

# Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería

[www.elsevier.es/rimni](http://www.elsevier.es/rimni)



## Un modelo de difusión anisótropa para el estudio del tráfico urbano

V.H. Cortínez<sup>a,b,\*</sup> y P.N. Domínguez<sup>b,c,\*</sup>

<sup>a</sup> Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICET), Argentina

<sup>b</sup> Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina

<sup>c</sup> Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional (FRBB), 11 de Abril 461, B8000LMI, Bahía Blanca, Argentina

### INFORMACIÓN DEL ARTÍCULO

#### Historia del artículo:

Recibido el 16 de marzo de 2011

Aceptado el 18 de octubre de 2011

On-line el 1 de marzo de 2013

#### Palabras clave:

Tráfico urbano

Difusión anisótropa

Modelo continuo de tráfico

### R E S U M E N

En el diseño de nuevas redes de transporte, o en el rediseño de las existentes, resulta de gran utilidad el empleo de modelos matemáticos para predecir los efectos de las modificaciones que se pretende implementar. Tales modelos permiten determinar los flujos vehiculares y los tiempos de viaje en cada tramo de la red a partir del conocimiento de las características de la misma y de la demanda (cantidad de viajes entre diferentes puntos de la ciudad) y están basados en una ley fenomenológica del comportamiento social colectivo de los conductores denominada principio de Wardrop. Se trata de un problema de optimización de gran tamaño, en general muy exigente desde el punto de vista computacional.

Con miras a acelerar tal proceso de diseño, en este trabajo se propone un modelo continuo de tráfico urbano. La idea fundamental de este último es que la variación de las características del tráfico en áreas cercanas es pequeña cuando se la compara a las diferencias del sistema entero, y de esta manera se pueden utilizar funciones continuas para representar las características de la red, tales como el costo de viaje y el flujo vehicular. Esencialmente el problema se reduce a un sistema de ecuaciones de difusión anisótropa no lineal que puede ser estudiada a partir de una comparación con resultados obtenidos mediante el enfoque clásico. Se muestra que los resultados son similares aunque el tiempo de cálculo sea ostensiblemente menor.

© 2011 CIMNE (Universitat Politècnica de Catalunya). Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.

### An anisotropic diffusion model for the study of the urban traffic

#### A B S T R A C T

In order to design or redesign urban transportation processes, the implementation of mathematical models is very useful for predicting the effects of possible modifications of implementing. Such models allow the determination of vehicular flows and travel times for every link of the network from the knowledge of its inherent features and the corresponding traffic demand. They are based on a phenomenological law of the social collective behavior of the drivers called Wardrop principle. It is an optimization problem, in general, very demanding from the computational point of view.

In order to accelerate the computation process, in this paper, a continuum model for the urban traffic is proposed. The fundamental assumption behind this theory is that the variation of network properties is small in close regions when compared with the full system. Accordingly, it is possible to use continuous functions for representing travel times or vehicular flows. Essentially, the problem is formulated as a system of non-linear anisotropic diffusion (differential) equations that can be conveniently solved by means of the finite element method. The efficiency of the proposed model is studied by means of a comparison with results obtained with the classical optimization approach. As shown, the results are similar although the computation times are significantly reduced.

© 2011 CIMNE (Universitat Politècnica de Catalunya). Published by Elsevier España, S.L. All rights reserved.

#### Keywords:

Urban traffic

Anisotropic diffusion

Continuum traffic model

### 1. Introducción

La congestión de tráfico es un problema cotidiano para los habitantes de las grandes ciudades. En ciertas horas, el incremento de la cantidad de vehículos en la red de transporte produce demoras en

\* Autor para correspondencia.

Correos electrónicos: [vcortine@frbb.uts.edu.ar](mailto:vcortine@frbb.uts.edu.ar) (V.H. Cortínez), [pdoming@uns.edu.ar](mailto:pdoming@uns.edu.ar) (P.N. Domínguez).

la circulación y un aumento de la contaminación que afectan física y anímicamente a los conductores y a los habitantes en general. Lograr un tráfico fluido que minimice las consecuencias negativas de la congestión es una de las principales preocupaciones de los diseñadores de las redes de transporte. En la planificación de nuevas redes o la modificación de las existentes se utilizan modelos matemáticos que permiten obtener patrones de flujo y tiempos de viaje de acuerdo a la disponibilidad de rutas y de servicios, a la demanda (cantidad de viajes desde un punto a otro de la ciudad) y a criterios de selección de rutas por parte de los usuarios. En uno de los más utilizados de estos criterios, se asume que el comportamiento colectivo de los usuarios se basa en el denominado primer principio de Wardrop [1] o principio del equilibrio del usuario, según el cual todos los conductores elegirán las rutas de mínimo tiempo (o costo) de recorrido y ninguno podrá experimentar un tiempo menor utilizando otra ruta.

A partir de tal principio puede formularse el denominado problema de asignación de viajes, cuyas incógnitas corresponden a los flujos de tráfico circulando en cada una de las arterias con destinos diferentes, así como a los tiempos de viaje entre orígenes y destinos.

Para ello, la ciudad se divide en zonas donde las características de demanda son relativamente homogéneas y se asume que toda la actividad de las mismas se concentra en puntos denominados «centroides» que generan y atraen los viajes hacia y desde otras zonas. Matemáticamente, la red de transporte se modela como un grafo dirigido en el que los tramos de ruta (pueden corresponder a tramos de avenidas, calles o autopistas) constituyen los arcos, enlaces o *links*, mientras que sus intersecciones y los «centroides» son los nodos. Los arcos tienen asociadas funciones que representan el costo de viajar a través de ellos. Este costo (en general el tiempo de viaje) es una función creciente del flujo vehicular que se ajusta experimentalmente usadas, y dependen de características particulares de las vías consideradas.

Con estos datos es posible construir un problema de optimización equivalente al primer principio de Wardrop [1], tal como el propuesto por Beckmann et al. [2], cuya solución corresponde a los flujos vehiculares en cada arco de la red, así como a los tiempos de viaje entre cualquier origen y el correspondiente destino. Este y otros enfoques similares han sido ampliamente utilizados por diferentes autores en los campos de diseño y gestión de redes de transporte [3-6]. Los autores del presente trabajo utilizaron la formulación esbozada, denominada aquí «enfoque clásico», en el estudio de la optimización de flujos de tránsito considerando aspectos ambientales [7]. Cuando las redes son muy grandes, el incremento tanto de nodos y arcos como de puntos de origen y destino aumentan exponencialmente el tiempo de cálculo.

Un enfoque diferente y menos explorado es la formulación continua, donde la idea fundamental es que la variación de las características del tráfico en áreas cercanas es pequeña cuando se la compara a las diferencias del sistema entero, y de esta manera se pueden utilizar funciones continuas bidimensionales para representar las características de la red tales como el costo de viaje. El enfoque continuo tiene algunas ventajas en redes densas [8], ya que requiere menor cantidad de información. En principio puede aplicarse sin la necesidad de una construcción detallada del grafo de la red, utiliza menos recursos computacionales y, aun así, puede brindar una visión preliminar del impacto que se produce ante un cambio en la red. Existen diferentes estudios basados en este enfoque tanto para resolver problemas de asignación (elección de rutas por parte de los conductores), como problemas combinados de distribución-asignación (elección de ruta y destino, además por parte de los conductores) [9,10], teniendo en cuenta, además, la posibilidad de considerar múltiples clases de usuarios [11]. Una detallada reseña de la literatura y las posibilidades de aplicación se puede consultar en Ho y Wong [12]. Los autores del presente

artículo utilizaron el enfoque continuo para estudiar el impacto ambiental acústico [13] y atmosférico [14] que puede ser producido por un cambio morfológico en la red de transporte.

En todos los trabajos mencionados que usan la formulación continua el modelo es isótropo, es decir, asume que las características de las calles y las condiciones de circulación son independientes de la dirección considerada. Asimismo, hacen uso de funciones que relacionan los tiempos de recorridos por unidad de longitud (si bien expresados con las características de las vías de circulación tales como la capacidad y la velocidad a flujo libre) sin detallar cómo pueden obtenerse experimentalmente. De hecho, no están explícitamente vinculadas a las funciones de tiempos de recorrido de arco usadas habitualmente en el enfoque clásico.

Una tercera cuestión no especificada en los modelos continuos publicados es cómo determinar el flujo y el tiempo de recorrido en cada calle a partir de los resultados obtenidos sobre el dominio espacial. Es decir, solo permiten la determinación de flujos promediados por zonas. Con el ánimo de aprovechar las ventajas del enfoque continuo, pero partiendo de las bien conocidas y aceptadas funciones de costo (tiempos de recorrido) en los arcos del enfoque clásico, en el presente trabajo se desarrolla un nuevo modelo que tiene en cuenta además las posibles características anisótropas de la red. Como se demuestra, la presente formulación conduce a un sistema de ecuaciones de difusión anisótropa no lineal que puede ser adecuadamente resuelto mediante el método de elementos finitos.

En la siguiente sección se presenta la formulación matemática del nuevo modelo continuo, y en el apartado 3 se comentan algunos aspectos de la resolución computacional. Posteriormente, en la sección 4 se analiza la efectividad del modelo propuesto mediante la comparación con resultados obtenidos a partir del enfoque discreto. Se presentan luego, en la sección 5, dos ejemplos en los cuales se aplica el modelo propuesto y finalmente, en la sección 6 se presentan las conclusiones.

## 2. Modelo continuo anisótropo

### 2.1. Problema de equilibrio del usuario: formulación discreta

Se considera la ciudad como una región  $\Omega$  delimitada por un borde exterior  $\Gamma_0$  en la hora de la mañana cuando los viajes se generan en los hogares (distribuidos por toda la ciudad) y se dirigen hacia determinados destinos.

La red de transporte se representa mediante un conjunto de nodos unidos por arcos dirigidos que representan en forma más o menos detallada las diferentes arterias urbanas. Los nodos corresponden a las intersecciones entre arterias, así como a los «centroides» de las zonas que actúan como orígenes o destinos de viajes.

El problema consiste en obtener las rutas seguidas por los usuarios desde sus puntos de origen hacia sus destinos, conociendo la cantidad de viajes por hora  $Q_{rs}$  entre tales pares origen-destino (originados en  $r$  con destino  $s$ ), así como las características de la red de transporte. En otras palabras, la solución de tal problema permite determinar los flujos horarios en cada arco de la red.

Es importante mencionar que las características del tráfico durante el período de estudio se suponen constantes, es decir, se considera la situación estacionaria.

Para describir matemáticamente tal problema es necesario definir, en primer lugar, el tiempo de recorrido en cada arco como una función creciente del flujo existente en el mismo, es decir:

$$t_a = t_a(x_a) \quad (1)$$

donde  $x_a$  representa el flujo horario de vehículos (número de vehículos/hora) que recorre el arco  $a$ .



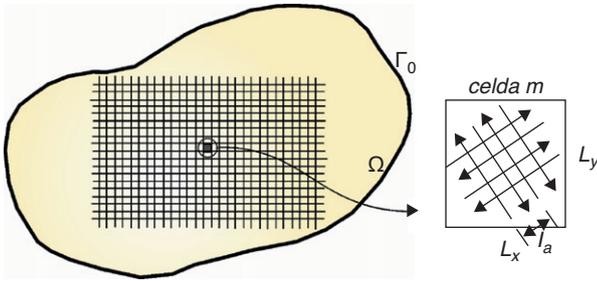


Figura 1. Discretización de la ciudad y sistema de calles en las celdas.

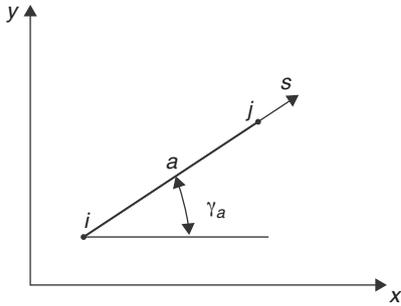


Figura 2. Tramo de calle entre nodos. Dirección y sentido de circulación.

El tiempo mínimo de recorrido del arco se puede expresar de acuerdo a (3), y esta diferencia de potencial entre los 2 nodos del arco puede aproximarse de la siguiente manera:

$$\Delta u \simeq -\frac{\partial u}{\partial s} l_a \quad (7)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \gamma + \frac{\partial u}{\partial y} \text{sen} \gamma, \quad (8)$$

el tiempo de recorrido del arco puede ser escrito en la forma:

$$t_a = -l_a \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos \gamma + \frac{\partial u}{\partial y} \text{sen} \gamma \right) \quad (9)$$

En las expresiones (7)-(9) se asume implícitamente que  $u$  puede representarse como una función continua bidimensional que adopta los valores adecuados en cada uno de los nodos a los cuales se los identifica por sus coordenadas cartesianas  $(x, y)$ . En consecuencia,  $u(x, y)$  representa el tiempo de viaje desde el nodo ubicado en  $(x, y)$  hasta el centro (destino).

Aplicando ahora el cálculo variacional sobre la formulación (5a), se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \delta \omega &= \sum_r \delta u_r Q_r - \sum_m \sum_{a \in m} \delta \int_{t_{a_0}}^{t_a} x_a(z) dz \\ &= \sum_r \delta u_r Q_r - \sum_m \sum_{a \in m} x_a(t_a) \delta t_a \quad m = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (10)$$

donde  $a$  denota cada arco (en uno de los 2 posibles sentidos) perteneciente a cada celda  $m$ . Por otra parte, invirtiendo la expresión (6), se obtiene:

$$x_a(t_a) = \left( \frac{t_a - t_{a_0}}{\alpha_a t_{a_0}} C_a^{\varphi_a} \right)^{\frac{1}{\varphi_a}} - x_{R_a} \quad (11)$$

Multiplicando y dividiendo el segundo término de (10) por  $t_a$ , empleando la notación  $p_a = \frac{x_a(t_a)}{t_a}$ ,  $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ , y teniendo en

cuenta que  $\delta t_a = \left( \frac{\partial t_a}{\partial u_x} \delta u_x + \frac{\partial t_a}{\partial u_y} \delta u_y \right)$ , se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \delta \omega &= \sum_r \delta u_r Q_r - \sum_m \sum_{a \in m} p_a \left( -l_a (u_x \cos \gamma_a + u_y \text{sen} \gamma_a) \right) \\ &\quad \times (-l_a \cos \gamma_a \delta u_x - l_a \text{sen} \gamma_a \delta u_y) \end{aligned} \quad (12)$$

Y entonces:

$$\begin{aligned} \delta \omega &= \sum_r \delta u_r Q_r - \sum_m \sum_{a \in m} p_a l_a^2 \cos^2 \gamma_a u_x \delta u_x + p_a l_a^2 \cos \gamma_a \text{sen} \gamma_a u_x \delta u_y \\ &\quad + p_a l_a^2 \text{sen} \gamma_a \cos \gamma_a u_y \delta u_x + p_a l_a^2 \text{sen}^2 \gamma_a u_y \delta u_y \end{aligned} \quad (13)$$

Multiplicando y dividiendo por el área  $L_x L_y$  y reagrupando se llega a:

$$\begin{aligned} \delta \omega &= \sum_r \delta u_r Q_r - \sum_m (k_x u_x \delta u_x + k_{xy} u_x \delta u_y + k_{xy} u_y \delta u_x \\ &\quad + k_y u_y \delta u_y) L_x L_y \end{aligned} \quad (14)$$

donde:

$$k_x = \sum_{a \in m} p_a(t_a) \frac{l_a^2 \cos^2 \gamma_a}{L_x L_y} \quad (15a)$$

$$k_y = \sum_{a \in m} p_a(t_a) \frac{l_a^2 \text{sen}^2 \gamma_a}{L_x L_y} \quad (15b)$$

$$k_{xy} = \sum_{a \in m} p_a(t_a) \frac{l_a^2 \cos \gamma_a \text{sen} \gamma_a}{L_x L_y} \quad (15c)$$

Las expresiones (12)-(15) llevan implícita la suposición de que para cada celda, las derivadas parciales de  $u$  no varían. Esta es una hipótesis muy razonable si se considera que las dimensiones de la celda son muy pequeñas frente a las distancias características de toda la ciudad. Con tal idea se toma a continuación el límite de la expresión (15), cuando el área  $L_x L_y$  tiende a un diferencial de área  $d\Omega$ , asumiendo la demanda de viajes distribuida continuamente en el área:  $q$  (número de viajes por unidad de área).

En consecuencia, se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta \omega &= \int_{\Omega} \delta u q d\Omega - \int_{\Omega} (k_x u_x \delta u_x + k_{xy} u_x \delta u_y + k_{xy} u_y \delta u_x \\ &\quad + k_y u_y \delta u_y) d\Omega \end{aligned} \quad (16)$$

Integrando por partes el segundo término de (16) se llega a:

$$\begin{aligned} \delta \omega &= \int_{\Omega} \left( q \delta u + \frac{\partial (k_x u_x)}{\partial x} \delta u + \frac{\partial (k_{xy} u_x)}{\partial y} \delta u + \frac{\partial (k_{xy} u_y)}{\partial x} \delta u + \frac{\partial (k_y u_y)}{\partial y} \delta u \right) d\Omega \\ &\quad - \oint_{\Gamma_0} (n_x k_x u_x \delta u + n_x k_{xy} u_y \delta u + n_x k_{xy} u_x \delta u + n_y k_y u_y \delta u) d\Gamma_0 \end{aligned} \quad (17)$$

En un punto estacionario debe ser  $\delta \omega = 0$ , y por lo tanto, como  $\delta u$  es arbitraria, se deben cumplir las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial u}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_{xy} \frac{\partial u}{\partial x} + k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + q &= 0 \\ \forall (x, y) \in \Omega \end{aligned} \quad (18)$$

y

$$f_x n_x + f_y n_y = 0, \forall (x, y) \in \Gamma_0 \quad (19)$$



de transporte, etc.). Por ejemplo, es muy simple considerar el problema de distribución-asignación. En este problema se conoce la demanda de viajes que se genera en la ciudad con diversos destinos posibles y cuya elección será determinada por el que implique el mínimo tiempo de viaje. Esto puede corresponder a los viajes generados para alcanzar instalaciones de atracción tales como, por ejemplo, diversos centros comerciales que compiten por la captura de clientes.

Este tipo de problema puede formularse mediante la ecuación gobernante (18) con la condición de borde (19) en la periferia de la ciudad y expresiones de la forma (21) para cada centro de atracción. Por otra parte, si existieran diferentes clases de usuarios usando la red, el problema de asignación debería formularse a partir del sistema (27) —donde  $q_s$  corresponde al densidad de viajes generados en un punto  $(x,y)$  de la clase  $s$ —. Otras generalizaciones quedan fuera del alcance del presente trabajo.

#### 2.4. Diferencia de la presente teoría con respecto a la formulación de Sasaki, Iida y Yang

La formulación continua de Sasaki, Iida y Yang [8] (SIY) constituyó una contribución muy importante que permite la aplicación de técnicas computacionales de gran desarrollo tales como el método de elementos finitos al problema de asignación de tráfico. A su vez, este modelo fue extendido para considerar problemas de mayor complejidad, tal como la existencia de demanda variable, problemas multicéntricos con diferentes clases de usuarios, modelos combinados discretos-continuos (en los que se utilizó el enfoque discreto para la consideración de autopistas y la continua para flujo en calles) [17], desarrollo de modelos para el análisis del impacto ambiental del tráfico [13,14], etc.

La principal diferencia entre el modelo de SIY y el aquí presentado está en la manera de considerar el tiempo de recorrido en función de los flujos de tráfico. En aquel, tal definición se hace directamente para una formulación continua. Así se introduce el tiempo de recorrido por unidad de distancia sobre el continuo:  $c(x,y)$ . Esta magnitud se hace dependiente de la intensidad del flujo de tráfico continuo (20):  $f_x, f_y$ . La forma básica utilizada de acuerdo a tal hipótesis es la siguiente:

$$c(x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y) \left| \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \right|^\gamma \quad (30)$$

Las funciones  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  dependen de parámetros específicos mediados de la red en un entorno del punto  $(x,y)$ . Así,  $\alpha$  es la inversa de la velocidad a flujo libre media, mientras que  $\beta$  depende de una definición que a su vez, al igual que  $\gamma$ , pueden depender de características particulares tales como anchos de calle, características de la semaforización, etc.

Estas últimas funciones deben obtenerse empíricamente efectuando mediciones y observaciones para diferentes zonas de una ciudad, aunque no se indica taxativamente cómo realizar tales tareas. Esto representa un claro inconveniente.

Otro problema es que el tiempo por unidad de longitud  $c$  debe ser un escalar, estando adecuadamente definido en términos del módulo del flujo continuo en la expresión (30). Sin embargo, esta expresión indica que el tiempo de recorrido no depende de la dirección. Es decir, se trata de una función isotrópica. Este no es necesariamente el caso en ciudades reales en las cuales pueden existir diferencias de característica de calles en distintas direcciones. En la teoría de SIY no se indica modo alguno de considerar tal anisotropía.

Por otra parte, el modelo de SIY se desarrolla siguiendo las ideas presentadas en la sección 2.1, aunque trabajando directamente con la formulación continua. Entonces no queda clara la correspondencia con la estructura discreta del problema y, de hecho, no pueden

recuperarse las variables discretas: flujos horarios en cada arco ni tiempos de recorrido. Por lo tanto, se propone la utilización de tal enfoque tan solo como un método rápido, muy conveniente para visualizar las características generales en las etapas previas de diseño, aunque para cálculos más detallados habría que recurrir al método clásico (1) y (2).

La presente formulación mejora el modelo de SIY, ya que supera varios de los inconvenientes citados. La función de tiempo de recorrido básica (1) es exactamente la misma que se utiliza en el enfoque clásico, y entonces queda perfectamente definida a partir de los métodos experimentales usuales. Por otra parte, la forma que se da a tal función de acuerdo a la expresión (6) hace posible la consideración simultánea de flujos de arco que no siguen la primera ley de Wardrop (hecho de utilidad para incorporar el transporte público).

La presente formulación se deduce directamente del caso discreto como un paso al límite, y entonces la ecuación gobernante considera adecuadamente la estructura discreta en los coeficientes de difusión (28), pudiendo acomodar en forma natural características anisótropas de la red. La directa relación entre las formulaciones discreta y continua permite recuperar las variables discretas en cada arco, una vez resueltas las ecuaciones diferenciales gobernantes, mediante las expresiones (25) y (26).

Tales mejoras podrían implicar la posibilidad de usar esta metodología con una precisión similar al enfoque discreto aunque, al igual que con la teoría de SIY, con una carga computacional mucho menor, al menos para redes muy densas. Pero justamente tal es el caso en la modelización de redes urbanas modernas. Aun así, para estudios preliminares también puede utilizarse fácilmente para obtener patrones generales, como en el enfoque de SIY.

### 3. Solución computacional mediante el método de elementos finitos

El sistema gobernante de ecuaciones diferenciales (27) con sus correspondientes condiciones de contorno puede ser resuelto por varios enfoques numéricos apropiados. En este trabajo se hace uso del método de elementos finitos a través del software comercial FlexPDE [18].

En tal programa el problema se define a través de la escritura de las ecuaciones diferenciales gobernantes y de sus correspondientes condiciones de contorno en un archivo de textos denominado descriptor utilizando una notación muy sencilla, similar a la usada comúnmente en matemática.

Internamente, dicho programa se encarga de obtener las correspondientes ecuaciones variacionales, a través de un proceso tipo Galerkin, así como de la correspondiente discretización efectuando un mallado automático. Además posee varias estrategias que el usuario puede seleccionar para la resolución de problemas no lineales de contorno y/o de valores iniciales.

Entonces el descriptor para el presente problema deberá contener las definiciones de las características de la red tales como velocidad de circulación, capacidad de las calles, orientación, etc., y las expresiones de los coeficientes de difusión (28).

A partir de estos datos puede implementarse la ecuación (27). Asimismo debe definirse la geometría, las correspondientes condiciones de borde, y las particularidades del post-proceso deseado.

Por otra parte, deben seleccionarse las alternativas algorítmicas adecuadas. En este trabajo se resuelven inicialmente las correspondientes ecuaciones para valores constantes de los coeficientes de difusión, asumiendo congestión despreciable. A partir de esta solución inicial, el problema se resuelve aplicando el método de Newton-Raphson en el caso de un solo centro. En el caso de 2 o más centros, se implementa un procedimiento iterativo en el cual se trabaja sobre un centro y se mantienen constantes los valores

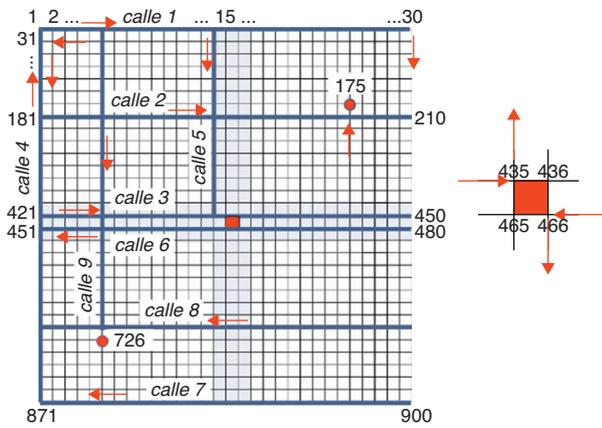


Figura 3. Esquema de calles y numeración de nodos de la red discreta.

de los flujos correspondientes a los otros centros, alternándose el centro activo cada vez.

#### 4. Validación del modelo

Para validar el modelo propuesto se analiza un dominio espacial de  $2,9 \times 2,9 \text{ km}^2$  que se modela como una superficie delimitada por un borde externo en el caso continuo y como una red de arcos y nodos en el modelo discreto tradicional. En este caso, la red se compone de 900 nodos y 1.740 enlaces de 100 m de longitud cada uno, formando calles perpendiculares entre sí con un solo sentido de circulación, tal como se puede ver en la figura 3. Sobre esta red se consideran 4 situaciones diferentes:

- Modelo isótropo con un único destino.** Todos los viajes que se generan en la ciudad se dirigen al centro (que corresponde a los 4 nodos centrales de la fig. 3) y las características de las calles son iguales en las 2 direcciones y sentidos. La demanda es  $q = 750 \text{ veh/h/km}^2$  (para la formulación discreta a cada nodo le corresponde una demanda de 6.308 viajes dividido por el número de nodos), con los siguientes parámetros que permiten definir el tiempo de recorrido por arco de acuerdo a (6): velocidad máxima de circulación:  $60 \text{ km/h}$ , capacidad de las calles:  $C = 600 \text{ veh/h}$ ,  $\alpha = 0, 15$ ,  $\varphi = 2$ , y  $x_R = 0$ .
- Modelo ortótropo con un único destino.** Todos los viajes que se generan en la ciudad se dirigen a un único centro (correspondiendo a los 4 nodos centrales de la fig. 3), pero las calles tienen diferentes características de acuerdo a la dirección. Demanda  $q = 750 \text{ veh/h/km}^2$  (para la formulación discreta a cada nodo le corresponde una demanda de 6.308 viajes dividido por el número de nodos). Los parámetros de la fórmula BPR son  $\varphi = 1$ ,  $\alpha = 0, 15$ ,  $x_R = 0$ ,  $C = 600 \text{ veh/h}$  y velocidad máxima de circulación,  $60 \text{ km/h}$  en todas las calles salvo en las 2 zonas de avenidas, sombreadas en la figura 3, donde la velocidad de circulación es mayor,  $70 \text{ km/h}$ , en el sentido de ingreso/egreso al centro de la ciudad.
- Modelo isótropo multidestino con demanda fija.** Los viajes que se generan en la ciudad se dirigen a 2 centros diferentes. Demanda hacia el centro 1 (nodo 175 de la fig. 3)  $q_1 = 375 \text{ veh/h/km}^2$ , demanda hacia el centro 2 (nodo 726 de la fig. 3)  $q_2 = 375 \text{ veh/h/km}^2$  (para la formulación discreta a cada nodo le corresponde una demanda de 6.308/2 viajes dividido por el número de nodos),  $C = 600 \text{ veh/h}$ ,  $\alpha = 0, 15$ ,  $\varphi = 2$ ,  $x_R = 0$ .
- Modelo isótropo multidestino con demanda variable.** En este caso la demanda que se genera hacia cada centro depende del tiempo de viaje, de la demanda potencial y de un parámetro  $\zeta$  que refleja la naturaleza elástica de dicha demanda. Hacia los centros 1 y 2

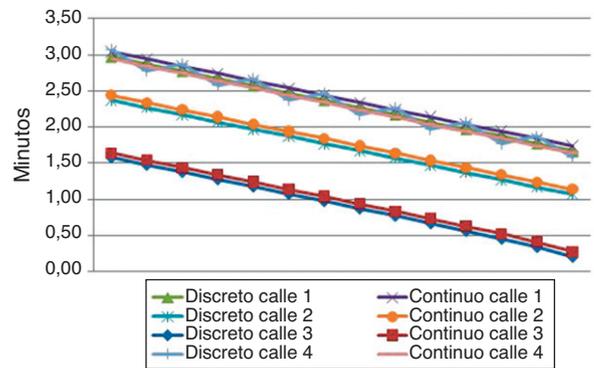


Figura 4. Tiempo de viaje desde cada nodo de las calles 1 a 4 hasta el centro (caso a).

$q_1 = 375e^{-\zeta u_1}$  y  $q_2 = 375e^{-\zeta u_2}$ , respectivamente, con  $\zeta = 0, 5$ . El resto de las características se mantienen iguales a las del caso anterior.

El análisis de tales problemas de asignación siguiendo el enfoque discreto corresponde a resolver el problema de optimización (2), para lo cual se aplica el clásico método de Frank-Wolfe [19]. Los detalles sobre tal enfoque pueden consultarse en el trabajo anterior de los autores, ya mencionado [7].

En esta sección se comparan los resultados obtenidos con el enfoque discreto y los obtenidos con el nuevo modelo propuesto en los 4 casos diferentes definidos. Para la formulación del modelo continuo se adoptan celdas de  $2 \times 2$  cuadras (considerando para cada dirección 2 calles en sentidos opuestos).

Es importante mencionar que los casos considerados están muy idealizados, ya que el enfoque discreto se supone que se idealiza con información suficientemente precisa sobre la generación de viajes en cada esquina. Por otra parte, los centros de destino se suponen adecuadamente representados por una región muy pequeña (uno a 4 nodos), es decir, de un tamaño de no más que 4 manzanas. Se trata de una zona urbana muy pequeña en general para formular un problema de asignación real. Sin embargo, tales ejemplos resultan muy útiles para analizar la precisión del presente modelo continuo con respecto al clásico enfoque discreto. Esto es así ya que, para redes más densas, el método continuo tenderá a dar aún mejores resultados (se cumplen mejor las hipótesis del modelo).

Para los casos a) y b), la solución con el modelo continuo requiere unos pocos segundos (se modela un cuarto del dominio, aprovechando la simetría del modelo). La solución del caso c) se alcanza en algo menos de 5 minutos para cada caso, y la del caso d) en 2,5 min para igual cantidad de iteraciones.

Por otra parte, el modelo discreto requiere mucho más tiempo. Para el caso c) la solución se alcanza en casi 4 h de cálculo.

Es de interés mencionar que, en general, la discretización necesaria realizada por el método de elementos finitos dependerá de detalles de heterogeneidad de las características urbanas y en general de la existencia o no de variaciones bruscas de la función potencial  $u$ . Es decir, tal discretización es independiente de la estructura discreta real de la red. Así, la cantidad de nodos en general no precisa aumentar de forma importante con el tamaño de la ciudad.

En cambio, la formulación discreta sí aumenta en general con el tamaño de la ciudad (cantidad de arcos), incrementándose de la misma manera el tiempo de cálculo.

En las figuras 4-6 se muestran los resultados obtenidos para el caso a). En la figura 4 se puede ver el tiempo total de recorrido desde cada nodo hasta el centro (nodo 435) para las calles de la zona noroeste, es decir, calle 1 (nodos 1 a 14), calle 2 (nodos 181 a 194), calle 3 (nodos 421 a 434) y calle 4 (nodos 1 a 421). La diferencia

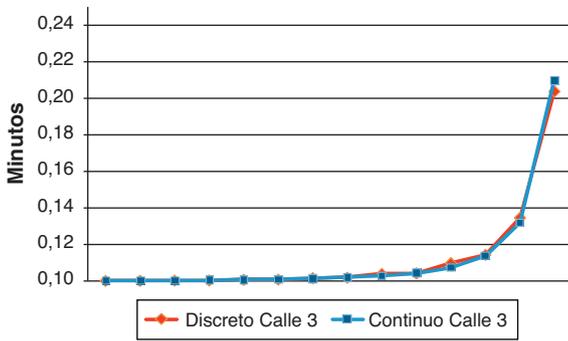


Figura 5. Tiempo de recorrido de cada tramo en la calle 3 (caso a).

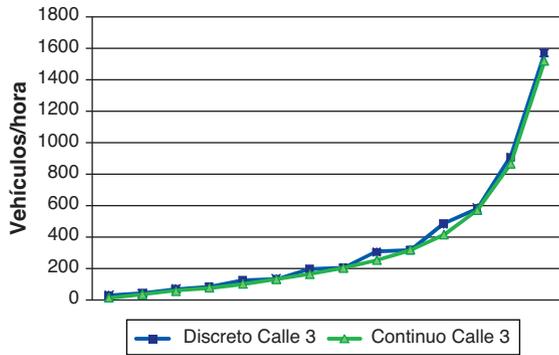


Figura 6. Flujo de vehículos en cada tramo de la calle 3 (caso a).

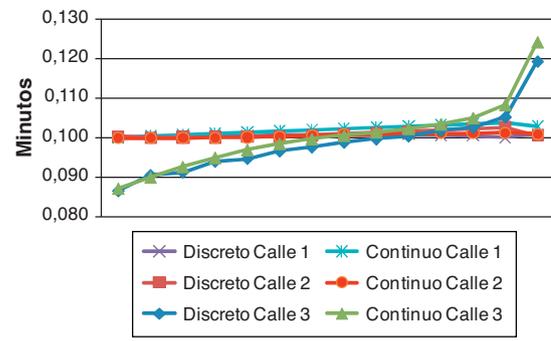


Figura 8. Tiempo de recorrido de los arcos de las calles 1 a 3 (caso b).

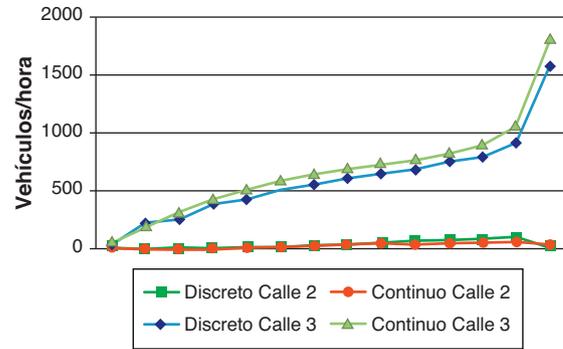


Figura 9. Flujo de vehículos en las calles 2 y 3.

promedio entre los resultados obtenidos por ambos métodos es menor al 5%.

En la figura 5 se muestra el tiempo de recorrido en minutos, de cada tramo (en este caso cada cuadra) para la calle 3 de la misma zona descrita en el gráfico anterior. Como se puede advertir, los resultados por ambos enfoques son prácticamente coincidentes. Lo mismo ocurre efectuando comparaciones para otras calles (no mostradas aquí).

En la figura 6 se muestra el flujo de vehículos en una arteria congestionada (calle 3). Como se aprecia, los flujos horarios obtenidos por ambos enfoques tienen muy buena concordancia, y la diferencia promedio de los 3 arcos más comprometidos es del orden del 3%.

En las figuras 7-10 se pueden ver los resultados obtenidos en el análisis del caso b), donde existen avenidas en las cuales la velocidad de circulación es mayor en la dirección de ingreso/egreso al centro. En la calle 3 (O-E), por ejemplo, la velocidad de circulación a flujo libre es de 70 km/h, mientras que en las calles transversales

(N-S, S-N) es de 60 km/h. De la misma manera, en la calle 5 (N-S) la velocidad máxima es 70 km/h y en las calles perpendiculares (E-O, O-E), de 60 km/h. En la figura 7 se puede ver el tiempo total de viaje desde cada nodo hasta el centro para las calles 1, 2 y 3, en el cuadrante noroeste de la ciudad. La diferencia promedio entre los resultados obtenidos por ambos métodos es menor al 5%.

En la figura 8 se puede apreciar el tiempo de recorrido de los arcos correspondientes a las calles 1, 2 y 3 de la zona noroeste. En la calle 3, al ser mayor la velocidad de circulación, disminuye el tiempo de recorrido (que en la zona más congestionada no alcanza a la mitad del tiempo del caso a). La correspondencia entre los valores obtenidos con el enfoque discreto y el continuo es muy buena, con una diferencia menor a 1 s. En la figura 9 se compara el flujo de vehículos obtenido por ambos métodos. Se aprecia que el modelo continuo sobreestima el valor del flujo en aproximadamente el 10%.

En la figura 10 se muestran los tiempos de viaje, a manera de ejemplo, desde cada nodo de la calle indicada hasta los puntos de destino para el caso c). Se puede apreciar claramente la buena

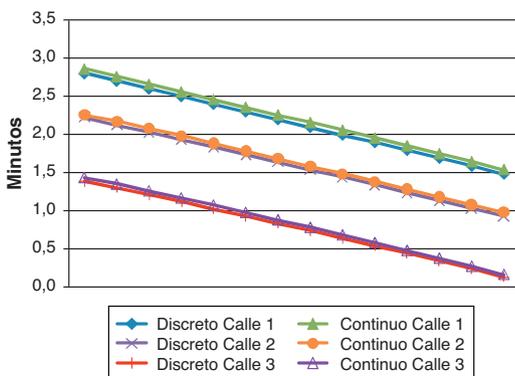


Figura 7. Tiempo de viaje desde cada nodo de las calles 1 a 3 hasta el centro (caso b).

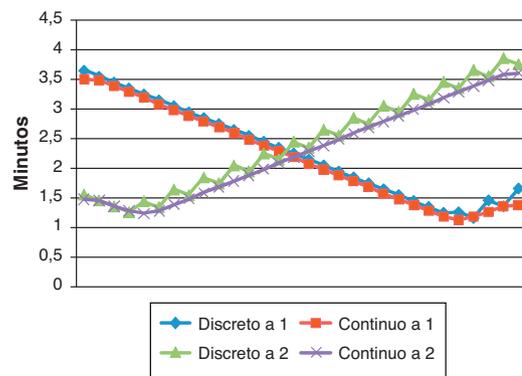


Figura 10. Tiempo de viaje en la calle 3 hasta los centros 1 y 2 (caso b).

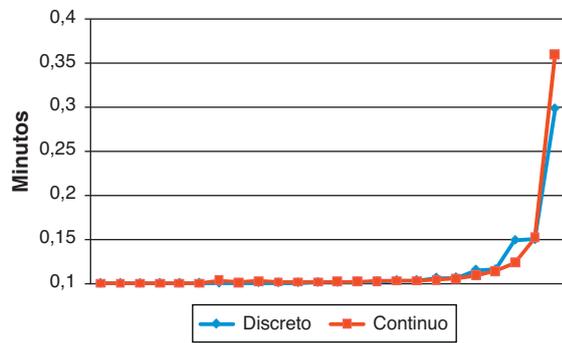


Figura 11. Tiempo de recorrido de tramos de la calle 9 (caso c).

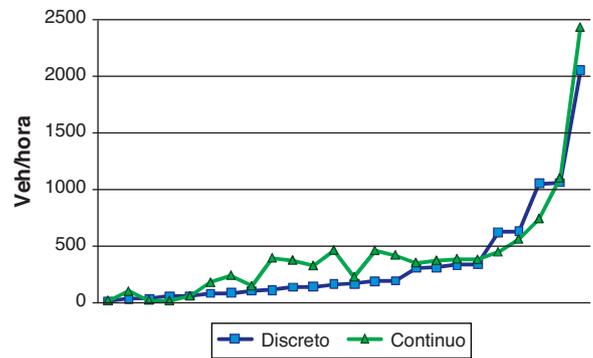


Figura 14. Flujos en arcos de la calle 9 (caso d).

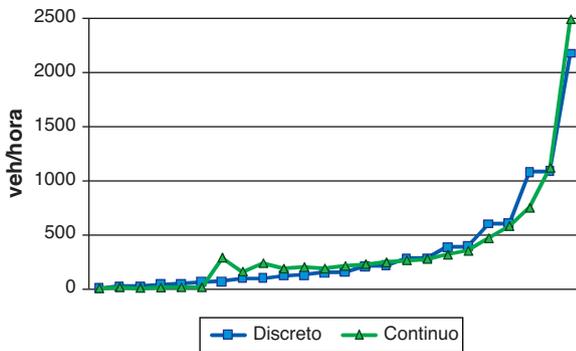


Figura 12. Flujos en arcos de la calle 9 (caso c).

correspondencia que existe entre los valores obtenidos por ambos enfoques. Lo mismo ocurre para nodos sobre otras arterias.

Por otra parte, en las figuras 11 y 12 se aprecian comparaciones para los tiempos de recorrido de arcos y flujos horarios, respectivamente, para la calle 9, siendo muy buena la concordancia entre ambos enfoques.

Finalmente, en las figuras 13–15 se compara la demanda de viajes generada en puntos de la diagonal SO-NE hacia el destino 1 y los tiempos de viaje y los flujos correspondientes en los arcos de la calle 9 para el caso d).

Como se ha mostrado en estas comparaciones, la concordancia entre el presente modelo continuo y el discreto es excelente. Los errores máximos son insignificantes considerando la incertidumbre de los datos en aplicación a casos reales (valores precisos de la densidad de generación de viajes, definición geométrica adecuada de demanda de destino, etc.). Asimismo es importante notar que la concordancia será aún mejor para redes densas correspondientes a grandes centros urbanos, en las cuales la definición de cada celda puede incorporar varias calles (5 o 6 cuadras al cuadrado), ya que en

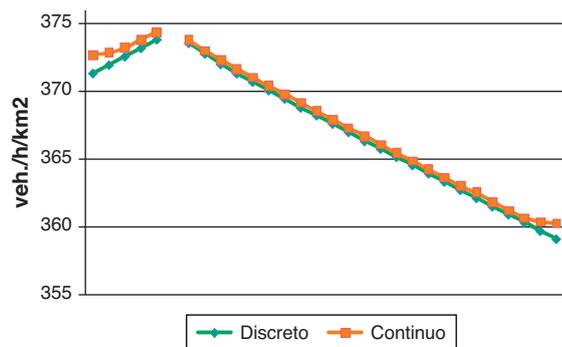


Figura 13. Demanda en puntos de la diagonal SO-NE (caso d).

este caso se verificarían mejor las hipótesis consideradas. Además, la principal motivación es justamente el análisis del tráfico urbano en grandes redes.

## 5. Ejemplos de aplicación

Se presentan a continuación 2 ejemplos más realistas donde se aplican los modelos presentados para uno y varios destinos con demanda fija y variable.

### 5.1. Un punto de destino. Competencia de instalaciones

En el primer caso, se aplica el modelo continuo al estudio del comportamiento de la red de tráfico en una ciudad de aproximadamente  $35 \times 25 \text{ km}^2$  donde 4 establecimientos compiten entre sí por la captura, plantas industriales, establecimientos educativos o estaciones de servicio, entre otras. En este caso, la demanda que se genera en cada punto de la ciudad se dirige a un solo destino, que se selecciona según el criterio de mínimo tiempo de viaje. En la ciudad se distinguen 3 zonas con diferentes características en cuanto a demanda de viajes, configuración de las calles y velocidad de circulación máxima, que se muestran en la tabla 1.

Las zonas y los centros se muestran en la figura 16, donde se puede apreciar también la malla de elementos finitos utilizada.

En la figura 17 se puede ver el mapa de tiempo de viaje, en horas, desde cada punto de la ciudad hasta el destino seleccionado. Se puede observar cómo las curvas se estiran en la dirección de velocidad mayor a flujo libre,  $0^\circ$ ,  $135^\circ$  y  $30^\circ$  en las zonas 1, 2 y 3, respectivamente.

En la figura 18, donde se muestra el patrón de flujo vehicular en vehículos/hora/km, se puede apreciar la atracción que los centros ejercen en los usuarios para elección de rutas. De la totalidad de los viajes generados en toda la ciudad, 90.410 usuarios eligen el

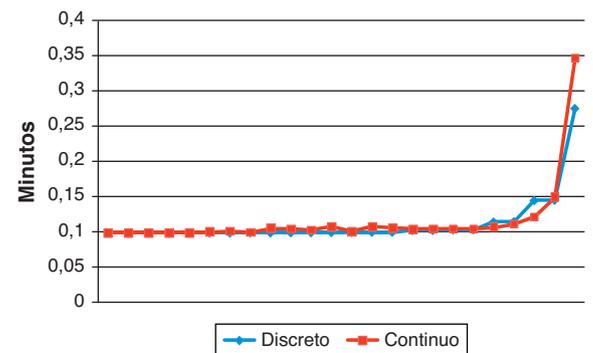


Figura 15. Tiempo de recorrido de arcos de la calle 9 (caso d).

**Tabla 1**  
Características de las calles y demanda de las zonas de estudio

Zona	$\gamma_1$ (grados)	$\gamma_2$ (grados)	$V_{m1}$ (km/h)	$V_{m2}$ (km/h)	$\varphi$	$\alpha$	$q$ (veh/h/km <sup>2</sup> )
1	0	90	70	40	2	0,15	750
2	45	135	40	60	2	0,15	350
3	30	120	60	40	2	0,15	500

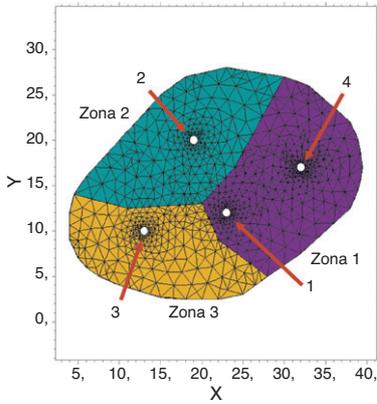


Figura 16. Zonas y centros de la ciudad.

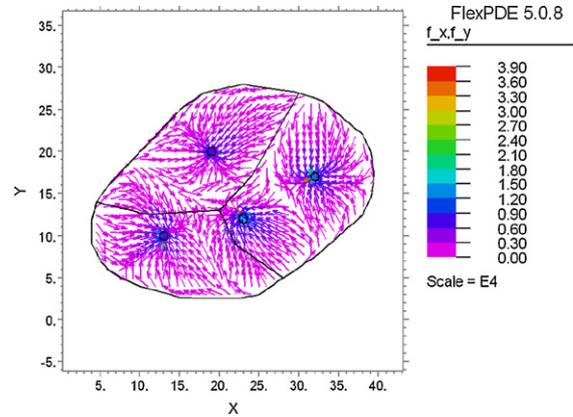


Figura 18. Distribuci3n de flujo de veh3culos en la ciudad (veh3culos/hora/km).

destino 1, 63.784 el2, 79.602 el3 y 110.478 el destino4. Los 2 destinos m3s solicitados est3n directamente relacionados con la demanda, y la preferencia por el centro 1 est3 influenciada por la velocidad m3xima permitida y la ubicaci3n con respecto a los otros centros.

5.2. Dos puntos de destino con demanda variable

En el ejemplo que se presenta a continuaci3n se modela la misma ciudad con las mismas caracter3sticas zonales, pero en este caso de viajes hacia cada uno de ellos es variable y en la zona 1 la demanda en veh/h/km<sup>2</sup> se calcula con las expresiones  $q_2 = 200 e^{-0,5u_2}$ ,  $q_4 = 375 e^{-0,5u_4}$ ; en la zona 2 mediante  $q_2 = 200 e^{-0,5u_2}$ ,  $q_4 = 350 e^{-0,5u_4}$ , y en la zona 3 de acuerdo a  $q_2 = 250 e^{-0,5u_2}$ ,  $q_4 = 500 e^{-0,5u_4}$ .

En las figuras 19 y 20 se puede ver el mapa de tiempo de viaje, en horas, desde todo punto de la ciudad hacia los centros 2 y 4, respectivamente, y en las figuras 21 y 22, la demanda de viajes hacia los mismos centros.

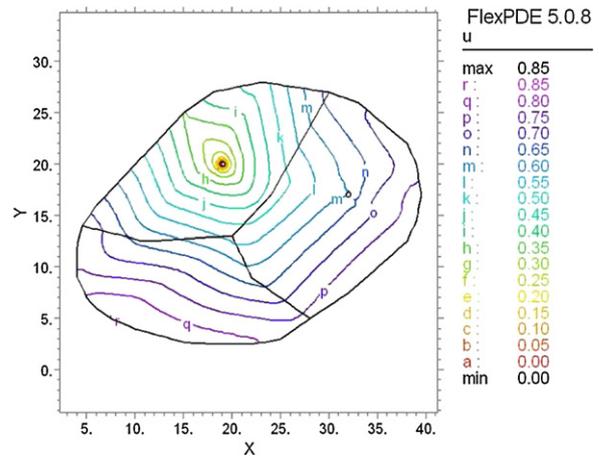


Figura 19. Tiempo de viaje hacia el centro 2 (horas).

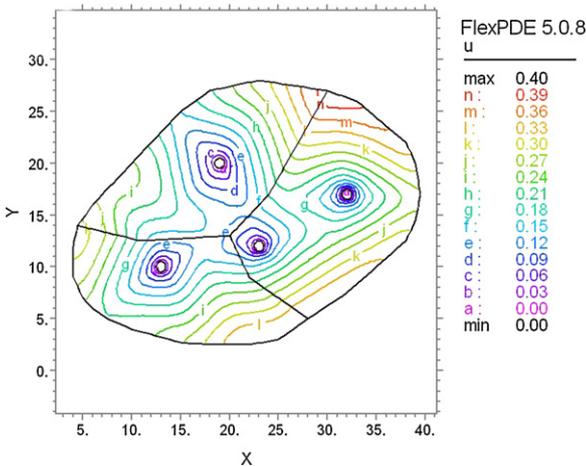


Figura 17. Tiempo de viaje (horas).

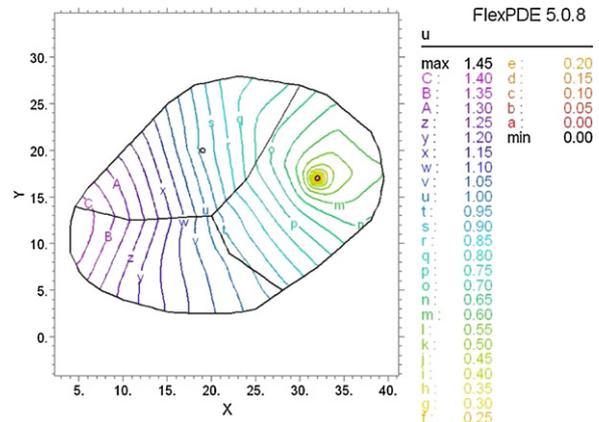


Figura 20. Tiempo de viaje hacia el centro 4 (horas).

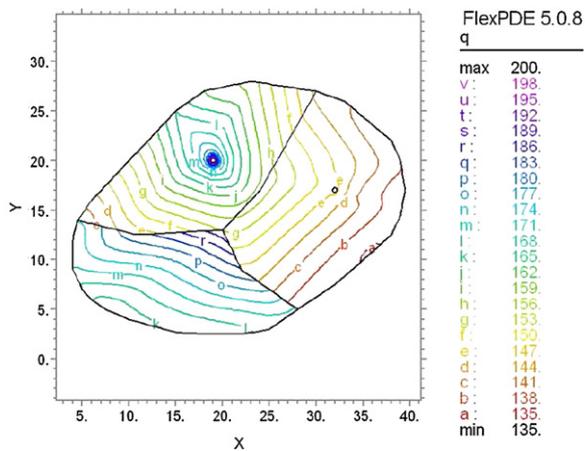


Figura 21. Demanda de viajes hacia el centro 2 (vehículos/hora/km<sup>2</sup>).

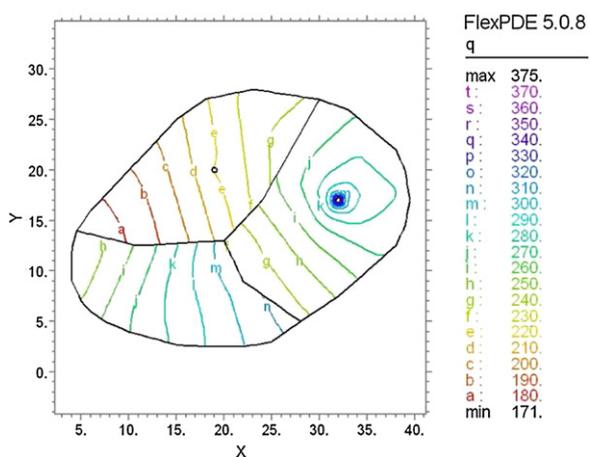


Figura 22. Demanda de viajes hacia el centro 4 (vehículos/hora/km<sup>2</sup>).

Ambos ejemplos ilustran cómo puede aplicarse este modelo a casos reales, así como cuán informativos pueden ser los mapas de tiempos de viaje y/o de densidades de flujo para visualizar el patrón general del tráfico urbano.

## 6. Conclusiones

Se ha desarrollado un modelo continuo para el estudio de la gestión del tráfico urbano. Específicamente se trata de una formulación continua para el problema de asignación de viajes urbanos (o de distribución-asignación) siguiendo el principio del equilibrio de usuario. Tal modelo considera las posibles características anisótropas de la red de transporte en diferentes zonas urbanas. A diferencia de formulaciones continuas previas, este enfoque se deduce mediante un proceso de homogeneización del problema discreto del equilibrio de usuario y por lo tanto se basa en el uso de funciones de tiempos de recorrido de arco perfectamente definidas desde el punto de vista experimental, tales como las fórmulas BPR. Esta misma idea hace posible recuperar las variables discretas por arco, una vez resuelto el problema continuo. El presente modelo se formula mediante un sistema de ecuaciones diferenciales de difusión anisótropa no lineal que se resuelve adecuadamente mediante el método de los elementos finitos con tiempos de cómputo mucho menores a los requeridos por el enfoque discreto clásico.

La concordancia con el enfoque discreto es muy buena, como ha sido demostrado en varios estudios comparativos. De esta manera este enfoque se presenta como una alternativa atractiva al clásico enfoque discreto para el análisis de redes densas. Asimismo es posible combinar el presente enfoque continuo con el modelo clásico (para considerar, por ejemplo, la existencia de autopistas). Esta y otras generalizaciones se presentarán en trabajos futuros por parte de los autores.

## Agradecimientos

El presente trabajo es parte del proyecto «Modelos matemáticos en ingeniería ambiental: problemas directos e inversos» (Director: Dr. V.H. Cortínez, Secyt, Universidad Tecnológica Nacional). Asimismo forma parte del trabajo de tesis desarrollado por P.N. Domínguez, bajo la dirección de V.H. Cortínez, para obtener el título de Doctor en Ingeniería en el Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur.

V. H. Cortínez desea dedicar este trabajo a la querida memoria de su padre Víctor R. Cortínez (7/2/1931-9/9/2011), q.e.p.d.

## Bibliografía

- [1] J. Wardrop, Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research, Proceeding, Institution of Civil Engineers II (1952) 325-378.
- [2] M. Beckmann, C. Mc Guire, C. Weinstein, *Studies in Economics of Transportation*, Yale University Press, New Haven, Connecticut, 1956.
- [3] H. Poorzahedy, O. Rouhani, Hybrid meta-heuristic algorithms for solving network design problem, *Eur. J. Oper. R.* 182 (2007) 578-596.
- [4] J. Ying, H. Lu, J. Shi, An algorithm for local continuous optimization of traffic signals, *Eur. J. Oper. R.* 181 (2007) 1189-1197.
- [5] S. Chiou, Simultaneously optimizing link tolls and signal settings in a road network, *Appl. Math. Modell.* 33-35 (2009) 2311-2323.
- [6] Y. Sheffi, *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, 1985.
- [7] P. Domínguez, M. Vidal, V. Cortínez, Diseño óptimo de redes de transporte urbano considerando aspectos medioambientales, *Mecánica Computacional XXVIII* (2009) 2599-2624.
- [8] T. Sasaki, Y. Iida, Yang H., *User Equilibrium Traffic Assignment by Continuum Approximation of Network Flow*, en: 11th International Symposium of Transportation and Traffic Theory, Yokohama, Japan, 1990, pp. 233-252.
- [9] S. Wong, S. Sun, A combined distribution and assignment model for continuous facility location problem, *Ann. Regional Sci.* 35 (2001) 267-281.
- [10] H. Ho, S. Wong, B. Loo, Combined distribution and assignment model for a continuum traffic equilibrium problem with multiple user classes, *Transp. Res.* 40 (2006) 633-650.
- [11] H. Ho, S. Wong, B. Loo, A continuous traffic equilibrium model with multiple user classes, *Journal of the Eastern Asia Society for Transportation Studies* 3 (2003) 2831-2845.
- [12] H. Ho, Wong S., Two dimensional continuum modeling approach to transportation problems, *Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology* 6 (2006) 53-72.
- [13] V. Cortínez, P. Domínguez, Un modelo continuo de asignación de tráfico para el estudio de ruido urbano, en: *Primeras Jornadas Regionales de Acústica Aadaa 2009*, Rosario, Argentina, 2009.
- [14] P. Domínguez, V. Cortínez, Aplicación de un modelo continuo de distribución-asignación de tráfico urbano: impacto ambiental, *II Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial, MACI* (2009) 277-280.
- [15] F. Robusté, E. Oñate, J. Ramos, Un modelo híbrido discreto-continuo para asignación de tráfico mediante algoritmos genéticos, en: *IX Congreso Panamericano de Ingeniería de Tránsito y Transporte*, La Habana, Cuba, 1996.
- [16] U.S. Bureau of Public Roads, *Traffic Assignment Manual*, U.S. Department of Commerce, Washington D.C, 1964.
- [17] S. Wong, Y. Du, H. Ho, L. Sun, A simultaneous optimization formulation of a discrete/continuous transportation system, *Workshop on Theory and Practice of Transportation Science* (2002), China.
- [18] FlexPDE V. 6.08, PDE Solutions Inc., 2009.
- [19] M. Frank, P. Wolfe, An algorithm for Quadratic Programming, *Mv. Res. Logist.* Q. 3 (1-2) (1956) 95-110.