

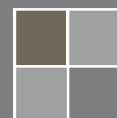
2016

Enseñanza por Investigación en
el marco de la Teoría
Antropológica de lo Didáctico:
Una propuesta para estudiar las
funciones a trozos

Ana Rosa Corica

Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología.
Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional del Centro
de la Provincia de Buenos Aires.

ISBN 978-950-658-404-7



Corica, Ana Rosa

Enseñanza por investigación en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico : una propuesta para estudiar las funciones a trozos / Ana Rosa Corica. - 1a ed . - Tandil : Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, 2016.

Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-950-658-404-7

1. Antropología de la Educación. 2. Enseñanza. 3. Investigación. I. Título.
CDD 370.7

Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología.
Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional del Centro de la
Provincia de Buenos Aires.

© Ana Rosa Corica

e-mail: acorica@exa.unicen.edu.ar

ISBN 978-950-658-404-7

**Enseñanza por Investigación en el
marco de la Teoría Antropológica de lo
Didáctico: Una propuesta para estudiar las
funciones a trozos**

Ana Rosa Corica

Índice

Introducción.....	5
La Teoría Antropológica de lo Didáctico y los Recorridos de Estudio e Investigación.....	7
Descripción de la propuesta didáctica	10
Consideraciones finales	47
Bibliografía.....	50

Introducción

En este texto se presenta un recurso de enseñanza propuesto para la escuela secundaria. El objetivo es promover una actividad matemática genuina, debatir, explorar, conjeturar, formular preguntas, crear nuevos problemas. El estudio adopta una concepción epistemológica que permite considerar a la matemática como un saber funcional, útil, y que posibilita a los alumnos vincularse con ella de este modo.

Se comienza con el análisis de una situación que requiere comparar planes de compañías que ofrecen el servicio de telefonía celular. Se trata de analizar una situación cercana a cualquier ciudadano, donde ni los datos ni las variables están completamente determinados de antemano.

La situación está inspirada en la propuesta de Rodríguez - Quintana (2005), quien propone comparar tarifas de telefonía celular a partir del estudio de una situación próxima a la realidad. El conjunto de interrogantes que surgen permiten involucrar al grupo de clase en un estudio compatible con el paradigma de la investigación y del cuestionamiento del mundo. En esta propuesta, se requiere comparar tarifas de telefonía celular analizando el estado actual de compañías en Argentina.

En consonancia con la concepción epistemológica de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), esta situación, genera un tipo de actividad matemática poco habitual en los sistemas actuales de enseñanza, y donde la modelización del sistema cobra un lugar esencial. Esto implica un trabajo a largo plazo, con el objetivo de

responder a una pregunta inicial que constituye su razón de ser. El análisis de la situación inicial y la búsqueda de respuesta constituyen el motor del recorrido de estudio e investigación que se realiza.

Según la TAD la actividad matemática es más que resolver problemas: se trata de formular y responder preguntas, buscar en diferentes medias, desarrollar diferentes técnicas, realizar conjeturas, validar soluciones, interactuar con otros miembros del grupo de estudio, cotejar resultados, técnicas, validaciones, etc. Es requisito fundamental en esta propuesta, *romper* con la concepción atomizada de la matemática y dar lugar a recorrer diversas organizaciones matemáticas según las necesidades del estudio.

Para gestionar la propuesta se requiere un rol de profesor diferente, pues tiene que desplazarse del lugar habitual que se acepta en la institución y abandonar el papel de protagonista principal, para ceder lugar al hacer de los estudiantes. Esto no debe llevar al error de un profesor ausente, sino, de un director del proceso de estudio y de investigación, capaz de incidir oportuna y eficazmente para hacer evolucionar el estudio. Es necesario que sus "ayudas al estudio" se orienten a que el grupo de alumnos logre problematizar la situación y que el estudio no pierda sentido.

La Teoría Antropológica de lo Didáctico y los Recorridos de Estudio e Investigación

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999, 2007, 2012, 2013a, 2013b) propone introducir en los sistemas de enseñanza procesos de enseñanza funcionales en lugar de estudiar saberes inmotivados, como respuesta a preguntas cuyo origen se desconoce o se oculta. Se proponen preguntas umbilicales que requieran de herramientas materiales y conceptuales, útiles para estudiar y responder preguntas, siempre de manera inacabada. Los Recorridos de Estudio e Investigación (REI) son dispositivos que permitirían afrontar el fenómeno de monumentalización del saber a partir de una nueva epistemología escolar basada en la investigación y el cuestionamiento del mundo (Otero, Fanaro, Corica, Llanos, Sureda y Parra, 2013). Llevar adelante la metodología propia del nuevo paradigma, requiere incorporar un conjunto de gestos didácticos, que implican modificaciones radicales con respecto a la enseñanza tradicional.

Un sistema didáctico propio del paradigma de la investigación $S(X;Y;Q)$ se caracteriza por un conjunto de alumnos X , que estudia una pregunta Q , con la ayuda de un profesor o un conjunto de profesores Y , con el propósito de aportar una posible respuesta R^\heartsuit a Q . La producción de R^\heartsuit requiere que el sistema didáctico S disponga de instrumentos, recursos, obras. Es decir, el sistema necesita generar un medio didáctico M , para producir R^\heartsuit .

Un REI comienza con una pregunta Q , propuesta por el profesor, cuyo estudio conducirá al encuentro o reencuentro con varias organizaciones matemáticas y/o de otras disciplinas. De esta manera, se establece una cadena de preguntas y respuestas que son el corazón del proceso de estudio $P = (Q_i; R_i) \ 1 \leq i \leq n$, siendo Q_i todas las

preguntas que habitan el corazón ♥ y R_i las respectivas respuestas a ellas (Chevallard, 2007).

Implementar un REI requiere ejecutar gestos didácticos, propios del estudio y la investigación, llamados dialécticas (Chevallard, 2007, 2013a, 2013b). A continuación se mencionan tres dialécticas esenciales que pueden emerger al gestionar el estudio de la situación que se propone en este libro:

- *La dialéctica del estudio y de la investigación.* Una investigación supone la combinación del estudio de preguntas y respuestas preestablecidas. Esta dialéctica constituye el motor de una enseñanza por REI. No es posible investigar sin estudiar y a su vez un estudio genuino es productor de preguntas a ser investigadas.
- *La dialéctica de los media y los medios.* La elaboración de las sucesivas respuestas provisionales requiere de respuestas preestablecidas, accesibles a través de los diferentes medios de comunicación y difusión: los media (libros, artículos de investigación, apuntes de clase, etc.). Estas respuestas son el producto de conjeturas, y como tal, debe ponerse a prueba, resultando ser transformadas e incorporadas al medio.
- *La dialéctica del individuo y el colectivo.* Los estudiantes con su director de estudio deben repartirse el conjunto de tareas y negociar las responsabilidades que debe asumir cada uno.

Una enseñanza por REI presupone que una vez propuesta la pregunta generatriz por el profesor, se desencadena un estudio de preguntas que realiza con el acuerdo de todos los integrantes de la

comunidad de estudio. Esto demanda repartir responsabilidades y asignar tareas individuales, para luego retornar el proceso grupal de elaboración de una respuesta. Las obras encontradas o reencontradas para elaborar la respuesta, serán estudiadas con cierto nivel de profundidad, para establecer su pertinencia. Así, también surgirán nuevas preguntas, que la comunidad de estudio decidirá cuándo y cómo va a responder. Por lo que, la responsabilidad del estudio no recae en el individuo, sino en la comunidad productora, que sostiene y valida las respuestas que genera colectivamente.

A continuación se propone la descripción de una situación que si bien no sería un REI en sentido estricto, su estudio permitiría la emergencia de algunos gestos propios de la pedagogía de la investigación y el cuestionamiento del mundo, y el desarrollo de una enseñanza por investigación.

Descripción de la propuesta didáctica

La propuesta puede desarrollarse en cursos de los últimos años de la escuela secundaria. Se sugiere dividir el conjunto de alumnos en pequeños grupos, compuestos por 2 o 3 estudiantes, para que cada uno realice aportes y favorezca el intercambio de propuestas.

El análisis de la situación inicial, tiene la particularidad de engendrar *preguntas no previstas* desde un principio y la actividad puede desarrollarse en diversas direcciones. Abordar con mayor o menor profundidad el estudio de estas preguntas, dependerá del interés general.

La actividad del profesor consistiría principalmente en supervisar la propuesta de los alumnos y regular el espacio temporal para sistematizar las discusiones de los diferentes grupos. Esto es de vital importancia para poder continuar con el estudio, evitando que pierda sentido la situación inicial por respuestas inmediatas, la imposibilidad de problematizar o no encontrar la funcionalidad de la matemática para aportar respuesta.

Se requiere contar con software para el estudio matemático y acceso a internet (en caso de no tenerlo, el profesor puede facilitar la información de los planes de telefonía celular que proporciona cada compañía).

Se comienza analizando la siguiente situación:

Situación 1

En el mercado existen diversas compañías de telefonía celular y queremos contratar una, ¿Por cuál optar? ¿Por qué?

A continuación se describe de manera general, posibles recorridos que pueden emerger durante la gestión del estudio. Así también, se proponen situaciones que podrían surgir de la propuesta de los alumnos, o que tendría que formular el profesor para hacer evolucionar el estudio.

En esta propuesta, es esencial que el grupo ingrese en el necesario juego de formular preguntas y respuestas, y que no se aporte una respuesta final y acabada desde el inicio. Dependiendo de la oferta que proponga cada compañía de telefonía celular, en ocasiones puede que el grupo opte por aquella que ofrece tarifas a menor costo y considere que el estudio se encuentra finalizado.

Primero, el profesor puede preguntar a los estudiantes acerca de *¿De qué compañía de telefonía celular son usuarios? ¿Por qué optaron por la misma?* Las preguntas se pueden focalizar en analizar los planes de telefonía celular de las compañías del grupo. Esta información se encuentra disponible en la página web de cada compañía. Como resulta ser variada, es necesario organizarla para poder compararla y tomar decisiones acerca de cómo proceder para estudiarla.

En el momento de redactar este texto tres compañías de Argentina ofrecen la siguiente información de sus planes:

Compañía 1

Control Libre

Planes Control

Control 200MB	Control 1GB	Control 3GB	Control 5GB
\$ 160 al mes	\$ 210 al mes	\$ 290 al mes	\$ 430 al mes
Comprar >	Comprar >	Comprar >	Comprar >
200 MB Internet incluido Ilimitadas Llamadas a otros Claro \$55 Crédito Otras compañías Bonificada Larga Distancia 12 meses Claro música incluido 6 meses Claro video incluido Ver más > <input type="checkbox"/> Comparar	1 GB Internet incluido Ilimitadas Llamadas a otros Claro 300 Min Otras compañías Bonificada Larga Distancia 12 meses Claro música incluido 6 meses Claro video incluido Ver más > <input type="checkbox"/> Comparar	3 GB Internet incluido Ilimitadas Llamadas a otros Claro 300 Min Otras compañías Bonificada Larga Distancia 12 meses Claro música incluido 6 meses Claro video incluido Ver más > <input type="checkbox"/> Comparar	5 GB Internet incluido Ilimitadas Llamadas a otros Claro 300 Min Otras compañías Bonificada Larga Distancia 12 meses Claro música incluido 6 meses Claro video incluido Ver más > <input type="checkbox"/> Comparar

Para el plan Control 200MB, los términos y condiciones se indican a continuación:

(1) Llamadas ilimitadas a otros Claro Argentina (2) Crédito para todo Consumo (3) Internet (4) Internet \$6,00 el día (5) SMS incluidos (6) Larga Distancia Nacional (7) Larga Distancia Internacional bonificada (8) Establecimiento de llamadas (9) Segundo Incluido y Excedente (10) Recarga de saldo (11) Recompra de Internet (12) Claro Música (13) Claro Video

Oferta válida en Argentina del 01/09/2016 al 30/09/2016 para nuevas activaciones con Plan Control \$160. No incluye cargo ENARD Ley 26.573. 1) Llamadas nacionales a destinos Claro Argentina. 2) Crédito disponible para realizar llamadas a todo destino nacional e internacional y/o SMS excedente y/o MB excedente y/o mensajes multimedia y/o consumos realizados sobre las redes de otros operadores en el exterior = \$55. 3) Capacidad: 200 MB. Servicio de alcance nacional sujeto a tecnología de equipo, cobertura 3G/4G de CLARO y disponibilidad técnica y geográfica. Máxima velocidad hasta llegar a los 200 MB. Líneas con equipos BlackBerry: el servicio de valor agregado BlackBerry no se encuentra disponible para Planes Control. 4) Una vez consumidos los datos incluidos en el plan, Precio nominal \$6,00 hasta las 23:59 hs. del día. Velocidad máxima hasta 50MB por día, luego 128Kbps. \$6,00 serán descontados automáticamente al habilitar datos. 5) Capacidad: 100 SMS. Beneficio nacional mensual no acumulable. Este beneficio no incluye envío de SMS Premium, Internacionales, ni Mensajes Multimedia (MMS). SMS Excedente: \$1,40. MMS \$1,40. SMS Internacional: \$3,00. 6) Llamadas nacionales a todo destino se abonan a precio de llamada local. 7) Llamadas desde Argentina hacia los países de América se abonan a precio de llamada local. Países incluidos: Anguila, Antigua y Barbuda, Antillas Holandesas, Aruba, Bahamas, Barbados, Belice, Bermudas, Bolivia, Brasil, Islas Caimán, Canadá, Chile, Colombia, Costa Rica, Cuba, Dominica, República Dominicana, Estados Unidos, Ecuador, El Salvador, Granada, Guatemala, Guyana, Haití, Hawai, Honduras, Islas Vírgenes y Británicas, Jamaica, Islas Malvinas, México, Nicaragua, Panamá, Paraguay, Perú, Puerto Rico, San Cristóbal y Nieves, Santa Lucía, San Vicente y las Granadinas, Surinam, Trinidad y Tobago, Islas Turcas y Caicos, Uruguay y Venezuela. 8) Es el cargo por inicio de la llamada y cubre la primera fracción de 30 segundos. Luego se comienza a tasar la llamada por segundo. Establecimiento de llamada Incluido: \$1,3050. Establecimiento de llamada Excedente: \$2,90. 9) La unidad de medida de las llamadas originadas es el segundo a partir de los primeros 30 segundos de establecida la llamada, excepto en las llamadas sobre las redes de otros operadores en el exterior las que serán tasadas y redondeadas en unidades de minuto. Precio Segundo Incluido: \$0,0435. Precio Segundo Excedente: \$0,0967. 10) El crédito prepago tiene costo diferencial al crédito incluido en el plan. El crédito de regalo proveniente de las recargas de saldo es válido para llamadas y envíos de SMS a cualquier destino nacional y tiene plazo de caducidad distinto al de la recarga. 11) Una vez alcanzada, enviando INTERNET al 252 puedes recomprar datos conforme al plan contratado. Máximo 3 usos por ciclo. Costo del servicio: Planes \$160: 200 MB a \$60; \$210: 1 GB a \$80; \$290: 3 GB a \$100. La recompra tiene una vigencia hasta corte de ciclo de facturación o hasta agotar la capacidad recomprada. Si no se consume en su totalidad no es acumulable. 12) Válido para Argentina bonificado por 12 meses para clientes con abono, luego final \$15/mes. Pack con Renovación Automática. 13) Válido en Arg. para clientes con abono masivo 6 meses incluido, luego \$89 final/mes. Servicio con renovación automática con consumo de datos móviles. No incluye títulos de "pago por evento". Los beneficios del plan podrán ser suspendidos o dados de baja por Claro, sin derecho a reclamo alguno para el cliente y serán facturados los servicios y cualquier otro concepto que corresponda (según precios del plan contratado), si CLARO identifica el uso abusivo en los siguientes casos: (i) utilización con fines comerciales o para obtener rédito económico; (ii) utilización para realizar llamadas masivas o enviar SMS a través de máquinas, PC u otros dispositivos automatizados. Condiciones en www.claro.com.ar y en locales de venta. AMX ARGENTINA SA. CUIT 30-66328849-7 Av. de Mayo 878, CABA.

Compañía 2

Abono Fijo

Plan	Crédito	Internet	Llamadas	SMS	Info
<p>CONEXIÓN TOTAL</p> <p>\$260x mes</p>	\$100 x mes	1GB cuota de datos incluida	ilimitadas a Personal, a todo el país	ilimitados a cualquiera compañía	<p>CONTRATAR</p> <p>Ver detalle</p>
<p>CONEXIÓN TOTAL</p> <p>\$350x mes</p>	\$150 x mes	2GB cuota de datos incluida	ilimitadas a Personal, a todo el país	ilimitados a cualquiera compañía	<p>CONTRATAR</p> <p>Ver detalle</p>
<p>CONEXIÓN TOTAL</p> <p>\$460x mes</p>	\$250 x mes	3GB cuota de datos incluida	ilimitadas a Personal, a todo el país	ilimitados a cualquiera compañía	<p>CONTRATAR</p> <p>Ver detalle</p>

Para el plan CONEXIÓN TOTAL \$260, los términos y condiciones se indican a continuación:

Legales

Plan de alcance Nacional. Válida desde el 28/09/2016 hasta 30/10/2016. Aplica para altas nuevas, portabilidad y/o cambio de plan. Precios para consumidores finales. No incluye Cargo 1% ENARD. Beneficio por activación: \$40 de crédito inicial bonificado. Precio Abono Mensual \$ 280 final, incluye \$100 de crédito mensual y llamadas nacionales a números de Personal, bonificadas. Precio Bloque inicial (30 segundos) \$2,07 final. Precio final del segundo aire: \$0,069 para llamadas nacionales a números de otras compañías. No aplica en Roaming Internacional.SMS nacional tradicional bonificado (se excluye SMS Premium, Contenidos, Internacionales y a línea fija). Precio final MMS nacional: \$2,00. Internet Incluido: la velocidad de navegación dependerá de los recursos disponibles de la red hasta alcanzar los 1GB mensuales, una vez alcanzada la cuota mensual, la velocidad se reduce a 32 Kbps, pudiendo resetear dicha cuota por 100 MB a \$25 finales; o 500 MB a \$50 finales; o 1 GB a \$75 finales. Para hacer uso de la línea deberá encontrarse vigente sin ningún tipo de restricción. La tasación de una llamada comienza desde el momento en el que el abonado llamado contesta directamente o por medio de una casilla de mensajes o sistema equivalente, hasta que finaliza la comunicación. Incluye servicio de Factura Online, el mismo es sin cargo y está sujeto a la evaluación sobre el comportamiento de morosidad del titular de la línea. Para conocer los Términos y Condiciones del servicio ingresá en Mi Cuenta <http://www.personal.com.ar/micuenta>. Oferta habilitada solo para uso personal, está totalmente prohibido su reventa y/o uso comercial. La detección de su uso indebido habilita a Telecom Personal S.A. a la suspensión de la línea. Conforme a lo dispuesto por la Res. SC N° 28/2013, la tasación de cada llamada se compondrá de un valor fijo correspondiente al Bloque Inicial de Comunicación (incluye hasta 30 segundos), conforme el precio fijado en el plan elegido, mas la tasación por segundo que transcurra después del segundo 30 de establecida la comunicación, valorizada al precio del segundo fijado en el plan elegido. Mas información en *111 o www.personal.com.ar . Telecom Personal S.A. Alicia M. de Justo 50. CABA CUIT 30-67818644-5. [-]

Compañía 3

PLANES	PRECIO	HABLÁ	MENSAJEÁ	NAVEGÁ	CRÉDITO	EXTRA
Comunidad Más 1GB	 250,00 \$/mes	Libre a todos los Movistar	Libre a cualquier compañía	1 GB 4G hasta 10 veces más rápido	\$50 si los consumís te prestamos \$ 30 hasta dos veces al mes	Tu hablá y mensajeá gratis a cualquier lugar del mundo
Comunidad Más 3GB	 380,00 \$/mes	Libre a todos los Movistar	Libre a cualquier compañía	3 GB 4G hasta 10 veces más rápido	\$100 si los consumís te prestamos \$ 30 hasta dos veces al mes	Tu hablá y mensajeá gratis a cualquier lugar del mundo 15% de dto. en equipos

Para el plan Comunidad Más 1GB, los términos y condiciones se indican a continuación:

Plan Comunidad Más 1GB - \$250

Plan disponible en Argentina para personas físicas del 14/09/16 al 30/10/16. En cada llamado, se descontarán del crédito del cliente los primeros 30 segundos desde el establecimiento de la comunicación, que tendrán un valor fijo de \$2,6135 en llamadas destinos móviles o fijos de cualquier operadora de telefonía de Argentina, independientemente de la duración de la llamada o de que se consuma la totalidad de estos primeros 30 segundos. A partir del segundo 31, cada segundo de comunicación tendrá un valor de \$0,0871 a destinos móviles o fijos de cualquier operadora de telefonía de Argentina.

El plan incluye los siguientes servicios:

(i) Ampliación de Crédito (excepto Tierra del fuego), que permite obtener hasta 2 ampliaciones de crédito automáticas por mes de \$30 cada una (en total, \$60 por mes de recargas automáticas extras), a pagar en la siguiente factura, de manera adicional al abono y cualquier otro servicio contratado. Las ampliaciones de crédito automáticas se realizarán cuando el saldo disponible sea de \$3. El cliente podrá solicitar que las ampliaciones de crédito no se realicen automáticamente, y realizarlas manualmente cuando desee, a través del envío de un SMS sin cargo con la palabra CONSULTA al 88668. En caso de querer volver al sistema de ampliación de crédito automático original, deberá enviar un SMS sin cargo con la palabra ALTA al 88668.

(ii) Crédito de regalo, \$50 por ciclo mensual de facturación.

(iii) Libre Comunidad incluye minutos ilimitados sin cargo adicional para llamar a líneas Movistar de Argentina.

(iv) "SMS Libres", incluyen SMS multidestino ilimitados, para enviar a cualquier operadora móvil de Argentina. No incluyen SMS Premium, SMS Internacionales, SMS a n° fijos, ni MMS. Precio de cada SMS a números fijos: \$2,1268. Consultar precios de cada SMS Internacional Y MMS en <http://www.movistar.com.ar/tienda/larga-distancia-internacional>. Consultar precio de cada SMS Premium en <http://www.movistar.com.ar/tienda/servicios/entretenimiento-e-intemet>.

(v) 1 GB de Internet: la velocidad de navegación dependerá de los recursos disponibles de la red hasta alcanzar 1GB de consumo por ciclo mensual de facturación. La velocidad de navegación denominada "4G Plus" será de hasta 10 Mbps, aproximadamente. La velocidad de navegación 3G permitirá a los clientes navegar a una velocidad promedio de 1 Mbps. Consumidos los MB incluidos en el plan, se activará automáticamente Internet por Día Plus que incluye servicio de datos para utilizar en la Rep. Argentina desde el teléfono móvil durante un día, es decir, desde las 0 hs. hasta las 23.59 hs. Cuando se agoten los MB o GB de Internet incluidos en el plan del cliente, se activará Internet por Día Plus diariamente, de manera automática, mediante el uso de Internet en cualquiera de sus funcionalidades (navegación, uso de mail, chat, redes sociales, descarga de archivos, descarga y uso de aplicaciones, etc.). Internet por Día Plus se prestará diariamente en dos bloques de 50 MB de Internet cada uno. El precio de cada bloque es de \$6,50. Consumido el primer bloque de 50 MB antes de las 23.59, se activará automáticamente el segundo bloque de 50 MB para utilizar en las mismas condiciones que el primero. De manera opcional, los clientes podrán contratar otros bloques de 50 MB de Internet por \$6,50 adicionales, para utilizar en un mismo día, respondiendo el SMS que les llegará desde el número 772 con la palabra SI. La velocidad de navegación de cada bloque de 50 MB dependerá del tipo de servicio de datos de cada cliente (3G o 4G). Una vez consumido el último bloque contratado de 50 MB disponible para utilizar en un mismo día, la velocidad de navegación se reducirá a velocidad mínima (32 Kbps) hasta las 23.59 hs. Los MB que no se consuman en el día caducarán y no serán acumulables. El cliente podrá solicitar, en cualquier momento, la baja del servicio Internet por Día Plus, enviando un SMS con la palabra NO al 772 y navegar a velocidad mínima (32 Kbps) hasta el fin de su ciclo mensual, momento en el cual se le renovarán los MB o GB incluidos en su plan para navegar. Para dar de alta Internet por Día Plus nuevamente, deberán enviar un SMS con la palabra SI al 772. El cliente podrá contratar tantos bloques de 50MB en un día como desee. En ningún caso, se podrá contratar el servicio Internet Por Día utilizando crédito de regalo obtenido en cualquier promoción sino únicamente con crédito de recargas o incluido en el plan.

Adicionalmente, se descontarán del crédito los siguientes importes: Larga Distancia Nacional: De 30 a 110 Km., 1ros 30 seg.: \$0,5535, luego, \$0,0184 por seg. De 110 a 240 Km., 1ros 30 seg.: \$0,7518, luego, \$0,0251 por seg. Más de 240 km., 1ros. 30 seg.: \$1,0120, luego, \$0,0337 por seg. En este caso, también se descontarán del crédito del cliente los primeros 30 segundos desde el establecimiento de la comunicación según los precios anteriores, y adicionalmente a los precios de la llamada local, independientemente de la duración de la llamada. Larga Distancia Internacional: consultar precios en <http://www.movistar.com.ar/tienda/larga-distancia-internacional/>. Consultar precios de los servicios para utilizarlos en el exterior de la República Argentina en <http://www.movistar.com.ar/servicios/viajes-e-internacional/roaming/>.

Cualquier o todos los servicios del plan podrán ser suspendidos o dados de baja por Movistar sin derecho a reclamo alguno para el cliente y serán facturados los segundos y cualquier otro concepto que corresponda (según precios del plan contratado), en los siguientes casos: utilización con fines comerciales o para obtener rédito económico; o utilización para realizar llamadas o enviar SMS a través de máquinas, PC u otros dispositivos automatizados.

Todos los servicios son para utilizar en Argentina y con destino a números argentinos. Consultar precios de los servicios para utilizarlos en el exterior de la República Argentina en <http://www.movistar.com.ar/tienda/roaming/>.

El plan se prestará con la modalidad "Factura Electrónica" (Sin Papel). Los precios y condiciones comerciales de los beneficios, promociones y servicios incluidos o compatibles con el plan, que tengan fecha de vigencia limitada, podrán ser renovados, modificados o dados de baja por Movistar sin previo aviso. Los precios incluyen IVA consumidor final e impuestos internos; no incluyen impuesto ENARD del 1% ni otros cargos o percepciones.

SERVICIO TU: disponible para clientes Movistar de Argentina (personas físicas y jurídicas) que posean cualquier plan de voz. Permite usar la línea en un smartphone, PC o tablet para realizar llamadas y enviar SMS ilimitados desde Argentina y el mundo, a cualquier número fijo o móvil de Argentina, con servicio de datos 4G o Internet inalámbrico (WIFI). Los clientes postpagos podrán utilizar TU con WIFI en cualquier momento. Para utilizar TU con 4G deberán contar dicho servicio. Los clientes prepagos deberán realizar recargas para poder utilizar TU con WIFI o 4G (de \$40 para usarlo por 5 días, de \$50 para usarlo por 7 días o de \$60 para usarlo por 10 días). En caso de uso de TU exclusivamente con WIFI en Argentina o el exterior, no se facturará o descontará suma alguna por las llamadas y SMS. En caso de uso con 4G, se facturará o descontará el precio correspondiente por el uso de datos para realizar las llamadas y enviar SMS, según el plan de voz contratado. Para usar TU con 4G en el exterior (si hubiera servicio 4G disponible), consultar precios en [movistar.com.ar/tienda/roaming](http://www.movistar.com.ar/tienda/roaming). Si se descarga o accede a TU para realizar consultas con redes 2G, 3G o 4G, se facturará o descontará el precio por el uso de dichos datos. TU no es compatible con Línea en Casa, Movitalk y Tonos de Espera, ni para llamar a servicios de emergencia ni destinos de LDI. Prohibido su uso comercial. Más info. [movistar.com.ar/tu](http://www.movistar.com.ar/tu).

En la sección de términos y condiciones de cada plan se puede encontrar una variada información. La misma fue indicada para los planes más económicos de cada compañía. En la siguiente tabla, se sintetiza la información para cada plan que ofrecen las tres compañías:

Enseñanza por Investigación en el marco de la TAD:
 Una propuesta para estudiar las funciones a trozos.
 Ana Rosa Corica

Compañía	Plan	Crédito para todo consumo	SMS Incluido	SMS Excedente	Establecimiento de llamada incluido (primeros 30 segundos)	Establecimiento de llamada excedente (primeros 30 segundos)	Precio segundo incluido	Precio segundo excedente
1	Control 200MB	\$55	100	\$1,40	\$1,3050	\$2,90	\$0,0435	\$0,0967
	Control 1GB	\$30	10.000	\$1,40	\$1,1888	\$2,90	\$0,0396	\$0,0967
	Control 3GB	\$30	10.000	\$1,40	\$0,9638	\$2,90	\$0,0321	\$0,0967
	Control 5GB	\$30	10.000	\$1,40	\$0,8700	\$2,90	\$0,0290	\$0,0967
2	Conexión total \$260	\$100	Ilimitado	----	\$2,07	----	\$0,069	----
	Conexión total \$350	\$150	Ilimitado	----	\$2,07	----	\$0,069	----
	Conexión total \$460	\$250	Ilimitado	----	\$2,07	----	\$0,069	----
3	Comunidad más 1G	\$50	Ilimitado	----	\$2,6135	----	\$0,0871	----
	Comunidad más 3G	\$100	Ilimitado	----	\$2,3769	----	\$0,0792	----

Tabla 1. Descripción de planes ofrecidos por 3 compañías de telefonía celular.

Los planes de las compañías de telefonía celular, contienen una amplia información acerca de costo de abonos, y para cada uno de ellos:

- Megas disponibles para el uso de internet.
- Números telefónicos para hablar de manera ilimitada.
- Crédito disponible para todo consumo.
- SMS incluidos en el abono.
- Costo para re-compra de internet.
- Forma y costo de la tasación para llamada local y de larga distancia.
- Forma y costo de la tasación para llamada local y de larga distancia, luego de agotar el crédito disponible.
- Acceso a paquetes de música y video.
- Minutos disponibles para hablar incluidos en el abono.

La información que se propone en términos y condiciones permite comprender cómo las compañías de telefonía celular tasan las comunicaciones mediante llamadas telefónicas. Según la resolución N° 26/2013 del MINISTERIO DE PLANIFICACION FEDERAL, INVERSION PUBLICA Y SERVICIOS de la República Argentina, se establece lo siguiente:

ARTICULO 1° — Establécese que la unidad de medida de tasación de las llamadas originadas por usuarios de servicios de comunicaciones móviles será el segundo, medido a partir de los primeros TREINTA (30) segundos de establecida la comunicación, conforme lo dispone la Resolución N° 45 de fecha 31 de mayo de 2012.

A continuación se desarrolla la Situación 1. Esto conduce a recorrer distintas organizaciones matemáticas. Algunas de ellas forman parte del diseño curricular de la escuela secundaria en Argentina, y otras no. La propuesta se sintetiza en el Esquema 1. Se compone de 14 situaciones, y su análisis dependerá del interés y necesidades del grupo.

También podrán emerger otras situaciones no contempladas aquí y el estudio puede que derive en una organización didáctica diferente a la indicada a continuación.

Las situaciones 1 y 14 parecen ser fundamentales en la propuesta. La Situación 1 engendra el estudio y la Situación 14 tiene como objetivo recuperar el sentido de la Situación 1, luego de haber realizado todo el análisis.

Esquema 1

Situación 1
En el mercado existen diversas compañías de telefonía celular y queremos contratar una, ¿Por cuál optar? ¿Por qué?

Situación 2
¿Qué planes ofrecen cada una de las compañías de telefonía celular?

Situación 3
¿Cuál es el uso que realizamos de nuestro celular?

Situación 4
¿Qué otras formas de comunicación podemos establecer con el celular?

Situación 5
Elaborar una encuesta que permita recoger información acerca del empleo del celular de estudiantes de la escuela secundaria.

Estadística descriptiva

Situación 6
¿Qué datos hay que tener en cuenta para comparar tarifas de telefonía celular?

Situación 7
¿Cómo calcular el costo de una llamada?

Situación 11
¿Cuál es el costo de un segundo?

Situación 8
¿Cuál es el costo de todas las llamadas registradas en el teléfono celular personal? ¿Cómo calcularlo? ¿Cuál sería el costo de las llamadas a los números sin cargo que nos ofrece la compañía, si nos facturaran el consumo?

Situación 12
¿Qué relación existe entre la duración de la llamada y $c_m(t)$?

Situación 9
¿Qué conviene más: hablar t segundos en una llamada o en varias? ¿Por qué?

Situación 13
¿Cómo calcular la diferencia de costo entre dos empresas?

Situación 10
Consideremos dos compañías de telefonía celular que ofrecen diferentes tarifas para el establecimiento de la comunicación y el costo por segundo luego de transcurrido t_e segundos del establecimiento de la misma. ¿Cuál es el más económico y para qué tiempo de duración de la llamada?

Función a trozos
Función lineal
Función racional
Función módulo
Función piso
Función techo
Estimación por truncamiento y redondeo
Ecuaciones e inecuaciones lineales

Situación 14
Un usuario de telefonía celular se encuentra disconforme con su plan de abono. Realiza un informe que le permita tomar decisiones teniendo en cuenta sus posibles necesidades.

Luego del análisis de la Situación 1, se puede derivar en el estudio de las siguientes situaciones. En cada sesión, se sugiere que los pequeños grupos elaboren un informe que contenga los elementos de la situación considerada, así como los ejemplos que podrían haber desarrollado, y se proponga un plan para proseguir el estudio.

Situación 2

¿Qué planes ofrecen cada una de las compañías de telefonía celular?

La Situación 2 tiene la intención de que se exploren las propuestas de cada una de las compañías de telefonía celular consideradas. Para profundizar en el análisis, se puede abordar la Situación 3. Pues, para poder optar por una compañía de telefonía celular no basta con conocer la oferta de cada una, sino además el uso que realizamos de nuestro celular. Es necesario establecer las necesidades personales y a partir de esto tomar decisiones.

Situación 3

¿Cuál es el uso que realizamos de nuestro celular?

La Situación 3 conduce a que los estudiantes busquen información en sus teléfonos celulares, o en el perfil personal de la página web de cada compañía de las que son usuarios.

Establecer cuál es el uso que realizamos del celular, requiere recoger información acerca de número de contactos, registros de llamadas, empleo de SMS, etc y poder sintetizar esta información. Así, el grupo se podrá centrar en abordar tareas fundamentales de estadística descriptiva, como ser:

T_1 : *Recolectar datos*. Esta tarea requiere por ejemplo, registrar para cada llamada la duración, el contacto, el costo, el tipo de llamada (entrante o saliente), la compañía con la que se establece la comunicación; así como también para el empleo de SMS se requiere registrar el contacto, cantidad y costo, compañía, tipo de SMS (entrante o saliente), etc.

T_2 : *Organizar datos en tablas*. Esta tarea conduce, por ejemplo, a definir espacios temporales para recoger los datos mencionados en T_1 y organizarlos en tablas. En esta organización tal vez intervengan nociones básicas de estadística como ser frecuencia relativa y frecuencia absoluta.

T_3 : *Analizar valores de variables categóricas y variables numéricas*. La organización de datos puede derivar en la necesidad de analizar valores de ambos tipos de variables. Esto requiere recurrir a nociones básicas de estadística descriptiva.

T_4 : *Resumir y representar datos*. En esta tarea es necesario analizar valores de variables categóricas y variables numéricas. El estudio de esta tarea requiere recurrir a diversas nociones de estadística para aportar respuesta, tal como ser media, mediana, moda, desvío estándar, varianza, histograma, gráfico de torta, etc. El análisis tal vez demande emplear algún software que facilite el análisis estadístico.

T_5 : *Comunicar información a partir de estudios estadísticos*. Esta tarea procura recuperar lo realizado en las anteriores. El propósito es que los estudiantes elaboren un informe, que permita conocer cuál es el empleo del celular que realiza cada usuario.

Si el estudio no avanza y las preguntas que se formulen no sugieren respuestas profundas, se propone el estudio de la siguiente situación. Pues, todo dependerá del uso personal que realice cada uno de su teléfono celular. Así por ejemplo, la proliferación del empleo de WhatsApp para establecer comunicaciones mediante mensajes, hace que el envío de SMS resulte obsoleto o solo empleado por la compañía de telefonía celular para publicidad.

Situación 4

¿Qué otras formas de comunicación podemos establecer con el celular?

En función del estudio de las situaciones 3 y 4, se puede ampliar la información del empleo del teléfono celular y no solo restringirse al uso personal del grupo. A partir de este análisis, la información recogida podría resultar útil para la confección de una encuesta, tal como se propone en la siguiente situación:

Situación 5

Elaborar una encuesta que permita recoger información acerca del empleo del celular de estudiantes de la escuela secundaria.

Esta situación nos sumerge en la problemática de ¿Cómo confeccionar una encuesta? ¿Cómo implementarla? ¿Cómo analizar los datos que se generen? ¿Cómo informar el análisis de los resultados de la encuesta? Así nuevamente, el estudio de los datos a partir de nociones de estadística descriptiva cobra vital importancia. El análisis también involucra el empleo de algún software que permita sintetizar el volumen de datos que se obtengan.

Retomando la situación inicial, se puede estudiar también la siguiente:

Situación 6

¿Qué datos hay que tener en cuenta para comparar tarifas de telefonía celular?

El grupo de estudio puede acordar en que los aspectos a considerar para poder comparar los planes que ofrece cada compañía son:

- Megas disponibles para el uso de internet.
- Números telefónicos para hablar de manera ilimitada.
- Crédito disponible para todo consumo.
- SMS incluidos en el abono.
- Costo para re compra de internet.
- Forma y costo de la tasación para llamada local y de larga distancia.
- Forma y costo de la tasación para llamada local y de larga distancia, luego de agotar el crédito disponible.
- Acceso a paquetes de música y video.
- Minutos disponibles para hablar incluidos en el abono.

El empleo de megas para el uso de internet es posible cuantificar a partir de diferentes aplicativos diseñados para teléfonos celulares. Esto resulta complejo de analizar porque depende de las aplicaciones que emplee el usuario. Si se tomará en consideración para el análisis, la cantidad de megas ofrecido por cada compañía en relación al costo del plan.

El acceso a paquetes de música y video depende de cada compañía y en algunas de ellas se ofrece de manera promocional a costo cero, por un período limitado de tiempo a partir de la contratación del plan.

La comunicación mediante SMS es sencilla de analizar. El costo de SMS viene dado por valor unitario. Fácilmente se puede arribar a una conclusión relativa a cuál compañía ofrece el envío de SMS más económico, analizando la información brindada por cada empresa.

Para calcular el costo del envío de SMS se puede emplear la siguiente expresión:

$$m(x) = kx$$

La expresión $m(x)$ corresponde a la de una función de proporcionalidad directa, donde x representa el número de mensajes y k el costo unitario del mensaje.

Supongamos un caso ideal, donde el crédito disponible para todo consumo (c_r) incluido en el abono, es utilizado para el envío de SMS. Resulta que a lo sumo se podrán enviar $\left[\frac{c_r}{k}\right]$ mensajes. En esta última expresión se utiliza la función parte entera, pues si el cociente no resulta ser un número natural, los decimales resultantes de la operación no son suficientes para cubrir el costo del envío de un mensaje.

Resulta entonces que el dominio de la función $m(x)$ es:

$$\text{dom}(m(x)) = \left\{x \in \mathbb{N} / 1 \leq x \leq \left[\frac{c_r}{k}\right]\right\}$$

Para decidir qué compañía tiene menor costo para el envío de SMS, basta con comparar la pendiente de $m(x)$ correspondiente a cada empresa. Esto también debe ser estudiado en relación al crédito disponible para todo consumo que se indican en los planes. Ocurre que las compañías ofrecen diferente costo para el envío de SMS y crédito disponible para todo consumo. Resulta ser que no siempre la compañía que ofrece a un costo menor el envío de SMS, ofrece mayor crédito para todo consumo dentro del mismo plan. Por lo que el estudio necesita ser realizado de manera integral. Esto mismo ocurre entre planes de la misma compañía, por lo que el estudio también es necesario hacerlo al interior de cada compañía.

La mayor problematización de la situación se encuentra cuando se pretende analizar el costo de las llamadas telefónicas. Pues es necesario comprender cómo las empresas tasan las mismas. En relación a esto, se propone estudiar la siguiente situación:

Situación 7

¿Cómo calcular el costo de una llamada?

Según la Resolución N° 26/2013 del MINISTERIO DE PLANIFICACIÓN FEDERAL, INVERSIÓN PÚBLICA Y SERVICIOS de la República Argentina, la forma de tasación de llamadas para las compañías de telefonía celular es un costo fijo para los primeros 30 segundos de establecida la comunicación y luego de transcurrido este período, se comienza a tasar el costo por cada segundo que dure la comunicación.

Dependiendo de los planes que ofrezcan las compañías, los estudiantes podrían aportar respuestas inmediatas, indicando información disponible en la página web de cada empresa. Esto es sin

necesidad de problematizar e indagar en la utilidad de la matemática para aportar respuesta. Ante esto, se puede proponer estudiar las siguientes situaciones:

Situación 8

¿Cuál es el costo de todas las llamadas registradas en el teléfono celular personal? ¿Cómo calcularlo? ¿Cuál sería el costo de las llamadas a los números sin cargo que nos ofrece la compañía, si nos facturaran el consumo?

Situación 9

¿Qué conviene más: hablar t segundos en una llamada o en varias? ¿Por qué?

A partir de la información disponible en los planes que ofrecen las compañías de telefonía celular, se concluye que: para calcular el costo de una llamada se facturará un costo fijo que contempla los primeros t_e segundos de comunicación, y luego de este período, se establece un costo por cada segundo que dure la comunicación.

Finalmente, se pretende que el grupo pueda arribar al siguiente modelo matemático, que permite el cálculo del costo de una llamada de t segundos.

$$c(t) = \begin{cases} c_e & \text{si } 1 \leq t \leq t_e \\ c_e + c_s(t - t_e) & \text{si } t_e + 1 \leq t \leq \left[\frac{c_r - c_e}{c_s} + t_e \right] \end{cases}$$

Siendo t_e : tiempo máximo que contempla el costo por el establecimiento de la llamada c_r : el crédito para todo consumo,

c_e : costo por establecimiento de la llamada y c_s : costo por segundo luego de los t_e segundos de establecida la comunicación.

La expresión costo $c(t)$ corresponde a la de una función definida a trozos. Se compone por una rama que concierne a la expresión de una función constante y otra rama que corresponde a la expresión de una función lineal. Esta última resulta ser positiva y creciente, pues $c_e > 0$ y $c_s > 0$. Además, $c_s t_e$ es menor a c_e , pues si no fuera así, la situación no tendría sentido. Si resultara ser $c_s t_e \geq c_e$, para ciertos valores de t el costo de la llamada podría ser negativo. Es decir, indicaría pérdida para la empresa y saldo a favor del usuario. Así, resulta que el costo mínimo de una llamada es c_e .

El dominio de $c(t)$ resulta ser:

$$Dom(c(t)) = \left\{ t \in \mathbb{N} / 1 \leq t \leq \left\lfloor \frac{c_r - c_e}{c_s} + t_e \right\rfloor \right\}$$

t representa el tiempo y es continuo. Sin embargo, en el contexto del problema se considera que t toma valores naturales, por la forma de tasación de las llamadas de las compañías de telefonía celular.

Es fundamental comprender que para tasar el tiempo que dura una comunicación las compañías lo hacen mediante la función techo. Es decir, si se establece una comunicación telefónica de 33,5 segundos, la empresa facturará 34 segundos. Si se considera el tiempo $t \in \mathbb{R}^+$, siendo que t representa el tiempo y es continuo, es necesario transformar la segunda rama de la función $c(t)$, resultando $c_e + c_s([t] - t_e)$. Preferimos considerar en este caso el dominio como se indicó más arriba, porque el registro que podemos obtener en el celular

de nuestras llamadas, o en el perfil personal de la compañía, es en segundos y no fracciones del mismo.

En particular, interesa detenernos en el análisis de la función $c(t)$ y el intervalo en que se encuentra definida. La rama en la que se involucra una función constante representa el costo para llamadas cuya duración es de 1 a t_e segundos. En este período, todas las llamadas tienen el mismo costo y todas valen t_e segundos. En cambio, para llamadas cuya duración superen los t_e segundos, la función costo corresponde a una función lineal y se requiere analizar cuáles son sus límites de validez.

Las compañías de telefonía celular, para cada plan que ofrecen, estipulan un crédito disponible para todo consumo (c_r). Supongamos que ese crédito es consumido en una llamada continua, con el propósito de maximizar su empleo. Pues, si consumiéramos el crédito disponible en comunicaciones telefónicas de distinta duración, el costo de la llamada siempre se encontrará afectado por el costo del establecimiento de la comunicación.

Así, de manera ideal con el crédito disponible para todo consumo que estipula la compañía, se podrá mantener una comunicación que dure a lo sumo $\left[\frac{c_r - c_e}{c_s} + t_e\right]$ segundos. El tiempo máximo para hablar surge de resolver la siguiente ecuación:

$$c_e + c_s(t - t_e) = c_r$$
$$t = \frac{c_r - c_e}{c_s} + t_e$$

Se utiliza la función piso en la expresión $\left\lfloor \frac{c_r - c_e}{c_s} + t_e \right\rfloor$, porque según el valor que corresponde a cada parámetro, el resultado de la operación puede ser un número no entero. Las fracciones de segundos que surjan del cálculo son pérdidas por el usuario, pues las compañías de telefonía celular tasan las comunicaciones por segundo de duración.

En particular, resulta interesante analizar situaciones reales de las compañías de telefonía celular, para profundizar en el análisis de la comparación entre ellas. Al momento de escribir este texto, las tres compañías de Argentina consideradas proponen los siguientes planes. Estos datos corresponden a los planes más económicos de las tres empresas:

Compañía 1



Crédito para todo consumo	SMS Incluido	SMS Excedente	Establecimiento o de llamada incluido (primeros 30 segundos)	Establecimiento de llamada excedente (primeros 30 segundos)	Precio segundo incluido	Precio segundo excedente
\$55	100	\$1,40	\$1,3050	\$2,90	\$0,0435	\$0,0967

Compañía 2

Plan	Crédito	Internet	Llamadas	SMS	Info
<p>CONEXIÓN TOTAL \$260x mes</p> <p>\$100 x mes</p> <p>1GB cuota de datos incluida</p> <p>ilimitadas a Personal, a todo el país</p> <p>ilimitados a cualquiera compañía</p> <p>CONTRATAR Ver detalle</p>					

Crédito para todo consumo	SMS Incluido	SMS Excedente	Establecimiento de llamada incluido (primeros 30 segundos)	Establecimiento de llamada excedente (primeros 30 segundos)	Precio segundo incluido	Precio segundo excedente
\$75	ilimitado	----	\$2,07	----	\$0,069	----

Compañía 3

PLANES	PRECIO	HABLÁ	MENSAJEÁ	NAVEGÁ	CRÉDITO	EXTRA
Comunidad Más 1GB	250,00 \$/mes	Libre a todos los Movistar	Libre a cualquier compañía	1 GB 4G hasta 10 veces más rápido	\$50 si los consumis te prestamos \$ 30 hasta dos veces al mes	Tu habló y mensajéa gratis a cualquier lugar del mundo

Crédito para todo consumo	SMS Incluido	SMS Excedente	Establecimiento de llamada incluido (primeros 30 segundos)	Establecimiento de llamada excedente (primeros 30 segundos)	Precio segundo incluido	Precio segundo excedente
\$50	ilimitado	----	\$2,6135	----	\$0,0871	----

Supongamos que queremos conocer cuánto podemos hablar con el crédito disponible para todo consumo, que ofrece cada compañía. Este crédito es diferente para cada empresa y además, cada una estipula diferente costo para el establecimiento de llamada y por segundo que dure la comunicación luego de los 30 segundos de iniciada la misma.

Para el plan de la Compañía 1, resulta que si se emplea todo el crédito disponible para todo consumo en llamadas telefónicas, a lo sumo se podría hablar 1264 segundos (aproximadamente 21 minutos). Para el plan de la Compañía 2, se podría hablar a lo sumo 1449 segundos (aproximadamente 24 minutos). Mientras que para la Compañía 3 a lo sumo se podría hablar 574 segundos (aproximadamente 9 minutos) En particular, el plan de la Compañía 1 tiene menor costo en el establecimiento de la llamada y por segundo que dure la comunicación luego de los 30 segundos de iniciada la misma, con relación al plan de la Compañía 2. Sin embargo, el crédito disponible para todo consumo es mayor en el plan que ofrece la Compañía 2. Finalmente, se concluye que para ambos planes, se pueden mantener comunicaciones mediante llamadas de similar duración. En cambio, el abono de la Compañía 2 y la Compañía 3 son muy próximos, sin embargo, con el crédito disponible, la Compañía 3 permite establecer tiempo de comunicación mediante llamadas más breve que la Compañía 2.

Por otro lado, se puede profundizar el análisis del costo de las llamadas estudiando las funciones para los casos particulares de cada compañía. A modo de ejemplo se indica la función costo correspondiente al plan más económico de cada empresa, considerando solo comunicaciones locales y donde se emplea solo el crédito disponible para todo consumo.

Compañía 1

$$c(t) = \begin{cases} 1,3050 & \text{si } 1 \leq t \leq 30 \\ 1,3050 + 0,0435(t - 30) & \text{si } 31 \leq t \leq \left\lfloor \frac{55 - 1,3050}{0,0435} + 30 \right\rfloor \end{cases}$$

$$Dom(c(t)) = \left\{ t \in \mathbb{N} / 1 \leq t \leq \left\lfloor \frac{55 - 1,3050}{0,0435} + 30 \right\rfloor \right\}$$

Compañía 2

$$c(t) = \begin{cases} 2,07 & \text{si } 1 \leq t \leq 30 \\ 2,07 + 0,069(t - 30) & \text{si } 31 \leq t \leq \left\lfloor \frac{100 - 2,07}{0,069} + 30 \right\rfloor \end{cases}$$

$$Dom(c(t)) = \left\{ t \in \mathbb{N} / 1 \leq t \leq \left\lfloor \frac{100 - 2,07}{0,069} + 30 \right\rfloor \right\}$$

Compañía 3

$$c(t) = \begin{cases} 2,6135 & \text{si } 1 \leq t \leq 30 \\ 2,6135 + 0,0871(t - 30) & \text{si } 31 \leq t \leq \left\lfloor \frac{50 - 2,6135}{0,0871} + 30 \right\rfloor \end{cases}$$

$$Dom(c(t)) = \left\{ t \in \mathbb{N} / 1 \leq t \leq \left\lfloor \frac{50 - 2,6135}{0,0871} + 30 \right\rfloor \right\}$$

A continuación, se sugiere independizarse de las situaciones particulares de cada compañía, para estudiar posibles situaciones a las que nos podríamos enfrentar. En este sentido, se puede proponer estudiar la siguiente situación. Se considera pertinente el análisis porque al momento de escribir este texto, los planes de las compañías que más económico ofrecen el costo por establecimiento de llamadas, también

ofrecen más económico el costo del segundo que dure la comunicación luego de los 30 segundos de iniciada la misma. En este caso, resulta sencillo decidir qué plan y compañía ofrece el costo de llamada más económico. Sin embargo, en futuras ofertas, esto puede cambiar.

Situación 10

Consideremos dos compañías de telefonía celular que ofrecen diferentes tarifas para el establecimiento de la comunicación y el costo por segundo luego de transcurrido t_e segundos del establecimiento de la misma. ¿Cuál es la más económica y para qué tiempo de duración de la llamada?

En este caso se propone realizar un análisis considerando dos compañías, pero también puede ser considerando dos planes de abono para una misma compañía.

Supongamos que la función costo para dos compañías de telefonía celular son las siguientes. En ambas expresiones, mediante técnicas algebraicas, se modificó la expresión de la segunda rama, donde se involucra una función lineal. El propósito es obtener una expresión de la forma $f(x) = ax + b$, y en particular conocer la forma del parámetro b . El mismo depende de c_e y c_s , y es necesario conocer la relación para poder profundizar en el análisis.

Resulta que $b = c_e - c_s t_e$, siendo este un parámetro positivo. Pues c_e, c_s, t_e son valores fijos y por lo establecido en las diferentes compañías, e indicado en un principio, resulta $c_e \geq c_s t_e$.

$$c_1(t) = \begin{cases} c_{e_1} & \text{si } 1 \leq t \leq t_e \\ c_{s_1}t + c_{e_1} - c_{s_1}t_e & \text{si } t_e + 1 \leq t \leq \left\lfloor \frac{c_{r1} - c_{e_1}}{c_{s_1}} + t_e \right\rfloor \end{cases}$$

$$c_2(t) = \begin{cases} c_{e_2} & \text{si } 1 \leq t \leq t_e \\ c_{s_2}t + c_{e_2} - c_{s_2}t_e & \text{si } t_e + 1 \leq t \leq \left\lfloor \frac{c_{r2} - c_{e_2}}{c_{s_2}} + t_e \right\rfloor \end{cases}$$

El estudio de la situación se ubica en analizar para qué valores de tiempo t , resulta $c_1(t) = c_2(t)$, $c_1(t) < c_2(t)$ y $c_1(t) > c_2(t)$. Es fundamental para esta comparación, interpretar las expresiones involucradas. Los casos particulares de cada empresa pueden ser estudiados mediante técnicas aritméticas, gráficas y algebraicas. Aquí solo se profundiza en las técnicas algebraicas que justifican las otras técnicas y se proporciona la interpreta gráfica de cada situación.

Para comparar el costo de la llamada entre las dos compañías, es necesario analizar los posibles valores de los parámetros que componen a la expresión (c_e y c_s). No consideramos en este caso el análisis de t_e porque es un valor fijo e igual para todas las compañías, que se encuentra establecido por el MINISTERIO DE PLANIFICACIÓN FEDERAL, INVERSIÓN PÚBLICA Y SERVICIOS de la República Argentina. Esto permite predecir desde el análisis del modelo, posibles casos que se podrían presentar:

1. Si $c_{e_1} = c_{e_2}$ y $c_{s_1} < c_{s_2}$ o si $c_{e_1} = c_{e_2}$ y $c_{s_1} > c_{s_2}$

Para ambas empresas, el costo por establecimiento de llamada es el mismo, pero a partir de los t_e segundos de comunicación, el costo es mayor en una de las compañías.

La segunda rama que compone a la función costo $c(t)$ entre ambas compañías difiere en ordenada al origen y pendiente. Por lo tanto, dependiendo del valor del costo por establecimiento de llamada (c_e), el costo del segundo luego de t_e segundos de establecida la comunicación (c_s), y el crédito disponible para todo consumo (c_r), puede establecerse un período donde el costo de ambas empresas será el mismo. Luego de este período, la compañía de mayor costo del segundo luego de t_e segundos de establecida la comunicación, será la compañía más costosa.

Para conocer el tiempo t donde ambas compañías tienen el mismo costo, planteamos:

$$c_{e_1} + c_{s_1}(t_i - t_e) = c_{e_2} + c_{s_2}(t_i - t_e)$$

Resulta que para $t_i = \frac{c_{e_2} - c_{e_1}}{c_{s_1} - c_{s_2}} + t_e$ el costo de la comunicación para ambas compañías es el mismo. El instante t_i es igual t_e . Pues, como $c_{e_1} = c_{e_2}$, resulta que $t_i = 0 + t_e$, es decir, $t_i = t_e$. Para comunicaciones cuya duración sea de 1 a t_e segundos, el costo es el mismo para ambas empresas.

Mediante técnicas gráficas, podemos interpretar la situación del siguiente modo. Supongamos que $c_{e_1} = c_{e_2}$ y $c_{s_1} < c_{s_2}$:

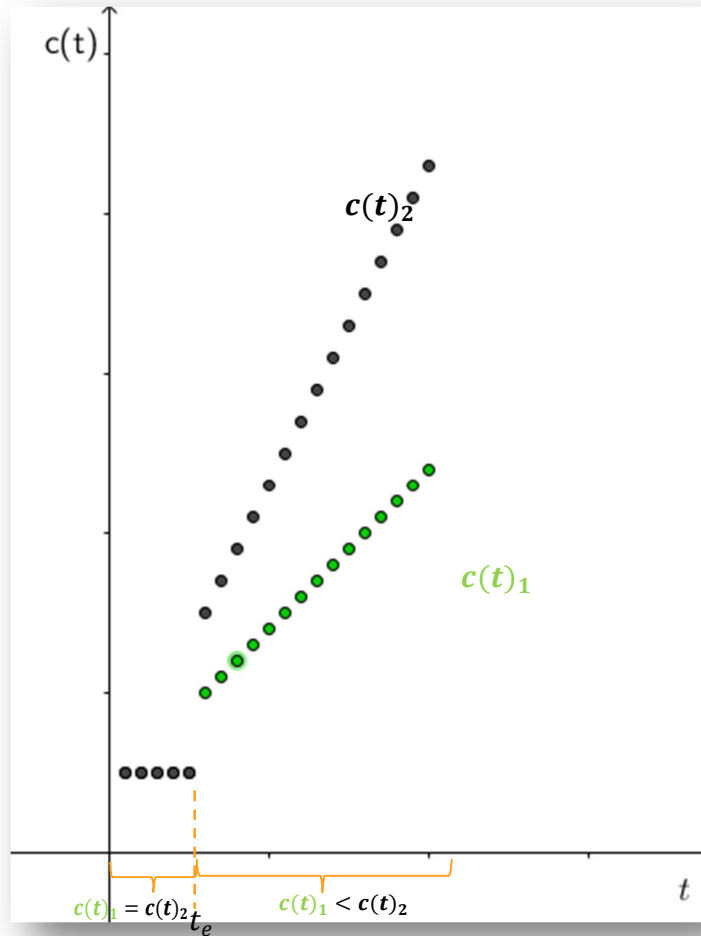


Gráfico 1

2. Si $c_{e1} > c_{e2}$ y $c_{s1} < c_{s2}$ o si $c_{e1} < c_{e2}$ y $c_{s1} > c_{s2}$

En este caso, el costo por establecimiento de llamada (c_e) es mayor en una de las compañías, pero esta tiene un costo menor del segundo luego de los t_e segundos de establecida la comunicación (c_s).

Para los primeros t_e segundos de comunicación, será más económica la compañía que ofrece menor costo por establecimiento de llamada. Para el estudio de comunicaciones cuyo tiempo de

duración superen los t_e segundos, es necesario analizar la segunda rama de la función costo. La función lineal para cada compañía difieren en el valor de ordenada y pendiente por lo tanto, en algún instante ambas funciones tomarán el mismo costo $c(t)$. A partir de este instante la compañía que en principio era más costosa va a comenzar a ser más económica. Para conocer este punto, se plantea:

$$c_{e1} + c_{s1}(t_i - t_e) = c_{e2} + c_{s2}(t_i - t_e)$$

Resulta que para $t_i = \frac{c_{e2} - c_{e1}}{c_{s1} - c_{s2}} + t_e$ el costo de la comunicación para ambas compañías es el mismo. Resulta que $t_i > t_e$, pues si se analiza el signo del cociente $\frac{c_{e2} - c_{e1}}{c_{s1} - c_{s2}}$, para $c_{e1} > c_{e2}$ y $c_{s1} < c_{s2}$ o para $c_{e1} < c_{e2}$ y $c_{s1} > c_{s2}$, resulta ser siempre positivo.

Para llamadas cuya duración sea mayor a t_i , la compañía más económica será la que tiene mayor costo por establecimiento de llamada.

Mediante técnicas gráficas, podemos interpretar la situación del siguiente modo. Supongamos que $c_{e1} > c_{e2}$ y $c_{s1} < c_{s2}$:

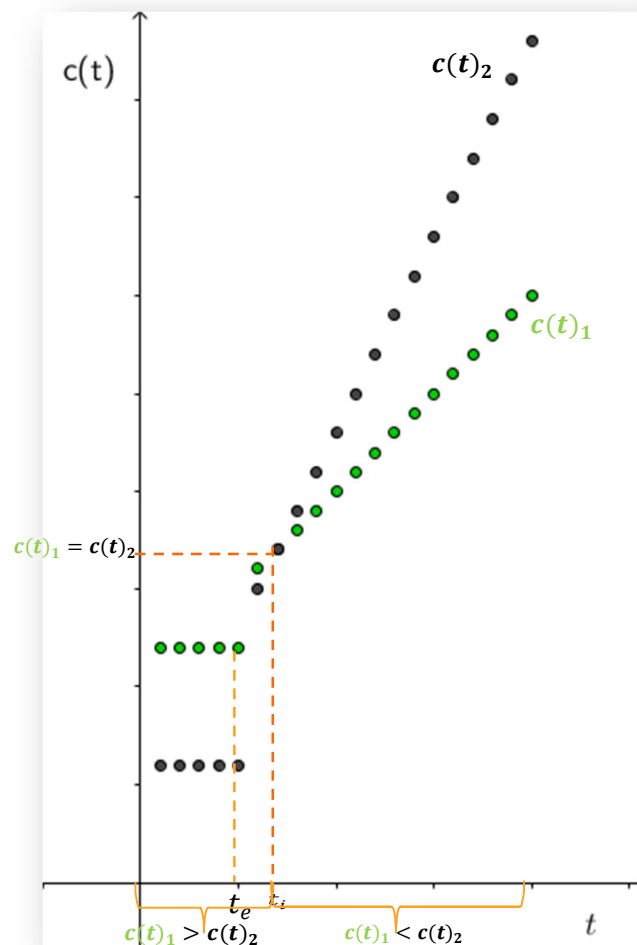


Gráfico 2

3. Si $c_{e1} > c_{e2}$ y $c_{s1} = c_{s2}$ o $c_{e1} < c_{e2}$ $c_{s1} = c_{s2}$

En este caso, para comunicaciones hasta t_e segundos, será más económica aquella compañía que tenga menor costo en el establecimiento de llamada (c_e). Para comunicaciones de duración mayor a t_e segundos, tenemos que considerar la función lineal que compone a la función costo $c(t)$. Esta función entre ambas compañías difiere en la ordenada al origen pero tienen igual pendiente. Por lo tanto, la compañía más económica será aquella que también tenga

menor costo por establecimiento de la llamada. Se trata de la representación de dos rectas paralelas. No existe ningún punto en el que se intersecten.

Mediante técnicas gráficas, podemos interpretar la situación del siguiente modo. Supongamos que $c_{e_1} < c_{e_2}$ y $c_{s_1} = c_{s_2}$:

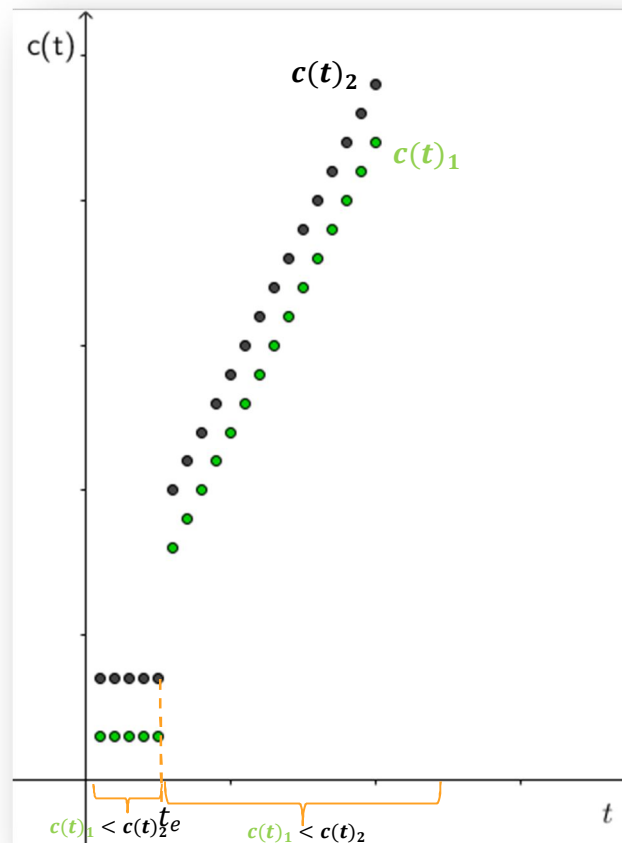


Gráfico 3

4. Si $c_{e1} < c_{e2}$ y $c_{s1} < c_{s2}$ o si $c_{e1} > c_{e2}$ y $c_{s1} > c_{s2}$

Esta es la situación que nos encontramos con los planes vigentes de las compañías, al momento de redactar este texto. Para comunicaciones cuya duración no superen los t_e segundos la empresa que tenga mayor costo por establecimiento de la llamada (c_e) será la que tenga mayor costo de comunicación.

Para llamadas cuya duración supere los t_e segundos, las funciones costos involucradas son lineales y difieren en ordenada al origen y pendiente, por lo que es necesario conocer si existe un punto donde el costo de la comunicación sea el mismo para ambas compañías. Para conocer este punto, se plantea:

$$c_{e1} + c_{s1}(t_i - t_e) = c_{e2} + c_{s2}(t_i - t_e)$$

Resulta que para $t_i = \frac{c_{e2} - c_{e1}}{c_{s1} - c_{s2}} + t_e$ el costo de la comunicación para ambas compañías es el mismo. Resulta que $t_i < t_e$, pues si se analiza el signo del cociente $\frac{c_{e2} - c_{e1}}{c_{s1} - c_{s2}}$, para $c_{e1} > c_{e2}$ y $c_{s1} > c_{s2}$ o para $c_{e1} < c_{e2}$ y $c_{s1} < c_{s2}$, resulta ser siempre negativo. Es decir, ambas funciones se intersectan en un punto donde $t_i < t_e$, lo que resulta imposible para el tipo de tasación de las comunicaciones que se propone. Por lo tanto, luego de t_e segundos de establecida la comunicación será más económica la compañía que tenga menor costo del segundo luego de los t_e segundos de establecida la llamada.

Mediante técnicas gráficas, podemos interpretar la situación del siguiente modo. Supongamos que $c_{e_1} < c_{e_2}$ y $c_{s_1} < c_{s_2}$:

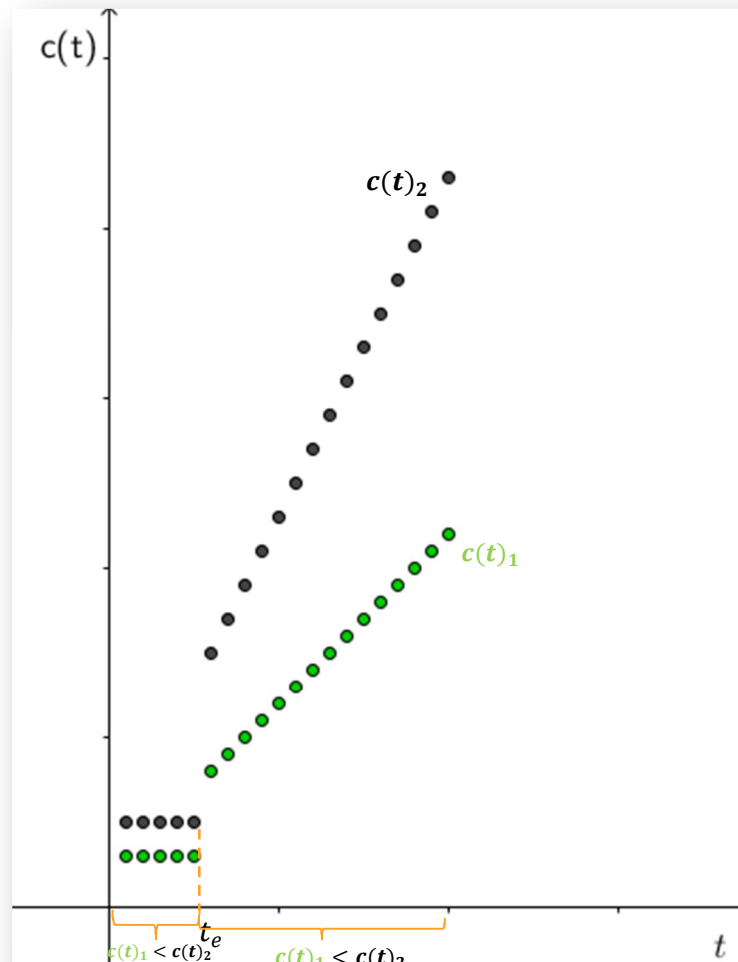


Gráfico 4

El estudio puede ser ampliado analizando la diferencia de costo de la llamada entre las dos compañías, a partir del estudio de la situación 13, que se presenta más adelante.

A partir del análisis realizado, resulta de interés preguntarse, ¿Hasta qué instante t continuará la comparación? Para dar respuesta,

es necesario considerar el crédito disponible para todo consumo que proponen las compañías. Pues, algunas de ellas, para poder adquirir más crédito, los costos por establecimiento de llamada y segundo se encuentran modificados. Es el caso, por ejemplo, de la oferta de la Compañía 1.

Así, la comparación será posible hasta el menor valor entre $\left\lfloor \frac{c_{r_1} - c_{e_1}}{c_{s_1}} + t_e \right\rfloor$ y $\left\lfloor \frac{c_{r_2} - c_2}{c_{s_2}} + t_e \right\rfloor$.

Otra situación típica que puede emerger del estudio es:

Situación 11

¿Cuál es el costo de un segundo?

Para poder dar respuesta es necesario analizar la información que brindan las compañías de telefonía celular y no dar una respuesta inmediata a partir de los cuadros tarifarios.

El costo medio de una llamada de t segundos, puede ser representado de la siguiente manera:

$$c_m(t) = \begin{cases} \frac{c_e}{t} & \text{si } 1 \leq t \leq t_e \\ \frac{c_e + c_s(t - t_e)}{t} & \text{si } t_e + 1 \leq t \leq \left\lfloor \frac{c_r - c_e}{c_s} + t_e \right\rfloor \end{cases}$$

$$Dom(f) = \left\{ t \in \mathbb{N} / 1 \leq t \leq \left\lfloor \frac{c_r - c_e}{c_s} + t_e \right\rfloor \right\}$$

La expresión $c_m(t)$ corresponde a una función definida a trozos, compuesta por dos ramas. Cada una de ellas corresponde a funciones racionales.

El estudio de la Situación 11 conduce al análisis de funciones racionales. En particular, interesa estudiar a qué valor tiende la función a medida que transcurre el tiempo. Esto implica el análisis de asíntotas de la función y profundizar en el estudio de la relación que existe entre la duración de la llamada y $c_m(t)$. Por lo que se propone estudiar la siguiente situación:

Situación 12

¿Qué relación existe entre la duración de la llamada y $c_m(t)$?

Como el costo por establecimiento de la llamada (c_e) y el costo del segundo luego de t_e segundos de establecida la comunicación (c_s) son positivos y además $c_e > c_s t_e$, resulta que el costo medio $c_m(t)$ es decreciente para cualquier tiempo t de duración de la llamada. Es decir, a mayor duración de la llamada, menor es el costo medio.

Para llamadas cuya duración sea entre t y t_e segundos, se considera la función $c_m(t) = \frac{c_e}{t}$. Esta función decrece según se incrementa t . El costo medio cada vez estaría más cerca a cero si t creciera de manera indefinida, pero para el caso de las compañías en estudio, esto se limita porque $t \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq t \leq t_e$. Así mismo, esta función tiene una asíntota vertical. Esto indica que cuanto más breves sean las llamadas, mayor será el costo del segundo, en el intervalo considerado.

Para llamadas cuya duración sea superior a t_e la función $c_m(t) = \frac{c_e + c_s(t - t_e)}{t}$, tiene una asíntota horizontal $y = c_s$. Es decir, para comunicaciones que superen los t_e segundos de duración el precio por segundo se aproxima a c_s , no alcanzando nunca al valor c_s .

Otra situación a la que nos podríamos enfrentar es:

Situación 13

¿Cómo calcular la diferencia de costo entre dos empresas?

Consideremos dos empresas cuya función costo es $c_1(t)$ y $c_2(t)$ respectivamente, por lo que resulta que la diferencia de costo entre ambas empresas es:

$$D(t) = \begin{cases} |c_{e_1} - c_{e_2}| & \text{si } 1 \leq t \leq t_e \\ |c_{e_1} + c_{s_1}(t - t_e) - c_{e_2} + c_{s_2}(t - t_e)| & \text{si } t_e + 1 \leq t \leq \left\lceil \frac{c_{r_1} - c_{e_1}}{c_{s_1}} + t_e \right\rceil \end{cases}$$

De esta manera, la función definida a trozos queda compuesta por ramas que corresponden a funciones módulos. El análisis de esta expresión nos conduce a preguntarnos ¿Hasta cuándo realizar la comparación de tarifas? La comparación será posible hasta el menor valor entre $\left\lceil \frac{c_{r_1} - c_{e_1}}{c_{s_1}} + t_e \right\rceil$ y $\left\lceil \frac{c_{r_2} - c_{e_2}}{c_{s_2}} + t_e \right\rceil$ por las razones indicadas anteriormente.

El estudio no concluye aquí. Las compañías también tienen formas de pago mediante planes prepago. Se puede continuar analizando estos en relación a los planes con abono. Así también hay empresas que incluyen costos adicionales a las tarifas según la

distancia de la llamada, por lo que también se requiere indagar en este sentido.

El estudio realizado se centra en analizar el costo por establecimiento de comunicación mediante llamadas pero, ¿Cómo recuperar el sentido de la situación inicial? Se requiere profundizar y volver a la situación original para dar respuesta. Es necesario suponer diversas situaciones, tales como ser, si una persona no tiene compañía celular, ¿por cuál optar? Y si la persona ya tiene compañía celular, ¿le conviene cambiar de empresa? ¿Y de plan dentro de la misma compañía?

Como síntesis del estudio y con el propósito de recuperar el sentido de la situación inicial, se propone la siguiente situación:

Situación 14

Un usuario de telefonía celular se encuentra disconforme con su plan de abono. Realiza un informe que le permita tomar decisiones teniendo en cuenta sus posibles necesidades.

Consideraciones finales

La propuesta puede ser gestionada por cualquier profesor de matemática en la escuela secundaria actual. Esto requiere que el rol del profesor se ubique en dar espacio a los alumnos para indagar y proponer las situaciones que les interese estudiar. Así también, la gestión del estudio requerirá que el profesor tome las decisiones necesarias para evitar que la situación inicial se desvanezca, buscando mantener viva la problematización de la misma.

Las posibles respuestas a la situación inicial requieren recorrer distintas organizaciones matemáticas que en el diseño curricular de la escuela secundaria en Argentina, aparecen poco articuladas o se encuentran ausentes. Estas organizaciones son: estadística descriptiva, función constante, función lineal, función racional, función definida a trozos, función techo, función piso, función módulo, estimación por redondeo y truncamiento, ecuaciones e inecuaciones lineales, sistema de ecuaciones lineales, dominio continuo y discreto de funciones. El estudio permite reencontrar la utilidad de las distintas organizaciones matemáticas y vincularlas para estudiar una situación real, dando respuesta a preguntas como las siguientes: *¿Cómo usar funciones para solucionar problemas reales? ¿Cómo elegir la tarifa más barata para hablar por teléfono celular? ¿Cómo comparar tarifas de telefonía celular?* Como así también comprender el funcionamiento de la forma de tasación de llamadas de telefonía celular y entender que siempre se puede hablar t_e segundos por teléfono, porque las compañías cobrarán siempre como mínimo este importe aunque se hable menos. Y además, que no siempre hay una única forma de solucionar los problemas, a veces que hay varias, algunas son mejores que otras dependiendo de las necesidades.

Por otro lado, el estudio de la situación inicial, permite dar un lugar esencial a la actividad de modelización, caracterizada por las siguientes etapas:

- Delimitación del sistema en el que hay una situación problemática y la formulación de preguntas que no tienen respuesta inmediata. Esto conduce a seleccionar ciertos aspectos del sistema que se simbolizan como variables.
- Establecimiento de algunas relaciones matemáticas entre las variables del sistema.
- El trabajo técnico dentro del modelo, que permite tomar decisiones sobre la fecundidad y pertinencia del modelo construido.
- El planteo y estudio de problemas aumenta el conocimiento sobre el sistema. La formulación de nuevas preguntas no sería posible sin disponer del modelo del sistema y del estudio realizado a partir del mismo. Algunos de estos nuevos problemas llegan a independizarse del sistema inicial requiriendo la construcción de nuevos modelos matemáticos para poder dar respuesta.

En este trabajo se profundizó el estudio sobre técnicas algebraicas que derivaron en la formulación de diversos modelos, pero también pueden emplearse otras técnicas como ser gráficas y aritméticas. Las técnicas gráficas pueden ser utilizadas tanto para contrastar información que se obtenga mediante técnicas aritméticas o algebraicas. Así también para obtener información a partir de su interpretación, que posteriormente se puede contrastar con otras técnicas. Es de vital importancia no privilegiar una técnica sobre las

*Enseñanza por Investigación en el marco de la TAD:
Una propuesta para estudiar las funciones a trozos.
Ana Rosa Corica*

demás, sino focalizar en el carácter de *función explicativa* de la técnica (es correcta, adecuada y eficaz) junto a la *función justificativa* (es útil para el hacer de la tarea que se encuentra resolviendo, permitiendo resolver de manera efectiva).

Bibliografía

- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/2, 221-266.
- Chevallard, Y. (2012) Teaching Mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. 12th International Congress on Mathematical Education. 8-15 July, 2012, Seoul, Korea. Disponible en: <http://yves.chevallard.free.fr/>
- Chevallard, Y. (2013a). Journal du Seminaire TAD/IDD. Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement. Recuperado de: <http://yves.chevallard.free.fr/>
- Chevallard, Y. (2013b) Éléments de didactique du développement durable. Leçon 3. Recuperado de: <http://yves.chevallard.free.fr/>
- Corica, A.; Otero, M. (2015) The Mathematics Teacher's Profession: the Perspective of Future. *European Journal of Science and Mathematics Education*. 3 (2), 145 - 158. Disponible en: <http://scimath.net/>
- Corica, A.; Otero, M. (2016a) Diseño e Implementación de un Curso para la Formación de Profesores en Matemática: una Propuesta desde la TAD. *Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)*. 30(55), 763-785.

Corica, A.; Otero, M. (2016b) Estudio de dispositivos didácticos propuestos por futuros profesores de Matemática: un análisis desde la TAD. *Perspectiva Educacional*. 55(2), 21-37.

Corica A.; Otero, M. (2016c). Análisis de la implementación de un dispositivo didáctico enmarcado en el paradigma de la investigación desarrollado por un estudiante del profesorado en matemática. En OTERO, M et al. *Actas del 2º Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática , 3º Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática*. (pp 253-258). Disponible en: <http://iciecymienem.sites.exa.unicen.edu.ar/>

MINISTERIO DE PLANIFICACIÓN FEDERAL, INVERSIÓN PÚBLICA Y SERVICIOS. SECRETARÍA DE COMUNICACIONES. Resolución N° 26/2013.

Otero, M.; Fanaro, M.; Corica, A. R.; Llanos, V. C.; Sureda, P.; Parra, V. (2013). *La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el aula de Matemática*. Buenos Aires: Dunken.

Rodríguez, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico*. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

Rodríguez, E.;Hidalgo, M.; Sierra, T. (2013). La modelización a través de los recorridos de estudio e investigación: el caso de la comparación de tarifas de telefonía móvil. *Actas del IV Congreso Internacional sobre la TAD*.

*Enseñanza por Investigación en el marco de la TAD:
Una propuesta para estudiar las funciones a trozos.
Ana Rosa Corica*

Páginas web

<http://www.claro.com.ar/portal/ar/pc/personas/>

<http://www.movistar.com.ar/>

<http://www.personal.com.ar/>

2016

Ana Rosa Corica. Doctora en Ciencias de la Educación por la UNC en Argentina. Licenciada en Educación Matemática y Profesora en Matemática y Física por la UNCPBA. Investigadora Adjunta del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Investigadora del NIECyT. Es Profesor Adjunto de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNCPBA, Tandil, Buenos Aires, Argentina.

