entre modos fermiónicos y mostramos que su mínimo sobre todas las bases del espacio de Hilbert de una partícula resulta en una medida de entrelazamiento entre partículas. Más aún, cuando dicho espacio de estados tiene dimensión 4 esta medida de entrelazamiento es función de una cantidad completamente análoga a la concurrencia de Wootters. En el caso particular de estados de 2 fermiones esta “concurrencia fermiónica” se reduce a la *medida de correlación de Slater* [89]. En este capítulo retomamos el estudio de esta medida y su conexión con la entropía de entrelazamiento estándar en un sistema de componentes distinguibles.

Comenzamos analizando un sistema de dos qubits fermionicos distinguibles, como puede ser aquel constituido por un par de partículas de espín $1/2$ localizadas en sitios diferentes. El espacio de Hilbert de una partícula (sp) \mathcal{H} para este sistema tiene dimensión 4, correspondiéndole aquellos estados con paridad local fija respecto a una bipartición adecuada de \mathcal{H} . Para un estado puro general de tal sistema mostramos que la concurrencia de Wootters es *idéntica* a la concurrencia fermiónica definida en la sección 5.2.1. Luego mostramos que tal correspondencia puede extenderse a estados puros generales de un sistema fermiónico con $\dim \mathcal{H} = 4$, es decir, que dado un estado puro arbitrario de tal sistema siempre es posible encontrar una bipartición de \mathcal{H} en la que este puede verse como un estado de dos qubits distinguibles, cuya concurrencia es nuevamente idéntica a la concurrencia fermiónica. La entropía de entrelazamiento de un cuerpo cuantifica entonces, en este caso, el entrelazamiento entre dos qubits. Por otra parte, para

biparticiones arbitrarias que involucran paridades locales no fijas mostramos que el entrelazamiento fermiónico provee una cota inferior al entrelazamiento bipartito asociado. Aplicamos luego estos resultados a mostrar que cualquier circuito basado en qubits puede reescribirse como un circuito basado en modos fermiónicos si se impone la adecuada restricción al número de ocupación de estos últimos, recuperando el caso de computación clásica reversible en el caso en que los estados a la entrada del circuito sean determinantes de Slater (en la base de interés). Naturalmente emergen dos tipos de representación fermiónica de qubits, distinguidas por la paridad local. Finalmente mostramos que si la restricción al número de ocupación se relaja, mientras se preserve la paridad del estado global, es posible lograr una mejor performance en el protocolo de codificación superdensa, en comparación con el protocolo estándar basado en qubits.

Este capítulo está basado en los resultados publicados en [113].

6.1. Entrelazamiento fermiónico y entrelazamiento bipartito

6.1.1. Entrelazamiento bipartito como entrelazamiento entre dos fermiones

Consideremos un sistema de dos qubits distinguibles preparados en un estado puro $\alpha_+|00\rangle + \alpha_-|11\rangle$, es decir,

$$|\psi\rangle_{AB} = \alpha_+|\uparrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B + \alpha_-|\downarrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B, \quad (6.1)$$

donde $|\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2 = 1$ y la notación indica una posible realización en términos de dos partículas de espín 1/2 localizadas en sitios diferentes A y B , con sus espines alineados paralelos o antiparalelos a un eje dado (z). Podemos considerar este último estado como uno de dos fermiones con espín 1/2, con espacio de Hilbert de una partícula $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_O$:

$$|\psi\rangle_f = (\alpha_+c_{A\uparrow}^\dagger c_{B\uparrow}^\dagger + \alpha_-c_{A\downarrow}^\dagger c_{B\downarrow}^\dagger)|0\rangle, \quad (6.2)$$

con $|0\rangle$ el vacío fermiónico. Una medida del espín “ A ” o “ B ” en la dirección z puede describirse en la representación fermiónica mediante los operadores $\Pi_{S\mu} =$

$c_{S\mu}^\dagger c_{S\mu}$, $S = A, B$, $\mu = \uparrow, \downarrow$, que satisfacen $\Pi_{S\mu}^2 = \Pi_{S\mu}$ y $[\Pi_{S\mu}, \Pi_{S'\mu'}] = 0$, con $\sum_\mu \Pi_{S\mu} |\psi\rangle_f = |\psi\rangle_f$. Además, podemos describir cualquier operador “local” en A o B en términos de operadores de Pauli si definimos, para $S = A, B$,

$$\sigma_{Sx} = c_{S\uparrow}^\dagger c_{S\downarrow} + c_{S\downarrow}^\dagger c_{S\uparrow}, \quad (6.3a)$$

$$\sigma_{Sy} = -i(c_{S\uparrow}^\dagger c_{S\downarrow} - c_{S\downarrow}^\dagger c_{S\uparrow}), \quad (6.3b)$$

$$\sigma_{Sz} = c_{S\uparrow}^\dagger c_{S\uparrow} - c_{S\downarrow}^\dagger c_{S\downarrow}, \quad (6.3c)$$

que verifican las relaciones de conmutación usuales $[\sigma_{Sj}, \sigma_{S'k}] = 2i\delta_{SS'}\epsilon_{jkl}$, (ϵ_{jkl} es el tensor completamente antisimétrico en dimensión 3), con $\sigma_{Sj}^2 |\psi\rangle_f = |\psi\rangle_f$.

También resulta evidente que el estado (6.1) es separable si $\alpha_+ = 0$ o $\alpha_- = 0$, que es precisamente la condición que asegura que el estado (6.2) es un determinante de Slater. Además, la concurrencia estándar (1.42) del estado (6.1) es idéntica a la concurrencia fermiónica (5.42) del estado (6.2):

$$C(|\psi\rangle_{AB}) = 2|\alpha_+\alpha_-| = C(|\psi\rangle_f), \quad (6.4)$$

con $f_\pm = |\alpha_\pm^2|$ in (5.41). Efectivamente, escribiendo un estado de paridad par como

$$|\psi\rangle_f = (\alpha_0 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \alpha_{ij} c_i^\dagger c_j^\dagger + \alpha_4 c_1^\dagger c_2^\dagger c_3^\dagger c_4^\dagger) |0\rangle, \quad (6.5)$$

donde $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$, $i, j = 1, \dots, 4$ y $|\alpha_0^2| + |\alpha_4^2| + \frac{1}{2}\text{tr} \alpha^\dagger \alpha = 1$, resulta $\rho^{\text{sp}} = \alpha \alpha^\dagger + |\alpha_4|^2 \mathbb{1}$, $\kappa = \alpha_0^* \alpha + \alpha_4 \tilde{\alpha}^*$, con $\tilde{\alpha}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \epsilon_{ijkl} \alpha_{kl}$, de donde se sigue que la expresión (5.42) se convierte explícitamente en

$$C(|\psi\rangle) = 2|\alpha_{12}\alpha_{34} - \alpha_{13}\alpha_{24} + \alpha_{14}\alpha_{23} - \alpha_0\alpha_4|, \quad (6.6)$$

que implica entonces la igualdad en (6.4). Los estados entrelazados de dos qubits (6.1) corresponden así a estados de dos fermiones (6.2) que no son determinantes de Slater, y viceversa.

Tal correspondencia permanece, por supuesto, válida para cualquier estado bipartito de dos qubits

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{\mu,\nu} \alpha_{\mu\nu} |\mu\rangle_A \otimes |\nu\rangle_B, \quad (6.7)$$

el cual en la representación fermiónica resulta

$$|\psi\rangle_f = \sum_{\mu,\nu} \alpha_{\mu\nu} c_{A\mu}^\dagger c_{B\nu}^\dagger |0\rangle. \quad (6.8)$$

Obtenemos ahora $C(|\psi\rangle_{AB}) = 2|\det \alpha| = C(|\psi\rangle_f)$, en acuerdo con las expresiones fermiónicas estándar. Estos estados pueden, de hecho, llevarse a sus formas de Schmidt (6.1)-(6.2) (con $|\alpha_\pm|$ los valores singulares de la matriz α) mediante operaciones unitarias locales, que en la representación fermiónica resultan $c_{S\mu} \rightarrow \sum_\nu \bar{U}_{\nu\mu}^S c_{S\nu}$.

Las consideraciones previas se mantienen válidas también para estados bipartitos *generales* de sistemas de dimensión *arbitraria* ($\mu = 1, \dots, d_A$, $\nu = 1, \dots, d_B$ en (6.7)-(6.8)), si el espacio sp del sistema fermiónico asociado (de dimensión $d_A + d_B$) se descompone como $\mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B$. La matriz densidad de un cuerpo ρ^{sp} derivada del estado (6.8) toma en el caso general la forma bloqueada

$$\rho^{\text{sp}} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha^\dagger & 0 \\ 0 & \alpha^T\bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_A & 0 \\ 0 & \rho_B \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

esto es, $\langle c_{S\nu}^\dagger c_{S'\mu} \rangle = \delta_{SS'} (\rho_S)_{\mu\nu}$, donde las submatrices $\rho_{A(B)}$ son los estados locales reducidos del estado (6.7) en la base estándar. Por lo tanto, en el formalismo fermiónico ρ^{sp} contiene la información de *ambos* estados locales y su diagonalización implica la de *ambos* ρ_A y ρ_B . Sus autovalores estarán dados entonces por los de estas matrices, siendo por lo tanto doblemente degenerados e iguales a los cuadrados de los valores singulares de la matriz α (resultando $f_\pm = |\alpha_\pm|^2$ en el caso de dos qubits). En el caso general la entropía de entrelazamiento del estado (6.7) puede entonces escribirse como

$$E(A.B) = S(\rho_A) = S(\rho_B) = \frac{1}{2}S(\rho^{\text{sp}}), \quad (6.10)$$

igualdad que vale tanto para la entropía de von Neumann $S(\rho) = -\text{Tr} \rho \log_2 \rho$ como para cualquier entropía tipo traza $S(\rho) = \text{Tr} f(\rho)$ (1.33). Así, la entropía de entrelazamiento del estado general bipartito (6.7) es proporcional a la entropía de entrelazamiento fermiónica (5.16) del estado asociado (6.8). Por lo tanto, para cualquier dimensión hay una correspondencia exacta entre estados bipartitos (6.7) y estados de dos fermiones (6.8), con operadores locales representados por combinaciones lineales de operadores fermiónicos locales de un cuerpo $c_{S\nu}^\dagger c_{S\mu}$ (que

satisfacen $[c_{A\mu}^\dagger c_{A\nu}, c_{B\mu'}^\dagger c_{B\nu'}] = 0$ y $|\psi\rangle_{AB}$ entrelazado sii $|\psi\rangle_f$ no puede escribirse como un determinante de Slater.

Esta equivalencia se mantiene también para estados mixtos, esto es, combinaciones convexas de estados (6.7) y (6.8). Los estados bipartitos serán separables, es decir, de la forma (1.35), sii el estado mixto fermiónico asociado puede escribirse como una combinación convexa de determinantes de Slater de la forma (6.8). En particular, para estados de dos qubits es suficiente un espacio fermiónico sp de dimensión cuatro y la concurrencia estándar del estado mixto coincidirá exactamente con su contraparte correspondiente al estado fermiónico mixto (6.8) [81, 89, 103, 104].

6.1.2. Entrelazamiento bipartito como entrelazamiento fermiónico de cuasipartículas

Otras representaciones fermiónicas del estado (6.7) con propiedades similares son también factibles. Por ejemplo, en el caso de dos qubits podemos hacer una transformación partícula-hueco de los operadores fermiónicos con espín hacia abajo,

$$c_{S\uparrow}^\dagger \longrightarrow c_{S\uparrow}^\dagger, \quad c_{S\downarrow}^\dagger \longrightarrow c_{S\downarrow}, \quad S = A, B \quad (6.11)$$

de manera que el estado alineado $|\downarrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B$ corresponde ahora al vacío de los nuevos operadores ($|0\rangle \longrightarrow c_{A\downarrow}^\dagger c_{B\downarrow}^\dagger |0\rangle$), con el nuevo operador $c_{S\downarrow}^\dagger$ creando un hueco. Los estados restantes de la base estándar se convierten en excitaciones de una y dos partículas o huecos. Podemos entonces reescribir el estado (6.2) como

$$|\tilde{\psi}\rangle_f = (\alpha_- + \alpha_+ c_{A\uparrow}^\dagger c_{A\downarrow}^\dagger c_{B\uparrow}^\dagger c_{B\downarrow}^\dagger) |0\rangle, \quad (6.12)$$

es decir, como una superposición del vacío y excitaciones de dos partículas-huecos, con cada “sitio” conteniendo ahora bien 0 o bien dos fermiones, es decir, con una paridad de número (local) *par* ($e^{i\pi N_S} = 1$ para $S = A, B$, $N_S = \sum_\mu c_{S\mu}^\dagger c_{S\mu}$). Resulta evidente que el estado (6.12) es un vacío de cuasipartículas o determinante de Slater sii $\alpha_+ = 0$ o $\alpha_- = 0$. Además, para el estado (6.12) la ecuación (5.42) conduce nuevamente a $C(|\tilde{\psi}\rangle_f) = 2|\alpha_+ \alpha_-|$, lo que implica la equivalencia (6.4) entre la concurrencia del estado bipartito y la concurrencia fermiónica, invariante frente a transformaciones de Bogoliubov (y por lo tanto también transformaciones partícula-hueco).

Los operadores de Pauli locales (6.3) se convierten ahora en los nuevos operadores

$$\tilde{\sigma}_{Sx} = c_{S\uparrow}^\dagger c_{S\downarrow}^\dagger + c_{S\downarrow} c_{S\uparrow}, \quad (6.13a)$$

$$\tilde{\sigma}_{Sy} = -i(c_{S\uparrow}^\dagger c_{S\downarrow}^\dagger - c_{S\downarrow} c_{S\uparrow}), \quad (6.13b)$$

$$\tilde{\sigma}_{Sz} = c_{S\uparrow}^\dagger c_{S\uparrow} + c_{S\downarrow}^\dagger c_{S\downarrow} - 1, \quad (6.13c)$$

los cuales verifican las mismas relaciones de conmutación $[\tilde{\sigma}_{Sj}, \tilde{\sigma}_{S'k}] = 2i\delta_{SS'}\epsilon_{jkl}\tilde{\sigma}_{Sl}$, con $\tilde{\sigma}_{Sj}^2|\tilde{\psi}\rangle_f = |\tilde{\psi}\rangle_f \forall j$. Cualquier operación local puede escribirse en términos de estos operadores, que representan ahora creación o aniquilación local de partículas o huecos y un contador de número de fermiones.

Análogamente, podemos escribir el estado general de dos qubits (6.7) como

$$|\tilde{\psi}\rangle_f = \sum_{\mu,\nu} \alpha_{\mu\nu} (c_{A\uparrow}^\dagger c_{A\downarrow}^\dagger)^{n_\mu} (c_{B\uparrow}^\dagger c_{B\downarrow}^\dagger)^{n_\nu} |0\rangle, \quad (6.14)$$

donde $\mu, \nu = \pm$ y $n_- = 0$, $n_+ = 1$. Este estado puede llevarse de nuevo a la forma de “Schmidt” (6.12) mediante transformaciones locales de Bogoliubov $c_{S\uparrow} \rightarrow u_S c_{S\uparrow} + v_S c_{S\downarrow}^\dagger$, $c_{S\downarrow} \rightarrow u_S c_{S\downarrow} - v_S c_{S\uparrow}^\dagger$, $|u_S|^2 + |v_S|^2 = 1$, que diagonalizarán ρ^{qsp} (ver abajo) y cambiarán el vacío a $|0\rangle \rightarrow [\prod_{S=A,B} (u_S - v_S c_{S\uparrow}^\dagger c_{S\downarrow}^\dagger)] |0\rangle$. Se verifica nuevamente que para este estado la ecuación (5.42) conduce a $C(|\tilde{\psi}\rangle_f) = 2|\det \alpha| = 2|\alpha_+ \alpha_-|$, con $|\alpha_\pm|$ los valores singulares de α . El estado (6.7) está entonces entrelazado sii el estado (6.14) no es un vacío de *cuasipartículas* o determinante de Slater ($C(|\tilde{\psi}\rangle_f) > 0$). El formalismo introducido en esta tesis permite así tratar estos estados en cualquier representación, ya sea de partícula o cuasipartícula.

En este caso hemos de considerar la matriz densidad de un cuerpo *extendida* ρ^{qsp} , con elementos $\langle c_{S\nu}^\dagger c_{S'\mu} \rangle = \delta_{SS'} \delta_{\nu\mu} p_S$, $\langle c_{S\nu} c_{S'\mu} \rangle = \delta_{SS'} \delta_{\nu,-\mu} (-1)^{n_\mu} q_S$, donde $p_{A(B)} = |\alpha_{++}|^2 + |\alpha_{+-(-+)}|^2$, $q_{A(B)} = \alpha_{++} \alpha_{-+(-+)}^* + \alpha_{+-(-+)} \alpha_{--}^*$. Para la forma de Schmidt (6.14), ρ^{qsp} se vuelve diagonal ($p_{A(B)} = |\alpha_+|^2$, $q_{A(B)} = 0$). Los estados reducidos $\rho_{A(B)}$ se recuperan ahora como bloques particulares de ρ^{qsp} :

$$\rho_S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \langle \tilde{\sigma}_{Sz} \rangle & \langle \tilde{\sigma}_{Sx} \rangle - i \langle \tilde{\sigma}_{Sy} \rangle \\ \langle \tilde{\sigma}_{Sx} \rangle + i \langle \tilde{\sigma}_{Sy} \rangle & 1 - \langle \tilde{\sigma}_{Sz} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle c_{S\uparrow}^\dagger c_{S\uparrow} \rangle & \langle c_{S\downarrow} c_{S\uparrow} \rangle \\ \langle c_{S\uparrow}^\dagger c_{S\downarrow}^\dagger \rangle & \langle c_{S\uparrow} c_{S\uparrow}^\dagger \rangle \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

La diagonalización de ρ^{qsp} implicará, no obstante, la de ρ_A y ρ_B . Se verifica que sus autovalores son $f_\pm = |\alpha_\pm|^2$, cuádruplemente degenerados, con $|\alpha_\pm|$ los valores

singulares de la matriz α . Tenemos entonces:

$$E(A, B) = S(\rho_A) = S(\rho_B) = \frac{1}{4}S(\rho^{\text{qsp}}), \quad (6.16)$$

nuevamente válida para cualquier entropía de traza $S(\rho) = \text{Tr } f(\rho)$. Y para mezclas convexas de estados de la forma (6.14) (cuyo rango será a lo sumo 4) la concurrencia fermiónica, como se define en (5.65), coincidirá nuevamente con la concurrencia estándar de dos qubits.

Las mismas consideraciones valen para estados bipartitos generales (6.7) de sistemas de dimensión arbitraria si se aplica una transformación partícula-hueco (o en general una transformación de Bogoliubov) a los operadores fermiónicos originales en (6.8). En tal caso, la ecuación (6.16) vale para funciones entrópicas que satisfacen $f(p) = f(1-p)$ (una suposición razonable, pues p representa la ocupación media de partícula o hueco), ya que ρ^{qsp} tendrá autovalores f_k y $1-f_k$, ahora doblemente degenerados, con f_k aquellos de los estados locales $\rho_{A(B)}$.

Una última observación es que las representaciones (6.3) y (6.13) de los operadores de Pauli pueden coexistir independientemente, pues

$$[\sigma_{Sj}, \tilde{\sigma}_{S'k}] = 0, \quad (6.17)$$

$\forall j, k$ para ambos $S' \neq S$ y $S' = S$ (estructura $SU(2) \times SU(2)$ [114] en el sitio A o B). Además, los estados de paridad local par (6.14) pertenecen al núcleo de los operadores (5.16), mientras los estados de paridad local impar (6.8) ($e^{i\pi N_S} = -1$) pertenecen al núcleo de los operadores (6.13):

$$\sigma_{Sj}|\tilde{\psi}\rangle_f = \tilde{\sigma}_{Sj}|\psi\rangle_f = 0, \quad (6.18)$$

para $S = A, B$ y $j = x, y, z$. Por lo tanto, los operadores unitarios $e^{i\sum_j \lambda_j \sigma_{Sj}}$ ($e^{i\sum_j \lambda_j \tilde{\sigma}_{Sj}}$) hacen de identidad cuando se aplican a estados $|\tilde{\psi}\rangle_f$ ($|\psi\rangle_f$). Un sistema fermiónico con un espacio sp de dimensión 4 puede así albergar *dos sistemas de dos qubits diferentes*, uno por cada valor de la paridad local, manteniendo fija la paridad total ($e^{i\pi(N_A+N_B)} = 1$).

6.1.3. Entrelazamiento bipartito sin entrelazamiento fermiónico

Los ejemplos previos muestran una correspondencia exacta entre el entrelazamiento bipartito y el entrelazamiento fermiónico. Las representaciones consideradas involucran no solo un valor fijo de la paridad global, sino también de la paridad local. Es evidente, no obstante, que también es posible obtener entrelazamiento bipartito de un determinante de Slater si se eligen las particiones apropiadas del espacio sp, aunque en este caso la paridad local no estará fija. Por ejemplo, el estado de un fermión

$$|\psi\rangle_f = (\alpha c_{A\uparrow}^\dagger + \beta c_{B\uparrow}^\dagger)|0\rangle, \quad (6.19)$$

donde el fermión se crea en un estado no definido en posición si $\alpha\beta \neq 0$, conduce obviamente a $S(\rho^{\text{sp}}) = 0$ pero corresponde a un estado entrelazado $\alpha|\uparrow\rangle_A \otimes |0\rangle_B + \beta|0\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B$. Sin embargo, los estados locales en cada sitio tienen diferente paridad de número. Lo mismo ocurre con el determinante de Slater de dos fermiones $(\alpha c_{A\uparrow}^\dagger + \beta c_{B\uparrow}^\dagger)(\alpha' c_{A\downarrow}^\dagger + \beta' c_{B\downarrow}^\dagger)|0\rangle$, el cual tiene concurrencia fermiónica nula pero corresponde al estado entrelazado $\alpha\beta'|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B - \alpha'\beta|\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B + \alpha\alpha'|\uparrow\downarrow\rangle_A \otimes |0\rangle_B + \beta\beta'|0\rangle_A \otimes |\uparrow\downarrow\rangle_B$.

Por lo tanto, aunque hay entrelazamiento respecto a la partición (A, B) , no es posible hacer combinaciones lineales arbitrarias de los autoestados de ρ_A o ρ_B , pues estos últimos pueden no tener una paridad de número definida. Mientras tal entrelazamiento puede ser suficiente para observar violación de desigualdades de Bell, como se propone en [115], puede tener limitaciones respecto a otras tareas que involucren superposiciones de autoestados locales, como se discute en la sección 6.2. Este efecto tendrá lugar siempre que uno de los fermiones sea creado en un estado “dividido” por la partición elegida del espacio sp. Solo con la restricción a una paridad de número fija en cada lado se vuelve factible una equivalencia entre entrelazamiento bipartito y entrelazamiento fermiónico, como se discute a continuación. Notar que tal restricción implica directamente que las matrices de un cuerpo ρ^{sp} y ρ^{qsp} estarán bloqueadas, pues todas las contracciones $\langle c_{Ai}^\dagger c_{Bj} \rangle$ y $\langle c_{Ai}^\dagger c_{Bj}^\dagger \rangle$ vinculando ambos lados no conservan la paridad local, y por lo tanto se anularán $\forall i, j$.

6.1.4. Entrelazamiento fermiónico como entrelazamiento de dos qubits

Retornemos ahora al estado de dos fermiones (6.2). La razón por la que las dos partículas se vuelven distinguibles es que el observable “posición” permite representar al espacio \mathcal{H} como suma directa de dos copias del espacio de espín \mathcal{H}_S , $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{S_A} \oplus \mathcal{H}_{S_B}$, con ${}_A\langle\mu|\mu\rangle_B = \langle 0|c_{A\mu}c_{B\mu}^\dagger|0\rangle = 0$ para $\mu = \uparrow$ o \downarrow . Esta última condición de hecho asegura que hay solo un fermión en cada sitio ($N_{A(B)}|\psi\rangle_f = |\psi\rangle_f$). Sin embargo en un estado más general de dos fermiones, como el considerado en la sección previa, ya no es posible realizar una medida del espín de una sola partícula por acoplamiento de esta a la posición, pues ambas partículas pueden encontrarse en un mismo sitio.

Pero nada impide ahora dar vuelta el argumento y establecer que si para un estado arbitrario $|\psi\rangle_f$, es posible una división de \mathcal{H} como $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B$, donde \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B contienen solo un fermión ($N_A|\psi\rangle_f = N_B|\psi\rangle_f = 1$), entonces recuperamos nuevamente un sistema de dos qubits. Esta última observación nos lleva al siguiente resultado:

Lemma 1: Sea $|\psi\rangle_f$ un estado puro arbitrario de un sistema de fermiones con espacio de una partícula \mathcal{H} de dimensión 4, con paridad de número definida pero con un número de partículas no necesariamente fijo. Entonces, la entropía (5.25) de la correspondiente matriz densidad de un cuerpo extendida ρ^{qsp} es proporcional a la entropía de entrelazamiento entre dos qubits distinguibles, el cual puede extraerse midiendo los observables apropiados.

Demostración. comenzamos con un estado general $|\psi\rangle_f$ con paridad de número par, que en este espacio tendrá la forma

$$|\psi\rangle = (\alpha_0 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \alpha_{ij} c_i^\dagger c_j^\dagger + \alpha_4 c_1^\dagger c_2^\dagger c_3^\dagger c_4^\dagger) |0\rangle. \quad (6.20)$$

Para α_{ij} , α_0 y α_4 generales en (6.20), la base de \mathcal{H} determinada por los operadores fermiónicos $\{c_i, c_i^\dagger\}$ no puede separarse en dos de manera que sea posible medir una partícula en cada sitio. Esta afirmación sigue siendo cierta aún si $\alpha_0 = \alpha_4 = 0$, ya que α_{ij} es una matriz antisimétrica general. Sin embargo, como se probó en [81], siempre es posible encontrar otra base de \mathcal{H} determinada por operadores fermiónicos $\{a_i, a_i^\dagger\}$, vinculados a los originales $\{c_i, c_i^\dagger\}$ mediante una

transformación de Bogoliubov, tal que el estado (6.20) puede reescribirse como

$$|\psi\rangle_f = (\alpha_+ a_1^\dagger a_2^\dagger + \alpha_- a_3^\dagger a_4^\dagger) |0\rangle, \quad (6.21)$$

en forma análoga a aquella de (6.2). Donde los $|\alpha_\pm|^2 = f_\pm$ son los diferentes autovalores (5.41) de la matriz densidad extendida ρ^{qsp} determinada por el estado (6.20), mientras que $\{a_i, a_i^\dagger\}$ son los correspondientes operadores de cuasipartículas que diagonalizan ρ^{qsp} . La concurrencia (5.42) es entonces $C(|\psi\rangle_f) = 2|\alpha_+ \alpha_-|$.

Reconocemos ahora a (6.21) como la descomposición de Schmidt (6.1) de un estado de dos qubits escrito en la representación fermiónica (6.2), pues, por ejemplo, los conjuntos $\{a_1^\dagger, a_3^\dagger\}$ y $\{a_2^\dagger, a_4^\dagger\}$ (análogos a $\{a_{A\uparrow}^\dagger, a_{A\downarrow}^\dagger\}$ y $\{a_{B\uparrow}^\dagger, a_{B\downarrow}^\dagger\}$) generan subespacios \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B con $N_A = N_B = 1$ ($N_{A(B)}|\psi\rangle_f = |\psi\rangle_f$). Y como los coeficientes de Schmidt $|\alpha_\pm|^2$ coinciden con los autovalores de ρ^{qsp} , obtenemos nuevamente $S(\rho_A) = S(\rho_B) = \frac{1}{4}S(\rho^{\text{qsp}})$ (ecuación (6.16)), con la concurrencia fermiónica coincidiendo exactamente con la estándar.

El caso general de estados de paridad impar, que en este espacio sp son combinaciones lineales de estados con uno y tres fermiones,

$$|\psi\rangle_f = \sum_{i=1}^4 \beta_i c_i^\dagger |0\rangle + \tilde{\beta}_i c_i |\bar{0}\rangle, \quad (6.22)$$

donde $|\bar{0}\rangle = c_1^\dagger c_2^\dagger c_3^\dagger c_4^\dagger |0\rangle$ y $c_i |\bar{0}\rangle = \frac{1}{3!} \sum_{j,k,l} \epsilon_{ijkl} c_j^\dagger c_k^\dagger c_l^\dagger |0\rangle$, pueden tratarse en un modo similar, pues pueden convertirse a estados pares de la forma (6.20) mediante una transformación partícula-hueco de uno de los niveles (es decir, $c_1^\dagger \rightarrow c_1$, $|0\rangle \rightarrow c_1^\dagger |0\rangle$, que conduce a $\alpha_0 = \beta_1$, $\alpha_4 = -\tilde{\beta}_1$, $\alpha_{1j} = -\beta_j$, y $\alpha_{ij} = -\sum_k \epsilon_{1kij} \tilde{\beta}_k$ para $i, j = 2, 3, 4$ en la ecuación (6.20)). Pueden también escribirse en la forma (6.21), en términos de operadores de cuasipartículas apropiados que diagonalicen a ρ^{qsp} , de manera que las consideraciones previas siguen siendo válidas. La concurrencia de los estados (6.22), dada por $C(|\psi\rangle_f) = 2|\sum_{i=1}^4 \beta_i \tilde{\beta}_i|$, resulta nuevamente $2|\alpha_+ \alpha_-|$. \square

Corresponden ahora algunos comentarios. Primero, solo los subespacios de \mathcal{H} generados por $\{a_1^\dagger, a_2^\dagger\}$ y $\{a_3^\dagger, a_4^\dagger\}$ están definidos por (6.21), pues cualquier transformación unitaria $a_{1(2)}^\dagger \rightarrow \sum_{k=1,2} U_{k,1(2)} a_k^\dagger$ (y análogamente para $a_{3(4)}^\dagger$) los dejará inalterados (a menos de una fase en α_\pm).

Segundo, podemos también reinterpretar el estado (6.21) como uno de dos fermiones con paridad de número local *par* si el sitio A se identifica con los

operadores $\{a_1^\dagger, a_2^\dagger\}$ y B con $\{a_3^\dagger, a_4^\dagger\}$, de manera tal que cada sitio tiene bien 0 o 2 fermiones (*qubits de paridad de número par*). Aún con paridad local par podemos también reescribirlo en la forma (6.12), esto es,

$$|\psi\rangle_f = (\alpha_- + \alpha_+ a_1^\dagger a_3^\dagger a_2^\dagger a_4^\dagger) |0\rangle, \quad (6.23)$$

por medio de una transformación $a_i^\dagger \rightarrow a_i$ para $i = 3, 4$, con $|0\rangle \rightarrow a_3^\dagger a_4^\dagger |0\rangle$. En este caso solo el vacío $|0\rangle$ y el estado completamente ocupado $|\bar{0}\rangle$ están definidos, pues (6.23) permanece invariante (a menos de una fase en α_+) frente a cualquier transformación unitaria $a_i^\dagger \rightarrow \sum_k U_{ki} a_k^\dagger$ de los operadores a_i^\dagger .

Finalmente, si $|\psi\rangle_f$ es un estado de dos fermiones $\frac{1}{2} \sum_{ij} \alpha_{ij} a_i^\dagger a_j^\dagger |0\rangle$, las consideraciones previas permanecen válidas para un espacio sp de dimensión arbitraria. En este caso $\kappa = 0$ y es siempre posible reescribir $|\psi\rangle_f$ como [89]

$$|\psi\rangle_f = \sum_k \alpha_k a_k^\dagger a_{\bar{k}}^\dagger |0\rangle,$$

donde $|\alpha_k^2|$ son los autovalores de $\rho^{\text{sp}} = \alpha \alpha^\dagger$ y $\{a_k, a_{\bar{k}}\}$ son operadores fermiónicos que diagonalizan esta matriz, obtenidos por una transformación unitaria $a_{k(\bar{k})} = \sum_i \bar{U}_{ik(\bar{k})} c_i$ (que satisface [89] $U^\dagger \alpha \bar{U} = \alpha'$ con α' una matriz diagonal bloqueada, con bloques de 2×2 $\alpha_k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$). El espacio sp puede escribirse entonces como $\mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B$ con $\mathcal{H}_{A(B)}$ los subespacios generados por los conjuntos $\{a_{k(\bar{k})}^\dagger\}$, conteniendo cada uno un solo fermión. Obtenemos entonces $S(\rho_A) = S(\rho_B) = \frac{1}{2} S(\rho^{\text{sp}})$ (ecuación (6.10)).

6.1.5. Entrelazamiento fermiónico como mínimo entrelazamiento bipartito

Vamos a demostrar ahora un segundo resultado general, relacionado al entrelazamiento de modos asociado a descomposiciones generales $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B$ de un espacio sp de dimensión cuatro. Cualquier estado de muchos fermiones puede escribirse como $|\psi\rangle_f = \sum_{\mu, \nu} \alpha_{\mu\nu} |\mu\nu\rangle$, donde $\mu(\nu)$ identifica determinantes de Slater ortogonales en \mathcal{H}_A (\mathcal{H}_B) y $|\mu\nu\rangle = [\prod_{i \in \mathcal{H}_A} (c_i^\dagger)^{n_i^\mu}] [\prod_{j \in \mathcal{H}_B} (c_j^\dagger)^{n_j^\nu}] |0\rangle$ es un determinante de Slater en \mathcal{H} , con $n_i^\mu = 0, 1$ la ocupación del estado i en el estado μ . Los consiguientes estados reducidos $\rho_A = \sum_{\mu, \mu'} (\alpha \alpha^\dagger)_{\mu\mu'} |\mu\rangle \langle \mu'|$ y $\rho_B = \sum_{\nu, \nu'} (\alpha^T \bar{\alpha})_{\nu\nu'} |\nu\rangle \langle \nu'|$ satisfacen $\text{Tr} \rho_{A(B)} O_{A(B)} = \langle \psi | O_{A(B)} | \psi \rangle_f$ para cualquier operador que depende

solo de los fermiones locales $\{c_i, c_i^\dagger, i \in \mathcal{H}_{A(B)}\}$. La entropía de entrelazamiento asociada con tal partición es entonces [117] $E(A, B) = S(\rho_A) = S(\rho_B)$.

En el caso presente podemos tener particiones 2+2 ($\dim \mathcal{H}_A = \dim \mathcal{H}_B = 2$), o particiones 1 + 3 ($\dim \mathcal{H}_A = 1, \dim \mathcal{H}_B = 3$). En estas últimas el entrelazamiento está determinado por la ocupación media del modo en \mathcal{H}_A [81] y corresponde al caso en que A tiene acceso a solo uno de los modos de una partícula posiblemente ocupado en $|\psi\rangle_f$. Como se estableció con anterioridad, una realización de una partición 2 + 2 es aquella de espines 1/2 que pueden estar en dos sitios diferentes (uno accesible para Alice y el otro para Bob), mientras que una partición 1 + 3 puede ser una en la que Alice tiene acceso a un solo sitio y una sola dirección de espín, esto es, al conocimiento de la ocupación del estado de una partícula A_\uparrow . También puede aplicar a cualquier situación asimétrica, como por ejemplo que todos los espines estuviesen alineados en la misma dirección pero los fermiones pueden estar en cuatro posiciones u orbitales diferentes, de los que solo uno es accesible para Alice.

Lemma 2: Sea $|\psi\rangle_f$ un estado fermiónico general con paridad de número definida en un espacio de una partícula \mathcal{H} de dimensión 4, y sea $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B$ una descomposición de \mathcal{H} con \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B de dimensión no nula. La entropía de entrelazamiento asociada con tal partición satisface

$$S(\rho_A) = S(\rho_B) \geq \frac{1}{4}S(\rho^{\text{qsp}}). \quad (6.24)$$

La ecuación (6.24) vale para *cualquier* forma entrópica $S(\rho) = \text{Tr} f(\rho)$.

Por lo tanto, el entrelazamiento fermiónico representa el *mínimo* entrelazamiento bipartito que puede obtenerse en tal espacio, correspondiendo a aquellas particiones que surgen de las formas normales (6.21) o (6.23). El mayor entrelazamiento en una partición 2 + 2 se obtiene a expensas de abandonar la restricción de paridad local fija en los estados reducidos. Notar que $S(\rho^{\text{qsp}})$ se anula solo si $|\psi\rangle_f$ es un vacío de cuasipartículas o determinante de Slater en alguna base del espacio sp, mientras $S(\rho_{A(B)})$ lo hace solo cuando las condiciones previas valen en una base compatible con la partición particular elegida.

Mostraremos de hecho la relación de mayorización equivalente [5]

$$\lambda(\rho_{A(B)}) \prec (f_+, f_-), \quad (6.25)$$

donde $\lambda(\rho_{A(B)})$ denota el espectro de ρ_A o ρ_B ordenado de manera decreciente y

f_+ , $f_- = 1 - f_+ \leq f_+$ son los autovalores (5.41) (cuádruplemente degenerados) de ρ^{qsp} . La expresión en (6.25) es entonces equivalente a la condición $\lambda_{\max} \leq f_+$, con λ_{\max} el mayor autovalor de $\rho_{A(B)}$, e implica (6.24), mientras (6.24) implica (6.25) si vale para cualquier función entrópica f [9].

Demostración. Consideremos primero un estado general de paridad de número par (6.20) y una descomposición $2 + 2$ $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B$, con $\mathcal{H}_A \equiv \mathcal{H}_{12}$, $\mathcal{H}_B \equiv \mathcal{H}_{34}$ y \mathcal{H}_{ij} el subespacio generado por $\{c_i^\dagger, c_j^\dagger\}$. Cambiando a la notación A_1, A_2, B_1, B_2 para los estados de una partícula 1, 2, 3, 4, podemos escribir (6.20) como una suma de estados de la forma (6.8) y (6.14) (ver figura 6.1):

$$|\psi\rangle_f = \sum_{\mu,\nu} \beta_{\mu\nu} c_{A_\mu}^\dagger c_{B_\nu}^\dagger |0\rangle + \sum_{\mu,\nu} \tilde{\beta}_{\mu\nu} (c_{A_1}^\dagger c_{A_2}^\dagger)^{n_\mu} (c_{B_1}^\dagger c_{B_2}^\dagger)^{n_\nu} |0\rangle, \quad (6.26)$$

donde $\mu, \nu = 1, 2$, $\beta_{\mu\nu} = \alpha_{\mu,\nu+2}$, $n_\mu = \mu - 1$, $\tilde{\beta}_{11} = \alpha_0$, $\tilde{\beta}_{22} = \alpha_4$, $\tilde{\beta}_{12} = \alpha_{34}$, y $\tilde{\beta}_{21} = \alpha_{12}$. La primera (segunda) suma en (6.26) es la componente de paridad local impar (par).

Tras una transformación unitaria local $c_{S\mu} \rightarrow \sum_\nu \bar{U}_{\nu\mu}^S c_{S\nu}$, $S = A, B$, que no afecta al vacío ni a la componente de paridad local par (excepto por fases en $\tilde{\beta}_{\mu\nu}$, determinadas por $\det U^S$), podemos elegir $\beta_{\mu\nu}$ diagonal. Análogamente, tras transformaciones locales de Bogoliubov $c_{S1} \rightarrow u_S c_{S1} + v_S c_{S2}^\dagger$, $c_{S2} \rightarrow u_S c_{S2} - v_S c_{S1}^\dagger$, $|u_S^2| + |v_S^2| = 1$, con $|0\rangle \rightarrow [\prod_{S=A,B} (u_S - v_S c_{S1}^\dagger c_{S2}^\dagger)] |0\rangle$, podemos elegir $\tilde{\beta}_{\mu\nu}$ diagonal como se discute en la sección 6.1.2. Aunque modifican el vacío, no afectan a la componente de paridad local impar, excepto por fases en $\beta_{\mu\nu}$. Así, mediante transformaciones locales es posible reescribir (6.26) como

$$|\psi\rangle_f = (\beta_1 c_{A_1}^\dagger c_{B_1}^\dagger + \beta_2 c_{A_2}^\dagger c_{B_2}^\dagger + \tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2 c_{A_1}^\dagger c_{A_2}^\dagger c_{B_1}^\dagger c_{B_2}^\dagger) |0\rangle, \quad (6.27)$$

donde $|\beta_\mu|$ y $|\tilde{\beta}_\mu|$ son los valores singulares de las matrices de 2×2 β y $\tilde{\beta}$ en (6.26). La ecuación (6.27) es la descomposición de Schmidt para esta partición, con $(|\beta_1^2|, |\beta_2^2|, |\tilde{\beta}_1^2|, |\tilde{\beta}_2^2|)$ los autovalores de las matrices densidad reducidas ρ_A y ρ_B de modos (A_1, A_2) y (B_1, B_2) respectivamente.

Ahora bien, supongamos $\lambda_{\max} = |\beta_1^2|$. Tenemos entonces

$$|\beta_1|^2 \leq |\beta_1|^2 + |\tilde{\beta}_2|^2 = \langle c_{A_1}^\dagger c_{A_1} \rangle. \quad (6.28)$$

Pero $\langle c_{A_1}^\dagger c_{A_1} \rangle = \sum_{k=1}^8 |W_{A_1,k}|^2 f_k$, donde f_k son los autovalores de ρ^{qsp} (iguales a

f_+ o f_-) y W la matriz unitaria que diagonaliza a ρ^{qsp} ($\sum_{k=1}^8 |W_{A_1,k}|^2 = 1$). Por lo tanto,

$$f_- \leq \langle c_{A_1}^\dagger c_{A_1} \rangle \leq f_+. \quad (6.29)$$

Las ecuaciones (6.28)–(6.29) implican $|\beta_1|^2 \leq f_+$, lo que demuestra (6.25) y por lo tanto (6.24) para una partición $2 + 2$ general $\mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B$. Para λ_{max} igual a cualquier otro coeficiente la demostración es similar.

Además, la ecuación (6.29) muestra también que el espectro ordenado $\lambda(\rho_{A_1(A_2,B)}) = (\langle c_{A_1}^\dagger c_{A_1} \rangle, 1 - \langle c_{A_1}^\dagger c_{A_1} \rangle)^\downarrow$ asociado con la partición $1 + 3$ $\mathcal{H}_{A_1} \oplus \mathcal{H}_{A_2,B}$ satisface $\lambda(\rho_{A_1(A_2,B)}) \prec (f_+, f_-)$. En esta última $S(\rho_{A_1})$ es el entrelazamiento entre un modo A_1 y su complemento ortogonal como se define en [81, 117], determinado por la ocupación media $\langle c_{A_1}^\dagger c_{A_1} \rangle$ del modo. Por lo tanto las ecuaciones (6.24)–(6.25) valen también para cualquier partición $1 + 3$. Y la igualdad en (6.24) para todas las funciones entrópicas se alcanza, evidentemente, para aquellas particiones que emergen de las formas normales (6.21)–(6.23): Considerando el caso no trivial $f_+ < 1$, si la igualdad en (6.24) ha de valer para todas las entropías, necesariamente $\rho_{A(B)}$ debe ser de rango 2 con $\lambda(\rho_{A(B)}) = (f_+, f_-)$. Para una partición $1 + 3$ esta identidad directamente implica $\langle c_{A_1}^\dagger c_{A_1} \rangle = f_+$ o f_- y es por lo tanto una partición que emerge de una forma normal (6.21)–(6.23), donde $A \equiv A_1$ es uno de los modos de la base normal. Y para una partición $2 + 2$, implica que los dos autoestados de ρ_A con autovalores no nulos f_\pm deben tener la misma paridad de número, pues de otro modo la ecuación (6.6) implicaría $C(|\psi\rangle_f) = 0$ y por lo tanto $f_+ = 1$, en contraste con la hipótesis. Por lo tanto tal partición debe emerger de una de las formas normales (6.21) o (6.23).

La demostración de los resultados previos para estados de paridad global impar es análoga, pues estos pueden reescribirse como estados pares tras una transformación partícula-hueco. \square

Algunos comentarios extra son también convenientes en este punto. Podemos reescribir el estado (6.27) como

$$|\psi\rangle_f = \sqrt{p_-} |\psi_-\rangle_f + \sqrt{p_+} |\psi_+\rangle_f, \quad (6.30)$$

donde $|\psi_-\rangle_f = \frac{1}{\sqrt{p_-}} (\beta_1 c_{A_1}^\dagger c_{B_1}^\dagger + \beta_2 c_{A_2}^\dagger c_{B_2}^\dagger) |0\rangle$, $|\psi_+\rangle_f = \frac{1}{\sqrt{p_+}} (\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2 c_{A_1}^\dagger c_{A_2}^\dagger c_{B_1}^\dagger c_{B_2}^\dagger) |0\rangle$ son las componentes normalizadas de paridad local par e impar y $p_- = |\beta_1^2| + |\beta_2^2|$, $p_+ = |\tilde{\beta}_1^2| + |\tilde{\beta}_2^2| = 1 - p_-$. Vemos entonces que para la entropía de von Neumann

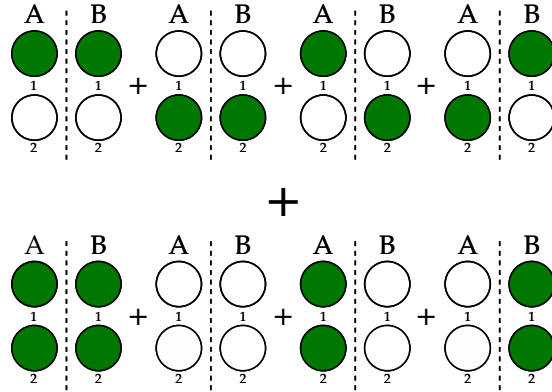


Figura 6.1: Los ocho estados fermiónicos de paridad par en 4 modos de una partícula, particionados de manera que los modos a la izquierda pertenecen a Alice, y los modos a la derecha pertenecen a Bob. En la fila superior están los estados con paridad local impar (un fermión para Alice y otro para Bob) mientras que la fila inferior muestra los correspondientes a paridad de número local par (Alice y Bob pueden tener 0 o dos fermiones). Los estados de la fila inferior pueden obtenerse de aquellos en la fila superior realizando la transformación partícula hueco $c_{A2}^\dagger \leftrightarrow c_{A2}$ y $c_{B2}^\dagger \leftrightarrow c_{B2}$.

resulta

$$S(\rho_A) = S(\rho_B) = p_- S(\rho_A^-) + p_+ S(\rho_A^+) + S(p), \quad (6.31)$$

donde los primeros dos términos representan el promedio de entropías de entrelazamiento para las componentes de paridad local par e impar ($S(\rho_A^-) = -\sum_{\mu=\pm} \frac{|\beta_\mu^2|}{p_-} \log_2 \frac{|\beta_\mu^2|}{p_-}$, $S(\rho_A^+) = -\sum_{\nu=\pm} \frac{|\tilde{\beta}_\nu^2|}{p_+} \log_2 \frac{|\tilde{\beta}_\nu^2|}{p_+}$), mientras $S(p) = -\sum_{\nu=\pm} p_\nu \log_2 p_\nu$ es la entropía *adicional* que emerge de la mezcla de ambas paridades locales. Tenemos entonces $0 \leq S(\rho_A) \leq 2$, con el máximo $S(\rho_A) = 2$ alcanzado si $S(\rho_A^\pm) = 1$ y $p_\pm = \frac{1}{2}$.

Por otra parte, la concurrencia fermiónica (5.42) del estado (6.27) es

$$C(|\psi\rangle_f) = 2|\beta_1\beta_2 + \tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2|. \quad (6.32)$$

Esta satisface entonces

$$|p_- C_- - p_+ C_+| \leq C(|\psi\rangle_f) \leq p_- C_- + p_+ C_+, \quad (6.33)$$

donde $C_\pm = C(|\psi_\pm\rangle_f) = 2\left(\frac{|\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2|/p_\pm}{|\beta_1\beta_2|/p_\pm}\right)$ son las concurrencias de las componentes de paridad local par e impar. Vemos entonces, por ejemplo, que para *máximo* entrelazamiento bipartito $S(\rho_A) = 2$, $C_\pm = 1$ y por lo tanto $C(|\psi\rangle_f)$ puede tomar cualquier valor entre 0 y 1, de acuerdo con la fase relativa entre las componentes

par e impar.

Finalmente, es posible reescribir la forma de Schmidt (6.27) como un estado de dos fermiones mediante transformaciones partícula-hueco apropiadas (es decir, $c_{B_\mu} \rightarrow c_{B_\mu}^\dagger$, $\mu = 1, 2$, con $|0\rangle \rightarrow c_{B_1}^\dagger c_{B_2}^\dagger |0\rangle$). Tras alguna redefiniciones obtenemos la forma equivalente

$$|\psi\rangle_f = (\beta_1 c_{A_1}^\dagger c_{B_1}^\dagger + \beta_2 c_{A_2}^\dagger c_{B_2}^\dagger + \tilde{\beta}_2 c_{A_1}^\dagger c_{A_2}^\dagger - \tilde{\beta}_1 c_{B_1}^\dagger c_{B_2}^\dagger) |0\rangle, \quad (6.34)$$

donde los términos con dos fermiones en el mismo sitio se agregan a la forma (6.2). Por lo tanto, todas las consideraciones previas (6.30)–(6.33) pueden implementarse con un número total de fermiones fijo, siendo la expresión (6.32) todavía válida.

6.2. Circuitos cuánticos basados en modos fermiónicos

Los resultados de las secciones previas pueden usarse ahora para reescribir un circuito cuántico basado en qubits como un circuito basado en modos fermiónicos. Es fácil ver, llegado este punto, que cualquier par de modos fermiónicos, digamos i, j , preparados de manera que su ocupación total esté restringida a $N_{ij} = c_i^\dagger c_i + c_j^\dagger c_j = 1$, es esencialmente un qubit. Por lo tanto, una colección de n tales pares de modos constituye un sistema de n qubits. Además, cualquier operación de un qubit puede implementarse sobre un par de modos simplemente usando unitarias en \mathcal{H} que vinculen solo estos dos modos, y estas unitarias pueden escribirse siempre en términos de los operadores de Pauli efectivos (6.3), es decir, $\sigma_x^{ij} = c_i^\dagger c_j + c_j^\dagger c_i$, $\sigma_y^{ij} = i(c_j^\dagger c_i - c_i^\dagger c_j)$, $\sigma_z^{ij} = c_i^\dagger c_i - c_j^\dagger c_j$. El último ingrediente para tener computación cuántica universal es la compuerta CNOT, la cual en el espacio producto $A \otimes B$ puede escribirse como $U_{\text{CNOT}} = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes \sigma_x = \exp[i\frac{\pi}{4}(1 - \sigma_z) \otimes (1 - \sigma_x)]$. En la representación fermiónica, si A está generado por modos ij y B por los modos diferentes kl , para estados teniendo un fermión en cada par de modos, esta compuerta puede escribirse como

$$U_{\text{CNOT}}^f = \exp[i\frac{\pi}{4}(1 - \sigma_z^{ij})(1 - \sigma_x^{kl})]. \quad (6.35)$$

Como solo está involucrado un número par de operadores fermiónicos c por par, su acción no es afectada por el estado de pares intermedios. Es entonces po-

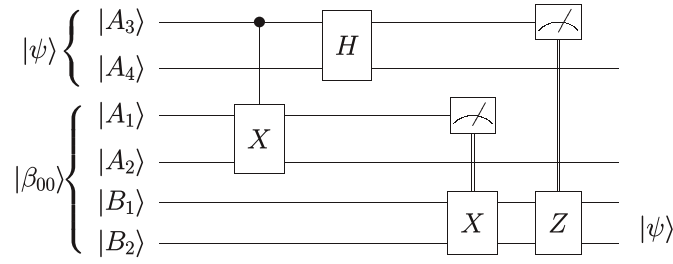


Figura 6.2: Protocolo de teleportación con la presente implementación fermiónica. Cada qubit está representado por un par de modos fermiónicos con ocupación total 1. La operación controlada puede implementarse involucrando solo uno de los modos del par representando al qubit, debido a la restricción al número de ocupación, y análogamente la medida usual en la base estándar puede implementarse midiendo solo uno de estos modos. Si se relaja tal restricción, de manera que ambas paridades locales puedan coexistir, entonces la operación controlada y la medida involucran a los dos modos del par.

sible implementar cualquier circuito cuántico basado en qubits usando estados fermiónicos.

6.2.1. Teleportación cuántica

Como ejemplo, en la figura 6.2 mostramos el protocolo de teleportación adaptado para implementarse usando un estado fermiónico entrelazado como recurso, y un estado de dos modos para ser teleportado. Alice tiene los modos $\{|A_1\rangle, |A_2\rangle, |A_3\rangle, |A_4\rangle\}$ mientras los modos $\{|B_1\rangle, |B_2\rangle\}$ son de Bob. Los dos primeros modos de Alice están entrelazados con aquellos de Bob, estando el conjunto en el estado $|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{A_1}^\dagger c_{B_1}^\dagger + c_{A_2}^\dagger c_{B_2}^\dagger)|0\rangle$, y los modos restantes de Alice están en el estado $|\psi\rangle = (\alpha c_{A_3}^\dagger + \beta c_{A_4}^\dagger)|0\rangle$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. El estado a la entrada del circuito es, por lo tanto,

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha c_{A_3}^\dagger + \beta c_{A_4}^\dagger)(c_{A_1}^\dagger c_{B_1}^\dagger + c_{A_2}^\dagger c_{B_2}^\dagger)|0\rangle,$$

y es fácil ver que el estado a la salida es

$$\begin{aligned} |\psi_o\rangle = & \frac{1}{2}[c_{A_4}^\dagger c_{A_2}^\dagger(\alpha c_{B_1}^\dagger + \beta c_{B_2}^\dagger) + c_{A_4}^\dagger c_{A_1}^\dagger(\alpha c_{B_2}^\dagger + \beta c_{B_1}^\dagger) \\ & + c_{A_3}^\dagger c_{A_2}^\dagger(-\alpha c_{B_1}^\dagger + \beta c_{B_2}^\dagger) + c_{A_3}^\dagger c_{A_1}^\dagger(-\alpha c_{B_2}^\dagger + \beta c_{B_1}^\dagger)]|0\rangle \end{aligned}$$

Las operaciones controladas sobre los modos de Bob que se ilustran en la figura 6.2 aseguran entonces que su estado final será $|\psi\rangle$.

Considerando ahora un circuito general, si los estados a la entrada se restrin-

gen a determinantes de Slater en la base previamente considerada, con un fermión por cada par de modos, recuperamos un circuito clásico. La compuerta CNOT en (6.35) se reduce entonces a un *controlled swap* clásico o compuerta de Fredkin, lo que implica que el caso de computación clásica reversible se recupera usando determinantes de Slater a la entrada del circuito.

Por otra parte, si se relaja la restricción al número de ocupación $N_{ij} = 1$ (e decir, paridad impar para cada par de modos), de manera que los bloques que constituyen el circuito no son ya fermiones que pueden estar en dos modos posibles, sino los modos por sí mismos, emergen otras posibilidades. Por ejemplo, si ahora los estados en la entrada tienen 0 o dos fermiones en cada par (qubits de paridad par), tales que los modos i, j están simultáneamente vacíos o llenos, entonces han de usarse los operadores $\tilde{\sigma}_\mu^{ij}$ (6.13), es decir, $\tilde{\sigma}_x^{ij} = c_i^\dagger c_j^\dagger + c_j c_i$, $\tilde{\sigma}_y^{ij} = i(c_j^\dagger c_i^\dagger - c_i^\dagger c_j^\dagger)$, $\tilde{\sigma}_z^{ij} = c_i^\dagger c_i + c_j^\dagger c_j - 1$. En este caso el operador \tilde{U}_{cnot}^f ha de construirse como en la ecuación (6.35) con los operadores $\tilde{\sigma}_\mu$, mientras el operador (6.35), y de hecho cualquier compuerta construida con los operadores σ_μ^{ij} , actuará como una identidad sobre estos estados, como se explicó anteriormente. Por lo tanto, adicionando las compuertas apropiadas los mismos modos pueden, en principio, usarse para qubits de paridad par e impar independientemente.

Por ejemplo, en el caso de paridad local par el estado en la entrada para el protocolo de teleportación sería

$$|\tilde{\psi}_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta + \alpha c_{A_3}^\dagger c_{A_4}^\dagger)(1 + c_{A_1}^\dagger c_{A_2}^\dagger c_{B_1}^\dagger c_{B_2}^\dagger)|0\rangle.$$

Si $|0\rangle$ es un determinante de Slater de referencia (mar de Fermi), entonces este estado involucra excitaciones de 0, una, dos y tres partículas o huecos, con A_4, A_2, B_2 , denotando los huecos. El estado a la salida resulta

$$|\tilde{\psi}_o\rangle = \frac{1}{2}[(\beta + \alpha c_{B_1}^\dagger c_{B_2}^\dagger) + c_{A_1}^\dagger c_{A_2}^\dagger(\alpha + \beta c_{B_1}^\dagger c_{B_2}^\dagger) + c_{A_3}^\dagger c_{A_4}^\dagger \times (\beta - \alpha c_{B_1}^\dagger c_{B_2}^\dagger) + c_{A_1}^\dagger c_{A_2}^\dagger c_{A_3}^\dagger c_{A_4}^\dagger(-\alpha + \beta c_{B_1}^\dagger c_{B_2}^\dagger)]|0\rangle,$$

de manera que si Alice mide cuál de sus modos está ocupado y comunica el resultado a Bob, el puede reconstruir el estado original aplicando los operadores pertinentes $\tilde{X} \equiv i e^{-i\frac{\pi}{2}\tilde{\sigma}_x^{12}}$ y $\tilde{Z} \equiv e^{-i\frac{\pi}{2}\tilde{\sigma}_z^{12}}$.

6.2.1.1. Superdense Coding

Finalmente, consideremos el caso de *superdense coding* [2, 116]. Resulta evidente a partir de la discusión previa que este protocolo puede implementarse con el estado fermiónico $|\beta_{00}\rangle$ del ejemplo de teleportación, e implementando exactamente las mismas operaciones del caso usual, pero vistas ahora como operaciones sobre dos modos. Ahora bien, un estado general de paridad global par en cuatro modos $\{|A_1\rangle, |A_2\rangle, |B_1\rangle, |B_2\rangle\}$ es una combinación de ocho estados como en la ecuación (6.20): seis estados de dos partículas, el vacío $|0\rangle$ y el estado completamente ocupado $|\bar{0}\rangle$, como se muestra en la figura 6.1. Cuatro de los seis estados de dos partículas (figura 6.1, arriba), tienen $N_A = N_B = 1$ y pueden usarse para reproducir los resultados conocidos del protocolo estándar. Pero los cuatro estados restantes, que tienen paridad local par, pueden usarse también para superdense coding si las operaciones locales apropiadas, expresadas en términos de los $\tilde{\sigma}_\mu^{AB}$ se realizan. Los estados de paridad local impar (par) generan el núcleo de los $\tilde{\sigma}_\mu^{ij}$ (σ_μ^{ij}) (ecuación (6.18)).

Un estado general de paridad par (6.20) puede pensarse entonces como una superposición de estados de dos qubits diferentes, como en (6.27)–(6.30). Definiendo los estados máximamente entrelazados y ortogonales de paridad local definida

$$|\beta_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{A1}^\dagger c_{B2}^\dagger \pm c_{A2}^\dagger c_{B1}^\dagger)|0\rangle, \quad |\tilde{\beta}_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{A1}^\dagger c_{A2}^\dagger \pm c_{B1}^\dagger c_{B2}^\dagger)|0\rangle, \quad (6.36)$$

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{A1}^\dagger c_{B1}^\dagger \pm c_{A2}^\dagger c_{B2}^\dagger)|0\rangle, \quad |\tilde{\beta}_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{A1}^\dagger c_{A2}^\dagger c_{B1}^\dagger c_{B2}^\dagger \pm 1)|0\rangle, \quad (6.37)$$

podemos considerar, por ejemplo, el estado

$$|\Psi_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\beta_{00}\rangle + |\tilde{\beta}_{00}\rangle). \quad (6.38)$$

Implementando sobre (6.38) la identidad y las operaciones locales $ie^{-i\frac{\pi}{2}(\sigma_\mu^A + \tilde{\sigma}_\mu^A)} = \sigma_\mu + \tilde{\sigma}_\mu$, $\mu = x, y, z$, Alice puede generar cuatro estados ortogonales: $|\Psi_{00}\rangle$ y

$$|\Psi_{01}\rangle = ie^{-i\frac{\pi}{2}(\sigma_x^A + \tilde{\sigma}_x^A)}|\Psi_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\beta_{01}\rangle + |\tilde{\beta}_{01}\rangle), \quad (6.39a)$$

$$|\Psi_{10}\rangle = ie^{-i\frac{\pi}{2}(\sigma_z^A + \tilde{\sigma}_z^A)}|\Psi_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\beta_{10}\rangle + |\tilde{\beta}_{10}\rangle), \quad (6.39b)$$

$$|\Psi_{11}\rangle = -e^{-i\frac{\pi}{2}(\sigma_y^A + \tilde{\sigma}_y^A)}|\Psi_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\beta_{11}\rangle + |\tilde{\beta}_{11}\rangle), \quad (6.39c)$$

Pero también puede implementar estas operaciones combinándolas con una compuerta de detección de paridad local $P^A = -\exp[i\pi N_A]$, que cambia el signo de

los estados de paridad local par. Esto le permite generar localmente otro set de cuatro estados ortogonales,

$$|\tilde{\Psi}_{ij}\rangle = P^A|\Psi_{ij}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\beta_{ij}\rangle - |\tilde{\beta}_{ij}\rangle), \quad i, j = 0, 1, \quad (6.40)$$

que son además ortogonales a aquellos de (6.38)–(6.39). Encontramos entonces que al relajar la restricción sobre el número de ocupación de las particiones es posible para Alice enviar 3 bits de información a Bob usando solo dos modos y operaciones unitarias locales que preserven la paridad local, mientras que con un solo tipo de qubits y las mismas operaciones puede enviar solo dos bits. Por supuesto, si no hubiese restricciones sobre la paridad global y Alice pudiera cambiar la paridad local (y por tanto la global) podría mandar 4 bits (en concordancia con la máxima capacidad para dos qudits con $d = 4$, que es $2 \log_2 d$ [116]). Fijar la paridad global reduce a la mitad el número de estados ortogonales que Alice puede enviar a Bob.

Por otra parte, como el estado (6.38) no tiene una paridad local definida, el consiguiente entrelazamiento bipartito no está restringido por el entrelazamiento fermiónico, como se muestra en la sección 6.1.5. De hecho, los ocho estados previos (6.38), (6.39) y (6.40) tienen el mismo entrelazamiento bipartito, conduciendo a estados reducidos máximamente mezclados $\rho_{A(B)}$: $S(\rho_A) = S(\rho_B) = 2$, mientras que aplicando (5.42) se ve que la concurrencia fermiónica de los estados previos es $C(|\Psi_{ij}\rangle) = C(|\tilde{\Psi}_{ij}\rangle) = 1$. Las operaciones unitarias aplicadas por Alice son locales y por lo tanto no alteran el entrelazamiento bipartito, al tiempo que también son unitarias de un cuerpo, por lo que tampoco pueden alterar la concurrencia ni el entrelazamiento fermiónico (es decir, los autovalores de ρ^{qsp}). De hecho, el entrelazamiento fermiónico no es necesario en este caso. Cambiando el estado recurso ($|\Psi'_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\beta_{00}\rangle + |\tilde{\beta}_{10}\rangle)$) es posible para Alice generar localmente ocho estados ortogonales con el mismo entrelazamiento bipartito pero sin entrelazamiento fermiónico ($C(|\Psi'_{00}\rangle) = 0$).

Por lo tanto, el entrelazamiento obtenido con estados locales con diferente paridad local desempeña el papel de recurso para superdense coding. De hecho, aún el estado (6.19) con $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, con concurrencia obviamente nula, puede en principio usarse para enviar dos bits si Alice puede realizar las operaciones (que preservan paridad) $P^A = -\exp[i\pi N_A]$, $\sigma_x + \tilde{\sigma}_x$ y $P^A(\sigma_x + \tilde{\sigma}_x)$. Vale notar, sin embargo, que el mismo estado no puede usarse directamente como recurso para teleportación con el protocolo estándar sin violar la regla de superselección

de paridad, pues los estados locales de Bob tienen paridad opuesta y no pueden superponerse. Tras una medida de los modos de Alice el estado reducido de Bob colapsa a un estado de paridad definida, de manera que será imposible para él recuperar el estado general $|\psi\rangle$.

Hasta ahora consideramos la restricción a la paridad de número. Si otras reglas de superselección (como carga o número de fermiones) también aplicaran para una realización particular, implicarían limitaciones más fuertes sobre la capacidad de estados como (6.38). No obstante, qubits de paridad local par con número de partículas no necesariamente definido son implementables mediante excitaciones de partícula-hueco sobre un mar de Fermi de referencia en un sistema de muchos fermiones.

Mencionamos también que una realización básica de un estado de qubits basado en un espacio de cuatro modos fermiónicos consiste en un par de fermiones $1/2$ en los estados más bajos de un doble pozo inducido por un campo magnético, que controla el gap de energía entre ambas direcciones de espín y las transiciones entre ellos. El caso de ocupación 1 en cada pozo corresponde a paridad local impar, mientras que al permitir la doble ocupación por *hopping* entre pozos tendríamos estados de paridad local par.

Capítulo 7

Pérdida de información “de un cuerpo” en sistemas de fermiones

En el capítulo 5 analizamos el problema de cuantificar el entrelazamiento en sistemas de fermiones. Allí introdujimos la entropía de entrelazamiento de un cuerpo (5.1.2) tras definir consistentemente operadores que describen una medida de la ocupación de un modo en el espacio de una partícula \mathcal{H} del sistema, que conduce a las correspondientes expresiones para el estado reducido del modo elegido y su complemento ortogonal en \mathcal{H} . En este capítulo comenzamos nuevamente considerando las correlaciones entre un modo del espacio sp y su complemento ortogonal, y definimos una medida entrópica generalizada que cuantifica la pérdida de información en el estado del sistema inducida por la medida de la ocupación de dicho modo. Proponemos entonces (como en el caso del entrelazamiento de un modo) a la suma de esta cantidad sobre todos los modos de una base dada de \mathcal{H} , minimizada sobre todas las bases posibles de este espacio, como un cuantificador de la mínima pérdida de información en el estado inducida por una medida sin lectura, extendiendo la optimización a todas las bases vinculadas mediante una transformación de Bogoliubov (5.18) si se consideran también medidas de ocupación de modos de cuasipartículas. Mostramos luego que esta cantidad es no negativa, siendo nula si y solo si el estado del sistema es una combinación convexa de determinantes de Slater en la misma base de \mathcal{H} , y que para estados puros se reduce a la entropía de entrelazamiento de un cuerpo introducida en el capítulo 5, en analogía con su contraparte definida en [10] para sistemas de componentes distinguibles. Finalmente se evalúa la pérdida de información en un caso típico, y se compara con su entrelazamiento de formación.

7.1. Pérdida de información de un cuerpo

7.1.1. Pérdida de información inducida por la medida de un modo

Consideremos, para comenzar, un estado puro $|\psi\rangle$ de un sistema de fermiones con espacio de Hilbert de una partícula (sp) \mathcal{H} , descrito por los operadores de creación y destrucción usuales $\{c_j, c_j^\dagger\}$ (5.1). Nuevamente vamos a trabajar en el formalismo gran canónico, de manera que $|\psi\rangle$ no necesariamente tiene un número de partículas $N = \sum_k c_k^\dagger c_k$ definido, aunque sí asumiremos que es un autoestado del operador de paridad de número (5.2), $P|\psi\rangle = \pm|\psi\rangle$, en concordancia con la regla de superselección [118], de manera que $\langle O \rangle \equiv \langle \psi|O|\psi \rangle = 0$ para cualquier operador O que sea un producto de un número impar de operadores de creación y destrucción. Denotaremos también con d la dimensión del espacio de Fock del sistema.

Recordemos del capítulo 5 que dada una partición (A, B) de una base de \mathcal{H} , donde A denota al k -ésimo modo y B su complemento ortogonal, los operadores

$$\Pi_k = c_k^\dagger c_k, \quad \Pi_{\bar{k}} = c_k c_k^\dagger, \quad \Pi_k + \Pi_{\bar{k}} = 1 \quad (7.1)$$

constituyen un conjunto de proyectores ortogonales que definen una medida de von Neumann sobre el nivel k . El operador Π_k ($\Pi_{\bar{k}}$) proyecta el estado sobre el subespacio de estados con el nivel k ocupado (vacío), por lo que deducimos que el conjunto describe una medida de la ocupación de este nivel. Los consiguientes estados posmedidos son $|\psi_k\rangle = \Pi_k|\psi\rangle/\sqrt{p_k}$ y $|\psi_{\bar{k}}\rangle = \Pi_{\bar{k}}|\psi\rangle/\sqrt{p_{\bar{k}}}$, con $p_k = \langle c_k^\dagger c_k \rangle$ y $p_{\bar{k}} = \langle c_k c_k^\dagger \rangle = 1 - p_k$, de manera que $|\psi\rangle = \sqrt{p_k}|\psi_k\rangle + \sqrt{p_{\bar{k}}}\psi_{\bar{k}}\rangle$. Para cualquier operador O_A (O_B) que dependa solo de los operadores c_k, c_k^\dagger ($\{c_j, c_j^\dagger, j \neq k\}$) tenemos, dado que $P|\psi\rangle = \pm|\psi\rangle$,

$$\begin{aligned} \langle \psi|O_{A(B)}|\psi \rangle &= p_k \langle \psi_k|O_{A(B)}|\psi_k \rangle + p_{\bar{k}} \langle \psi_{\bar{k}}|O_{A(B)}|\psi_{\bar{k}} \rangle \\ &= \text{Tr}, \rho_{A(B)} O_{A(B)}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

con $\rho_{A(B)}$ el estado reducido de A (B):

$$\rho_A = p_k c_k^\dagger |0\rangle \langle 0| c_k + p_{\bar{k}} |0\rangle \langle 0|, \quad (7.3)$$

$$\rho_B = p_k c_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| c_k^\dagger + p_{\bar{k}} |\psi_{\bar{k}}\rangle \langle \psi_{\bar{k}}|. \quad (7.4)$$

Además, los estados $\rho_{B/k} = c_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| c_k^\dagger$ y $\rho_{B/\bar{k}} = |\psi_{\bar{k}}\rangle \langle \psi_{\bar{k}}|$ son los estados condicionales de B dado que el modo k se encuentra ocupado o vacío respectivamente.

Consideremos ahora una medida de la ocupación de un modo en un estado mixto. Si ρ es un estado general que conmuta con la paridad, $[\rho, P] = 0$, entonces el estado tras encontrar que el nivel $|k\rangle$ está ocupado o vacío es $\rho'_k = \Pi_k \rho \Pi_k / p_k$, o $\rho'_{\bar{k}} = \Pi_{\bar{k}} \rho \Pi_{\bar{k}} / p_{\bar{k}}$ respectivamente. Por lo tanto, tras una medida sin lectura de la ocupación de este nivel tenemos

$$\rho'(k) = p_k \rho'_k + p_{\bar{k}} \rho'_{\bar{k}} = \Pi_k \rho \Pi_k + \Pi_{\bar{k}} \rho \Pi_{\bar{k}}. \quad (7.5)$$

El consiguiente estado reducido de A está dado por (7.3) mientras $\rho_B = p_k c_k \rho'_k c_k^\dagger + p_{\bar{k}} \rho'_{\bar{k}}$. Explícitamente, si

$$\rho = \sum_{\nu} q_{\nu} |\psi^{\nu}\rangle \langle \psi^{\nu}|, \quad (7.6)$$

con $q_{\nu} \geq 0$, $\sum_{\nu} q_{\nu} = 1$, entonces

$$\rho'(k) = \sum_{\nu} q_{\nu} (p'_k |\psi^{\nu}_k\rangle \langle \psi^{\nu}_k| + p'_{\bar{k}} |\psi^{\nu}_{\bar{k}}\rangle \langle \psi^{\nu}_{\bar{k}}|), \quad (7.7)$$

donde $|\psi^{\nu}_{k(\bar{k})}\rangle \propto \Pi_{k(\bar{k})} |\psi^{\nu}\rangle$ son las componentes normalizadas de $|\psi^{\nu}\rangle$ con el nivel k ocupado (vacío), de manera que $|\psi^{\nu}\rangle = \sqrt{p'_k} |\psi^{\nu}_k\rangle + \sqrt{p'_{\bar{k}}} |\psi^{\nu}_{\bar{k}}\rangle$ con $p'_{k(\bar{k})} = \langle \psi^{\nu} | \Pi_{k(\bar{k})} | \psi^{\nu} \rangle$ y $p_{k(\bar{k})} = \sum_{\nu} q_{\nu} p'_{k(\bar{k})}$. Los elementos no diagonales $\propto |\psi^{\nu}_k\rangle \langle \psi^{\nu}_{\bar{k}}|$ presentes en el estado original ρ se pierden entonces en $\rho'(k)$.

La entropía $S(\rho'(k)) = -\text{Tr} \rho'(k) \log_2 \rho'(k)$ del estado posmedido (7.5) no puede ser menor que la entropía $S(\rho)$ del estado original, debido a la información contenida en los elementos perdidos. De hecho, los autovalores de $\rho'(k)$ son simplemente los elementos diagonales de ρ en una base diferente a aquella que determina su descomposición espectral, y es sabido que cualquier diagonal de una matriz es siempre mayorizada por el conjunto de sus autovalores [5]. Tenemos entonces

$$S(\rho'(k)) \geq S(\rho), \quad (7.8)$$

con igualdad si y solo si $\rho'(k) = \rho$. Esta última condición es obviamente equivalente a

$$[\rho, c_k^\dagger c_k] = 0, \quad (7.9)$$

pues la ecuación (7.9) vale si $\rho = \rho'(k)$, mientras que si vale (7.9), hay una base

común de autovectores de ρ y $c_k^\dagger c_k$ y por lo tanto $\rho = \rho'(k)$. La diferencia

$$I^{c_k}(\rho) = S(\rho'(k)) - S(\rho) \quad (7.10)$$

cuantifica entonces esta pérdida de información. Esta cantidad claramente satisface $I^{c_k}(\rho) \geq 0$, con $I^{c_k}(\rho) = 0$ si se satisface la ecuación (7.9), y es una versión fermiónica del déficit de información $\Delta^\rightarrow(\rho) = S(\rho') - S(\rho)$ [119], definido para sistemas de componentes distinguibles (aquí no hay minimización involucrada, pues la ocupación del modo $|k\rangle$ es una variable clásica). Vale notar además, de (7.5), que

$$S(\rho'(k)) = S(k) + S(\rho|k), \quad (7.11)$$

donde

$$S(k) = -p_k \log_2 p_k - p_{\bar{k}} \log_2 p_{\bar{k}} = h(p_k) \quad (7.12)$$

es la entropía del modo k y

$$S(\rho|k) = p_k S(\rho'_k) + p_{\bar{k}} S(\rho'_{\bar{k}}) \quad (7.13)$$

es la entropía condicional del conjunto de modos restantes, dado que el estado del modo k (ocupado o vacío) es conocido. Por lo tanto, el déficit (7.10) puede escribirse como

$$S(\rho'(k)) - S(\rho) = S(\rho|k) - (S(\rho) - S(k)), \quad (7.14)$$

que es una diferencia de entre una versión clásica y una cuántica de la entropía condicional respecto al modo k y representa la *discordia cuántica* [27] respecto a este modo. Por lo tanto, para medidas de un modo la extensión del déficit de información coincide con aquella de la discordia cuántica. Para un estado puro $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, ρ'_k y $\rho'_{\bar{k}}$ son ambos puros y por lo tanto $S(\rho|k) = 0$, lo que implica que I^{c_k} coincide con la entropía de entrelazamiento $E_k(|\psi\rangle)$ (5.9) del modo k :

$$I^{c_k}(|\psi\rangle) = S(k) = E_k(|\psi\rangle). \quad (7.15)$$

La entropía condicional (7.13) puede interpretarse, siguiendo la referencia [33], como el entrelazamiento de formación entre el complemento del modo k y un tercer sistema C (que puede ser también un conjunto de nuevos modos fermiónicos) que purifica al sistema completo (ver apéndice C.1). Y si una medida del modo

k se llevara a cabo, el déficit es un cuantificador del entrelazamiento generado entre el sistema y el aparato de medida. Efectivamente, añadiendo como sistema auxiliar un qubit C en el estado inicial $|0\rangle$ y aplicando la operación unitaria $U = e^{-i\frac{\pi}{2}(c_k c_k^\dagger) \otimes \sigma_y}$ obtenemos

$$U(|\psi\rangle|0\rangle) = \sqrt{p_k}|\psi_k\rangle|0\rangle + \sqrt{p_{\bar{k}}}\psi_{\bar{k}}|1\rangle. \quad (7.16)$$

Por lo tanto $I^{c_k}(\rho)$ es la diferencia entre la entropía del subsistema fermiónico $\rho_F = \text{Tr}_C \rho_{FC} = \rho'(k)$, con $\rho_{FC} = U(\rho \otimes |0\rangle\langle 0|)U^\dagger$, y aquella correspondiente al sistema conjunto, $S(\rho_{FC}) = S(\rho)$. Tal diferencia (el opuesto de la entropía condicional $S(\rho_{FC}) - S(\rho_F)$ solo puede ser positiva si ρ_{FC} está entrelazado, de acuerdo con el criterio de separabilidad entrópico [9, 68, 120], y es una cota inferior al entrelazamiento destilable en una dirección [31, 49]. Por otra parte, si $\rho'(k) = \rho$, de manera que $p_k = 0$ o 1 para cualquier autoestado de ρ , entonces ρ_{FC} es claramente separable y no se crea entrelazamiento.

7.1.2. Pérdida de información de un cuerpo

Tomamos ahora la suma de I^{c_k} en (7.10) sobre todos los estados de una base dada de \mathcal{H} ,

$$I^c(\rho) = \sum_k I^{c_k}(\rho) = \sum_k S(\rho'(k)) - S(\rho), \quad (7.17)$$

como una medida de la pérdida de información inducida por una medida en la base elegida. El mínimo sobre todas las bases de \mathcal{H} de esta diferencia,

$$I^{\text{sp}}(\rho) = \text{Min}_c I^c(\rho) = \text{Min}_{\{c_k\}} \sum_k I^{c_k}(\rho), \quad (7.18)$$

cuantifica entonces la mínima pérdida de información inducida por tal medida. Esta *pérdida de información de un cuerpo* claramente satisface $I^{\text{sp}}(\rho) \geq 0$, pues es una suma de términos no negativos, con $I^{\text{sp}}(\rho) = 0$ sii existen operadores fermiónicos c_k tales que $\rho'(k) = \rho \forall k$, es decir, sii

$$[\rho, c_k^\dagger c_k] = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (7.19)$$

lo que ocurre sii ρ es diagonal en una base de determinantes de Slater en la misma base de \mathcal{H} (los autovectores en común de todos los $c_k^\dagger c_k$). Tales estados incluyen los típicos estados térmicos no correlacionados $\rho \propto \exp[-\beta H]$, con $H = \sum_k \varepsilon_k c_k^\dagger c_k$,

pero también combinaciones convexas de determinantes de Slater en la misma base. Estas combinaciones desempeñan aquí el rol de estados “clásicos”.

Notar que si se satisface (7.19), los operadores c_k diagonalizan la matriz densidad de un cuerpo ($\langle c_k^\dagger c_l \rangle \equiv \text{Tr } \rho c_k^\dagger c_l = \lambda_k \delta_{kl}$, $c_k^\dagger c_l = [c_k^\dagger c_k, c_l^\dagger c_l]$ para $k \neq l$). Por lo tanto, aún cuando los operadores que minimizan $I^c(\rho)$ pueden no diagonalizar ρ^{SP} en general, lo harán si $I^{\text{SP}}(\rho) = 0$. Por lo tanto, $I^c(\rho) > 0$ en todas las bases que diagonalizan ρ^{SP} implica $I^{\text{SP}}(\rho) > 0$.

Para un estado puro $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ la ecuación (7.15) implica

$$I^c(|\psi\rangle) = \sum_k S(k) = \sum_k h(p_k), \quad (7.20)$$

que es una función cóncava de los elementos diagonales de ρ^{SP} . Por lo tanto, en este caso, su mínimo sobre todas las bases se obtiene cuando los p_k son sus autovalores, es decir, cuando los c_k 's son los operadores fermiónicos que diagonalizan ρ^{SP} :

$$I^{\text{SP}}(|\psi\rangle) = \text{tr } h(\rho^{\text{SP}}) = S^{\text{SP}}(|\psi\rangle). \quad (7.21)$$

Este resultado coincide con la entropía de entrelazamiento definida en la sección previa, en analogía con el déficit de información (1.53) estándar, que también coincide con la entropía de entrelazamiento estándar (1.38) para estados puros.

Por otra parte, se observa de (7.11) que para un estado mezcla general ρ , $S(\rho'(k)) \geq S(k) = h(p_k)$ y por lo tanto,

$$\text{Min}_{\{c_k\}} \sum_k S(\rho'(k)) \geq \text{tr } h(\rho^{\text{SP}}). \quad (7.22)$$

Como en el caso de la entropía de entrelazamiento de un cuerpo, si se consideran también medidas de ocupación de modos de cuasipartículas entonces la minimización se extiende a todas las bases de cuasipartículas, es decir, conjuntos de operadores $\{a_k, a_k^\dagger\}$ vinculados a los operadores fermiónicos originales $\{c_i, c_i^\dagger\}$ mediante una transformación de Bogoliubov (5.18). Puede probarse, repitiendo el argumento usado arriba, que esta pérdida de información,

$$I^{\text{qSP}}(\rho) = \text{Min}_{\{a_k\}} \sum_k [S(\rho'(k)) - S(\rho)], \quad (7.23)$$

satisface $I^{\text{qSP}}(\rho) \geq 0$, con igualdad sii existen operadores de cuasipartículas a_k

tales que

$$[\rho, a_k^\dagger a_k] = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (7.24)$$

es decir, si ρ es diagonal en una base de determinantes de Slater en la misma base de *cuasipartículas* (autovectores comunes de todos los $a_k^\dagger a_k$). Además, como esta minimización incluye a la anterior como caso particular, tenemos

$$I^{\text{qsp}}(\rho) \leq I^{\text{sp}}(\rho). \quad (7.25)$$

Para estados puros, el mínimo I^{qsp} se obtiene para aquellos a_k^\dagger que diagonalizan la matriz densidad extendida (5.20), y en analogía con (7.21) resulta

$$I^{\text{qsp}}(|\psi\rangle) = -\text{tr}' \rho^{\text{qsp}} \log_2 \rho^{\text{qsp}} = S^{\text{qsp}}(|\psi\rangle), \quad (7.26)$$

donde S^{qsp} es la entropía de entrelazamiento generalizada (5.25). Como sucede en el caso previo, si se satisface (7.24) los operadores a_k diagonalizan ρ^{qsp} , implicando que aún cuando tales operadores no necesariamente minimizan $I^{\text{a}}(\rho)$ en el caso general, lo harán si $I^{\text{qsp}}(\rho) = 0$. Así, $I^{\text{a}}(\rho) > 0$ en todas estas bases indica $I^{\text{qsp}}(\rho) > 0$.

Notemos que $I^{\text{sp}}(\rho)$ permanece invariante bajo transformaciones unitarias estándar de un cuerpo

$$\rho \rightarrow U \rho U^\dagger, \quad U = \exp[-it \sum_{i,j} h_{ij} c_i^\dagger c_j], \quad (7.27)$$

con $h_{ij} = h_{ji}^*$, pues implican simplemente una transformación unitaria de los operadores fermiónicos $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$:

$$\mathbf{c} \rightarrow U \mathbf{c} U^\dagger = \exp[ith] \mathbf{c}, \quad (7.28)$$

con $\rho^{\text{sp}} \rightarrow \exp[ith] \rho^{\text{sp}} \exp[-ith]$. Estas transformaciones llevan determinantes de Slater a determinantes de Slater. De manera similar, $I^{\text{qsp}}(\rho)$ permanece invariante frente a transformaciones generales de un cuerpo

$$\begin{aligned} \rho &\rightarrow W\rho W^\dagger, \quad W = \exp[-itH], \\ H &= \sum_{i,j} h_{ij}c_i^\dagger c_j + \frac{1}{2}\Delta_{ij}(c_i^\dagger c_j^\dagger + c_j c_i) \end{aligned} \quad (7.29)$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{c}^\dagger \ \mathbf{c})\tilde{\mathcal{H}} \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^\dagger \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} h & \Delta \\ -\Delta^* & -h^* \end{pmatrix}, \quad (7.30)$$

donde $\Delta^T = -\Delta$, pues estas implican simplemente una transformación de Bogoliubov de los operadores fermiónicos:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^\dagger \end{pmatrix} \rightarrow \exp[i\tilde{\mathcal{H}}] \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^\dagger \end{pmatrix}$$

con $\rho^{\text{qsp}} \rightarrow \exp[it\tilde{\mathcal{H}}]\rho^{\text{qsp}} \exp[-it\tilde{\mathcal{H}}]$. Por lo tanto, la evolución bajo Hamiltonianos H de la forma previa no alterarán el valor de $I^{\text{qsp}}(\rho)$.

Finalmente, vale remarcar que

$$I^{\text{qsp}}(\rho) = 0, \quad (7.31)$$

para *cualquier* estado ρ con soporte en un espacio sp de dimensión dos ($n = 2$) que conmute con el operador de paridad P . Es decir, para $n = 2$ ρ es siempre diagonal en una base de determinantes de Slater.

Demostración: sea

$$\rho = \sum_{\nu=1,2} q_\nu^- |\psi_\nu^-\rangle \langle \psi_\nu^-| + q_\nu^+ |\psi_\nu^+\rangle \langle \psi_\nu^+| \quad (7.32)$$

la descomposición espectral de tal estado ρ , con

$$|\psi_\nu^-\rangle = (\alpha_1^\nu c_1^\dagger + \alpha_2^\nu c_2^\dagger)|0\rangle, \quad |\psi_\nu^+\rangle = (\beta_1^\nu + \beta_2^\nu c_2^\dagger c_1^\dagger)|0\rangle,$$

Sus autoestados ortogonales de paridad impar y par ($\alpha_j^2 = (-)^j \bar{\alpha}_{3-j}^1$, $\beta_j^2 = (-)^j \bar{\beta}_{3-j}^1$). Tenemos entonces $\langle c_2^\dagger c_1 \rangle = (q_1^- - q_2^-) \bar{\alpha}_2^1 \alpha_1^1$, $\langle c_2^\dagger c_1^\dagger \rangle = (q_1^+ - q_2^+) \bar{\beta}_2^1 \beta_1^1$. Por lo tanto, en términos de los operadores de cuasipartículas a_k que diagonalizan a ρ^{qsp} ($\langle a_2^\dagger a_1 \rangle = \langle a_2^\dagger a_1^\dagger \rangle = 0$), necesariamente $|\psi_\nu^-\rangle \propto a_\nu^\dagger |0'\rangle$ para $\nu = 1, 2$ y $|\psi_+^1\rangle \propto |0'\rangle$, $|\psi_+^2\rangle \propto a_2^\dagger a_1^\dagger |0'\rangle$, si $q_1^\pm \neq q_2^\pm$, con $|0'\rangle$ el vacío de estas cuasipartículas (de la misma paridad que $|0\rangle$). En caso de degeneración podemos siempre elegir los autoestados $|\psi_\pm^\nu\rangle$ de la forma previa. Por lo tanto ρ es siempre diagonal en

una base de determinantes de Slater en la misma base de cuasipartículas, lo que implica $I^{\text{qsp}}(\rho) = 0$. \square

Vale notar, sin embargo, que $I^{\text{sp}}(\rho) > 0$ a menos que $[\rho, N] = 0$, esto es, $\langle c_2^\dagger c_1^\dagger \rangle = 0$, y que ρ no es necesariamente de la forma no correlacionada $\propto \exp[-\sum_{\nu=1,2} \varepsilon_\nu a_\nu^\dagger a_\nu]$ a menos que se verifique $\langle a_1^\dagger a_1 a_2^\dagger a_2 \rangle = \langle a_1^\dagger a_1 \rangle \langle a_2^\dagger a_2 \rangle$, es decir, $q_2^+ = (q_1^- + q_2^+)(q_2^- + q_2^+)$.

Por otra parte, si el soporte es un espacio sp de dimensión tres, ($n = 3$), entonces tenemos también $I^{\text{qsp}}(\rho) = 0$ para cualquier ρ de paridad *definida* (pero no para cualquier ρ conmutante con P). En otras palabras, en este caso ρ también será siempre diagonal en una base de determinantes de Slater.

Demostración: Sea $\rho = \sum_{\nu=1}^4 q_\nu |\psi^\nu\rangle\langle\psi^\nu|$ la descomposición espectral de ρ . Si sus autoestados tienen todos paridad impar, es decir

$$|\psi^\nu\rangle = \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_j^\nu c_j^\dagger + \alpha_4^\nu c_3^\dagger c_2^\dagger c_1^\dagger \right) |0\rangle, \quad \nu = 1, \dots, 4,$$

entonces $\langle c_j^\dagger c_k \rangle = \sum_\nu q_\nu (\bar{\alpha}_j^\nu \alpha_k^\nu + \delta_{jk} |\alpha_4^\nu|^2)$, $\langle c_j^\dagger c_k^\dagger \rangle = -\sum_{\nu,l} q_\nu \epsilon_{jkl} \bar{\alpha}_4^\nu \alpha_l^\nu$, con ϵ_{jkl} el tensor completamente antisimétrico. Por lo tanto, si se expresa en términos de los operadores de cuasipartículas a_k que diagonalizan a ρ^{qsp} ($c_j^\dagger \rightarrow a_j^\dagger$, $|0\rangle \rightarrow |0'\rangle$, $\alpha_j^\nu \rightarrow \alpha_j^{\nu'}$, con $\langle a_j^\dagger a_k \rangle = f_j \delta_{jk}$, $\langle a_j^\dagger a_k^\dagger \rangle = 0$), las relaciones previas junto con $\langle \psi^\nu | \psi^\mu \rangle = \sum_j \bar{\alpha}_j^\nu \alpha_j^\mu = \delta^{\mu\nu}$ implican, para distintos q^ν 's, $\alpha_j^{\nu'} \propto \delta_j^\nu$, es decir, $|\psi^\nu\rangle \propto a_\nu^\dagger |0'\rangle$, $\nu = 1, 2, 3$ y $|\psi^4\rangle \propto a_3^\dagger a_2^\dagger a_1^\dagger |0'\rangle$. Se sigue entonces que ρ es diagonal en una base de determinantes de Slater (en una base de cuasipartículas) y que $I^{\text{qsp}}(\rho) = 0$ (pero $I^{\text{sp}}(\rho) \neq 0$ si $[\rho, N] \neq 0$). El mismo procedimiento puede aplicarse para un estado ρ par (que puede llevarse a paridad impar mediante una transformación partícula-hueco $c_i^\dagger \rightarrow c_i$ de uno de los operadores). \square

Notemos, no obstante, que si ρ contiene autoestados de diferente paridad $I^{\text{qsp}}(\rho)$ puede ser positiva, pues los operadores de cuasipartículas de la forma normal para cada paridad no coincidirán en general.

7.1.3. Condición estacionaria general

Derivemos ahora las ecuaciones estacionarias generales que debe satisfacer el conjunto de operadores $\{a_k\}$ que minimiza la pérdida de información (7.23). Tras una medida de la ocupación de un nivel k , el consiguiente estado $\rho'(k)$ (7.7), tiene

autoestados $|\phi_{k(\bar{k})}^\mu\rangle$ con autovalores

$$q_{k(\bar{k})}^\mu = \langle \phi_{k(\bar{k})}^\mu | \rho(k) | \phi_{k(\bar{k})}^\mu \rangle = \langle \phi_{k(\bar{k})}^\mu | \rho | \phi_{k(\bar{k})}^\mu \rangle.$$

Consideremos ahora una pequeña variación de la base de medida, determinada por una transformación general de un cuerpo

$$W = \exp[-\imath\epsilon H] \approx 1 - \imath\epsilon H,$$

con H de la forma general (7.29)–(7.30). Tenemos entonces $\delta q_{k(\bar{k})}^\mu = -\imath\epsilon \langle \phi_{k(\bar{k})}^\mu | [\rho, H] | \phi_{k(\bar{k})}^\mu \rangle$ al orden más bajo en ϵ , que implica para la pérdida de información (7.23),

$$\begin{aligned} \delta I^{\text{qsp}}(\rho) &= \sum_{k,\mu} f'(q_k^\mu) \delta q_k^\mu + f'(q_{\bar{k}}^\mu) \delta q_{\bar{k}}^\mu \\ &= -\imath\epsilon \text{Tr} \left(\left[\sum_k f'(\rho'(k)), \rho \right] H \right), \end{aligned} \quad (7.33)$$

donde $f'(\rho) = -\log_2 \rho$. La condición $\delta I^{\text{qsp}}(\rho) = 0$ para H arbitrario conduce entonces a las ecuaciones estacionarias

$$\text{Tr} \left[\sum_k f'(\rho'(k)), \rho \right] c_i^\dagger c_j = 0 \quad (7.34)$$

$$\text{Tr} \left[\sum_k f'(\rho'(k)), \rho \right] c_i^\dagger c_j^\dagger = 0 \quad (7.35)$$

$\forall i, j$, que se reducen a

$$\text{Tr} \rho [f'(\rho'(k)) + f'(\rho'(l)), a_k^\dagger a_l] = 0, \quad (7.36)$$

$$\text{Tr} \rho [f'(\rho'(k)) + f'(\rho'(l)), a_k^\dagger a_l^\dagger] = 0, \quad (7.37)$$

$\forall k \neq l$ cuando se expresan en términos de los operadores de cuasipartículas que determinan la base de medida ($[\rho'(k), a_k^\dagger a_k] = 0 \forall k$), pues $\text{Tr} [f'(\rho(k)), \rho] a_j^\dagger a_l = 0$ si $j \neq k \neq l$, y también si $j = l = k$. En el caso de $I^{\text{sp}}(\rho)$, solo la ecuación (7.36) ha de considerarse ($\Delta = 0$ en H).

Como verificación, para un estado puro $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, las ecuaciones (7.36)–

(7.37) se reducen a

$$[g(p_k) - g(p_{\bar{k}}) - g(p_l) + g(p_{\bar{l}})] \langle \psi | a_k^\dagger a_l | \psi \rangle = 0, \quad (7.38)$$

$$[g(p_k) - g(p_{\bar{k}}) + g(p_l) - g(p_{\bar{l}})] \langle \psi | a_k^\dagger a_l^\dagger | \psi \rangle = 0, \quad (7.39)$$

para $k \neq l$, donde $g(p) = pf'(p)$ y $p_{k(\bar{k})}$ son las probabilidades de encontrar el estado k ocupado (vacío) en $|\psi\rangle$. Estas ecuaciones son siempre satisfechas por aquellos a_k que diagonalizan la matriz densidad extendida (5.20) ($\langle a_k^\dagger a_l \rangle = \langle a_k^\dagger a_l^\dagger \rangle = 0$), en acuerdo con resultados previos.

7.1.4. Pérdida de información de un cuerpo generalizada

Podemos extender directamente todas las consideraciones previas a formas entrópicas más generales. Consideremos primero las entropías tipo traza generales (1.33)

$$S_f(\rho) = \text{Tr } f(\rho). \quad (7.40)$$

Para $f(p) = -p \log_2 p$, recordemos, $S_f(\rho)$ coincide con la entropía de von Neumann $S(\rho)$, mientras que para $f(p) = 2p(1-p)$, se recupera la entropía cuadrática $S_2(\rho) = 2(1 - \text{Tr } \rho^2)$, la cual es una función decreciente de la pureza $\text{Tr } \rho^2$ y se corresponde con la aproximación lineal $\rho \ln \rho \approx \rho(1 - \rho)$ en $S(\rho)$. La entropía de entrelazamiento de un cuerpo asociada a esta última, $S_f^{\text{qsp}}(|\psi\rangle) = \text{tr } f(\rho'^{\text{qsp}})$ (5.25), resulta

$$S_2^{\text{qsp}}(|\psi\rangle) = 4 \sum_k f_k(1 - f_k), \quad (7.41)$$

que es simplemente la suma de las *fluctuaciones* en la ocupación de todos los modos de una partícula o cuasipartícula. En términos más generales, estas entropías incluyen a la familia de entropías de Tsallis (1.32) $S_q(\rho) = \frac{1 - \text{Tr } \rho^q}{q-1}$, que se obtiene para $f(p) = \frac{p-p^q}{q-1}$, con $q > 0$, $q \neq 1$, expresión que se reduce a la entropía de von Neumann y cuadrática para $q \rightarrow 1$ y $q = 2$ respectivamente.

Como vimos en la sección 1.1.3, estas entropías de traza satisfacen la relación de mayorización

$$\rho' \prec \rho \Rightarrow S_f(\rho') \geq S_f(\rho). \quad (7.42)$$

Esta propiedad posibilita la extensión directa de los resultados de la sección previa a estas formas entrópicas más generales. Efectivamente, $\rho'(k)$ en (7.5) es mayorizado por el estado original ρ , $\rho'(k) \prec \rho$, de donde se sigue que $S_f(\rho'(k)) \geq$

$S_f(\rho)$ y por lo tanto

$$I_f^{c_k}(\rho) \equiv S_f(\rho'(k)) - S_f(\rho) \geq 0, \quad (7.43)$$

con $I_f^{c_k}(\rho) = 0$ sii $\rho'(k) = \rho$. La expresión en (7.43) es una medida de la pérdida de información inducida por la medida sin lectura de la ocupación del estado de una partícula $|k\rangle$. Sumando entonces sobre todos los estados en una base, y minimizando sobre todas las bases posibles de \mathcal{H} , obtenemos la expresión

$$I_f^{\text{sp}}(\rho) = \text{Min}_{\{c_k\}} \sum_k I_f^{c_k} = \text{Min}_{\{c_k\}} \sum_k S_f(\rho'(k)) - S_f(\rho), \quad (7.44)$$

que satisface $I_f^{\text{sp}}(\rho) \geq 0$, con $I_f^{\text{sp}}(\rho) = 0$ sii ρ es diagonal en una base de determinantes de Slater en la misma base del espacio sp ($[\rho, c_k^\dagger c_k] = 0 \forall k$). La optimización puede extenderse nuevamente a todas las bases vinculadas con la original por una transformación de Bogoliubov, lo que conduce a la cantidad

$$I_f^{\text{qsp}}(\rho) = \text{Min}_{\{a_k\}} \sum_k S_f(\rho'(k)) - S_f(\rho), \quad (7.45)$$

que satisface $0 \leq I_f^{\text{qsp}}(\rho) \leq I_f^{\text{sp}}(\rho)$, con $I_f^{\text{qsp}}(\rho) = 0$ sii ρ es diagonal en una base de determinantes de Slater en la misma base de cuasipartículas ($[\rho, a_k^\dagger a_k] = 0 \forall k$). Para estados puros, $\rho^2 = \rho$, $I_f^{\text{qsp}}(\rho) = S_f(\rho^{\text{qsp}})$ coincide con la entropía generalizada de la matriz densidad de un cuerpo extendida. Notemos también que las condiciones estacionarias generales (7.36)–(7.37) permanecen completamente válidas para la presente generalización, con f' denotando ahora la derivada de la función entrópica f .

La ecuación (7.42) permanece también válida para funciones Schur-cóncavas de ρ [5] entre las que se incluyen, en particular, funciones crecientes de las entropías previas $S_f(\rho)$. Un ejemplo de esto es provisto por las entropías de Renyi cuánticas [121],

$$S_q^R(\rho) = \frac{\log(\text{Tr } \rho^q)}{1 - q} = \frac{\log[1 - (q - 1)S_q(\rho)]}{1 - q}, \quad (7.46)$$

donde $q > 0$, $q \neq 1$. Estas son simplemente funciones crecientes de las entropías de Tsallis $S_q(\rho)$ y se aproximan a la entropía de von Neumann cuando $q \rightarrow 1$. La definición de la pérdida de información se extiende directamente a estas entropías. El logaritmo en (7.46) implica aditividad, es decir, $S_q^R(\rho \otimes \sigma) =$

$S_q^R(\rho) + S_q^R(\sigma)$, lo que asegura que la adición de un sistema auxiliar no correlacionado al sistema original ($\rho \rightarrow \rho \otimes \sigma$) no tiene efecto alguno en el déficit de información asociado [75, 117]

$$I_{R_q}(\rho) = \sum_k S_q^R(\rho'(k)) - S_q^R(\rho). \quad (7.47)$$

No obstante, el problema de optimización para $I_{R_q}(\rho)$ es el mismo que para $I_q(\rho) = \sum_k S_q(\rho'(k)) - S_q(\rho)$.

Mencionamos finalmente que para sistemas fermiónicos podemos considerar un modo alternativo de adicionar un sistema auxiliar al sistema S , mediante una expansión del espacio de Hilbert de una partícula $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{A}$. Un estado no correlacionado del sistema compuesto $S+A$ tendrá entonces la forma $\rho_S \rho_A$, donde ρ_A y ρ_B involucran operadores de creación y destrucción de partículas en estados de \mathcal{H} y \mathcal{A} respectivamente. Como estamos trabajando dentro del formalismo gran canónico, tenemos $\text{Tr} \rho_S \rho_A = \text{Tr} \rho_S \text{Tr} \rho_A$ y por lo tanto $S_q^R(\rho_S \rho_A) = S_q^R(\rho_S) + S_q^R(\rho_A)$.

7.2. Pérdida de información en una mezcla de un estado puro con el estado máximamente mezclado

Consideremos ahora la mezcla

$$\rho = w|\psi\rangle\langle\psi| + \frac{1-w}{d}I_d, \quad (7.48)$$

con $0 \leq w \leq 1$ y d la dimensión del espacio de estados. Tras una medida sin lectura del modo $|k\rangle$ el estado del sistema es

$$\rho'(k) = w(p_k|\psi_k\rangle\langle\psi_k| + p_{\bar{k}}|\psi_{\bar{k}}\rangle\langle\psi_{\bar{k}}|) + \frac{1-w}{d}I_d, \quad (7.49)$$

con $p_{k(\bar{k})} = \langle c_k^\dagger c_k \rangle$ ($\langle c_{\bar{k}} c_{\bar{k}}^\dagger \rangle$) la probabilidad de encontrar al modo k ocupado (vacío) en $|\psi\rangle$. Sus autovalores son $q_{k(\bar{k})} = wp_{k(\bar{k})} + \frac{1-w}{d}$ y $\frac{1-w}{d}$ de manera que

$$S_f(\rho'(k)) = f(q_k) + f(q_{\bar{k}}) + (d-2)f\left(\frac{1-w}{d}\right), \quad (7.50)$$

$$\begin{aligned} I_f^c(\rho) &= \sum_k S(\rho'(k)) - S(\rho) \\ &= \sum_k f(q_k) + f(q_{\bar{k}}) - f\left(w + \frac{1-w}{d}\right) - f\left(\frac{1-w}{d}\right). \end{aligned} \quad (7.51)$$

Mostramos ahora que el mínimo de $I_f^c(\rho)$ sobre todas las bases de \mathcal{H} se alcanza para los operadores $\{c'_k\}$ que *diagonalizan* la matriz densidad de un cuerpo $\rho_{ij}^{\text{SP}} = \langle c_j^\dagger c_i \rangle$, mientras que el mínimo sobre todas las bases de cuasipartículas se alcanza para aquellos $\{a_k\}$ que diagonalizan la correspondiente matriz densidad extendida de un cuerpo ρ^{qSP} .

Demostración. Llamemos $\{\lambda_k = \langle c_k^\dagger c'_k \rangle\}$ al conjunto de autovalores de la matriz densidad de un cuerpo ρ^{SP} , tal que $\langle c_k^\dagger c'_j \rangle = \lambda_k \delta_{kj}$. Esta distribución mayoriza a cualquier otra diagonal de la matriz, lo que implica $\{p_k = \langle c_k^\dagger c_k \rangle\} \prec \{\lambda_k\}$ para los conjuntos ordenados, y por lo tanto $\{q_k\} \prec \{q'_k\}$ si $q'_k = w\lambda_k + \frac{1-w}{d}$ y $0 \leq w \leq 1$. Estos resultados implican también que $\{p_{\bar{k}} = 1 - p_k\} \prec \{\lambda_{\bar{k}} = 1 - \lambda_k\}$, de donde se sigue que $\{q_{\bar{k}}\} \prec \{q'_{\bar{k}}\}$ para $q'_{\bar{k}} = w\lambda_{\bar{k}} + \frac{1-w}{d}$. Luego,

$$\sum_k f(q_k) + f(q_{\bar{k}}) \geq \sum_k f(q'_k) + f(q'_{\bar{k}}), \quad (7.52)$$

implicando $I_f^{\text{SP}}(\rho) = \text{Min}_c I_f^c(\rho) = I_f^c(\rho)$. Este resultado se sigue también de la concavidad de f y de la relación $q_{k(\bar{k})} = \sum_{k'} |U_{kk'}|^2 q'_{k'(\bar{k}')}$, con U la matriz unitaria que diagonaliza a ρ^{SP} .

Si se consideran también modos de cuasipartículas notamos que ambos, p_k y $p_{\bar{k}} = 1 - p_k$, son elementos diagonales de ρ^{qSP} , de manera que el conjunto extendido y ordenado $\{p_k, p_{\bar{k}}\}$ es mayorizado por el conjunto ordenado completo $\{f_k = \langle a_k^\dagger a_k \rangle, f_{\bar{k}} = 1 - f_k\}$ de autovalores de ρ^{qSP} ($\langle a_k^\dagger a_l \rangle = \delta_{kl} f_k, \langle a_k^\dagger a_l^\dagger \rangle = 0$). Por lo tanto $\{q_k, q_{\bar{k}}\} \prec \{q'_k, q'_{\bar{k}}\}$ para $q'_{k(\bar{k})} = wf_{k(\bar{k})} + \frac{1-w}{d}$, y entonces la desigualdad en (7.52) se satisface, implicando $I_f^{\text{qSP}}(\rho) = I_f^a(\rho)$. Este resultado también se sigue de la relación $q_k = \sum_{k'} |W_{kk'}|^2 q'_{k'}$ entre los elementos de los conjuntos extendidos, con W la matriz que diagonaliza a ρ^{qSP} . \square

Estos resultados son válidos tanto para la entropía de von Neumann como para

todas las formas entrópicas generalizadas S_f , y están evidentemente de acuerdo con las condiciones estacionarias (7.36)–(7.37), pues para el estado (7.48) resultan proporcionales a las ecuaciones (7.38)–(7.39). También valen si ρ tiene paridad definida P , esto es, si I_d denota el proyector sobre el subespacio de estados con la misma paridad que $|\psi\rangle$, en cuyo caso $d \rightarrow d/2$ en (7.48)–(7.52).

Del argumento previo se desprende también que si $|\psi'\rangle$ es un estado cuya matriz densidad de un cuerpo es mayorizada por aquella correspondiente a $|\psi\rangle$, es decir, si $|\psi'\rangle$ tiene mayor entrelazamiento fermiónico que $|\psi\rangle$, y $\rho' = w|\psi'\rangle\langle\psi'| + (1-w)I_d/d$, entonces $\rho'^{\text{qsp}} \prec \rho^{\text{qsp}}$ y luego

$$I_f^{\text{qsp}}(\rho') \geq I_f^{\text{qsp}}(\rho), \quad (7.53)$$

$\forall \omega \in [0, 1]$ y $\forall S_f$. Esta desigualdad general refleja el entrelazamiento rigurosamente mayor de $|\psi'\rangle$, en el sentido que $S_f^{\text{qsp}}(|\psi'\rangle) = S_f(\rho'^{\text{qsp}}) \geq S_f(\rho^{\text{qsp}})$ para todas las entropías S_f si $\rho'^{\text{qsp}} \prec \rho^{\text{qsp}}$, e indica que el valor de I_f^{qsp} en la mezcla (7.48) está en efecto dirigido por el entrelazamiento del estado puro. La misma relación vale para I_f^{sp} if $\rho'^{\text{sp}} \prec \rho^{\text{sp}}$.

Notemos también que $I_f^{\text{qsp}}(\rho)$ es una función estrictamente creciente de w para cualquier f cóncava, con $I_f^{\text{qsp}}(\rho) > 0$ para cualquier $w > 0$. De la ecuación (7.51) se observa que exhibe, para ω pequeño, un incremento inicial cuadrático *universal*, dado por

$$I_f^{\text{qsp}}(\rho) \approx w^2 |f''(d^{-1})| \sum_k f_k(1 - f_k), \quad (7.54)$$

con f_k los autovalores de la ρ^{qsp} determinados por $|\psi\rangle$, el cual es proporcional al entrelazamiento cuadrático de $|\psi\rangle$ (7.41). Para $I_f^{\text{sp}}(\rho)$ podemos simplemente reemplazar f_k por los autovalores λ_k de ρ^{sp} . En el caso de la entropía cuadrática S_2 , la ecuación (7.54) es por supuesto *exacta* $\forall w \in [0, 1]$ e independiente de d ($|f''(d^{-1})| = 4$).

Los resultados previos son entonces similares a aquellos que se obtienen para estados bipartitos con componentes distinguibles [10], donde el papel desempeñado por la base que diagonaliza a ρ^{qsp} corresponde aquí a la base de Schmidt local del estado puro pertinente.

7.2.1. El caso de 4 modos

Nos enfocamos ahora en el caso especial de un sistema de fermiones con $\dim(\mathcal{H}) = 4$. Como vimos en la sección 5.2.2, el entrelazamiento de formación puede ser evaluado analíticamente en estados de tales sistemas. Por simplicidad consideraremos estados mezcla de paridad impar. Un estado puro general será entonces una combinación lineal de estados de un fermión y estados de tres fermiones (5.37), y puede escribirse como

$$|\psi\rangle = \sum_i^4 (\alpha_i c_i^\dagger |0\rangle + \bar{\beta}_i c_i |\bar{0}\rangle), \quad (7.55)$$

donde $|\bar{0}\rangle = c_1^\dagger c_2^\dagger c_3^\dagger c_4^\dagger |0\rangle$ es el estado completamente ocupado y α, β son vectores complejos de cuatro componentes que satisfacen $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Recordemos que los autovalores de la matriz densidad de un cuerpo generalizada ρ^{qsp} , para este estado, están cuádruplemente degenerados y dados por

$$f_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - C^2(|\psi\rangle)}}{2}, \quad (7.56)$$

donde $C(|\psi\rangle) = 2|\beta^\dagger \alpha|$ es la *medida de correlación de Slater generalizada* (5.42). Este resultado implica que siempre existe una base de cuasipartículas en la cual el estado (7.55) toma la forma normal

$$|\psi\rangle = (\sqrt{f_+} a_1^\dagger + \sqrt{1 - f_+} a_2^\dagger a_3^\dagger a_4^\dagger) |0\rangle, \quad (7.57)$$

con $|0\rangle$ el vacío de los operadores a_i . En términos de C la entropía de entrelazamiento (5.25) resulta entonces

$$S^{\text{qsp}}(|\psi\rangle) = 4h \left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2(|\psi\rangle)}}{2} \right). \quad (7.58)$$

Como mostramos en la sección 5.2.2, para un estado mezcla ρ el techo convexo de S^{qsp} puede evaluarse mediante la fórmula

$$S^{\text{qsp}}(\rho) = 4h \left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2(\rho)}}{2} \right), \quad (7.59)$$

donde $C(\rho)$ es el techo convexo de la concurrencia. Esta cantidad se anula si ρ puede escribirse como una combinación convexa de determinantes de Slater en la misma base de partículas o cuasipartículas.

Consideremos ahora el estado en (7.48) con un estado puro máximamente entrelazado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^\dagger + a_2^\dagger a_3^\dagger a_4^\dagger)|0\rangle$, que conduce a $f_\pm = 1/2$. La concurrencia fermiónica es entonces $C(\rho) = \text{Max}[(7w-3)/4, 0]$ y por lo tanto la ecuación (7.59) conduce a

$$S^{\text{qsp}}(\rho) = \begin{cases} 0 & w \leq 3/7 \\ 4h\left(\frac{4+\sqrt{7[1+w(6-7w)]}}{8}\right) & w > 3/7 \end{cases} \quad (7.60)$$

La pérdida de información $I_f^{\text{qsp}}(\rho)$ puede evaluarse fácilmente a partir de (7.51), pues todos los modos tiene una probabilidad $1/2$ de encontrarse ocupados:

$$I_f^{\text{qsp}}(\rho) = 4\left[2f\left(\frac{3w+1}{8}\right) - f\left(\frac{7w+1}{8}\right) - f\left(\frac{1-w}{8}\right)\right]. \quad (7.61)$$

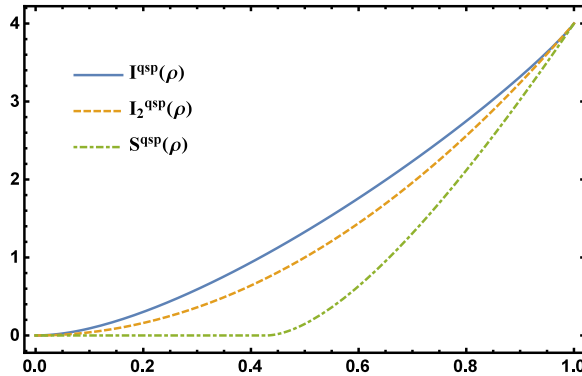


Figura 7.1: Pérdida de información $I_f^{\text{qsp}}(\rho)$ y entrelazamiento de formación $S^{\text{qsp}}(\rho)$ (normalizados a sus valores máximos) para la entropía cuadrática (línea de trazo) y la entropía de von Neumann (línea sólida) como funciones del parámetro de mezcla w en el estado (7.48), con $n = 4$, paridad de número impar, y estado puro $|\psi\rangle$ máximamente entrelazado.

La figura 7.1 muestra esta pérdida de información en el caso de la entropía de von Neumann ($f(p) = -p \log_2 p$) y en el caso de la entropía cuadrática ($f(p) = 2p(1-p)$), junto con el correspondiente entrelazamiento de formación, $S^{\text{qsp}}(\rho)$ y $S_2^{\text{qsp}}(\rho) = 4C^2(\rho)$, como función del parámetro de mezcla w . Mientras se observa un valor umbral de $w = 3/7$ debajo del cual el estado permanece separable, $I_f^{\text{qsp}}(\rho) > 0$ apenas ρ se aparta del estado máximamente mezclado, como se observa en (7.54), lo que implica que la pérdida de información detecta correla-

ciones “no clásicas” más allá del entrelazamiento. Como complemento, vale notar que mientras $I_2^{\text{qsp}}(\rho)$ es una cota superior a $S_2^{\text{qsp}}(\rho)$ para los estados considerados $\forall w \in (0, 1)$, este no es estrictamente el caso para las cantidades basadas en la entropía de von Neumann, dado que $I^{\text{qsp}}(\rho) < S^{\text{qsp}}(\rho)$ para w por debajo (pero muy cerca) de 1.

7.2.2. Estados de dos fermiones

Asumiremos ahora que $|\psi\rangle$ en (7.48) es un estado de dos fermiones. Estos son estados de la forma

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} \sum_{i,j} M_{ij} c_i^\dagger c_j^\dagger |0\rangle \quad (7.62)$$

donde M es una matriz compleja de $n \times n$ que satisface $\frac{1}{2} \text{Tr} M M^\dagger = 1$. Como mostró Zumino en [122], para cualquier matriz de este tipo existe una matriz unitaria U tal que $U^\dagger M \bar{U} = D$, donde D es una matriz diagonal por bloques, y donde cada bloque de 2×2 tiene la forma

$$D_k = \sqrt{\lambda_k} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.63)$$

con λ_k es un número real. Con la correspondiente transformación unitaria $\mathbf{c} = U \mathbf{a}$ de los operadores fermiónicos, podemos entonces escribir el espacio sp como la suma directa $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B$ y reescribir el estado (7.62) en la forma normal

$$|\psi\rangle = \sum_k \sqrt{\lambda_k} a_{k(A)}^\dagger a_{k(B)}^\dagger |0\rangle. \quad (7.64)$$

La ecuación (7.64) es la *descomposición de Slater* [89] de $|\psi\rangle$, que reconocemos como la descomposición de Schmidt de un estado de dos fermiones distinguibles (ver lema 6.1.4). La matriz densidad de un cuerpo asociada es

$$\rho^{\text{sp}} = M M^\dagger = U D D^T U^\dagger, \quad (7.65)$$

de manera que los números λ_k son sus autovalores (doblemente degenerados), como es también evidente de (7.64). Así, la base de Slater es precisamente aquella

que diagonaliza a ρ^{SP} (la cual coincide en este caso con ρ^{qSP}). Obtenemos entonces

$$S^{\text{qSP}}(|\psi\rangle) = S^{\text{SP}}(|\psi\rangle) = 2 \sum_k h(\lambda_k), \quad (7.66)$$

que es la suma de las entropías de entrelazamiento de todos los modos de la base de Slater. Tenemos también

$$S_f^{\text{SP}}(|\psi\rangle) = 2 \sum_k f(\lambda_k) + f(1 - \lambda_k). \quad (7.67)$$

Considerando ahora la pérdida de información de un cuerpo $I_f^{\text{qSP}}(\rho) = I_f^{\text{SP}}(\rho)$ asociada a la mezcla (7.48) de $|\psi\rangle$ con el estado máximamente mezclado, como los operadores $a_{k(A)}$, $a_{k(B)}$ son los operadores fermiónicos que diagonalizan la matriz densidad de un cuerpo, la medida que minimiza a $I_f^{\text{SP}}(\rho)$ en el estado (7.48) es aquella asociada a la base de Slater de $|\psi\rangle$ y es entonces una función de los autovalores λ_k :

$$I_f^{\text{SP}}(\rho) = 2 \sum_k \left[f\left(w\lambda_k + \frac{1-w}{d}\right) + f\left(w(1 - \lambda_k) + \frac{1-w}{d}\right) - f\left(w + \frac{1-w}{d}\right) - f\left(\frac{1-w}{d}\right) \right], \quad (7.68)$$

con $d = 2^n$ en el ensemble gran canónico, $d = 2^{n-1}$ en un ensemble de paridad par y $d = \frac{n(n-1)}{2}$ en un ensemble canónico. Los presentes resultados son entonces formalmente similares a aquellos obtenidos en sistemas bipartitos de componentes distinguibles [10], con la base de Slater reemplazando a la base local de Schmidt.

Capítulo 8

Conclusiones

En primer lugar, se ha extendido el concepto de entropía condicional cuántica dependiente de la medida en un sistema cuántico bipartito a formas entrópicas generales. Esta cantidad es una medida del grado de incerteza promedio, tras una medida local en uno de los componentes, del estado del componente no medido, y resulta consistente para todas las formas entrópicas consideradas, satisfaciendo las mismas propiedades básicas que satisface la entropía condicional usual basada en la entropía de von Neumann (como ser la concavidad, o el estar acotada superiormente por la entropía del estado marginal original). Estudiamos además el problema de optimización asociado a esta cantidad, que determina la medida local que permite el máximo acceso a correlaciones, y mostramos que: 1) para ciertos estados típicos e importantes en información cuántica, existe una medida optimizante universal válida para toda forma entrópica; 2) existe una solución exacta y analítica al problema de optimización para la entropía condicional cuadrática en estados generales de sistemas qudit-qubit (entre todas las medidas locales POVM) que conduce a un problema generalizado de autovalores; 3) existe también una solución analítica, aproximada, válida para todas las formas entrópicas, en estados débilmente correlacionados de sistemas qudit-qubit. Además, se ha demostrado que la variedad de estados posmedidos en el qudit es siempre un elipsoide, lo cual provee una simple interpretación geométrica de la solución analítica hallada. Esta solución permitió comprender las características básicas que determinan la medida minimizante de la discordia en estados no puros típicos, tales como los estados reducidos de pares en cadenas de espines en interacción. Los resultados derivados de este trabajo fueron también verificados experimentalmente en estados mezcla de dos qubits generados a partir de pares de fotones correlacionados

en estados idénticos de polarización, permitiendo la determinación experimental de la discordia cuántica y el déficit de información a partir de medidas de pureza.

Las investigaciones descritas dan lugar a nuevos interrogantes acerca de, por ejemplo, la existencia de soluciones analíticas al problema de optimización en sistemas con mayor dimensión, y también de la forma del conjunto de estados locales posmedidos en estos sistemas, incluyendo la posibilidad de derivar testigos de entrelazamiento, cuantificación de correlaciones, e incluso límites que caractericen las máximas correlaciones accesibles en mecánica cuántica, a partir del estudio de dicho conjunto. Actualmente se están investigando estas temáticas.

En la segunda parte introducimos una medida entrópica de entrelazamiento de modos en sistemas de fermiones a partir de una definición consistente de la medida de la ocupación de un modo del espacio de Hilbert de una partícula. Mostramos luego que la minimización de esta cantidad sobre todas las bases de dicho espacio resulta en una medida de entrelazamiento entre partículas, que depende solo de los autovalores de la matriz densidad de un cuerpo del sistema. La extensión de esta cantidad a modos de cuasipartículas es directa, siendo así la entropía de entrelazamiento una función de los autovalores de la matriz densidad de un cuerpo extendida. Se conectan así, por primera vez, las nociones de entrelazamiento de modos y entrelazamiento de partículas en estos sistemas. La medida introducida se extendió luego a estados no puros, lográndose la evaluación analítica de la extensión fermiónica de la concurrencia a estados generales en un espacio de una partícula con dimensión 4. Esto permite la evaluación analítica del entrelazamiento de formación en estos estados, constituyendo una notable extensión al conocido caso soluble de dos qubits. Nótese, sin embargo, que la dimensión del espacio de estados en el caso fermiónico es mayor que en el caso dos qubits. Mostramos asimismo que esta entropía de entrelazamiento, en el caso en que el espacio de Hilbert de una partícula tiene dimensión 4, efectivamente cuantifica el entrelazamiento entre dos qubits distinguibles, el cual puede extraerse realizando las medidas de los observables adecuados; este entrelazamiento entre qubits distinguibles corresponde a una partición particular del espacio de Hilbert de una partícula, y proporciona una cota inferior al entrelazamiento entre modos en cualquier bipartición. Se examinó también la implementación fermiónica de algunos protocolos de información cuántica, notando que a pesar de las limitaciones impuestas por la conservación de la paridad de número es posible la realización eficiente de ciertas tareas, e incluso introducir dos tipos de qubits (uno por cada

paridad) que pueden coexistir en la misma colección de modos fermiónicos, preservando la paridad global. Además mostramos que los circuitos clásicos pueden ser inmediatamente reproducidos mediante modos fermiónicos.

Finalmente, derivamos una medida de cuanticidad de las correlaciones en sistemas fermiónicos análoga a una discordia cuántica, o déficit de información, que puede ser no nula aún en estados sin entrelazamiento y que se reduce a la entropía de entrelazamiento introducida previamente para estados puros, en completa analogía con su contraparte definida para estados de sistemas con componentes distinguibles. Esta medida está referida a observables de un cuerpo, lo cual implica una baja complejidad en su evaluación. Se logró así su determinación analítica en ciertos estados típicos de interés.

A partir de estos resultados existen varias extensiones y aplicaciones que están siendo investigadas, tales como el estudio del comportamiento de las medidas introducidas en sistemas superconductores y otros sistemas fermiónicos fuertemente interactuantes, y también la extensión a medidas basadas en la ocupación multimodal. Además, el reciente desarrollo de tecnologías cuánticas basadas en “electron quantum optics” [115?] incrementa el interés por estos resultados, es decir, por una definición precisa de entrelazamiento y correlaciones cuánticas en sistemas fermiónicos.

Apéndice A

A.1. Entropía condicional generalizada

Para dos variables aleatorias *clásicas* A, B descritas por una distribución de probabilidad conjunta $p_{ij} = p(A = i, B = j)$, podemos definir la entropía condicional $S_f(A|B)$ como

$$S_f(A|B) = \sum_j p_j S_f(A|B = j) = \sum_{i,j} p_j f(p_{ij}/p_j), \quad (\text{A.1})$$

donde $p_j = p(B = j) = \sum_i p_{ij}$. Esta cantidad mide la incerteza promedio acerca de A si B es conocido. Debido a la concavidad, esta satisface $S_f(A|B) \leq S_f(A) = \sum_i f(q_i)$ (con $q_i = p(A = i) = \sum_j p_{ij}$) $\forall S_f$. La diferencia

$$I_f(A|B) = S_f(A) - S_f(A|B),$$

es entonces no negativa, anulándose solo si $p_{ij}/p_j = p_i \forall i, j$ con $p_j > 0$, es decir, solo si A y B son independientes. Esta representa la reducción en la incerteza (o “ganancia de información” generalizada) acerca de A inducida por el conocimiento obtenido sobre B .

En el caso de la entropía de Shannon $f(p) = -p \log_a p$, (A.1) resulta $S(A|B) = S(A, B) - S(B)$, donde $S(A, B) = -\sum_{i,j} p_{ij} \log_a p_{ij}$, $S(B) = -\sum_j p_j \log_a p_j$, pero tal relación no vale para una S_f general. Por lo tanto, mientras en el caso clásico de la entropía de Shannon $I(A|B) = S(A) + S(B) - S(A, B) = I(B|A)$ es la información mutua, para una S_f arbitraria, $I_f(A|B)$ diferirá en general de $I_f(B|A)$. Generalizaciones de la entropía condicional de Shannon basadas en entropías de Renyi han sido recientemente discutidas en [130] (y versiones cuánticas en [131]), mientras que extensiones especiales para el caso de Tsallis han sido consideradas

en [132].

A.2. Relación con el entrelazamiento de formación

Esbozemos la prueba de la identidad (2.17) [33, 133, 134]. Comenzando por la descomposición de Schmidt de (AC, B) en el estado puro global,

$$|\Psi_{ACB}\rangle = \sum_{k=1}^n \sqrt{q_k} |\tilde{k}_{AC}\rangle |\tilde{k}_B\rangle, \quad (\text{A.2})$$

el estado de AC tras la medida en B basada en los operadores (2.11) con resultado j es el estado puro (ecuación (2.13))

$$|j_{AC}\rangle = (r_j/p_j)^{1/2} \sum_k \sqrt{q_k} \langle j_B | \tilde{k}_B \rangle |\tilde{k}_{AC}\rangle. \quad (\text{A.3})$$

Por lo tanto, ρ_{A/Π_j} es el estado reducido ρ_A^j de A en $|j_{AC}\rangle$ y $S_f(A|B_{\{\Pi_j\}}) = \sum_j p_j S_f(\rho_A^j)$ coincide con el entrelazamiento promedio de la descomposición $\rho_{AC} = \sum_j p_j \rho_{AC/\Pi_j}$, donde $\rho_{AC/\Pi_j} = |j_{AC}\rangle \langle j_{AC}|$. Recíprocamente, la ecuación (A.2) implica que los estados $|j_{AC}\rangle$ en cualquier descomposición $\rho_{AC} = \sum_j p_j |j_{AC}\rangle \langle j_{AC}|$ (con $p_j > 0$) deben satisfacer

$$\sqrt{p_j} |j_{AC}\rangle = \sum_k U_{jk} \sqrt{q_k} |\tilde{k}_{AC}\rangle, \quad (\text{A.4})$$

donde U es una matriz de $m \times n$ con columnas ortonormales ($\sum_j U_{jk}^* U_{jk'} = \delta_{kk'}$) y $m \geq n$. Una comparación con (A.3) indica que podemos identificar tal descomposición con aquella correspondiente a una medida local en B basada en los operadores (2.11), siempre que

$$\sqrt{r_j} |j_B\rangle = \sum_k U_{jk}^* |\tilde{k}_B\rangle, \quad (\text{A.5})$$

de manera que $U_{jk} = \sqrt{r_j} \langle j_B | \tilde{k}_B \rangle$. Los consiguientes operadores $\Pi_j^B = r_j |j_B\rangle \langle j_B|$ forman un conjunto POVM válido, pues $\sum_j \Pi_j^B = \sum_{j,k,k'} U_{jk}^* U_{jk'} |\tilde{k}_B\rangle \langle \tilde{k}'_B| = \sum_k |\tilde{k}_B\rangle \langle \tilde{k}_B| = I_B$ (asumiendo $n = d_B$).

Apéndice B

B.1. Apéndice: Vacío de cuasipartículas

De acuerdo con el teorema de Thouless [112] el vacío $|0_{\mathbf{a}}\rangle$ de los operadores de cuasipartículas (5.18) está dado, si $\text{Det } U \neq 0$, por [102]

$$\begin{aligned} |0_{\mathbf{a}}\rangle &= \gamma \exp\left[\frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} c_i^\dagger c_j^\dagger\right] |0\rangle \\ &= \gamma [1 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} c_i^\dagger c_j^\dagger + \dots] |0\rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

donde $\gamma = \sqrt{|\text{Det } U|}$ y $T = -U^{-1}V$ es una matriz antisimétrica, con $|0\rangle$ el vacío de los operadores c_j . La ecuación (B.1) puede verificarse directamente aplicando a_ν a (B.1) (si $\text{Det } U = 0$, $|0_{\mathbf{a}}\rangle$ puede obtenerse aplicando operadores de creación adicionales c_j^\dagger a (B.1)).

Si $|\Psi\rangle = |0_{\mathbf{a}}\rangle$, entonces $f_\nu = \langle 0_{\mathbf{a}} | a_\nu^\dagger a_\nu | 0_{\mathbf{a}} \rangle = 0 \ \forall \ \nu$, lo que implica $S^{\text{qsp}} = 0$. Sin embargo, es fácil ver que

$$\rho^{\text{sp}} = 1 - \langle 0_{\mathbf{a}} | \mathbf{c} \mathbf{c}^\dagger | 0_{\mathbf{a}} \rangle = V V^\dagger, \quad (\text{B.2})$$

lo que implica $S^{\text{sp}} > 0$ si $V \neq 0$. Los autovalores p_k de ρ^{sp} son los cuadrados de los valores singulares de V . El estado $|\Psi\rangle$ resulta, por lo tanto, entrelazado a nivel de partículas, reflejando que no puede escribirse como un determinante de Slater en términos de operadores de la forma (5.13).

Apéndice C

C.1. Entrelazamiento entre particiones del espacio de estados de una partícula

Consideremos un sistema fermiónico con espacio \mathcal{H} de dimensión n , y una partición $(m, n - m)$ de \mathcal{H} en dos subespacios complementarios \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B , el primero generado por m estados ortogonales de una base dada de \mathcal{H} y el segundo por los restantes $n - m$ estados. Cualquier determinante de Slater en esta base puede escribirse entonces, excepto por una fase global, como

$$|\psi_{sd}\rangle = \prod_{i \in \mathcal{H}_A} (c_i^\dagger)^{n_i} \prod_{j \in \mathcal{H}_B} (c_j^\dagger)^{n_j} |0\rangle \equiv |\mu\nu\rangle \quad (\text{C.1})$$

donde $n_{i(j)} = 0, 1$ es el número de ocupación del nivel i (j) y $\mu = \{n_i, i \in \mathcal{H}_A\}$, $\nu = \{n_j, j \in \mathcal{H}_B\}$ indica el conjunto de estos números. El conjunto completo de estados $|\mu\nu\rangle$, con $\mu = 1, \dots, 2^m$, $\nu = 1, \dots, 2^{n-m}$, forma una base ortonormal del espacio de Fock completo del sistema fermiónico de dimensión 2^n .

Cualquier estado fermiónico puro puede escribirse entonces como

$$|\psi\rangle = \sum_{\mu, \nu} C_{\mu\nu} |\mu\nu\rangle \quad (\text{C.2})$$

donde la suma se restringe a los estados $|\mu\nu\rangle$ de la misma paridad de número $|\psi\rangle$ ($|++\rangle$ o $|--\rangle$ para $|\psi\rangle$ de paridad par). Tras una descomposición en valores singulares $C = UDV^\dagger$ de la matriz C , con $D_{kl} = \sigma_k \delta_{kl}$ una matriz “diagonal” de $2^m \times 2^{n-m}$ y U, V matrices ortonormales de $2^m \times 2^m$ y $2^{n-m} \times 2^{n-m}$, podemos reescribir al estado como

$$|\psi\rangle = \sum_k \sigma_k |k_A k_B\rangle, \quad (\text{C.3})$$

con $|k_1 k_2\rangle = \sum_{\mu, \nu} U_{\mu k} V_{\nu k}^* |\mu \nu\rangle$ estados ortonormales. Esta es la descomposición de Schmidt asociada a esta partición. Por supuesto, U y V están también bloqueadas, de manera que todos los estados $|k_A k_B\rangle$ tienen la misma paridad que $|\psi\rangle$.

La entropía de entrelazamiento asociada a la partición previa es entonces

$$E_{12} = S(\rho_A) = S(\rho_B) = - \sum_k \lambda_k \log_2 \lambda_k \quad (\text{C.4})$$

con $\lambda_k = \sigma_k^2$ los autovalores de CC^\dagger o equivalentemente $C^\dagger C$ y

$$\rho_A = \sum_{\mu, \mu'} (CC^\dagger)_{\mu\mu'} |\mu\rangle \langle \mu'| = \sum_k \lambda_k |k_A\rangle \langle k_A|, \quad (\text{C.5})$$

$$\rho_B = \sum_{\nu, \nu'} (C^\dagger C)_{\nu\nu'} |\nu\rangle \langle \nu'| = \sum_k \lambda_k |k_B\rangle \langle k_B| \quad (\text{C.6})$$

son los estados reducidos de los subespacios \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B , de manera que cualquier observable $O_{A(B)}$ conteniendo un número par de operadores c_i^\dagger, c_i con i perteneciendo solo a $\mathcal{H}_{A(B)}$ puede obtenerse como

$$\langle O_{A(B)} \rangle = \text{Tr} \rho_{A(B)} O_{A(B)}$$

Un determinante de Slater en una dada base del espacio sp es entonces un estado completamente separable, en el mismo sentido que $E_{AB} = 0$ para una bipartición $(m, n - m)$ de \mathcal{H} en esta base. Por otra parte, si un estado no es un determinante de Slater entonces no existe base en la que sea completamente separable. Notar que ρ_{AB} conmuta con el operador de paridad, pero tendrá en general autoestados con las dos paridades.

En particular, si \mathcal{H}_A contiene solo un nivel (digamos k), la ecuación (C.2) pasa a ser

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_{\nu} C_{0\nu} |0\nu\rangle + \sum_{\nu'} C_{1\nu'} |1\nu'\rangle \\ &= \sqrt{p_0} |0\psi_0\rangle + \sqrt{p_1} |1\psi_1\rangle \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

donde $p_i = \sum_{\nu} |C_{i\nu}|^2$ y $|i\psi_i\rangle = \sum_{\nu} C_{i\nu} |\nu\rangle / \sqrt{p_i}$. La expresión en (C.7) es la descomposición de Schmidt de $|\psi\rangle$ pues los estados $|\psi_0\rangle$ y $|\psi_1\rangle$ tienen paridad de número opuesta, y son por lo tanto necesariamente ortogonales.

Consideremos ahora el entrelazamiento de estados mezcla. Si se realiza una

partición de \mathcal{H}_B en dos subespacios \mathcal{H}_{B_1} y \mathcal{H}_{B_2} , podemos definir el entrelazamiento de formación asociado $E_{B_1 B_2}(\rho_B)$ como la mínima entropía de entrelazamiento promedio

$$\sum_{\alpha} p_{\alpha} E_{B_1, B_2}(|\alpha\rangle\langle\alpha|) = \sum_{\alpha} p_{\alpha} S(\rho_{B_1}^{\alpha}), \quad (\text{C.8})$$

donde el mínimo se toma sobre todas las descomposiciones $\rho_B = \sum_{\alpha} p_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha|$, con $p_{\alpha} \geq 0$, $\sum_{\alpha} p_{\alpha} = 1$, $\rho_{B_1}^{\alpha}$ el estado reducido de B_1 en el estado $|\alpha\rangle$, y $|\alpha\rangle$ estados normalizados de muchos fermiones en \mathcal{H}_B , con la restricción (pues $[\rho_B, P_B] = 0$) de que todos los estados $|\alpha\rangle$ tengan paridad de número definida. Esto implica que $E_{B_1 B_2}(\rho_B)$ será el promedio de los entrelazamientos de formación para cada paridad, es decir, $E_{B_1 B_2}(\rho_B) = p_+ E_{B_1 B_2}(\rho_B^+) + p_- E_{B_1 B_2}(\rho_B^-)$ si $\rho_B = p_+ \rho_B^+ + p_- \rho_B^-$.

En particular, si \mathcal{H}_A es un solo modo la ecuación (C.7) conduce a

$$\rho_B = p_0 |\psi_0\rangle\langle\psi_0| + p_1 |\psi_1\rangle\langle\psi_1|, \quad (\text{C.9})$$

con $|\psi_0\rangle$ y $|\psi_1\rangle$ de diferente paridad. Por lo tanto, en este caso la descomposición es única y el entrelazamiento de formación resulta

$$E_{B_1 B_2} = p_0 \rho_{B_1}^0 + p_1 \rho_{B_2}^1 = S(B_1|A), \quad (\text{C.10})$$

donde $S(B_1|A)$ denota la entropía condicional del subsistema B_1 tras una medida del modo A en la mezcla ρ_{AB_1} , en acuerdo con el resultado general de [33].

Vale remarcar que un estado mezcla fermiónico ρ_A definido sobre un espacio $\text{sp } \mathcal{H}_A$ (y que conmuta con P) puede purificarse en diferentes formas, pero en particular mediante la adición de un espacio sp complementario \mathcal{H}_B , como resulta evidente de la discusión previa. En un contexto gran canónico si ρ_A es, digamos, de rango 2^n , con $2^n/2$ autoestados de cada paridad, es suficiente añadir n estados sp ortogonales que generen un espacio \mathcal{H}_B ortogonal, formando entonces un estado puro como (C.1), el cual deberá tener paridad definida.

Bibliografía

- [1] C. E. Shannon, The Bell System Technical Journal 27: 379, 623 (1948).
- [2] M. A. Nielsen and I. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge Univ. Press (2000).
- [3] N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarani, and S. Wehner, Rev. Mod. Phys. **86**, 839 (2014).
- [4] S. Yu, Q. Chen, C. Zhang, C. H. Lai, and C. H. Oh, Phys. Rev. Lett. **109**, 120402 (2012).
- [5] R. Bhatia, *Matrix Analysis* (Springer, NY, 1997); A. Marshall and I. Olkin, *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications* (Academic Press, 1979).
- [6] A. Kinchin, Uspekhi Matematicheskikh Nauk, **7** (1953) y **9** (1956).
- [7] H. Wehrl, Rev. Mod. Phys. **50**, 221 (1978).
- [8] N. Canosa, R. Rossignoli, Phys. Rev. Lett. **88**, 170401 (2002); Phys. Lett. A **264**, 148 (1999).
- [9] R. Rossignoli and N. Canosa, Phys. Rev. A **67**, 042302 (2003); Phys. Rev. A **66**, 042306 (2002).
- [10] R. Rossignoli, N. Canosa, L. Ciliberti, Phys. Rev. A **82**, 052342 (2010); Phys. Rev. A **84**, 052329 (2011).
- [11] C. Tsallis, *Introduction to Non-Extensive Statistical Mechanics* (Springer, Berlin, 2009).
- [12] A. Renyi, *On measures of entropy and information*, Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. 1960, **1**, 547 (1961).

-
- [13] E. Schrödinger, Proc. Cambridge Philos. Soc. **31**, 555 (1935).
- [14] J. S. Bell, Physics **1**, 195 (1964).
- [15] E. Chitambar, D. Leung, L. Mancinska, M. Ozols, and A. Winter, Comm. Math. Phys. **328**, 303 (2014).
- [16] R. F. Werner, Phys. Rev. A **40**, 4277 (1989).
- [17] M. B. Plenio, S. Virmani, Quantum Inf. Comput. **7**, 1.
- [18] L. Gurvits, in Proceedings of the thirty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing (ACM, 2003) pp. 1019.
- [19] A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996).
- [20] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, Phys. Lett. A **223**, 1 (1996).
- [21] P. Horodecki, Phys. Lett. A **232**, 333 (1997).
- [22] N. J. Cerf, C. Adami, and R. M. Gingrich Phys. Rev. A **60**, 898 (1999)
- [23] S. Hill and W.K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **78**, 5022 (1997); W.K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).
- [24] B. Dakic *et al*, Nat. Phys. **8**, 666 (2012).
- [25] Cavalcanti *et al*, Phys. Rev. A **83**, 032324 (2011).
- [26] K. Modi *et al* Rev. Mod. Phys. **84**, 1655 (2012)
- [27] Ollivier H and Zurek W H 2001 *Phys. Rev. Lett* **88** 017901.
- [28] J. Oppenheim *et al*, Phys. Rev. Lett. **89**, 180402 (2002).11).
- [29] J. von Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik (Springer, Berlin) (1932).
- [30] M. Horodecki, K. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, J. Oppenheim, A. Sen De, and U. Sen, Phys. Rev. Lett. **90**, 100402 (2003).
- [31] A. Streltsov, H. Kampermann and D. Bru, Phys. Rev. Lett. **106**, 160401 (2011)

- [32] N. Gigena, R. Rossignoli, J. Phys. A **47**, 015302 (2014).
- [33] M. Koashi, A. Winter, Phys. Rev. A **69**, 022309 (2004).
- [34] P. Rungta, C. M. Caves, Phys. Rev. A **67**, 012307 (2003); Phys. Rev. A **64**, 042315 (2001).
- [35] G. Vidal, J. Mod. Opt. **47**, 355 (2000).
- [36] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, W. K. Wootters, Phys. Rev. A **54**, 3824 (1996).
- [37] M. A. Nielsen, Phys. Rev. Lett. **83**, 436 (1999).
- [38] B. Dakić, V. Vedral and Č. Brukner, Phys. Rev. Lett. **105**, 190502 (2010).
- [39] S. Hill, W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **78**, 5022 (1997); W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).
- [40] A. R. P. Rau, J. Phys. A: Math. Theor. **42**, 412002 (2009).
- [41] M. Ali, A.R.P. Rau, G. Alber, Phys. Rev. A **81**, 042105 (2010); A **82**, 069902 (E) (2010);
- [42] X. M. Lu et al, Phys. Rev. A **83**, 012327 (2011); Y. Huang, Phys. Rev. A **88**, 014302 (2013).
- [43] D. Girolami, G. Adesso, Phys. Rev. A **84**, 052110 (2011).
- [44] K. Zyczkowski et al, Phys. Rev. A **58**, 883 (1998); G. Vidal, R. F. Werner, Phys. Rev. A **65**, 032314 (2002).
- [45] L. Ciliberti, R. Rossignoli, N. Canosa, Phys. Rev. A **82**, 042316 (2010); Phys. Rev. A **88**, 0211219 (2013).
- [46] R. Rossignoli, N. Canosa, J. M. Matera Phys. Rev. A **77**, 052322 (2008); Phys. Rev. A **80**, 062325 (2009).
- [47] S. M. Giampaolo, G. Adesso, F. Illuminati, Phys. Rev. B **79**, 224434 (2009); Phys. Rev. Lett. **100**, 197201 (2008).
- [48] L. Ciliberti, N. Canosa, R. Rossignoli, Phys. Rev. A **88**, 012119 (2013); *Int.J.Mod.Phys. B* **27**, 1345033 (2012).

- [49] A. Streltsov, H. Kampermann, D. Bruß, Phys. Rev. Lett. **106**, 160401 (2011); M. Piani *et al*, Phys. Rev. Lett. **106**, 220403 (2011).
- [50] N. Gigena, R. Rossignoli, Phys. Rev. A **90**, 042318 (2014).
- [51] U. Fano, Rev. Mod. Phys. **55**, 855 (1983).
- [52] R. Dillenschneider, Phys. Rev. B **78**, 224413 (2008); M.S. Sarandy, Phys. Rev. A **80**, 022108 (2009).
- [53] B. Bellomo, R. Lo Franco, G. Compagno, Phys. Rev. A **77**,032342.
- [54] Q. Chen *et al*, Phys. Rev. A **84**, 042313 (2011); Y. Huang, Phys. Rev. A **88**, 014302 (2013).
- [55] K.K. Sabapathy, R. Simon, arXiv 1311.0210.
- [56] L. Rebón, R. Rossignoli, J. J. Varga, N. Gigena, N. Canosa, C. Iemmi and S. Ledesma, J. Phys. B **49**, 215201 (2016).
- [57] R. Filip, Phys. Rev. A **65**, 062320 (2002); H. Nakazato *et al*, Phys. Rev. A **85**, 042316 (2012); T. Tanaka *et al*, Phys. Rev. A **87**, 012303 (2013); K. Bartkiewicz, K. Lemr, A. Miranowicz, Phys. Rev. A **88**, 052104 (2013).
- [58] A. T. Brun, Quantum Information and Computation **4**, 401 (2004); F. A. Bovino *et al*, Phys. Rev. Lett. **95**, 240407 (2005); J. *et al*, Phys. Rev. A **74**, 042319 (2006); R. B. A. Adamson, L. K. Shalm, A. M. Steinberg, Phys. Rev. A **75**, 012104 (2007).
- [59] O. Gamel, D. F. B. James, Phys. Rev. A **86**, 033830 (2012).
- [60] A. Orioux, J. Boutari, M. Barbieri, M. Paternostro, P. Mataloni, *Sci. Rep.* **4**, 7184 (2014).
- [61] Ma. Xiao-Song *et. al*, Sci. Rep. **4**, 3583 (2014).
- [62] J. Kurmann, H. Thomas, G. Müller, Physica A **112**, 235 (1982).
- [63] N. Canosa, R. Rossignoli, J. M. Matera, Phys. Rev. B **81**, 054415 (2010).
- [64] Y. Huang, N. J. Phys. **16**, 033027 (2014).
- [65] D. C. Burnham, D. L. Weinberg Phys. Rev. Lett. **25**, 84 (1970).

-
- [66] L. Mandel, E. Wolf, *Optical coherence and quantum optics* (New York: Cambridge University Press).
- [67] R. Bhatia, *Matrix Analysis* (New York: Springer-Verlag) (1997).
- [68] M. A. Nielsen, J. Kempe, Phys. Rev. Lett. **86**, 5184 (2002).
- [69] L. Henderson, V. Vedral, J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 6899 (2001); V. Vedral, Phys. Rev. Lett. **90**, 050401 (2003).
- [70] A. Datta, A. Shaji, C. M. Caves, Phys. Rev. Lett. **100**, 050502 (2008).
- [71] K. Modi *et al* Rev. Mod. Phys. **84**, 1655 (2012).
- [72] K. Modi *et al* Rev. Mod. Phys. **84**, 1655 (2012).
- [73] F. Galve, G. L. Giorgi, R. Zambrini, Eur. Phys. J. **96**, 40005 (2011); M. Shi, W. Yang, F. Jiang, J. Du, J. Phys. A **44**, 415304 (2011).
- [74] W. Qiang, L. Zhang, H. Zhang, J. Phys. B **48**, 244503 (2015).
- [75] N. Canosa, L. Ciliberti, R. Rossignoli, Entropy **17** 1634 (2015).
- [76] E. Amsellem, M. Bourennane, Nat. Phys. **5**, 748 (2009).
- [77] I. D. Ivanovic, J. Phys. A **14**, 3241 (1981).
- [78] W. K. Wootters, B. D. Fields, Ann. Phys. **191**, 363 (1989).
- [79] D. F. V. James, P. G. Kwiat, W. J. Munro, A. G. White, Phys. Rev. A **64**, 052312 (2001).
- [80] J. Fiurášek, Phys. Rev. A, **64**, 024102 (2001).
- [81] N. Gigena and R. Rossignoli, Phys. Rev. A **92**, 042326 (2015).
- [82] C.H. Bennett et al, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).
- [83] R. Josza and N. Linden, Proc. R. Soc. London, Sect. A 459, 2011 (2003); G. Vidal, Phys. Rev. Lett. 91, 147902 (2003).
- [84] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki and K. Horodecki, Rev. Mod. Phys. **81**, 865 (2009).

-
- [85] G. Vidal, J.I. Latorre, E. Rico, and A. Kitaev, Phys. Rev. Lett. **90**, 227902 (2003).
- [86] L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh, and V. Vedral, Rev. Mod. Phys. **80**, 517 (2008).
- [87] J. Eisert, M. Cramer, and M.B. Plenio, Rev. Mod. Phys. **82**, 277 (2010).
- [88] A. Peres, *Quantum Theory, Concepts and Methods* (Kluwer Academic, The Netherlands, 1995).
- [89] J. Schliemann, J.I. Cirac, M. Kus, M. Lewenstein, D. Loss, Phys. Rev. A **64**, 022303 (2001).
- [90] J. Schliemann, D. Loss, and A.H. MacDonald, Phys. Rev. B **63**, 085311 (2001).
- [91] K. Eckert, J. Schliemann, D. Bruß and M. Lewenstein, Ann. Phys. **299**, 88 (2002).
- [92] P. Zanardi, Phys. Rev. A **65**, 042101 (2002).
- [93] Y. Shi, Phys. Rev. A **67**, 024301 (2003).
- [94] N. Friis, A.R. Lee, and D.E. Bruschi, Phys. Rev. A **87**, 022338 (2013).
- [95] H.M. Wiseman and J.A. Vaccaro, Phys. Rev. Lett. **91**, 097902 (2003).
- [96] G.C. Ghirardi and L. Marinatto Phys. Rev. A **70**, 012109 (2004).
- [97] A. Plastino, D. Manzano, and J. Dehesa, Europhys. Lett. **86**, 20005 (2009).
- [98] F. Iemini and R.O. Vianna, Phys. Rev. A **87**, 022327 (2013); F. Iemini, T.O. Maciel, and R.O. Vianna, Phys. Rev. B **92**, 075423 (2015).
- [99] F. Benatti, R. Floreanini, U. Marzolino, Phys. Rev. A **89**, 032326 (2014).
- [100] X.M. Puspus, K.H. Villegas, F.N.C. Paraan, Phys. Rev. B **90**, 155123 (2014).
- [101] C.V. Kraus, M.M. Wolf, J.I. Cirac, G. Giedke, Phys. Rev. A **79**, 012306 (2009).

- [102] P. Ring, P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem* (Springer, Berlin, Germany, 1980).
- [103] M. Oszmaniec, J. Gutt, M. Kuś, Phys. Rev. A **90**, 020302(R) (2014); M. Oszmaniec, M. Kuś, Phys. Rev. A **90**, 010302(R) (2014); Phys. Rev. A **88**, 0523328 (2013).
- [104] G. Sárosi, P. Lévy, J. Phys. A **47**, 115304 (2014); Phys. Rev. A **90**, 052303 (2014); Phys. Rev. A **89**, 042310 (2014).
- [105] N. Friis, New J. Phys. **18**, 033014 (2016).
- [106] R.F. Werner, Phys. Rev. A **40**, 4277 (1989).
- [107] C.H. Bennett, D.P. DiVincenzo, J.A. Smolin, W.K. Wootters, Phys. Rev. A **54**, 3824 (1996).
- [108] B. Mühlshlegel, D.J. Scalapino, and R. Denton, Phys. Rev. B **6**, 1767 (1972).
- [109] Y. Alhassid, J. Zingman, Phys. Rev. C **30**, 684 (1984); P. Arve, G. Bertsch, B. Lauritzen and G. Puddu, Ann. Phys. (N.Y.) **183**, 309 (1988); R. Rossignoli, A. Ansari, P. Ring, Phys. Rev. Lett. **70**, 1061 (1993); R. Rossignoli, N. Canosa, P. Ring, Phys. Rev. Lett. **80**, 1853 (1998).
- [110] J. Hubbard, Phys. Rev. Lett. **3**, 77 (1959); R.L. Stratonovich, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **115**, 1097 (1957) [Soviet Phys. Doklady **2**, 416 (1957)].
- [111] F. de Melo, P. Ćwikliński, B.M. Terhal, New J. Phys. **15**, 013015 (2013).
- [112] D.J. Thouless, Nucl. Phys. **21**, 225 (1960).
- [113] N. Gigena, R. Rossignoli, Phys. Rev. A **95** 062320 (2017).
- [114] R. Rossignoli, A. Plastino, Phys. Rev. C **32**, 1040 (1985).
- [115] D. Dasenbrook et al, New J. Phys. **18**, 043036 (2016).
- [116] P. Hausladen et al, Phys. Rev. A **90** 1869 (1996).
- [117] N. Gigena, R. Rossignoli, Phys. Rev. A **94** 042315 (2016).
- [118] N. Friis, New J. Phys. **18**, 033014 (2016).

-
- [119] J. Oppenheim, M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, Phys. Rev. Lett. **89** 180402 (2002).
- [120] R. Horodecki, M. Horodecki, Phys. Rev. A **54** 1838 (1996). Phys. Rev. A **67** 042302 (2003).
- [121] C. Beck, F. Schlögl, *Thermodynamic of Chaotic Systems* (Cambridge Univ. Press, UK, 1993).
- [122] B. Zumino, J. Math. Phys. **3** 1055 (1962)
- [123] L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh, V. Vedral, Rev. Mod. Phys. **80**, 517 (2008).
- [124] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki, Rev. Mod. Phys. **81**, 865 (2009).
- [125] J. Eisert, M. Cramer, M.B. Plenio, Rev. Mod. Phys. **82**, 277 (2010).
- [126] F. Iemini, T. Debarba, R.O. Vianna, Phys. Rev. A **89**, 032324 (2014);
- [127] A.P. Majtey, P.A. Bouvrie, A. Valdés-Hernández, A.R. Plastino, Phys. Rev. A **93**, 032335 (2016).
- [128] F. de Melo, P. Ćwikliński, B.M. Terhal, New J. Phys. **15**, 013015 (2015); Phys. Rev. Lett. **91**, 097902 (2003).
- [129] N. Canosa, R. Rossignoli, Phys. Rev. Lett. **88**, 170401 (2002); N. Gigena, R. Rossignoli, Phys. Rev. A **90**, 042318 (2014).
- [130] A. Texeira, A. Matos, L. Antunes, IEEE Trans. Inf. Theory **58**, 4273 (2012).
- [131] A. Rastegin, arXiv:1309.6048.
- [132] S. Abe, A. K. Rajagopal, Phys. A **289**, 157 (2001); A. K. Rajagopal et al, arXiv: 1309.6944.
- [133] D. Cavalcanti et al, Phys. Rev. A **83**, 032324 (2011).
- [134] F. F. Fanchini et al, Phys. Rev. A **84**, 012313 (2011).
- [135] W. H. Zurek, Phys. Rev. A **67**, 012320 (2003); Rev. Mod. Phys. **75**, 715 (2003).

-
- [136] E. Knill and R. Laflamme, Phys. Rev. Lett. **81**, 5672 (1998).
- [137] A. Datta, S. T. Flammia and C. M. Caves, Phys. Rev. A **72**, 042316 (2005).
- [138] A. Datta, A. Shaji and C. M. Caves, Phys. Rev. Lett. **100**, 050502 (2008).
- [139] D. Girolami, T. Tufarelli, G. Adesso, Phys. Rev. Lett. **110**, 240402 (2013);
G. Adesso arXiv:1308.1680
- [140] M. Horodecki et al, Phys. Rev. A **71**, 062307 (2005); J. Oppenheim et al,
Phys. Rev. Lett. **89**, 180402 (2002).
- [141] S. Luo, Phys. Rev. A **77**, 042303 (2008).
- [142] K. Modi et al, Phys. Rev. Lett. **104**, 080501 (2010).
- [143] B. Bellomo et al, Phys. Rev. A **85**, 032104 (2012).
- [144] D. Girolami and G. Adesso, Phys. Rev. Lett. **108**, 150403 (2012).
- [145] S. Luo, S. Fu, C. H. Oh, Phys. Rev. A **85**, 032117 (2012); L. Chang, S. Luo,
Phys. Rev. A **87**, 062303 (2013).
- [146] P. M. Paula, T. R. de Oliveira, M. S. Sarandy, Phys. Rev. A **87**, 064101
(2013).
- [147] G. Adesso, D. Girolami, A. Serafini, Phys. Rev. Lett. **109**, 190502 (2012).
- [148] P. Giorda, M. G. A. Paris, Phys. Rev. Lett. **105**, 020503 (2010).
- [149] G. Adesso, A. Datta, Phys. Rev. Lett. **105**, 030501 (2010); L. Mista et al,
Phys. Rev. A **83**, 042325 (2011).
- [150] F. Fanchini et al, Phys. Rev. A **81**, 052107 (2010).
- [151] D. Girolami, G. Adesso, Phys. Rev. A **83**, 052108 (2011).
- [152] S. Campbell et al, *New J. of Phys.* **15**, 043033 (2013).
- [153] R. Filip, Phys. Rev. A **65**, 062320 (2002); H. Nakazato et al, Phys. Rev. A
85, 042316 (2012); T. Tanaka et al, Phys. Rev. A **87**, 012303 (2013).
- [154] A. P. Majtey et al, *Phys. A* **391**, 2491 (2012); J. Jurkowski, *Int. J. Quantum
Inf.* **11**, 1350013 (2013).

-
- [155] C. H. Bennett *et al* Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).
- [156] R. Jozsa, N. Linden, Proc. R. Soc. London Ser. A **459**, 2011; G. Vidal, Phys. Rev. Lett. **91**, 147902 (2003).
- [157] R. Raussendorf, H. J. Briegel, Phys. Rev. Lett. **86**, 5188 (2001); R. Raussendorf, D. E. Brown, H. J. Briegel, Phys. Rev. A **68**, 022312 (2003).
- [158] S. Schumacher, Phys. Rev. A **51**, 2738 (1995).
- [159] V. Vedral, Phys. Rev. Lett. **90**, 050401 (2003).
- [160] W. H. Zurek, Phys. Rev. A **67**, 012320 (2003).
- [161] L. Roa, J. C. Retamal, M. Alid-Vaccarezza, Phys. Rev. Lett. **107**, 080401 (2011).
- [162] S. Pirandola, Scientific Reports **4**, 6956 (2014).
- [163] D. Girolami, T. Tufarelli, G. Adesso, Phys. Rev. Lett. **110**, 240402 (2013).
- [164] T. K. Chuan Bobby, T. Paterek, New J. Phys. **16**, 093063 (2014).
- [165] C. Wang *et al*, J. Phys. B **44**, 015503 (2011).
- [166] S. Adhikari, S. Banerjee, Phys. Rev. A **86**, 062313 (2012).
- [167] S. Hosseini *et al*, J. Phys. B **47**, 025503 (2014).
- [168] T. Baumgratz, M. Cramer, M. B. Plenio, Phys. Rev. Lett. **113**, 140401 (2014).
- [169] A. Streltsov *et al*, PhysRev. Lett. **115**, 020403 (2015).
- [170] Y. Yao, X. Xiao, L. Ge, C. P. Sun Phys. Rev. A **92**, 022112.
- [171] J. M. Matera, D. Egloff, N. Killoran, M. B. Plenio, Quantum Sci. Technol. **1**, 01LT01 (2016).
- [172] C. H. Bennett *et al*, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).
- [173] R. Jozsa and N. Linden, Proc. R. Soc. London, Sect. A **459**, 2011 (2003); G. Vidal, Phys. Rev. Lett. **91**, 147902 (2003).

-
- [174] E. Knill and R. Laflamme, Phys. Rev. Lett. **81** 5672 (1998).
- [175] N. Killoran, M. Cramer, and M.B. Plenio, Phys. Rev. Lett. **112**, 150501 (2014)
- [176] R. Lo Franco, G. Compagno, Sci. Rep. **6**, 20603 (2016).
- [177] R. Filip, Phys. Rev. A **65**, 062320 (2002); H. Nakazato et al, Phys. Rev. A **85**, 042316 (2012); T. Tanaka, G. Kimura, and H. Nakazato, Phys. Rev. A **87**, 012303 (2013).