Indivisibles y movimiento en el continuo leibniziano

FEDERICO RAFFO QUINTANA
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas
Universidad Nacional de Quilmes

Resumen: El presente trabajo propone analizar la interacción entre el concepto de indivisible y algunas consideraciones acerca del movimiento en el pensamiento temprano de Leibniz sobre el problema del continuo. Lo que se revelará es que los indivisibles, que fueron introducidos en el marco de una teoría del movimiento, fueron posteriormente negados una vez revisada la condición del movimiento en el marco de su teoría de la materia. De acuerdo con ello: en la primera parte se analizará la estructura del infinito actual en el contexto general de la *Theoria motus abstracti*; en la segunda se considerará el problema particular de la desigualdad de las velocidades de los movimientos; en la última, se examinará la crítica a su teoría de los indivisibles en el marco de *De minimo et maximo*.

Palabras clave: Leibniz, indivisibles, movimiento, continuo.

Indivisibles and Motion in Leibniz's Continuum

Abstract: This paper proposes to analyze the interaction between the concept of indivisible and some considerations regarding motion in Leibniz's early thought on the continuum problem. It will reveal that indivisibles, which have been introduced in the context of a theory of motion, have been denied later once reviewed the status of motion in his theory of matter. Accordingly: in the first part we will analyze the structure of the actual infinite in the general context of *Theoria motus abstracti*; secondly, we will consider the particular problem of the unequal speed of motions; at last, we will examine the critic to his indivisibles theory in his *De minimo et maximo*.

Key-words: Leibniz, indivisibles, motion, continuum.

1. El infinito actual entre lo sensible y lo racional

El primer análisis más o menos sistemático que Leibniz ha ofrecido sobre el problema de la composición del continuo[1] se encuentra en un escrito que en 1671 presentó a la Ilustre Academia Real de Francia bajo el título *Theoria motus abstracti* (*TMA*). Allí Leibniz pretendía abordar las razones universales de los movimientos al margen de las sensaciones y los fenómenos.[2] Estableciendo definiciones, fundamentos predemostrables y teoremas, pretende resolver allí problemas generales y especiales relativos al movimiento. La justificación del proceder abstracto en cuestiones relativas al movimiento está en el hecho de que Leibniz entiende que un análisis sensible tiene un alcance limitado, en la medida en que hay determinados problemas cuya solución solamente puede darse en el marco de un análisis racional. En este sentido, en un escrito preparatorio para la *TMA* señala:

[1] Sucintamente, el 'laberinto del continuo' puede ser presentado como el problema de la infinita composición de magnitudes que se presentan sensiblemente como finitas, véase de Olaso: 335, n. 20. Una introducción a este laberinto puede encontrarse en Lawrenz 2010: punto: "The Labyrinth of the Continuum" y Arthur 2001: introducción.

2 Precisamente el título completo del escrito es "Teoría del movimiento abstracto o razones universales de los movimientos independientes del sentido y los Fenómenos" (*A* VI 2: 259; *OFC* 8: 74). Las traducciones de los textos de Leibniz que se encuentran en este trabajo son nuestras, excepto aquellas de la *TMA*, las cuales son tomadas de *OFC* 8. En algunos casos puntuales hemos introducido pequeñas modificaciones.

> Hay cuatro cosas por las que no puede tenerse confianza en las experiencias sensibles: 1) que ningún cuerpo que es sentido reposa, 2) que es incierto si un cuerpo que es sentido propiamente es 'un cuerpo' o 'cuerpos', 3) que es incierto si un cuerpo que es sentido es discontiguo o contiguo, 4) que es incierto si dos cuerpos que se tocan, se tocan en las superficies, o si solamente en líneas y puntos. Suponiendo o ignorando estas cosas, es imposible que los primeros principios del movimiento se establezcan sólidamente por el sentido. Pues es muy importante si un cuerpo reposa, si es 'muchos cuerpos', si es discontiguo, si toca a otro en un punto, línea o superficie; esto, sin embargo, no puede ser explorado por el sentido (*De rationibus motus*, *A* VI 2: 166).[3]

Es precisamente en la sección dedicada a los fundamentos predemostrables de la *TMA* que Leibniz se preocupa por el problema del continuo. Los dos primeros fundamentos presentan tesis esenciales de la solución leibniziana en general en lo que respecta al continuo: "(1) *Se dan en acto partes en el continuo* (…), (2) *y estas son infinitas en acto*; en efecto, lo indefinido de Descartes no está en la cosa, sino en el pensante" (*TMA*, *A* VI 2: 264; *OFC* 8: 79). Leibniz llega en estos años a la tesis de la infinitud actual de partes en el continuo precisamente a partir de un análisis racional del movimiento en el marco de su teoría de la materia. De acuerdo con Leibniz, para que la materia pueda ser sentida es necesario que haya variedad en ella. Puesto que dicha variedad se da por el movimiento que la determina, no puede afirmarse la existencia de una materia en reposo (*De materia prima*, *A* VI 2: 280). Con esto, el planteo de Leibniz difiere del que Descartes presentó en sus *Principia philosophiae*:

> Sin embargo, hay que confesar que en este movimiento hay algo que nuestra mente percibe que es verdadero, pero que no comprende cómo ocurre, a saber, una división hasta el infinito, o indefinida, de algunas partículas de materia, en tantas partes que no podamos pensar en ninguna que no sea tan diminuta, que entendamos que no está dividida realmente en otras todavía más pequeñas (*Principia*, *AT*, VIII, 2, § 34. Traducción en Descartes y Leibniz *Sobre los principios de la filosofía*: 96).

[3] El texto citado comienza "son tres las cosas…"; hemos modificado el original asumiendo que se trata de un error. Por otro lado, otro ejemplo interesante que Leibniz analiza es el del choque de dos cuerpos, uno considerablemente menor que el otro, en cuyo caso concluye que en el marco de un análisis sensible no sería posible negar el reposo absoluto en uno de ellos, cuestión que, sin embargo, debe ser negada desde el punto de vista de una consideración abstracta.

De acuerdo con Leibniz, la división indefinida de Descartes no está en las cosas puesto que la materia efectivamente existente tiene infinitas partes en acto en virtud del movimiento. En el caso particular de la teoría del cuerpo, para Leibniz la infinitud actual de partes implica que en cada cuerpo hay una infinitud de otros, que hay mundos dentro de mundos, que "*hay, en cualquier cuerpo dado, infinitas criaturas*" (*De materia prima*, *A* VI 2: 280). Esta idea perdura en el pensamiento de Leibniz, lo cual se manifiesta por su reiteración constante, por ejemplo, en el *Pacidius Philalethi* de 1676 (*A* VI 3: 565): "así pues, opino que no hay ninguna porción de materia que no esté dividida en acto en muchas partes, y así, no hay ningún cuerpo tan exiguo en el cual no haya un mundo de infinitas criaturas" (*OFC* 8: 151).

Los siguientes fundamentos predemostrables de la *TMA* aspiran a dilucidar cómo debe entenderse la composición de infinitas partes en acto. Negativamente, lo primero que Leibniz indica es que no se da en el continuo aquello que carezca de magnitud o partes, esto es, lo mínimo (*TMA*, *A* VI 2: 264; *OFC* 8: 79). Si bien su definición recuerda a la de los puntos euclidianos ("un punto es lo que no tiene partes", Euclides, *Elem.* 189),[4] en la medida en que el análisis del continuo no se circunscribe solamente al dominio geométrico, su alcance es mucho mayor. Como veremos en detalle más adelante, de acuerdo con Leibniz, si el continuo se compusiera de ellos, no podrían evitarse contradicciones; por ejemplo, que el todo sería igual a una parte. En estos años Leibniz entendió que la magnitud se define como el número de las partes, de manera tal que todo aquello que posea partes puede ser denominado como magnitud.[5] Así se lo manifiesta, por ejemplo, a Jakob Thomasius en una carta de abril de 1669: "y ya que toda magnitud es el número de las partes, ¿cuán admirable [es] que Aristóteles haya definido al Tiempo como el número del movimiento?" (*A* II 1: 22). Asimismo, Leibniz concibió la magnitud como una propiedad que, si bien no define a la materia, se deduce de su definición (*A* II 1: 36). En este sentido, dijo:

> Pues toda afección que está en algo debe deducirse de su definición. La definición de Cuerpo es: aquello que está en el espacio (es decir, lo que es coextenso con el espacio). Esta definición no contiene otra cosa que el

[4] Es recurrente encontrar esta referencia al punto euclidiano en la bibliografía sobre el tratamiento leibniziano del continuo. Véase, por ejemplo, Beeley 1996: 243 o Arthur 2000: 5-6.

[5] Bassler 1998: 7 intuye atinadamente la correspondencia entre 'magnitud' y 'tener partes'. No obstante, reconoce que no encuentra soporte textual con que justificar esta sugerencia. En este sentido, el pasaje citado, así como otros pasajes que pueden encontrarse en la misma carta de Leibniz a Thomasius, justifican esta idea.

espacio y la inexistencia en él [*inexistentiam in eo*]. Por consiguiente, no hay ninguna otra afección por sí del cuerpo que todas las afecciones del espacio, y además la inexistencia en el espacio. Todas las afecciones del espacio por sí son la magnitud y figura [...]. La existencia en el espacio es la localidad. Pero la existencia en un espacio dado contiene la existenciabilidad [*existentibilitatem*] en otro espacio igual y similar (puesto que aquí no hay ninguna razón de la diversidad). Por consiguiente, la mutabilidad de un espacio dado, o lo que es lo mismo, la movilidad. Por consiguiente, toda afección del cuerpo es la magnitud, figura y localidad y las cosas contenidas en ellas, como en la localidad está contenida la movilidad" (*De rationibus motus*, *A* VI 2: 167-168).

Como la materia se define por la extensión y la impenetrabilidad (*Leibniz a Thomasius, A* II 1: 26), se infiere que las partes que la componen deben ser ellas extensas e impenetrables. Algo que carezca de partes, por lo tanto, no puede deducirse de la definición de cuerpo.

A los fines de poder explicar diversos fenómenos (tales como la desigualdad en las velocidades de los movimientos y la cohesión de los cuerpos que se componen precisamente de infinitas partes en acto), Leibniz introduce en el análisis del continuo el complejo concepto de 'indivisible'. Este concepto está relacionado con el método de los indivisibles de Bonaventura Cavalieri (1598-1647), como Leibniz mismo sugiere tras definir la noción de punto (cuestión que veremos más adelante), al señalar que: "este es el fundamento del *Método de Cavalieri*, con el que se demuestra de forma evidente la verdad de que es posible pensar, por decirlo así, rudimentos o inicios de líneas y figuras menores que cualquiera que se pueda dar" (*TMA*, *A* VI 2: 265; *OFC* 8: 80). Sin embargo, hay diversas maneras de interpretar la naturaleza de la relación entre el pensamiento de Leibniz y el método de Cavalieri. Para Bassler y Arthur, por ejemplo, Leibniz *toma* de Cavalieri la idea de una composición de indivisibles (Bassler 1998: 8; Arthur, 2001: xxxii). No obstante, de acuerdo con el pasaje anterior, Leibniz no toma dicha idea de Cavalieri sino que piensa que *ha ofrecido* un fundamento de dicho método. La relación, en este sentido, es inversa. Además, parece que también hay diferencias en lo que respecta a la manera en que Leibniz y Cavalieri entienden los indivisibles, aunque tal vez el filósofo de Leipzig no haya sido consciente de ello. Por lo pronto, Cavalieri le confiesa a Galileo en una carta de junio de 1639: "no me atrevería a decir que el continuo está compuesto de estos [indivisibles]" (citado en Andersen 1985: 307, traducción nuestra; véase también Andersen 1986). Ahora bien, se encuentra bastante extendida la discusión acerca de si para Leibniz los indivisibles son precisamente las infinitas partes del continuo o no, aunque se reconoce unívocamente la falta de claridad de Leibniz en dicha cuestión. Así sugiere, por ejemplo, Arthur al indicar:

> Para Leibniz, quien ya estaba convencido de que la materia extensa no es autosubsistente sino dependiente de un principio incorpóreo de movimiento, la inferencia debe haber parecido irresistible: los cuerpos continuos también deben estar compuestos de puntos sustanciales indivisibles, cada uno de los cuales contiene en sí un principio incorpóreo de movimiento (Arthur 2001: xxviii).

También señala esto en Arthur (2004), como crítica a la interpretación según la cual los indivisibles son átomos: "primero y ante todo, los indivisibles de Leibniz son *puntos*. Aunque ellos compongan el continuo físico y algunos sean menores que otros, ellos mismos no son cuerpos". De un modo similar, Bassler (1998: 8) indica: "en el caso del continuo espacial, Leibniz identifica estos indivisibles como *partes* (no, digamos, solamente extremos), y así es acertado decir que Leibniz ve el continuo como compuesto de, lo que significa construido de, puntos". Bassler, no obstante, reconoce que el tratamiento de Leibniz no es claro, marcando incluso cierta contradicción en su interpretación al decir: "(…) aunque Leibniz diga que hay infinitamente muchas partes actuales en el continuo, nunca llegar a decir explícitamente que hay infinitos muchos indivisibles o que el continuo *se compone de* indivisibles" (Bassler 1998: 8). Incluso, aunque en general Arthur sostenga que el continuo de *TMA* se compone de indivisibles, en algunas ocasiones deja abierta la posibilidad de entender que no es así. Así, por ejemplo, en Arthur (2000: 7) señala: "(…) Leibniz no afirma que el continuo se componga de estos indivisibles. Los intervalos son las partes del continuo y los indivisibles son sus comienzos y finales" (véase también Arthur 2004: punto 2 "Leibniz's Atoms: Some Interpretations"). Esta última interpretación parece más acorde con lo que Leibniz señala en el cuarto fundamento predemostrable, a saber, que los indivisibles son extremos, esto es, inicios y finales de los continuos:

> *Se dan los indivisibles o inextensos*, de lo contrario no puede comprenderse ni el inicio ni el fin del movimiento o del cuerpo. […]. Aquello a lo que no se puede quitar extensión, es inextenso; por tanto, el inicio del cuerpo, del movimiento, del tiempo (el punto, el conato, el instante) o bien no se da, o bien es inextenso, que es lo que se quería demostrar (*TMA*, *A* VI 2: 264; *OFC* 8: 79).

Ahora bien, aunque sean inextensos, Leibniz entiende que los indivisibles poseen magnitud, aunque menor que cualquiera que pueda pensarse, de modo tal que sus partes no disten entre sí (es decir, son *indistantes*). Al respecto afirma que:

> *Punto* [esto es, el indivisible del espacio o cuerpo] *no es lo que* no tiene parte, ni aquello cuya parte no se tiene en cuenta, sino aquello que *no tiene extensión*, o cuyas partes *no distan entre sí*, cuya magnitud es inconsiderable, inasignable, menor que la que pueda pensarse (*TMA*, *A* VI 2: 265; *OFC*: 80).

Esto permite explicar, por ejemplo, la cohesión o unidad de los cuerpos: al chocar por el movimiento, sus indivisibles se aprietan al punto de penetrarse. Leibniz repite reiteradamente en estos años la explicación de la cohesión de los cuerpos. De hecho, considera que ha ofrecido por primera vez una explicación de este fenómeno: "[en la *TMA*] se ha descubierto por primera vez la razón de la cohesión" (*TMA*, *A* VI 2: 262. Véase Arthur 1998). De este modo, cosas que previamente tenían extremos diversos, pasan a tener un extremo en común. En esta explicación, Leibniz hace propia la noción de 'continuo' de Aristóteles:

> [...] decimos que son «continuas» aquellas cosas cuyos extremos son uno (*Phys.* VI 1, 231a2). [...] Pero pueden ser contiguos los movimientos que no son los mismos, ni específicamente ni genéricamente: un hombre puede tener fiebre inmediatamente después de correr, y cuando en la carrera la antorcha pasa de mano en mano el desplazamiento es contiguo, pero no continuo, pues se ha establecido que continuo es aquello cuyos extremos son uno (*Phys.* V 4, 228a29-30; traducción de G. R. de Echandía).

En consecuencia, para Leibniz, cuando los extremos de las partes se penetran, deviene un cuerpo continuo. A propósito de esta cuestión, Beeley (1996: 202-204) señala que la infinitud actual de la materia tiene, sin embargo, un límite desde un punto de vista causal que está ligado precisamente a la experiencia sensible. Que haya un 'límite causal' significa, en este caso, que la explicación de la cohesión de las partes de un cuerpo determinado no puede remitir causalmente a la de la cohesión de las infinitas partes que hay en cada una de las partes de este cuerpo. Esto conllevaría explicar lo que acontece en un mundo por medio de lo que sucede en los mundos que están dentro de él. Si se diera esta dependencia causal, en virtud de la infinitud actual, no habría manera de evitar una regresión al infinito. El límite apunta, entonces, a que las causas deben ser siempre intrínsecas a un mundo determinado. Lo que Beeley indica en este sentido es que Leibniz considera aquí el 'límite de la eficacia empírica' (*die Grenze des empirisch Wirksamen*). De este modo, el mundo que se considera y cuyas causas deben encontrarse intrínsecamente es aquel sensiblemente percibido. De allí que la cohesión de un cuerpo deba explicarse por la penetración de los extremos de sus partes, más allá de que cada una de ellas posea infinitas partes a su vez cohesionadas. Más aún, aunque la razón de su cohesión sea la misma, esto no implica que haya una dependencia causal sino que las causas intrínsecas de cada mundo se repiten en todos ellos.

2. Explicación de la desigual velocidad de los movimientos

Uno de los problemas relativos al movimiento más importantes en el contexto de la temprana filosofía moderna es el de la explicación de que haya movimientos más veloces que otros, esto es, que en un mismo tiempo recorran más o menos espacio. Leibniz era muy consciente de este problema, al punto de que precisamente en la *TMA* ofrece una solución. El contexto más o menos general del alcance de esta cuestión Leibniz lo conocía, en estos años, gracias a la obra de Libert Froidmont, *Labyrinthus sive de compositione continui* (1631),[6] a la cual remite recurrentemente (por ejemplo, en una carta al duque Johann Friedrich de Hannover del 21 de mayo de 1671, *A* II 1: 179). Leibniz remite a la obra de Froidmont en varios momentos de su vida. Así, por ejemplo, en 1676 remite al libro del teólogo lovaniense, como texto en el cual puede encontrarse una rigurosa explicación del laberinto (*De arcanis sublimium vel de summa rerum*, *A* VI 3: 475). Hacia el final de su vida, Leibniz se refiere a Froidmont y a su obra en *Essais de Théodicée* (al respecto véase Beeley 1996: 287).

Ante la revitalización que ha tenido el atomismo en el siglo XVII, la intención de Froidmont en esta obra es ofrecer un cuerpo de argumentos en su contra, al mismo tiempo que una defensa de su interpretación aristotélica del continuo (Beeley 1996: 287 ss.). De acuerdo con esto, su trabajo se estructura en tres grandes partes: en primer lugar, intenta mostrar que hubo históricamente un "*admirable consenso de todos los máximos ingenios de todo el género humano en la infinitud de partes del continuo*" (Froidmont 1631: 6-7);[7] en segundo lugar, ofrece una gran cantidad de argumentos contra la composición atomista tanto en el dominio geométrico como en el físico;[8] por último, intenta restituir la tesis

[6] Todas las traducciones de esta obra son nuestras. Nacido en Lieja, Froidmont (1587-1653) estudió en la universidad de Lovaina donde ejerció como profesor desde 1606 y se doctoró en teología en 1628. Si bien muchos de sus escritos tratan de astronomía, el objetivo de su *Labyrinthus sive de compositione continui* es otro. Puede encontrarse un muy interesante examen de los escritos astronómicos de Froidmont, así como de su tácita discusión con Galileo, en Pantin 2001.

[7] Los primeros 7 capítulos de su obra están dedicados a esta problemática. Es importante tener en cuenta, de todos modos, que la división en tres partes, aunque encuentra un fundamento en la obra, es arbitraria, de modo que muchas veces se entrecruzan.

[8] Dichos argumentos comprenderán desde el capítulo 8 hasta el 38. Se dividen, a su vez, en "argumentos geométricos" (capítulos 8-15) y "argumentos físicos" (capítulos 16-38).

aristotélica centrándose fundamentalmente en la dilucidación del concepto de infinito implicado en ella.[9]

Los problemas físicos particularmente atendidos por Froidmont atañen a la estructura del movimiento. Por ejemplo, para Froidmont la paradoja de Zenón según la cual Aquiles, esto es, un móvil más veloz, nunca podría superar a la tortuga, o bien un móvil más lento, atenta contra el núcleo de una composición atomista del continuo. Al respecto, dice:

> Zenón introdujo, en otro tiempo, cierto paralogismo a partir de la infinitud de partes del continuo […], *el más veloz nunca puede alcanzar a aquello que es llevado por un movimiento más lento*. […] pero podría [darse] una demostración verdadera a partir de la finitud de átomos de Epicuro (Froidmont 1631: 57).

El problema que subyace es precisamente el de la explicación de la desigualdad en las velocidades. Del análisis de esta situación, se desprenden algunos elementos centrales de la interpretación de Froidmont relativa al continuo que, presumiblemente, tendrán impacto en la filosofía leibniziana. En particular, Froidmont destaca que una división del espacio en el cual se recorre un movimiento implica, necesariamente, una división del tiempo que sea correspondiente o proporcionada. Tomando la expresión de Palmerino (2011), se dirá que los continuos poseen una estructura isomórfica. De este modo, si el circuito en el que se desarrollaría la eventual carrera estuviera compuesto de puntos, deberían existir, correspondientemente, 'puntos del tiempo' o momentos (interpretados en términos de porciones temporales 'atómicas'):

> Por consiguiente, sea todo el campo en el cual el caballo de Adrasto, o el Pegaso de Belerofonte, o aquel de Marte […], haya desafiado a la tortuga, cubierto de puntos Epicúreos. También recórrase el tiempo (lo que ciertamente se sigue de allí) solamente en sus momentos, [a saber,] partes no divisibles al infinito (Froidmont 1631: 57).

Froidmont da por sabido que una infinitud de partes del tiempo resulta de una infinitud de partes del espacio, de tal manera que no puede defenderse la infinitud de uno sin que se asuma, consecuentemente, la del otro (Froidmont 1631:

[9] A finales del capítulo 38, señala Froidmont: "Finalmente, explicaremos toda nuestra opinión disolviendo los argumentos que, contra Aristóteles y los Estoicos, entretejen Epicuro y Plutarco". Esto corresponderá desde el capítulo 39 hasta el 50, que es el último.

22). Inversamente, de darse puntos indivisibles en el espacio, también deberán darse en el tiempo. El elemento que articula la estructura común del espacio y el tiempo es el movimiento. Esto se hace particularmente manifiesto si se tiene en cuenta, tal como hace Froidmont, la definición aristotélica de 'tiempo' como número del movimiento. En este sentido, afirma que: "si verdaderamente el movimiento es infinito en partes sucesivas, por consiguiente también el tiempo (que no es otra cosa que la duración de las partes sucesivas del movimiento) recoge una infinitud similar, como correctamente mostró en otro tiempo Aristóteles" (Froidmont 1631: 137). De esta manera, "si, por consiguiente, existen ciertos tránsitos indivisibles según la sucesión o instantáneos, deben necesariamente existir tránsitos en los cuales los indivisibles del cuerpo móvil recorren indivisibles del espacio" (Froidmont 1631: 137). Subyace a esta idea la tesis de que si no hay nada indivisible en el espacio o en un cuerpo, tampoco habrá un tránsito indivisible de un cuerpo a través de un espacio. Dicho de otro modo, "(…) si no hay nada en el cuerpo móvil o en el espacio que no sea divisible al infinito, por consiguiente, tampoco hay nada que sea atravesado indivisiblemente y sin sucesión por tal móvil" (Froidmont 1631: 137).

En última instancia, esta tesis se traduce en términos de una oposición: o bien, por un lado, todos los continuos son divisibles sin fin –lo que llevaría a la conclusión a la que Froidmont pretende arribar y que él resume así: "pues toda parte divisible del espacio es atravesada por una parte divisible del móvil a través de una parte del movimiento según una sucesión divisible" (Froidmont 1631: 137)– o bien, por otro lado, de no aceptarse lo primero, todos los continuos deberían estar compuestos de indivisibles. Carecería de sentido pensar en una tercera alternativa en la cual uno de ellos sea infinitamente divisible y otro esté actualmente dividido en puntos: si se sostuviera, por ejemplo, que el tiempo se compone de momentos indivisibles pero que el espacio es infinitamente divisible, entonces, en un instante podría recorrerse un espacio infinito. Y nadie estaría dispuesto a aceptar esta conclusión. No obstante, Froidmont reconoce algunas interpretaciones atomistas un poco menos ingenuas que la que aquí ha presentado. Son fundamentalmente dos: (1) si un móvil se mueve dos veces más rápido que otro, en un instante se encuentra desplegado (*replicatus*) en dos puntos del espacio (y así manteniendo cualquier proporción); (2) en el trayecto de un móvil cuyo movimiento es más lento se encuentran pausas intercaladas que explican la lentitud.[10]

[10] En lo esencial véase para la respuesta a estas posturas los capítulos 17-32 de Froidmont 1631.

La manera como Leibniz entiende la infinitud de partes del continuo en la *TMA*, y que mantendrá por algunos años más, es isomórfica. Disentimos en este punto con la interpretación de Palmerino, quien señala:

> Un rechazo explícito del isomorfismo del espacio, el tiempo y la materia se halla en los escritos de Leibniz. Tanto en su correspondencia como en sus obras publicadas, Leibniz observa repetidamente que la incapacidad de distinguir entre la estructura de las magnitudes abstractas y la de las cosas sustanciales ha causado que muchos se pierdan en el *laberinto del continuo* (Palmerino 2011: 34).

Sin embargo, en su trabajo se observan referencias al pensamiento maduro de Leibniz. Aquí podríamos agregar que, como veremos, en su juventud Leibniz defendió un isomorfismo.

La infinitud actual de partes en el continuo implica que todos ellos están infinitamente divididos, así como que hay inicios indivisibles tanto del movimiento (conatos), del tiempo (instantes) como del cuerpo y el espacio (puntos) (*TMA*, *A* VI 2: 264; *OFC* 8: 79). Asimismo, implica que hay una correspondencia punto por punto entre conatos, instantes y puntos, en el sentido de que un conato recorre, en un instante, un punto del espacio. De esta manera, puede sostenerse un isomorfismo en la *TMA*. Más aún, se encuentra claramente expuesto en *De minimo et maximo* cuando Leibniz dice:

> Supóngase, en efecto, que en un tiempo *ab* se recorre un espacio *ad* con un movimiento uniforme. Por consiguiente, en la mitad de tiempo se alcanza la mitad de espacio *af*, y en la milésima parte del tiempo [se alcanza] la milésima parte del espacio, etc. Por consiguiente, en un indivisible del tiempo [se alcanza] un indivisible del espacio, ya que el tiempo y el espacio se dividen proporcionalmente (*A* VI 3: 98).

El problema surge cuando intenta explicarse, a partir de esta correspondencia, la existencia de movimientos que, en el mismo tiempo, recorren un espacio mayor. Para esto, en la *TMA* Leibniz introduce una tesis fundamental: "[*u*]*n punto es mayor que otro punto, un conato es mayor que otro conato, pero un instante es igual a otro instante*" (*TMA*, *A* VI 2: 266; *OFC* 8: 82). Lo que esta afirmación permite determinar es que, como los indivisibles poseen partes, pueden ser ellos unos mayores que otros. No precisamente en el caso del tiempo, pues "el tiempo se hace manifiesto mediante un movimiento uniforme en la misma línea" (*TMA*, *A* VI 2: 266; OFC 8: 82), esto es, por medio de un movimiento que no aumente ni disminuya su velocidad a lo largo del trayecto. Un movimiento que no sea constante en su velocidad, sin embargo, implicará que en cada instante recorrerá un punto del espacio que sea mayor o menor que el anterior. La razón que Leibniz ofrece para esto está dada, en principio, bajo el presupuesto de que un movimiento continúa tal como comienza:

> Que un conato sea mayor que otro conato, o que un cuerpo que se mueve más rápido que otro ya desde el comienzo recorre más espacio, es algo evidente: pues si en el comienzo recorre exactamente lo mismo, siempre recorrerá lo mismo, porque el movimiento según comienza, así continúa [...] (*TMA*, *A* VI 2: 266; *OFC* 8: 82).

De este modo, bastaría con considerar los conatos de dos movimientos para determinar cuál de ellos será más veloz (supuesto, ciertamente, que nada se les interponga), concluyéndose que será aquel cuyo conato es mayor. En virtud de la correspondencia isomórfica entre los continuos, de aquí se sigue que el punto del espacio correspondiente al conato más fuerte será, a su vez, mayor que aquel correspondiente al movimiento más lento:

> Por tanto en un instante dado el [conato] más fuerte recorrerá más espacio que el más lento; pero un conato cualquiera no puede recorrer en un solo instante más que un punto, es decir, una parte de un espacio menor que la que pueda exponerse; de otro modo recorrería en el tiempo una línea infinita. Por tanto, un punto es mayor que [otro] punto (*TMA*, *A* VI 2: 267; *OFC* 8: 82).

3. Una autocrítica a la teoría de los indivisibles

La propuesta de la *TMA* sufrió una crítica tan fuerte que Leibniz se vio obligado a abandonarla. La nota curiosa en este sentido es que el crítico fue Leibniz mismo. Apenas un año después él reconoce que aquellas contradicciones que se seguían de admitirse los mínimos en el continuo valen también para los indivisibles. Como se ha mencionado anteriormente, no es claro si en la *TMA* Leibniz compuso el continuo de indivisibles o no, aunque de acuerdo con sus indicaciones se compondría de infinitas partes cuyos extremos son indivisibles. Arthur (2001: xxxiv) y Lison (2006), entre otros, reconocen la revisión llevada a cabo por Leibniz que mencionaremos a continuación. No obstante, como para ellos el continuo de la *TMA* se compone de indivisibles, entienden que Leibniz estaría aquí cuestionando su interpretación de la composición previa. Creemos que la falta de claridad en esta cuestión no permite ser tan categórico al respecto. Por dicho motivo, y como mostraremos aquí, en cualquier caso lo que Leibniz muestra es que, si se diera una composición de indivisibles, se presentarían las mismas contradicciones que supone una composición de mínimos. De allí que las dos primeras tesis que presenta en *De minimo et máximo* (1672-1673) sean precisamente que "*no se da lo Mínimo o indivisible en el espacio y el cuerpo*" y que "*no se da lo mínimo o indivisible en el tiempo y el movimiento*" (*De minimo et maximo*, *A* VI 3: 97-98). Más aún, antes de decidirse finalmente por considerar en forma separada las razones respecto del espacio y el cuerpo por un lado y del tiempo y el movimiento por otro, había indicado: "si no se dan los mínimos en el tiempo y el espacio, no se darán en el movimiento y el cuerpo; y, por consecuencia, no [se darán] en el universo" (*De minimo et maximo*, *A* VI 3: 97). Dada la correspondencia isomórfica entre ellos, bastaría con demostrar que no se dan los mínimos en uno de los continuos para que sea evidente que no deben afirmarse en ninguno.

Lo que esto implica es que la admisión de indivisibles también contradiría el principio según el cual el todo es mayor que una parte suya. Supuesta una secuencia temporal en la cual se comparen dos movimientos desiguales en su velocidad (figura 1), de acuerdo a lo que había indicado en la *TMA*, debe determinarse que la cantidad de conatos y puntos correspondientes a los cuerpos en movimiento es numéricamente idéntica, aunque uno de ellos recorra un espacio mayor. De este modo, la cantidad de puntos que se encuentran en el movimiento más lento (M1) sería igual a la del movimiento más veloz (M2). Consecuentemente, el trayecto recorrido por el móvil más rápido tendría la misma cantidad de puntos que el que recorre el móvil más lento en la misma cantidad de instantes temporales (T). Como el trayecto de este último puede ser entendido como una parte del correspondiente al del móvil más veloz, se infiere que el todo sería igual a una parte suya.

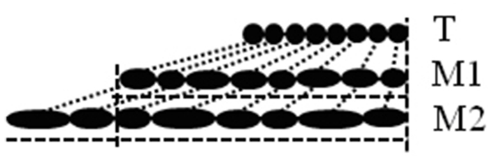

Figura 1

Leibniz expresa este mismo caso por medio del célebre 'argumento de la diagonal'. De acuerdo con él, no se dan los mínimos o indivisibles en el espacio y el cuerpo. Leibniz traslada el problema, sin embargo, al dominio geométrico, "pues si se da un indivisible en el espacio o cuerpo, se dará también en la línea *ab*" (*De minimo et maximo, A* VI 3: 97). Supuesta la figura *abcd* (figura 2), pueden trazarse infinitas paralelas desde *ab* hacia *cd* (para evitar equívocos, nos referiremos a ellas como 'las paralelas'), las cuales son, sin embargo, perpendiculares a *ab*. Supuesto este estado de cosas, se generará una contradicción al considerar una diagonal, como *ad*. Así, en primera instancia, Leibniz indica que "no puede asignarse ningún punto en la línea transversal o diagonal *ad* que no incida en alguna de las infinitas líneas paralelas que se extienden perpendicularmente desde *ab*" (*De minimo et maximo, A* VI 3: 97). De allí que cualquiera de los puntos que se asigne sobre la diagonal, se asignará, también, en alguna de las paralelas. Con esto, Leibniz infiere dos cosas: por una parte, que un punto asignado en la diagonal incide solamente en una de todas las paralelas y no en dos o más; por otra parte, que una paralela no puede atravesar muchos puntos en la diagonal, pues, de asignarse en ella otro distinto, como *f*, dicho punto sería atravesado por otra de las paralelas. La conclusión de Leibniz es: "por consiguiente, habrán tantos puntos indivisibles de la línea *ad* cuantas líneas paralelas se extienden desde *ab*, esto es, cuantos son los puntos indivisibles en la línea *ab*; por consiguiente, tantos son los puntos indivisibles en *ad* cuantos en *ab*" (*De minimo et maximo, A* VI 3: 97). Sin embargo, puede asumirse un segmento de *ad*, como *ai*, que sea igual a *ab*. Pero esto genera una doble contradicción: por un lado, que la diagonal *ad* sería igual a una parte suya *ai* (en la medida en que *ad* y *ai* son ambas iguales a *ab*); por otro lado, que, en el segmento *id*, en la medida en que *ad* y *ai* son iguales, no debe haber ningún punto (*De minimo et maximo, A* VI 3: 97-98).

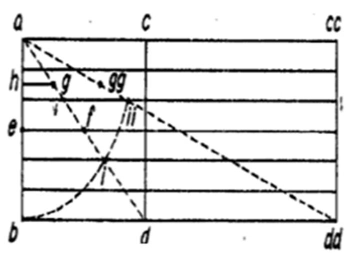

Figura 2

De la negación de los mínimos o indivisibles en el espacio y el cuerpo se sigue su negación en el tiempo y en el movimiento. Aquí se revela nuevamente que Leibniz entiende, al igual que Froidmont y en general que el atomismo, cierta isomorfía entre los continuos. En la medida en que para Leibniz el tiempo y el espacio se dividen proporcionalmente, si uno de ellos se dividiera en mínimos, también lo haría el otro (*A* VI 3: 98). En este sentido, formalmente la proporcionalidad misma ya basta para negar los mínimos del tiempo y del movimiento, pues se los ha negado en el espacio y el cuerpo. Sin embargo, Leibniz está dispuesto a suponer que no se da esta proporcionalidad para mostrar que, así y todo, los indivisibles son inadmisibles. En dicho caso, en un tiempo mínimo se recorrería un espacio no mínimo sino mayor. Consiguientemente, en un tiempo sensible (que, aunque sea pequeño, no sea mínimo), el espacio atravesado será infinito. De allí que Leibniz concluya: "en efecto, la razón de un indivisible (si se entiende que existe) a lo divisible, o bien la razón de lo mínimo en el continuo a cualquier cosa no mínima, es la [razón] de lo finito a lo infinito" (*De minimo et maximo, A* VI 3: 98).

En esta argumentación se encuentra implícito un razonamiento que Leibniz ha desarrollado en ese mismo año a partir de su lectura del *Discorsi e dimostrazione matematiche intorno a due nuove scienze* (1638) de Galileo. En la primera jornada de esta obra, Galileo indica que los términos de mayor, igual y menor son admisibles solamente respecto de lo finito, y precisamente por ello no pueden aplicarse a lo infinito:

> Estas dificultades son de las que derivan del modo que tenemos nosotros de discurrir con nuestro entendimiento finito acerca de los infinitos, asignándoles aquellos atributos que damos a las cosas finitas y limitadas [*cose finite e terminate*]; lo que pienso que es una inconveniencia, porque juzgo que estos atributos de mayoría, minoría e igualdad no convienen a los infinitos, de los cuales no se puede decir que uno es mayor o menor o igual al otro. (*Discorsi*, *EN*, VIII: 77-78; traducción de José San Román Villasante (*Diálogos*: 61) con algunas modificaciones nuestras).

En la medida en que estos términos cuantifican cantidades, el intento de referirlos a lo infinito, que de acuerdo con Galileo se define por no ser cuantificable, es un sinsentido (véase Knobloch 1999). Leibniz entiende que la tesis galileana no puede ser sostenida bajo ningún punto de vista y que, en este sentido, debe admitirse que estos términos valen igualmente para lo infinito como para lo finito:

> En los Números hay infinitas raíces, infinitos cuadrados [e] infinitos cubos. Asimismo, tantas son las raíces cuantos los números. Y tantos son los cuadrados cuantas las raíces. Por consiguiente, tantos son los cuadrados cuantos los números, es decir, tantos los números cuadrados cuantos los números en total. Esto es imposible. De aquí se sigue que o bien el todo en lo infinito no es mayor a la parte, la cual es la opinión de Galileo y de Grégoire de Saint-Vincent [y] que [yo] no puedo aprobar, o bien lo infinito mismo no es nada, es decir, no es Uno ni un todo. (*Aus und zu Galileis Discorsi*, *A* VI 3: 168)

Del mismo modo, en *De minimo et maximo* ha dicho sobre esto:

> El Número de todos los Números Cuadrados es una parte del Número de todos los Números; pero cualquier Número es la raíz de algún Número cuadrado, pues si se multiplica por sí, se tendrá un número cuadrado. Y el mismo número no puede ser la raíz de diversos cuadrados, ni el mismo [número puede ser] cuadrado de diversas raíces. Por lo tanto, los Números son tantos como los Números cuadrados, es decir, el Número de los Cuadrados es igual al Número de los Números: el todo [es igual] a una parte, lo que es absurdo (*A* VI 3: 98).

Leibniz también repite esta conclusión en años posteriores (véase, por ejemplo, *Pacidius Philalethi*, *A* VI 3: 551; *OFC* 8: 138). Es de acuerdo con esto que precisamente los argumentos que antes se han indicado son, para Leibniz, verdaderamente concluyentes. El problema que Leibniz deberá replantearse aquí será la manera de entender la estructura del continuo en general. En este punto de su análisis la consideración del movimiento es fundamental. Como se ha indicado previamente, Leibniz entendía que un cuerpo es definido por la extensión y la impenetrabilidad. Por eso mismo reconocía que el movimiento no solo no entra en su definición sino que, más aún, tampoco podía deducirse de ella: "el movimiento mismo no procede de ellos [esto es, de la extensión e impenetrabilidad]. De donde, propiamente hablando, no se da un movimiento en los cuerpos, como un ente real en ellos" (*Leibniz a J. Thomasius*, *A* II 1: 36). Lo que Leibniz reconoce en 1672 es justamente el error de esta tesis. Más aún: la composición del continuo de mínimos o indivisibles es una consecuencia que se sigue necesariamente de excluir al movimiento de la definición de cuerpo. Por ello es que en *De minimo et maximo* se propone lo siguiente: "en efecto, mostraré que, si en la naturaleza de las cosas, el espacio es distinto del cuerpo, [y] si el cuerpo del movimiento, deben ser admitidos los indivisibles" (*A* VI 3: 99-100). El absurdo de esta conclusión, como se ha reconocido, lo obliga a considerar al movimiento en relación al cuerpo diversamente a como lo había hecho hasta ese momento. Leibniz reconoce que la única manera de proceder en el análisis del continuo sin tener que afirmar lo indivisible es precisamente incluyendo al movimiento en la definición de cuerpo:

> Pero si un cuerpo se entiende como aquello que se mueve, entonces su inicio será definido como una línea infinitamente pequeña, aunque, en efecto, exista otra línea menor que ella; sin embargo, de este movimiento no puede asumirse ningún otro Inicio que el que sea mayor que el Inicio de otro movimiento más lento. Pero definimos al inicio del cuerpo por el inicio mismo del movimiento, es decir, por el conato, ya que, de otro modo, el inicio del cuerpo habrá de ser un indivisible. De aquí se sigue que no hay, en el cuerpo, ninguna materia distinta del movimiento; en efecto, esta necesariamente contendría indivisibles. Por lo que mucho menos el

espacio es distinto de la materia. De aquí finalmente se entiende que *ser un cuerpo* no es otra cosa que moverse (*De minimo et maximo*, *A* VI 3: 100).

Lo que se sigue de allí es que ha variado la estructura isomórfica de los continuos. La justificación de los indivisibles en la *TMA*, en última instancia, estaba dada por el modo de comprender la división del continuo hasta suponer lo que no admite una nueva subdivisión (*TMA*, *A* VI 2: 264; *OFC* 8: 79). Precisamente esto es lo que no se seguirá una vez incluido el movimiento en la definición de cuerpo. La división del continuo no supondrá indivisibles, sino que Leibniz sostiene que puede proseguirse infinitamente: "en efecto, aunque ni mi mano pueda ni mi ánimo quiera proseguir la división al infinito, sin embargo, siempre puede entenderse en general que todo esto, lo que puede quitarse conservado el inicio, no pertenece al inicio" (*De minimo et maximo*, *A* VI 3: 99). De allí que la estructura del continuo no sea ya la de una división que suponga indivisibles sino la de una división al infinito. La razón última de esto es que, como el inicio mismo de una línea (esto es, de un segmento espacial) puede tomarse como el inicio de un cuerpo (pues no hay espacio sin cuerpo) y dado que un cuerpo está en movimiento, el comienzo de una línea puede pensarse, por así decirlo, como un 'punto en movimiento'. Como atinadamente señala Arthur (2009), el inicio de una línea es ahora proporcional a un conato. De este modo, el inicio sería una línea infinitamente pequeña que, en tanto línea, admite nuevas subdivisiones infinitamente: "y ya que puede quitarse al infinito (en efecto, el continuo, como otros han demostrado, es divisible al infinito), se sigue que el inicio de la línea, es decir, lo que se recorre al inicio del movimiento, es infinitamente pequeño" (*De minimo et maximo*, *A* VI 3: 99).

4. *Conclusiones*

Se indicarán a continuación en primer lugar las conclusiones parciales más relevantes que evidencian cómo se da la interacción entre indivisibles y movimiento en el marco del intento leibniziano de dilucidar la estructura del continuo y, en segundo lugar, se mencionará un problema que queda sin resolver explícitamente en el tratamiento leibniziano. En cuanto a las conclusiones parciales:

a) En el contexto de la *TMA*, las infinitas partes en acto del continuo, ninguna de las cuales es un mínimo, poseen términos indivisibles que, en la medida en que poseen magnitud, pueden ser unos mayores que otros.

b) Como ha indicado Froidmont, autor cuya obra Leibniz conocía, los continuos deben pensarse isomórficamente. En el caso de Leibniz esto implica que hay indivisibles tanto del tiempo, del movimiento, del espacio y el cuerpo.

c) De la desigualdad de los conatos se sigue la explicación de que haya algunos movimientos más veloces que otros.

d) Sin embargo, en el marco de *De minimo et maximo* queda en evidencia que los indivisibles comportan las mismas contradicciones que los mínimos.

e) Leibniz realiza, consecuentemente, dos grandes modificaciones en la manera de entender el continuo:

i) En primer lugar, debe incluirse al movimiento en la definición del cuerpo.

ii) En segundo lugar, la estructura isomórfica debe entenderse no en términos de una división en indivisibles sino de una división al infinito, "aunque ni mi mano pueda ni mi ánimo quiera proseguir" esta división.

Una cuestión que no queda resuelta corresponde a la manera precisa de comprender la identificación que según Leibniz hay entre los indivisibles y los mínimos en el contexto de *De minimo et maximo*. El problema se retrotrae ciertamente a la falta de claridad de este concepto en el contexto de la *TMA*. Como se ha mostrado, Leibniz indica allí que los indivisibles son extremos, esto es, inicios y finales, de los continuos. Sin embargo, la argumentación ofrecida en *De minimo et maximo* implica comprenderlos como partes mínimas que, de darse, compondrían íntegramente el continuo. Presumiblemente la razón de esto está en que Leibniz entiende que, de darse un indivisible (como inicio) en una línea, deben darse en cualquier parte de ella, es decir, habrá muchos, precisamente porque hay infinitos puntos de contacto entre una línea y las paralelas. Justamente eso es lo que queda evidenciado en el argumento de la diagonal. De este modo, de ser esto correcto, la identificación estaría dada por el hecho de que, más allá de la diferencia conceptual, ni los mínimos ni los indivisibles admiten una nueva subdivisión, derivándose precisamente de allí las contradicciones.

BIBLIOGRAFÍA

Andersen, K. (1985), "Cavalieri's Method of Indivisibles", *Archive for History of Exact Sciences*, 31: 291-367.

Andersen, K. (1986), "The Method of the Indivisibles: Changing Understandings", *Studia Leibnitiana*, *Sonderheft 14*: 14-25.

Aristóteles (*Phys*.), *Física*, introducción, traducción y notas de Guillermo R. de Echandía (Madrid: Gredos, 1995).

Arthur, R. (1998), "Cohesion, Division and Harmony: Physical Aspects of Leibniz's Continuum Problem (1671-1686)", *Perspectives of Science*, 6: 110-135.

Arthur, R. (2000), "Leibniz's Inversion of Zeno: Continuity of Motion, Substantial

Action and Plurality", disponible en http://www.humanities.mcmaster.ca/~rarthur/papers/LIZ.pdf [última consulta: septiembre de 2014]

Arthur, R. (2001) (ed.), *The Labyrinth of the Continuum: Writings on the Continuum Problem, 1672-1686*, selección, traducción e introducción por R. Arthur (New Haven-London: Yale University Press).

Arthur, R. (2004), "The Enigma of Leibniz's Atomism", *Oxford Studies in Early Modern Philosophy Volume 1*: 183-228.

Arthur, R. (2009), "Actual Infinitesimals in Leibniz's Early Thought", *The Philosophy of the Young Leibniz, Studia Leibnitiana, Sonderheft 35*: 11-28.

Bassler, O. B. (1998), "The Leibnizian Continuum in 1671", *Studia Leibnitiana*, 30, 1: 1-23.

Beeley, P. (1996), *Kontinuität und Mechanismus. Zur Philosophie des jungen Leibniz in ihrem Ideengeschichtlichen Kontext* (Stuttgart: Franz Steiner Verlag).

De Olaso, E. (1982) (ed.), *Leibniz. Escritos filosóficos* (Buenos Aires: Charcas).

Descartes, R. (*AT*), *Oeuvres de Descartes*, publicadas por Charles Adam y Paul Tannery (Paris: Vrin, 1964-1974).

Descartes, R. y Leibniz, G. W. *Sobre los principios de la filosofía*, traducción y notas por E. López y M. Graña (Madrid: Gredos, 1989).

Euclides (*Elem.*), *Elementos*, introducción de Luis Vega, traducción y notas de María Luisa Puertas Castaños (Madrid: Gredos).

Froidmont, L. (1631), *Labyrinthus sive de compositione continui* (Anvers).

Galilei, G. (*Diálogos*), *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias*, traducción de José San Román Villasante (Losada: Buenos Aires, 2003[1945]).

Galilei, G. (*EN*), *Le opere di Galileo Galilei* (Firenze: Edizione Nazionale, 1898) (en números romanos el volumen).

Knobloch, E. (1999), "Galileo and Leibniz: Different Approaches to Infinity", *Archive for History of Exact Sciences*, 54: 87-99.

Lawrenz, J. (2010), *The Nature of Reality and the Reality of Nature: A Study of Leibniz's Double-Aspect Ontology and the Labyrinth of the Continuum* (Cambridge: Cambridge Scholars Publishing).

Leibniz, G.W. (*A*), *Sämtliche Schriften und Briefe* (Darmstadt-Leipzig-Berlin: Akademie-Verlag, 1923 y ss.) (en números romanos la correspondencia [II] o los escritos filosóficos [VI]).

Leibniz, G. W. (*OFC*), *Obras filosóficas y científicas* (Granada: Comares, 2007 y ss.) (en números arábigos el volumen).

Lison, E. (2006), "The Philosophical Assumptions Underlying Leibniz's Use of the Diagonal Paradox in 1672", *Studia Leibnitiana*, 38: 197-208.

Montesinos, J. y Solís, C. (2001) (eds.), *Largo Campo di Filosofare. Eurosymposium Galileo 2001*, (Coloquio, Tenerife, 2001) (Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia).

Palmerino, C. (2011), "The Isomorphism of Space, Time and Matter in Seventeenth-century Natural Philosophy", *Early Science and Medicine*, 16: 296–330.

Pantin, I. (2001), "Libert Froidmont et Galilée: L'impossible dialogue", en Montesinos J. y Solís C. (2001: 615-635).

Recibido: 01-2014; aceptado: 10-2014