REDIMAT
Journal of Research in Mathematics Education

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Instructions for authors, subscriptions and further details:

http://redimat.hipatiapress.com

Desarrollo de un Modelo Praxeológico de Referencia en Torno a Lugares Geométricos

María de la Trinidad Quijano[1] y Ana Rosa Corica[2]

1) UNRN, Argentina
2) CONICET-NIECYT-UNCPBA, Argentina

Date of publication: June 24th, 2017
Edition period: June 2017-October 2017

To cite this article: Quijano, M.T., and Corica, A.R. (2017). Desarrollo de un modelo praxeológico de referencia en torno a lugares geométricos. *REDIMAT*, *6*(2), 192-220. doi: 10.17583/redimat.2017.2228

To link this article: http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2017.2228

REDIMAT, Vol. 6 No. 2 June 2017 pp. 192-220

Development of a Reference Praxeological Model About Loci

María de la Trinidad Quijano
UNRN

Ana Rosa Corica
CONICET-NIECYT-UNCPBA

(*Received: 24 August 2016; Accepted: 11 June 2017; Published: 24 June 2017)*

Abstract

In this work we discuss results of a research about teaching loci in the high school. Several researchers emphasize the gradual disappearance of geometry in math classes and the study meaningless. Also, in current teaching geometry study focuses almost exclusively on Euclidean geometry. Starting from the Anthropological Theory of Didactics, we describe a Praxeological Reference Model about loci from Euclidean Geometry. Also, we analyzed the Praxeological Reference Model's scope and limitations, facing loci from Taxicab Non-Euclidean Geometry. We consider that approaching loci from this Geometry could lead to a larger study in Math class. While being a first approach to the problem, this study allows us to account, at least theoretically, that the coexistence of these geometries would be possible to teach geometric loci in high school. This is the beginning of a research that could enrich, enlarge and give another meaning to the study of the geometry at school.

Keywords: Loci, Euclidean Geometry, Non-Euclidean Geometry, Anthropological Theory of Didactics, Reference Praxeological Model

2017 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.17583/redimat.2017.2228

REDIMAT, Vol. 6 No. 2 Junio 2017 pp. 192-220

Desarrollo de un Modelo Praxeológico de Referencia en Torno a Lugares Geométricos

María de la Trinidad Quijano
UNRN

Ana Rosa Corica
CONICET-NIECYT-UNCPBA

(*Received: 24 Agost 2016; Accepted: 11 Junio 2017; Published: 24 Junio 2017)*

Resumen

En este trabajo discutimos resultados de una investigación sobre la enseñanza de lugares geométricos en la escuela secundaria. Diversos investigadores ponen de manifiesto la pérdida de presencia de la geometría en el aula de matemática y el estudio con poco sentido de lo que se propone. Asimismo, en la enseñanza actual el estudio de la geometría se centra casi exclusivamente en la geometría euclidiana. A partir de la Teoría Antropológica de lo Didáctico describimos un Modelo Praxeológico de Referencia en relación a lugares geométricos desde la geometría euclidiana. También realizamos un análisis de los alcances y limitaciones de este modelo cuando se estudian los lugares geométricos en la geometría no euclidiana del Taxista. Consideramos que abordar los lugares geométricos también desde esta geometría puede dar lugar a un estudio más amplio de la matemática en el aula. Si bien es un primer acercamiento a la problemática, este estudio permite dar cuenta, al menos teóricamente, que la coexistencia de estas geometrías sería posible al enseñar lugares geométricos en la escuela secundaria.

Palabras clave: Lugares geométricos, geometría euclidiana, geometría no euclidiana, Teoría Antropológica de lo Didáctico, Modelo Praxeológico de Referencia

2017 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.17583/redimat.2017.2228

Diversos autores ponen de manifiesto que la geometría favorece el trabajo propio de la actividad matemática así como el trabajo con otras ciencias y aplicaciones en la vida cotidiana. Colabora en que los estudiantes desarrollen la visualización, el pensamiento crítico, la intuición y el razonamiento inductivo y deductivo, entre otros. Resulta evidente entonces que su valor reside en la potencia de su uso en diferentes campos de aplicación (Araya & Alfaro, 2010; Barrantes & Balletbo, 2012; Bressan, Bogisic & Crego, 2000; De Villiers, 1996; Figueiras, Molero, Salvador & Zuasti, 2000; Guillén, 2010).

En la actualidad, pese a la fuerte presencia de la geometría en los diferentes diseños curriculares, y materiales institucionales, como por ejemplo libros de texto, diversos autores destacan su ausencia en las aulas (Gascón, 2003; Ibarra et al. 2013; Itzcovich, 2005; Olivero, Bosch & Gascón, 2013). Entre las razones de la pérdida de espacio y sentido del estudio de la geometría, tanto en los colegios como en la formación docente, Itzcovich (2005) señala la dificultad de los docentes en encontrar problemas que representen verdaderos desafíos; la poca claridad del sentido que adquieren las nociones geométricas en los diferentes diseños curriculares; la decisión docente de dejar de lado el estudio de estas nociones por falta de tiempo, priorizando otras como álgebra, aritmética o funciones. A esta ausencia de la geometría se suma que, en la etapa escolar se enseña, generalmente, una única geometría, la euclidiana, la que nos permite *moldear* nuestra realidad a través de puntos, rectas, figuras, etc. Sin embargo, existen otros tipos de geometrías, denominadas no euclidianas, que, a pesar de su importancia histórica, y de aparecer naturalmente en nuestra vida cotidiana no forman parte de nuestra etapa escolar (Barraza & Reyes, 2012; Salvador, 1994; De Villiers, 1996).

En este trabajo describimos un *Modelo Praxeológico de Referencia* (MPR). Este se encuentra conformado por una *red de praxeologías matemáticas* que permite trazar un *mapa* de recorridos posibles, vinculados a lugares geométricos en relación a la geometría que se propone estudiar en la escuela secundaria. En particular, el MPR se centra en las propiedades de los lugares geométricos en la geometría euclidiana. A continuación, realizamos un análisis del alcance de este MPR, cuando se estudian los lugares geométricos en una geometría no euclidiana particular: la Geometría del Taxista. Consideramos que esta geometría puede ser propicia para la enseñanza de varias nociones de la matemática en la escuela secundaria, y para cuestionar algunos alcances y limitaciones de la geometría euclidiana. Con este estudio se procura analizar los lugares geométricos desde dos miradas diferentes, y su posible coexistencia en el aula de matemática.

Marco Teórico

En este trabajo se adopta como referencial teórico a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999). En esta se considera como objeto de estudio e investigación, no sólo las actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula, sino todo el proceso que va desde la creación y utilización del saber matemático hasta su incorporación en las instituciones de enseñanza como saber enseñado (Corica & Otero, 2012). La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) "sitúa la actividad *matemática*, y en consecuencia la actividad del *estudio* en matemáticas, *en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales"* (Chevallard, 1999, p. 221).

En particular, la TAD indica que toda actividad humana regularmente realizada se puede describir con un modelo único, llamado *praxeología*. Estas constan de dos niveles:

- El nivel de la *praxis* o del *saber hacer*, engloba *tipo de tareas* y cuestiones que se estudian, y las *técnicas* para resolverlos.
- El nivel del *logos* o del *saber*, se encuentran los discursos que describen, explican y justifican las técnicas que se utilizan, esto es, la *tecnología*. Un segundo nivel de descripción, explicación, justificación (esto es, el nivel *tecnología de la tecnología*) se denomina *teoría*.

Para Chevallard (1999), dada una noción de estudio matemático, es necesario considerar:

- La *realidad matemática* que puede construirse en una clase de matemáticas donde se estudia el tema. Esto es, las tareas de concepción y organización de mecanismos de estudio y la gestión del medio ambiente (*Praxeología matemática* u *organización matemática*).
- La *manera* en que puede ser construida esa realidad matemática, es decir la forma como puede realizarse el estudio del tema. Esto es, las tareas de ayuda al estudio, particularmente la dirección de estudio y

enseñanza, cuyo cumplimiento es debido a la puesta en ejecución de técnicas didácticas determinadas (*Organización didáctica)*.

Debido a la naturaleza de este trabajo y a los objetivos propuestos, en esta oportunidad nos centraremos en describir características esenciales de OM.

En particular, Chevallard (1999) distingue diferentes tipos de OM a estudiar, según la *complejidad creciente* de sus componentes:

- Una *organización matemática* se considera *puntual* (OMP) en una institución cuando se centra en un único *tipo de tarea* T, generalmente asociadas a un pequeño conjunto de técnicas, por lo que está determinada por el bloque práctico-técnico $[T/\tau]$.
- Una *organización matemática* se considera *local* (OML) en una institución si resulta de la integración de diversas OMP. Cada praxeología *local* se caracteriza por una *tecnología* que sirve para justificar, explicar, relacionar entre sí y producir las técnicas de todas las *praxeologías puntuales* que la integran.
- Una *organización matemática* se considera *regional* (OMR) en una institución si se obtiene mediante la coordinación, articulación y posterior integración de diversas OML a una teoría matemática en común.
- Una *organización matemática* se considera *global* (OMG) si surge al agregar varias OMR a partir de la integración de diferentes teorías.

Modelo Praxeológico de Referencia

A continuación, describimos las características esenciales de un Modelo Praxeológico de Referencia (MPR) que forma parte del trabajo desarrollado por Quijano (2015). Este se centra en las propiedades de los lugares geométricos en la geometría euclidiana y se encuentra estrechamente relacionado con lo que se entiende por *enseñar y aprender matemática* en una cierta institución. Se trata de una *hipótesis científica*, creativa, a contrastar experimentalmente y, por lo tanto, susceptible de ser modificado constantemente. La descripción de un MPR suele hacerse mediante una red de cuestiones y respuestas, las que tienen estructura praxeológica (Fonseca, Gascón & Olivera, 2014).

El MPR que proponemos en torno a lugares geométricos se compone de diferentes OM en las que se vincula el estudio algebraico con el geométrico. Esta característica es de vital importancia porque evita lo que usualmente ocurre en la escuela secundaria, que es el estudio aislado de organizaciones matemáticas (Gascón, 2002).

Nuestro MPR se origina a partir de la *cuestión generatriz inicial*:

Q_0*: ¿Cuáles son las propiedades de los lugares geométricos?*

Para responder a Q_0 se requiere recorrer diferentes organizaciones matemáticas (OMs), es decir, un conjunto de tareas, técnicas, definiciones, propiedades que permiten describir y justificar el trabajo realizado. Es por ello que la *cuestión generatriz* planteada es considerada en sentido fuerte, pues se trata de una cuestión que debe ser estudiada, no pudiendo ser respondida inmediatamente.

En primer lugar, acordamos que un lugar geométrico es el conjunto de los puntos del plano que cumplen una determinada propiedad o condición geométrica. Para probar que una figura es el lugar geométrico de los puntos del plano que poseen una determinada condición, es preciso demostrar los dos teoremas, uno recíproco del otro, que se indican a continuación:

i) Que todos los puntos de la figura tienen la propiedad o condición mencionada.

ii) Que todos los puntos que poseen dicha propiedad pertenecen a la figura.

El MPR es formulado en correspondencia con el saber relativo a lugares geométricos que se propone estudiar en la escuela secundaria Argentina. Para ello acordamos que este trabajo debe estar en correspondencia con los Núcleos de Aprendizaje Prioritario (NAP) para la escuela Secundaria de la República Argentina (Ministerio de Educación de la República Argentina, 2011, 2012). La geometría que se propone estudiar en los NAP es la euclidiana, por lo que el MPR se piensa en función de esto, para luego discutirlo desde una geometría no euclidiana en el apartado siguiente.

En la Figura 1 se presenta el MPR en relación a las propiedades de los lugares geométricos. Aquí se indican las OMs que integran el MPR, junto al tipo de tareas que las representan, y las relaciones que se establecen entre ellas.

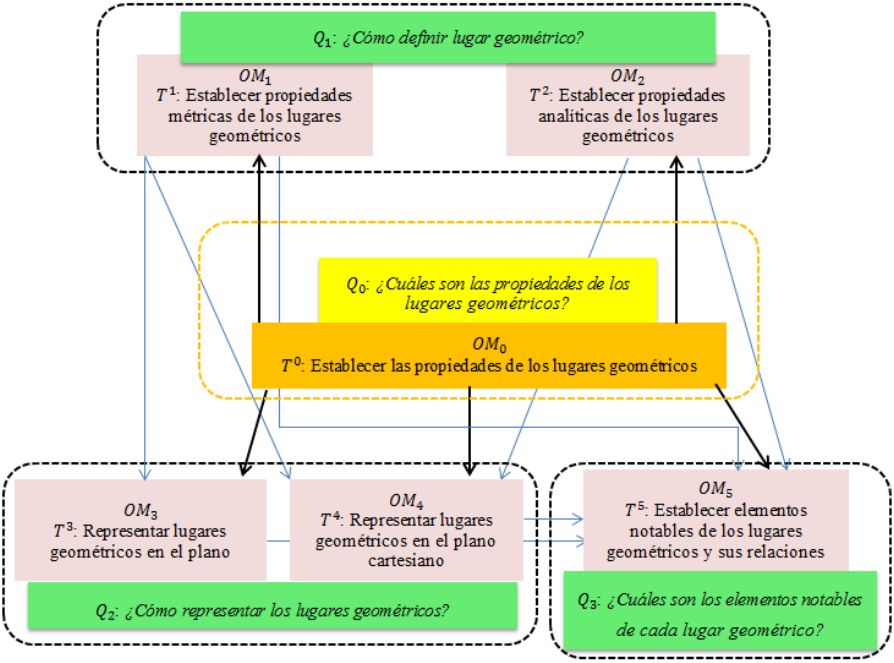

Figura 1. Modelo Praxeológico de Referencia

Nuestro MPR queda conformado por tres grandes bloques: el estudio que conduce a la definición de los diferentes lugares geométricos, el estudio de la representación de cada uno de ellos, y el establecimiento de sus elementos notables, siendo éste transversal a los otros dos. Cada uno de estos bloques se origina por una cuestión que se desprende de la cuestión generatriz[1] y es la que produce el estudio por las OMs[2] derivadas de ella.

El estudio de Q_0 deriva en la cuestión Q_1: *¿Cómo definir lugar geométrico?* que conduce al estudio del tipo de tareas que componen las OM_1 y OM_2. En la primera de ellas, el tipo de tareas que la define, T^1: *Establecer propiedades métricas de los lugares geométricos*, da lugar a un estudio sintético. Este estudio se completa con las tareas de la OM_3 (T^3: *Representar lugares geométricos en el plano*), de la OM_4 (T^4: *Representar lugares geométricos en el plano cartesiano*) y de la OM_5 (T^5: *Establecer elementos notables de los lugares geométricos y sus relaciones*). Asimismo, la OM_2 se define a partir del tipo de tareas: T^2: *Establecer propiedades* *analíticas de los lugares geométricos,* y como bien indica su nombre, da lugar a un estudio analítico. Este tipo de tareas requiere de un estudio en el plano cartesiano y el empleo de técnicas algebraicas que derivan en las fórmulas de cada lugar geométrico. Su estudio conduce, además, a establecer a los lugares geométricos como secciones de un cono. De esta manera, OM_1 y OM_2 constituyen la pieza fundamental que permiten dar respuesta a Q_0.

Otra de las cuestiones que se derivan de Q_0 es Q_2: *¿Cómo representar los lugares geométricos?* Esta cuestión conduce al estudio del tipo de tareas que componen las OM_3 y OM_4[3]. En este punto la propuesta es integrar las nociones que emergen de las definiciones de lugares geométricos, tanto por propiedades métricas como por propiedades analíticas. Para el estudio del tipo de tareas que integran la OM_3, T^3: *Representar lugares geométricos en el plano* las técnicas a emplear requieren el uso de instrumentos de geometría, cuyas tecnologías están apoyadas en las propiedades de la métrica y en algunos métodos de resolución de problemas específicos de construcción.

En cambio, el tipo de tareas que integra la OM_4, T^4: *Representar lugares geométricos en el plano cartesiano* conduce a la aplicación de técnicas analíticas, con tecnologías también fundamentadas en la métrica, pero con el empleo de técnicas algebraicas. En este sentido, se pretende la representación esquemática de cada lugar geométrico teniendo en cuenta los elementos notables de cada uno. Se deja de lado entonces la precisión instrumental que caracteriza a la OM_3 y se pone el acento en el cálculo y posterior representación de los elementos mencionados.

En el estudio del tipo de tareas que conforman la OM_5, T^5: *Establecer los elementos notables de los lugares geométricos y sus relaciones* resulta ser un estudio transversal al resto de las OMs. No se contempla de manera aislada y su estudio requiere de ciertas especificidades. Se estudian los elementos que identifican y caracterizan cada lugar geométrico sólido: eje, focos, directriz, vértice, distancia focal, excentricidad, respondiendo a la cuestión Q_3: *¿Cuáles son los elementos notables de cada lugar geométrico?* A continuación, describimos brevemente cada OM que compone al MPR.

Organización Matemática 1 (OM_1)

Esta OM se genera a partir de la cuestión Q_1: *¿Cómo definir lugar geométrico?* y se encuentra conformada por nueve OM puntuales (OMP)[4], que se indican a continuación junto al tipo de tareas que las representan (Figura 2).

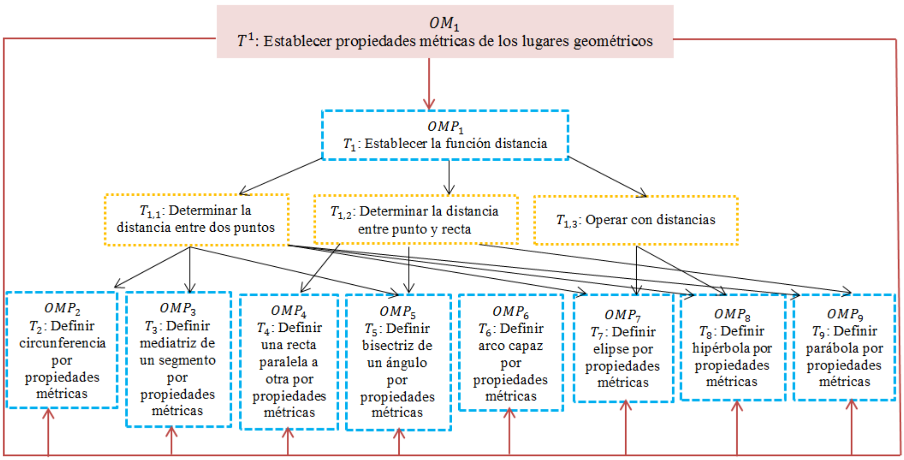

Figura 2. Organización Matemática 1 (OM_1)

El estudio de esta OM requiere establecer una función distancia[5] cuya tarea fundamental compone a la OMP_1. El estudio de esta OMP deriva en tres tipos de tareas: las que llevan a reconocer y determinar la distancia entre dos puntos del plano ($T_{1,1}$), las que se dirigen a reconocer y determinar la distancia entre un punto y una recta en el mismo plano ($T_{1,2}$) y las que llevan a operar con distancias ($T_{1,3}$). El estudio de estas tareas gesta parte del entorno tecnológico que justifica el hacer de las demás OMP que componen a la OM_1, excepto de la OMP_6 (*Definir arco capaz por propiedades métricas*), pues el arco capaz es el único lugar geométrico en el que no se requiere la noción de distancia.

En particular, el hacer de estas tareas admite diferentes técnicas dependiendo de la definición de distancia que se adopte. Pues, la distancia entre dos puntos en un espacio métrico euclidiano puede definirse como *la* *longitud del segmento de recta que los une*. De esta manera, la distancia puede estar relacionada con la medida (por ejemplo, *estar a 3 unidades de distancia de…*) o con algún segmento característico (*estar a una distancia* •——• *de…*). Asimismo, la distancia de un punto a una recta en el plano puede ser definida como *la mínima distancia entre las de dicho punto y todos los puntos de la recta*, la que se encuentra en un segmento de recta perpendicular a la dada. Es por ello que la técnica para poder hallar esta distancia se caracteriza por trazar primero una recta perpendicular a la dada por dicho punto.

El estudio de las ocho restantes $OMPs$ que conforman la OM_1(OMP_2: *Definir circunferencia por propiedades métricas;* OMP_3: *Definir mediatriz de un segmento por propiedades métricas;* OMP_4: *Definir una recta paralela a otra por propiedades métricas;* OMP_5: *Definir bisectriz de un ángulo por propiedades métricas;* OMP_6: *Definir arco capaz por propiedades métricas;* OMP_7: *Definir elipse por propiedades métricas;* OMP_8: *Definir hipérbola por propiedades métricas;*OMP_9: *Definir parábola por propiedades métricas*) conducen a determinar las propiedades métricas de cada lugar geométrico y con ello a sus respectivas definiciones. Por otro lado, esta OM se encuentra estrechamente vinculada con la OM_5 (Figura 1), pues en su estudio surgen los elementos notables de cada lugar geométrico.

Así también, el estudio de esta OM_1 se encuentra ligado a la representación de cada lugar geométrico en el plano, y tal como está planteado, mayormente a su representación sin considerar coordenadas cartesianas, esto es, vinculado con OM_3.

Organización Matemática 2 (OM_2)

La OM_2 se genera a partir de la cuestión Q_1: *¿Cómo definir lugar geométrico?* Y se compone de nueve OMP, que se indican a continuación, junto al tipo de tareas que las representan (Figura 3)[6].

Al igual que para laOM_1, la OM_2 requiere de la definición de una función distancia, cuya tarea principal compone la OMP_1. Su estudio deriva en tres tipos de tareas: las que conducen a calcular la distancia entre dos puntos del plano ($T_{1,1}$), las que se dirigen a calcular la distancia entre un punto y una recta en el mismo plano ($T_{1,2}$) y las que llevan a operar con distancias ($T_{1,3}$). En esta OM se procura un estudio analítico, por lo que el trabajo algebraico se hace indispensable.

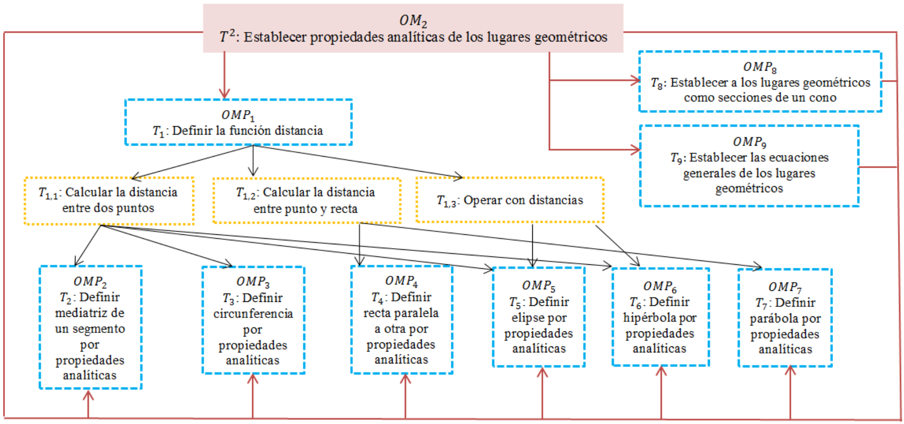

Figura 3. Organización Matemática 2 (*OM_2*)

El estudio de las OMP_2a OMP_7, dan lugar a las definiciones por propiedades analíticas de cada lugar geométrico. En todas ellas, parte del entorno tecnológico utilizado son sus definiciones por propiedades métricas, de aquí que el vínculo con la OM anterior es fundamental. Por ejemplo, el tipo de tareas T_2 que componen la OMP_2, *definir mediatriz de un segmento por propiedades analíticas*, requiere utilizar como entorno tecnológico la definición de distancia entre dos puntos y la de mediatriz por propiedades métricas, o bien usar propiedades de la mediatriz y las ecuaciones de rectas que cumplen ciertas propiedades específicas.

Las $OMP_3, OMP_4, OMP_5, OMP_6$ y OMP_7 llevan a las definiciones de los restantes lugares geométricos. El hacer de las tareas que involucran requiere del entorno tecnológico que emerge del estudio de la OMP_1.

A modo de ejemplo presentamos una tarea que compone a la OMP_3 y que consideramos de vital importancia, pues posibilita definir analíticamente la circunferencia:

t^3: *Hallar la ecuación cartesiana de la circunferencia de centro* (x_0, y_0) *y radio r.*

Para el estudio de esta tarea se requiere del entorno tecnológico que emerge del estudio de la OM_1, que se encuentra relacionado con la definición de la circunferencia por propiedades métricas:

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.

Sea $O = (x_0, y_0)$ el centro de la circunferencia, la misma está definida por los puntos P para los que $d(P, O) = r$.

Siendo $P = (x, y)$ un punto cualquiera de la circunferencia tenemos que

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

Entonces

$$\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)^2 = r^2$$

implificando, podemos definir la circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio $r > 0$ como el lugar geométrico de puntos (x, y) del plano que cumplen la siguiente ecuación:

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2}$$

El tipo de tareas T_8 que compone la OMP_8: *Establecer a los lugares geométricos como secciones de un cono*, conduce a definir ciertos lugares geométricos como intersección de un plano y un cono. El tipo de tareas T_9, que componen la OMP_9: E*stablecer ecuaciones generales de las cónicas*, lleva a la definición algebraica de las cónicas en general primero, y de cada una en particular después. Este estudio conduce a realizar diferentes tareas como: establecer relaciones entre los parámetros y la cónica, identificar una cónica en particular mediante sus parámetros, relacionar lugares geométricos dados por propiedades analíticas con las correspondientes ecuaciones algebraicas.

Dentro de esta OM_2 se pueden estudiar los lugares geométricos considerando otros tipos de coordenadas y con ello definirlos mediante ecuaciones en forma polar, paramétrica o vectorial. Siguiendo las líneas generales de los NAP en este nivel, nos limitamos sólo al tratamiento y estudio de los lugares geométricos en coordenadas cartesianas o, como ya se indicó, en el plano propiamente dicho (sin referencia alguna).

Organización Matemática 3 (OM_3)

Esta OM se genera a partir de la cuestión Q_2: *¿Cómo representar los lugares geométricos?* y se encuentra conformada por diez OM puntuales que se indican a continuación, junto al tipo de tareas que las representan (Figura 4).

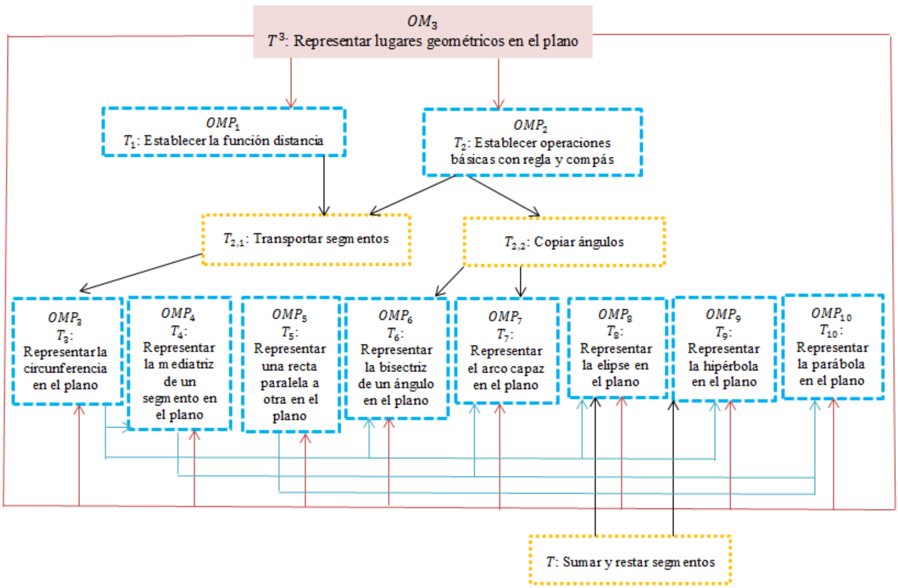

Figura 4. Organización Matemática 3 (OM_3)

El estudio de esta OM requiere, al igual que las otras dos OM descriptas, establecer la función distancia. El trazado de operaciones básicas[7] se hace indispensable para estudiar las construcciones con regla y compás en la que no se estudia con medidas, por lo que el tipo de tareas que componen la OMP_2 se encuentra vinculado con ello ($T_{2,1}$: *transportar segmentos* y $T_{2,2}$: *copiar ángulos*).

La OMP_3 se encuentra representada por el tipo de tareas T_3: *Representar la circunferencia en el plano*, y su hacer requiere utilizar el entorno tecnológico que se gesta con el estudio de la OMP_2: *Establecer operaciones básicas con regla y compás* y la OMP_1: *Establecer la función distancia*, que contempla a la definición de circunferencia por propiedades métricas y el transporte de segmentos. El hacer de OMP_1, OMP_2 y OMP_3 gesta parte del entorno tecnológico de las representaciones de los restantes lugares geométricos, y por ello, de las $OMPs$ que siguen a continuación, ya que requieren la construcción de circunferencias o arcos de la misma para su representación.

Asimismo, la definición por propiedades métricas de cada lugar geométrico es indispensable en la representación de todos ellos, por lo que el vínculo de esta OM con la OM_1 es estrecho. Esta relación se pone en evidencia en el estudio de la siguiente tarea:

t^6*: Representar la bisectriz del ángulo dado* $A\overset{\angle}{B}C$

Para la resolución de esta tarea se pueden asociar dos técnicas diferentes. Estas utilizan resultados tecnológicos derivados del estudio de la OM_1. En particular, en la primera de ellas se usan las definiciones de bisectriz y de recta paralela por propiedades métricas. La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados del ángulo, por lo que concluimos que el origen de la semirrecta bisectriz es el vértice de dicho ángulo. De esta manera, tenemos un punto de la misma; resta entonces encontrar otro punto que también pertenezca a ella. Para ello trazamos dos rectas paralelas, cada una a una distancia d de cada lado respectivamente. Nos aseguramos de esta manera, que el punto de intersección de ambas paralelas está a una misma distancia de cada lado, por lo que es el punto buscado. Luego, la semirrecta con origen en el vértice del ángulo y que pasa por ese punto es la bisectriz buscada (Figura 5).

Sean a y c las rectas paralelas a una distancia d de las semirrectas $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ respectivamente.

$E \in a \cap c$. Luego, E está a una distancia d de $\overrightarrow{BA}$ y E está a una distancia d de $\overrightarrow{BC}$.

Entonces $E \in B_{A\overset{\angle}{B}C}$.

Como la semirrecta con origen en B que contiene a E es única, es $B_{\widehat{ABC}}$ la bisectriz del ángulo $\widehat{ABC}$.

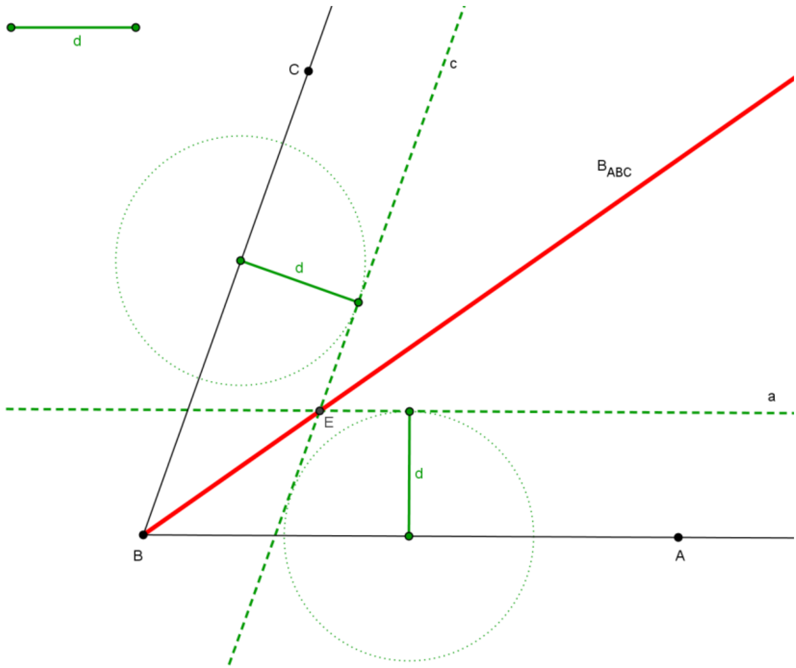

Figura 5. Trazado de la bisectriz de un segmento según la primera técnica

El punto E y el vértice del ángulo determinan la bisectriz del mismo. Al igual que en la mediatriz, aquí estamos usando la doble implicación de la definición del lugar geométrico en cuestión: todo punto que está en la bisectriz equidista de lados del ángulo, y si un punto equidista de los lados del ángulo, entonces pertenece a su mediatriz.

La segunda técnica asociada a la tarea en cuestión, usualmente se encuentra en los libros de texto y, en particular requiere utilizar las definiciones de bisectriz de un ángulo, de circunferencia y de mediatriz de un segmento por propiedades métricas. Además, y a diferencia de la anterior, se necesita emplear una propiedad de los triángulos isósceles[8] para desarrollar esta técnica.

En primer lugar, se construye una circunferencia con centro en el vértice y cualquier radio. Esta circunferencia tendrá intersección con cada uno de los lados del ángulo. Tomando el segmento que ellos determinan se traza la mediatriz de dicho segmento (Figura 6).

Al ser $\overline{BE}$y $\overline{BD}$ radios de una circunferencia, son congruentes, por lo que el triángulo DBE es isósceles. Luego, la mediatriz de $\overline{DE}$ contiene a la bisectriz buscada,

$B_{\overset{\angle}{ABC}}$.

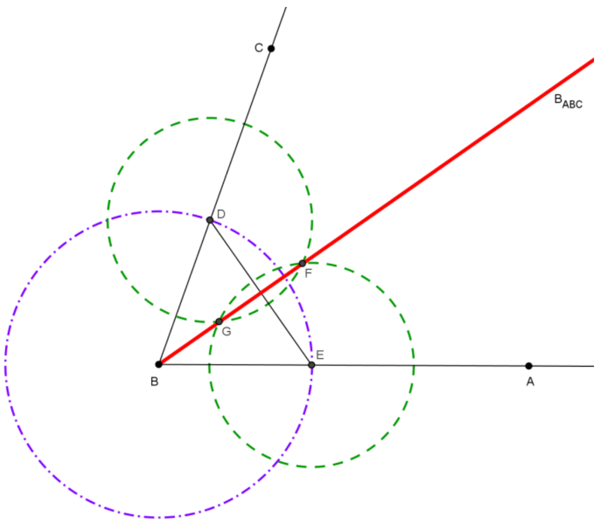

Figura 6. Trazado de la bisectriz de un segmento según la segunda técnica

En el algoritmo del trazado de la bisectriz de un ángulo propuesto en algunos libros de texto, no se explicitan las tecnologías que lo justifican, reduciendo el procedimiento sólo a la construcción de pequeños arcos de circunferencias y hallar sus intersecciones. Sostenemos que las tecnologías como las expuestas pueden ser abordadas por alumnos del nivel secundario, promoviendo la justificación por parte de ellos y evitando que el trazado pierda sentido.

La tercera técnica sólo puede ser utilizada en caso de conocer la amplitud del ángulo en cuestión y se requiere el uso del transportador. El entorno tecnológico que justifica la técnica tiene que ver con la propiedad de congruencia de los dos ángulos que determina la bisectriz de un ángulo.

Se construye un ángulo cuyo vértice y uno de sus lados coincida con el dado y cuya amplitud sea la mitad del dado. Esta técnica está basada en la medición, y se puede utilizar en caso de tener un transportador para medir ángulos, o en casos muy particulares, tales como ángulos llanos, o en aquellas situaciones en las que se pueda utilizar alguna escuadra para trazar ángulos determinados (por ejemplo, de 60º, de 45º, de 30º).

En las $OMPs$ restantes se estudian las representaciones en el plano de la elipse, hipérbola y parábola respectivamente. Las mismas se realizan punto a punto, esto es, se deben encontrar puntos pertenecientes a ellas y esbozar una representación aproximada. Esto marca la diferencia con las representaciones de los lugares geométricos estudiados anteriormente, en el que las construcciones quedan sujetas al hallazgo de un punto, el que permite determinar a dichos lugares geométricos de manera precisa.

Organización Matemática 4 (OM_4)

Esta OM se genera a partir del estudio de la cuestión Q_2: *¿Cómo representar los lugares geométricos?* Si bien, se pueden construir los lugares geométricos con regla y compás también en el plano cartesiano, decidimos diferenciarla de la anterior pues se introduce un referencial: el plano cartesiano.

Las ecuaciones cartesianas de cada lugar geométrico, como así también las ecuaciones y coordenadas de sus elementos notables, pueden dar lugar al trazado aproximado de cada lugar geométrico. Es por ello que el estudio previo o en conjunto con la OM_2: *Establecer propiedades analíticas de los lugares geométricos*, es indispensable en este sentido. De todas maneras, para realizar una representación cada vez más precisa, se hace necesario el hallazgo de más puntos de cada lugar geométrico. Esto puede llevar tanto al uso de su ecuación cartesiana (en caso de poseerla, se puede dar valores a una variable y obtener las coordenadas de otros puntos de la gráfica), como al uso de instrumentos de geometría (si se utiliza una definición métrica de cada lugar geométrico). De aquí se deduce que la relación con la OM_3: *Representar lugares geométricos en el plano* también es estrecha. Además, el estudio de la OM_5: *Establecer elementos notables de los lugares* *geométricos y sus relaciones*, se hace necesario en esta OM, ya que es a través de sus ecuaciones o coordenadas cartesianas que se graficará cada uno de los lugares geométricos.

Esta OM se encuentra conformada por ocho OMP, que se indican a continuación junto al tipo de tareas que las representan (Figura 7).

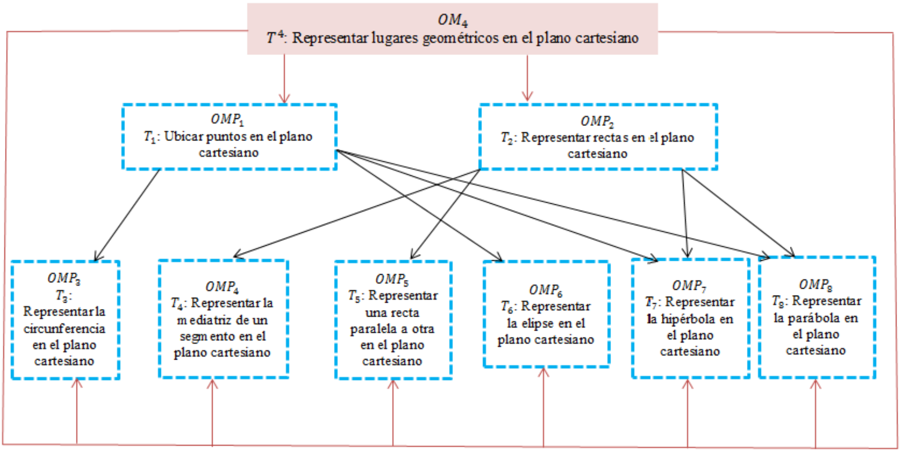

Figura 7. Organización Matemática 4 (OM_4)

Las dos primeras OMP tienen que ver con la representación en el plano cartesiano de puntos y rectas. Estas últimas pueden ser representadas mediante la identificación de sus parámetros (ordenada al origen, raíz, pendiente, vector director) o a través de una tabla de valores (dándole valores a la variable independiente y obteniendo los respectivos valores de la variable dependiente). Para dichas representaciones se utiliza el entorno tecnológico que postula: *por dos puntos distintos del plano, pasa una única recta*.

La OMP_3 se encuentra representada por el tipo de tareas T_3: *Representar la circunferencia en el plano cartesiano*, requiere ubicar su centro y establecer el radio de la misma, ya sea por otro punto exterior a ella, o a través de un segmento o medida dadas.

Las OMP_4: *Representar la mediatriz de un segmento en el plano cartesiano* y OMP_5: *Representar una recta paralela a otra en el plano* *cartesiano*, requieren como entorno tecnológico la representación de una recta, dada su ecuación cartesiana.

Las últimas tres $OMPs$ se refieren a la representación de cónicas en el plano cartesiano.

Organización Matemática 5 (OM_5)

La OM_5 se genera a partir de la cuestión Q_3: *¿Cuáles son los elementos notables de cada lugar geométrico?* El estudio se centra en el análisis de las cónicas y se encuentra conformada por siete OMP, que se indican a continuación junto al tipo de tareas que las representan (Figura 8).

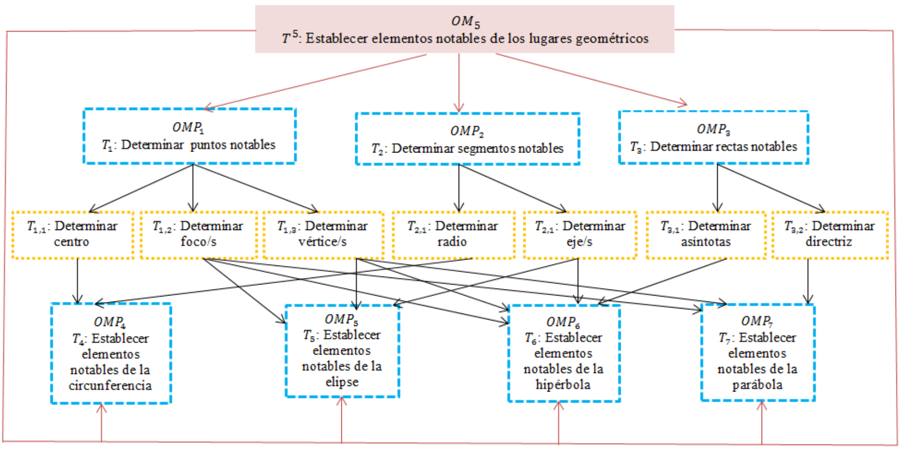

Figura 8. Organización Matemática 5 (OM_5)

En el desarrollo y descripción de las anteriores OM se puso de manifiesto la fuerte relación entre ésta y el resto de las OM que componen nuestro MPR.

Las primeras tres $OMPs$ que conforman esta OM_5 son las que permiten luego caracterizar a los lugares geométricos implicados. La OMP_1 conduce al estudio de tareas que permiten determinar puntos notables tanto como centro, focos y vértices de los lugares geométricos. Asimismo, la OMP_2, conduce a determinar segmentos notables: radio y ejes de ciertos lugares geométricos, como la circunferencia, elipse e hipérbola. La OMP_3 conduce al estudio de tareas que permiten determinar rectas notables, como asíntotas y directriz de la hipérbola y la parábola respectivamente.

Las cuatro $OMPs$ restantes llevan a determinar los elementos notables de cada cónica.

Geometría del Taxista

En este apartado analizamos los alcances y limitaciones del MPR construido desde la geometría euclidiana, al ser abordado desde la Geometría del Taxista. Esto es, mantenemos el mismo objeto de estudio: los lugares geométricos, pero cambiamos la función distancia, y con ello, evaluamos la pertinencia del modelo elaborado previamente.

Este análisis no sólo tiene el propósito de cuestionar el MPR, sino también servir como fundamento para la elaboración de un dispositivo didáctico para el estudio de lugares geométricos en la escuela secundaria, que no se centre sólo en la geometría euclidiana.

En la geometría del taxista, la distancia entre dos puntos de coordenadas $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ es: $d_T(P, Q) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$.

Al igual que la distancia euclidiana, esta distancia cumple las propiedades necesarias para ser una métrica y, además, se puede demostrar que la distancia del taxista entre dos puntos es siempre mayor o igual que la distancia euclidiana entre ellos.

A continuación, nos centramos en el análisis del MPR recorriendo las tres cuestiones, Q_1, Q_2 y Q_3 derivadas de la inicial Q_0: *¿Cuáles son las propiedades de los lugares geométricos?*, pero ahora con una mirada desde la geometría del taxista.

Q_1: ¿Cómo definir lugar geométrico?

El estudio de esta cuestión en la geometría del taxista requiere definir nociones como segmento y recta. A partir de esto, una de las dificultades que entra en juego al definir los lugares geométricos por propiedades está relacionada con el estudio algebraico de las ecuaciones modulares que surgen. Esto no impide su estudio en el aula, pero es un elemento que debería considerarse al diseñar tareas para su estudio.

Análogamente al trabajo presentado para la geometría euclidiana en el apartado anterior, podemos ahora utilizar esta métrica para definir cada lugar geométrico por propiedades analíticas. A modo de ejemplo, se plantea la siguiente tarea, tal como se hizo en la geometría euclidiana, ahora desde la del taxista:

t^3: *Hallar la ecuación cartesiana de la circunferencia de centro* (x_0, y_0) *y radio r.*

Para el estudio de esta tarea también se requiere del entorno tecnológico que emerge del estudio de la OM_1, que se encuentra relacionado con la definición de la circunferencia por propiedades métricas, es decir, se quiere obtener el conjunto de puntos $P = (x, y)$ del plano que están a una distancia r de uno fijo, el centro C cuyas coordenadas son (x_0, y_0). Debe cumplirse entonces que $d(P, C) = r$

Luego, la ecuación cartesiana de la circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio *r es*:

$$\boxed{|x - x_0| + |y - y_0| = r}$$

Q_2*: ¿Cómo representar los lugares geométricos?*

El estudio de esta cuestión en la geometría del taxista presenta diferencias considerables respecto a la euclidiana. La primera que surge se refiere al plano utilizado en la geometría del taxista. Tal como se define la distancia entre dos puntos, para poder transportarla al plano, se requieren rectas paralelas y perpendiculares, esto es, un plano cuadriculado. La representación de los lugares geométricos en el plano, tal como se hizo en la OM_3 en la geometría euclidiana, no tiene sentido ahora, ya que la distancia entre dos puntos en la geometría del taxi, no es trasladable fácilmente como en la euclidiana. El uso del compás, que permite trasladar segmentos en la euclidiana, queda casi obsoleto en esta geometría. Si pensamos en un plano sin referencial alguno, para construir un lugar geométrico en la geometría del taxista, habría que valerse de la construcción de rectas paralelas y perpendiculares previamente, y luego sobre esa malla construir, punto a punto, los lugares geométricos en cuestión. La construcción de rectas paralelas y perpendiculares con regla y compás tienen sus técnicas específicas, por lo que la construcción de esta malla sería, en sí misma, una tarea nada sencilla. Es por ello que, para representar los lugares geométricos en el plano en la geometría del taxista, el mismo debería ser un plano cuadriculado, aún sin coordenadas, que puede actuar de manera análoga al plano propuesto en la OM_3. Tal como indicamos en el MPR, el estudio de las representaciones en este tipo de plano también estaría fuertemente vinculado a la definición de los lugares geométricos por propiedades métricas. En este tipo de planos, los puntos a considerar se encuentran sólo en las intersecciones de las rectas que forman la malla por lo que las representaciones de los lugares geométricos sólo son un conjunto de puntos ubicados de manera discreta. Algunos autores, como Gómez (2011) prescinden de esta consideración, pasando directamente a un trabajo en el plano cartesiano de $\mathbb{R}^2$. Tal como estudiamos en el MPR, podemos ahora distinguir el plano sin referencial del plano cartesiano. En el primero, cuadriculado, consideramos los puntos sólo en las intersecciones de las rectas que lo componen, y el segundo plano es $\mathbb{R}^2$, por lo que pasamos a un estudio con coordenadas cartesianas.

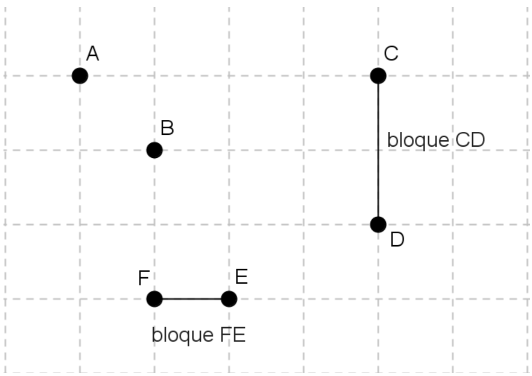

Figura 9. Puntos y bloques en la geometría del Taxista

Teniendo en cuenta estas consideraciones, debemos definir segmento en esta geometría y en este plano. Para esto, decidimos tomar la definición que se enuncia en César (2010), quien define segmento como *bloque*. La autora ubica puntos sólo en intersecciones de las rectas de la malla, y define un bloque como aquel segmento que está formado únicamente por dos puntos (es decir, los puntos deben poder unirse sólo a través de un segmento horizontal o uno vertical) (Figura 9).

En la figura 9 se puede observar que los puntos A y B no pueden formar un bloque, ya que, para unirlos, son necesarios dos segmentos (uno horizontal y uno vertical).

Asimismo, la distancia entre los puntos A y B es denominada como *viaje directo* entre A y B, y será el conjunto mínimo de bloques necesarios para ir de un punto a otro, o para unir los puntos. En la figura 10 se pone de manifiesto que este viaje directo no es único, a diferencia de lo que ocurre en la geometría euclidiana al unir dos puntos. La cantidad de caminos posibles es una noción que puede proponerse estudiar, involucrando nociones de combinatoria.

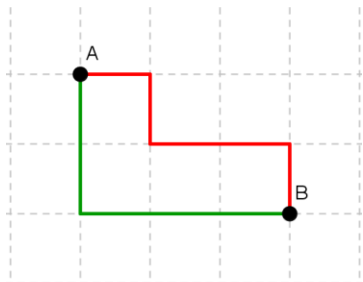

Figura 10. Viaje directo entre A y B

Así también, se define la recta que contiene a los puntos A y B como la extensión de un viaje directo entre ellos. Definida de esta manera, la recta que pasa por dos puntos no es única (Figura 11).

Como indicamos, la geometría del taxi puede ser asociada al plano cartesiano. Extendiendo la definición para coordenadas reales tenemos que $d_T: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una métrica. Las ecuaciones cartesianas de cada lugar geométrico, como así también las ecuaciones y coordenadas de sus elementos notables, pueden dar lugar al trazado aproximado de cada lugar geométrico. Por lo tanto, el estudio previo con la OM_2: *Establecer* *propiedades analíticas de los lugares geométricos*, al igual que lo que ocurre en la geometría euclidiana, en la del taxista también es indispensable en este sentido.

Como se indicó en el MPR, la OM_4 conduce al estudio de la representación de los lugares geométricos en el plano cartesiano. Su estudio, junto con la OM_1, permite responder la cuestión Q_2. Las OMP, involucran el estudio de la representación de cada lugar geométrico en el plano cartesiano. Para ello, en esta geometría no euclidiana se requiere como entorno tecnológico las definiciones de los lugares geométricos por propiedades analíticas, la definición de valor absoluto de un número, la resolución de ecuaciones modulares y la representación de rectas en el plano.

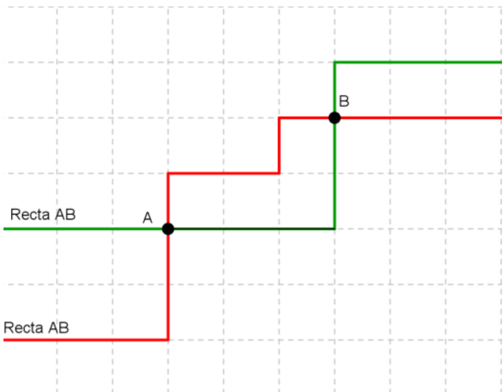

Figura 11. Rectas que contienen a A y B

Consideramos que puede pensarse en realizar un estudio análogo al propuesto en el MPR en lo que respecta a la representación de los lugares geométricos en el plano cartesiano.

El estudio de las formas que tiene cada lugar geométrico en esta geometría, es diferente a las que se obtiene en la geometría euclidiana. A modo de ejemplo, en la Figura 12 se muestra la representación de circunferencias con igual radio, en ambas geometrías.

Q_3*: ¿Cuáles son los elementos notables de cada lugar geométrico?*

El estudio de esta cuestión está ligado a las anteriores, pues necesariamente se deben dar cuenta de ciertos elementos notables de los lugares geométricos, ya sea para su definición como para su representación.

La OM_5 estudia cómo establecer elementos notables de los lugares geométricos y sus relaciones. Al igual que en la geometría euclidiana, consideramos que las tareas dentro de esta OM pueden ser muy variadas, dependiendo de los objetos matemáticos que se den como datos. La determinación de puntos, segmentos y rectas notables de cada lugar geométrico, como mencionamos anteriormente, puede generar algunas dificultades en esta geometría, que habría que tener en cuenta al planificar la enseñanza.

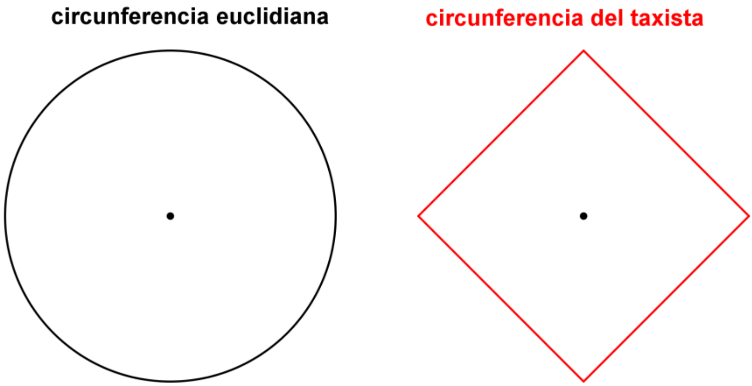

Figura 12. Circunferencias de igual radio en ambas geometrías

Concluimos que el MPR propuesto en la sección anterior puede adaptarse al estudio de lugares geométricos con la geometría del taxi. Las definiciones por propiedades métricas y analíticas se pueden estudiar de manera similar a lo planteado en el MPR para la geometría euclidiana, en tanto que las ecuaciones algebraicas de los lugares geométricos requieren de un estudio más complejo debido a las nociones que se involucran.

La representación de los lugares geométricos también se puede estudiar en la geometría del taxista desde dos planos diferentes: uno sin referencia y el otro cartesiano. La diferencia con la geometría euclidiana radica que en el primero de ellos, el plano tiene una malla cuadriculada, debido a la distancia empleada. Sin embargo, su tratamiento puede realizarse análogo al planteado en el MPR. El estudio de la representación de los lugares geométricos en el plano cartesiano también es posible desde esta geometría, aunque el tratamiento de las ecuaciones requiere del empleo de técnicas diferentes a las empleadas en la geometría euclidiana. Respecto a los elementos notables en la geometría del taxista, consideramos que su estudio es similar al presentado en el MPR para la geometría euclidiana.

El MPR da lugar a recorrer otras organizaciones que no hemos considerado en esta ocasión, tal como: el cálculo del valor de pi, la unicidad o no de las construcciones, las formas de cada lugar geométrico y su comparación con las de la euclidiana, las diferencias entre las técnicas usadas en una y otra geometría (por ejemplo, la mediatriz en esta geometría, ¿se podría obtener mediante intersección de circunferencias?). Hay una multiplicidad de nociones, técnicas y tecnologías que podrían estudiarse y que darían lugar a un valioso trabajo matemático en el aula.

Las limitaciones más evidentes del MPR al ser recorrido en la geometría del taxista se asocian a la representación en el plano de los lugares geométricos y con el tratamiento analítico de las definiciones de cada uno de ellos. Sin embargo, podrían realizarse ciertas modificaciones en este sentido que posibilitarían que el MPR construido en la geometría euclidiana se adapte al estudio de lugares geométricos en la geometría del taxista.

Reflexiones Finales

En este trabajo indicamos las características esenciales de un MPR en torno a lugares geométricos atendiendo a la geometría escolar, en particular a los lugares geométricos y sus propiedades, que se propone estudiar en la escuela secundaria Argentina. En esta institución, la geometría que se establece estudiar es exclusivamente euclidiana. Así, el desarrollo del MPR implicó hacer explícitas las organizaciones matemáticas que se encuentran involucradas en el estudio de los lugares geométricos en la geometría euclidiana y dejar entrever las relaciones entre ellas, procurando combinar el estudio sintético con el analítico.

Por otro lado, discutimos los alcances y limitaciones del MPR en relación a los lugares geométricos en la geometría no euclidiana del taxista. La realidad en que vivimos no siempre responde a la geometría euclidiana, basta con movernos por las calles en una ciudad para darnos cuenta que la distancia empleada es muy distinta a la estudiada en la escuela secundaria. Es por su presencia en lo cotidiano que podríamos pensar en la introducción del estudio de la geometría no euclidiana del taxista en el aula de matemática de la escuela secundaria. Con fundamento en esta propuesta, estudiamos la adaptabilidad del MPR en la geometría del taxista. Consideramos que la coexistencia del estudio de lugares geométricos desde ambas geometrías sería teóricamente factible. Es por ello que su inclusión en el aula de matemática de la escuela secundaria es una de las líneas a seguir a partir de esta investigación.

Sostenemos que pensar y enseñar la matemática desde otra perspectiva, con características y propiedades a las que los estudiantes no están habituados, es ponerlos a cuestionar críticamente lo que conocen. Esto posibilita ampliar su conocimiento matemático y geométrico en particular, y brinda a los estudiantes nociones matemáticas que le permitan comprender, describir y representar el mundo en el que viven.

Notas

[1] Cada cuestión se señalada como Q_x, donde x indica un número que distingue a las diferentes cuestiones que se formulan.
[2] Identificamos cada OM como OM_y donde y toma valores numéricos para distinguir cada OM que se define. Asimismo, al tipo de tareas que conforman cada OM, se las denota T^y.
[3] En este trabajo hemos decidido diferenciar el plano cartesiano de aquel que no posee referencia alguna; nombrando a este último sólo plano. De allí se diferencia la OM_3 de la OM_4.
[4] Identificamos cada OMP como OMP_z donde z toma valores numéricos para distinguir cada OMP que se define. Asimismo, al tipo de tareas que conforman cada OMP, se las denota T_z. En caso de haber más de un tipo de tareas asociadas a una OMP, se lo notará $T_{z,i}$, donde z es el número de la OMP y donde i es el número para distinguir cada tipo de tarea en cuestión.
[5] Para un conjunto X se define distancia o métrica a una función $d(a,b)$ de XxX en $\mathbb{R}$ que verifique las siguientes condiciones:
No negatividad: $d(a,b) \geq 0 \forall a,b \in X$
Simetría: $d(a,b) = d(b,a) \forall a,b \in X$
Desigualdad triangular: $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) \forall a,b,c \in X$
$\forall a \in X : d(a,a) = 0$
Si $a,b \in X$ son tales que $d(a,b) = 0$, entonces $a = b$
[6] Se excluyen de esta OML la bisectriz de un ángulo por ser una semirrecta y el arco capaz por ser un arco de circunferencia.
[7] Se consideran como operaciones básicas el transporte de segmentos y de ángulos. Su nombre se debe a que posibilitan el trazado de determinadas circunferencias y rectas. La

primera acción, permite construir una circunferencia dado el centro y un radio, y la segunda permite trazar una recta en una determinada dirección respecto a otra (Siñeriz, 2002).

[8] En un triángulo isósceles $\overset{\Delta}{ABC}\left(\overline{AB} \equiv \overline{BC} \wedge \overset{\angle}{A} \equiv \overset{\angle}{C}\right)$, la bisectriz del ángulo $\overset{\angle}{B}$ está incluida en la mediatriz del lado $\overline{AC}$.

Referencias

Araya, R. G., & Alfaro, E. B. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare*, *14*(2), 125-142. Disponible en http://www.revistas.una.ac.cr/index.php/EDUCARE/article/view/906/831

Barrantes-López, M., & Balletbo-Fernández, I. (2012). Tendencias actuales de la enseñanza-aprendizaje de la geometría en educación secundaria. *Revista Internacional de Investigación en Ciencias Sociales*, *8*(1), 25-42. Disponible en http://revistacientifica.uaa.edu.py/index.php/riics/article/view/12

Barraza F., O. & Reyes L., R. (2012). *Introducción al estudio de las geometrías no euclidianas a través de la geometría esférica. Desde una perspectiva docente*. Tesis de Licenciatura. Universidad de Santiago de Chile, Santiago, Chile.

Bressan, A. M., Bogisic, B. & Crego, K. (2000). *Razones para enseñar geometría en la educación básica: mirar, construir, decir y pensar*. Buenos Aires: Noveduc Libros.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique dês Mathématiques*, 19 (2), 221-266.

César, S. (2010). *Geometría Táxi - Uma exploração a través de atividades didáticas.* Tesis de Maestría. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.

Corica, A.; Otero, M. (2012). Estudio sobre las praxeologías que se proponen estudiar en un curso universitario de Cálculo. *Boletín de Educación Matemática*, 26 (42B), 459-482. Disponible en http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5770/4386

De Villiers, M. (1996). The future of secondary school geometry. *SOSI Geometry Imperfect Conference*, 2-4. Pretoria.

Figueiras, L., Molero, M., Salvador, A., & Zuasti, N. (2000). Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de los fractales. *Suma*, *35*, 45-54. Disponible en https://revistasuma.es/IMG/pdf/35/045-054.pdf

Fonseca, C., Gascón, J. & Oliveira, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(3), 289-318. doi: http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1732

Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato ¿Dos mundos completamente separados? *Suma*, *39*, 13-25. Disponible en: https://revistasuma.es/IMG/pdf/39/013-025.pdf

Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria I: desaparición escolar de la razón de ser de la geometría. *Suma*, 44, 25-38. Disponible en https://revistasuma.es/IMG/pdf/44/025-034.pdf

Guillén, G. (2010), ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (eds.), *Investigaciones en Educación Matemática XIV* (21-68). Lleida: SEIEM.

Ibarra, L.; Formeliano, B.; Patagua, I.;Velazquez, S.; Baspiñeiro, S. & Mendez, G. (2013*). La construcción de triángulos en la escuela primaria*. Memorias del IV econgrès international sur la TAD. Disponible en https://citad4.sciencesconf.org/conference/citad4/pages/Citad4_Preactes_Axe4.pdf

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al Estudio Didáctico de la Geometría: De las Construcciones a las Demostraciones*. Buenos Aires: Libros del zorzal.

Ministerio de Educación de la República Argentina (2011). *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios de Matemática para el Ciclo Básico de la Educación Secundaria*. Disponible en http://www.educ.ar/sitios/educar/recursos/ver?id=110570

Ministerio de Educación de la República Argentina (2012). *Núcleos Aprendizajes Prioritarios de Matemática para el Ciclo Orientado de la Educación Secundaria*. Disponible en http://www.me.gov.ar/consejo/resoluciones/res12/180-12_07.pdf

Olivero, F.; Bosch, M.; Gascón, J. (2013). Praxeologías matemáticas en torno a la geometría para la formación del profesorado. Memorias del *IV econgrès international sur la TAD.* Disponible en https://citad4.sciencesconf.org/conference/citad4/pages/Citad4_Preactes_Axe4.pdf

Quijano, M. (2015). *El estudio de lugares geométricos en la escuela secundaria: desarrollo de un modelo praxeológico de referencia desde la geometría euclidiana y no euclidiana*. Tesis de Licenciatura. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Tandil, Argentina.

Salvador, J. (1994). ¿Geometría o geometrías? *Números*, (25), 25-38. Disponible en http://www.sinewton.org/numeros/numeros/25/Articulo03.pdf

Siñeriz, L. (2002). La enseñanza de la resolución de problemas de regla y compás; del mundo de la pura resolución de problemas a la escuela media argentina: estudio de dos casos. *RELIME*, *5*(1), 79-101. Disponible en https://dialnet.unirioja.es/ejemplar/145211

María de la Trinidad Quijano es jefa de Trabajos Prácticos en el área de Matemática en la Escuela de Economía, Administración y Turismo y jefa de Trabajos Prácticos en la Escuela de Producción, Tecnología y Medio Ambiente de la Sede Andina de la UNRN, Argentina.

Ana Rosa Corica es investigadora adjunta del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y del Núcleo de Investigación en Enseñanza de las Ciencias (NIECyT), y profesora adjunta de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNCPBA, Argentina.

Dirección de Contacto: La correspondencia directa sobre este artículo debe ser dirigida al autor. Dirección Postal: Mitre, 630. San Carlos de Bariloche, Río Negro. Argentina. **Email**: mquijano@unrn.edu.ar y acorica@exa.unicen.edu.ar