Rev. Int. Mét. Num. Cálc. Dis. Ing.
Vol. **18**, **2**, 3–17 (2002)

Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería

Modelo de daño dependiente de la velocidad de deformación

Mariela Luege, Bibiana M. Luccioni y Rodolfo Danesi

CONICET
Laboratorio de Estructuras
Universidad Nacional de Tucumán
CC. 134, Correo Central, 4000 S.M. de Tucumán, Argentina
Tel./Fax: 54-381-436 40 87
e-mail: mluege@herrera.unt.edu.ar

Resumen

Los modelos constitutivos utilizados en el análisis de estructuras sometidas a acciones dinámicas de tipo impulsivo, como impacto o explosión, deben tener en cuenta la velocidad de deformación en su formulación. Estudios experimentales recientes muestran que la resistencia, el endurecimiento o ablandamiento y la energía de fractura del material están significativamente influenciadas por la velocidad de deformación cuando ésta supera los 0.1 s^{-1}. Por otro lado, la incorporación de la dependencia del tiempo en los modelos constitutivos permite asegurar la unicidad y estabilidad de la solución en problemas dinámicos con ablandamiento.

En este trabajo se propone un modelo de daño escalar dependiente del tiempo para hormigón. El mismo está basado en una extensión de un modelo de daño independiente del tiempo a través de una regla de evolución del daño análoga a la de la deformación viscoplástica de Perzyna. La formulación propuesta permite simular la dependencia de la velocidad de deformación, en particular, la sobrerresistencia y modificación de la energía de fractura que presenta el hormigón bajo altas velocidades de deformación. Como casos extremos, el modelo es capaz de reproducir tanto un comportamiento elástico como uno de daño independiente del tiempo.

El modelo propuesto se implementa en un programa de elementos finitos no lineal dinámico. La integración de la ecuación constitutiva se realiza mediante un algoritmo tipo *full Euler backward.* El operador tangente consistente se deduce a partir de un sistema de ecuaciones implícitas dependientes de la deformación específica.

Los ejemplos de aplicación desarrollados muestran que el modelo es capaz de simular el comportamiento del hormigón bajo altas velocidades de deformación.

RATE DEPENDENT DAMAGE MODEL

Summary

Rate dependence must be taken into account in the constitutive relations when used for the analysis of impact or blasting problems. Experimental studies show that the strength, the hardening/softening response of the material, and the fracture energy are significantly influenced by the strain rate when it exceeds 0.1 s^{-1}. On the other hand, rate dependency seems to be an elegant method to obtain uniqueness and stability of the solution for initial value problems with strain softening.

A rate dependent scalar damage model for concrete is proposed in this paper. The model is based on the extension of a rate independent damage model through a damage evolution law similar to that proposed by Perzyna for viscoplastic strains. The proposed formulation is able to simulate strain rate dependence, particularly the increase of material strength under high rate dynamics loads and the modification of fracture energy as a function of the strain rate. Elastic and rate independent damage behaviors can be simulated as extreme cases.

The model is implemented in a non-linear finite element dynamic program. A sort of full Euler backward algorithm is developed for the integration of the resulting constitutive equations. The consistent tangent operator is derived from an implicit system of equations as a function of strain.

Application examples developed show that the proposed model is able to simulate concrete behavior under high strain rates.

 ISSN: 0213–1315 Recibido: Octubre 2000

INTRODUCCIÓN

Las cargas dinámicas asociadas con explosiones cercanas o libres provocan velocidades de deformación del orden de 10^{-1} a 10^{3} s^{-1}. Ello da como resultado un comportamiento especial de los materiales afectados, como aumento de la resistencia y de la rigidez respecto al comportamiento estático, o la desintegración total en el caso de explosiones muy próximas.

En el caso particular del hormigón, la respuesta depende fuertemente de la velocidad de aplicación de la carga, modificándose las propiedades mecánicas a nivel macroscópico, como resistencia y módulo de Young. Si bien estos efectos han sido confirmados experimentalmente, el origen de la dependencia de la velocidad de deformación es un tema todavía en estudio.

Con el objeto de mejorar el control de falla de estructuras de hormigón, Toutlemonde[1] realiza gran cantidad de ensayos dinámicos en hormigón y, haciendo una analogía con los procesos de retracción, creep y rotura, sugiere que el agua presente dentro de los nanoporos del hormigón es la principal responsable de los efectos observados.

En la Figura 1 se muestra la resistencia a tracción del hormigón f_{ct} en función de la velocidad de deformación obtenida en probetas secas y con sus nanoporos saturados. Para velocidades de deformación entre 1.E-5 s^{-1} y 1 s^{-1}, el aumento de la resistencia puede evidenciarse sólo cuando existe agua libre en los nanoporos. Sin embargo, para velocidades de deformación muy altas (mayores a 10 s^{-1}) se observa un incremento importante del valor pico de carga con el aumento de la velocidad, tanto en el caso de probetas con nanoporos saturados como en el caso de probetas secas.

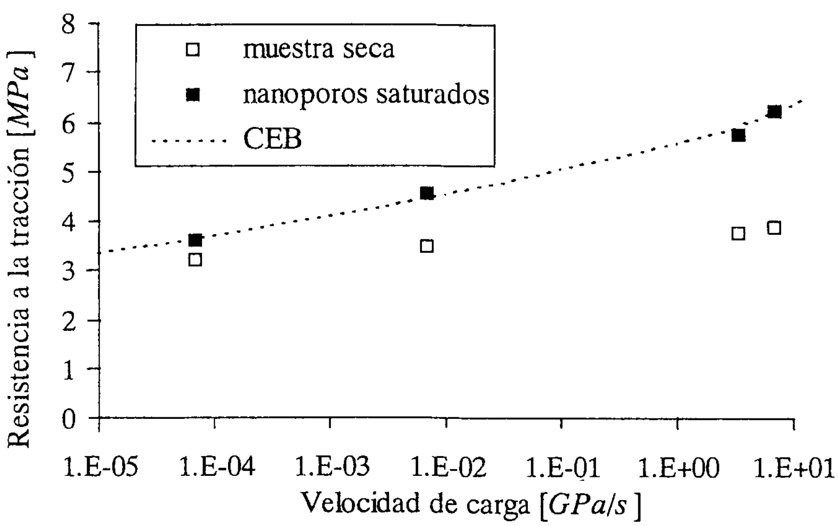

Figura 1. Resistencia a la tracción del hormigón en función de la velocidad de carga[1,4]

El comportamiento dinámico del hormigón bajo tensiones de tracción se puede explicar de la siguiente manera:[2]

- Para velocidades de deformación inferiores a 1 s^{-1} prepondera un mecanismo de tipo viscoso, originado en el esfuerzo de restitución que ejerce el agua presente en los nanoporos, el cual es proporcional a la velocidad de apertura de la fisura. En la Figura 2 se esquematiza una probeta a tracción y las fuerzas viscosas resultantes, bajo este rango de velocidades. Este mecanismo impide, tanto la localización de la microfisuración, (comportamiento del material) como la propagación de la macrofisura (comportamiento estructural).

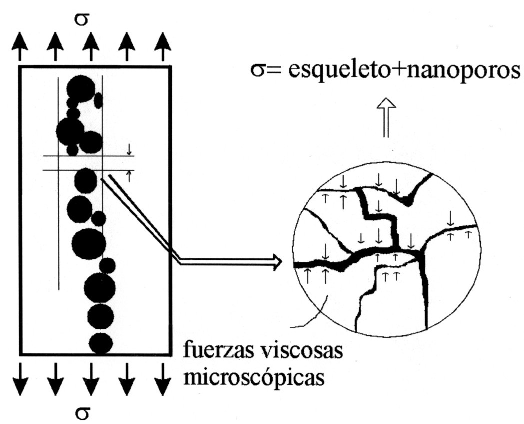

Figura 2. Fuerzas viscosas en el hormigón bajo altas velocidades de carga[3]

- Para velocidades de deformación mayores o iguales que 10 s^{-1} prepondera el efecto de tipo inercial. El aumento de la resistencia observado para estas velocidades no es intrínseco del material, sino que es debido a la existencia de fuerzas de inercia, las cuales pueden conducir a un aumento aparente del valor pico del esfuerzo.

La variación del módulo de elasticidad con la velocidad de deformación es mucho menor que las variaciones encontradas en la resistencia a la tracción y a la compresión ($f_{ct}/f_{ctm} \cong 2$, mientras que $E_{\rm din}/E_{\rm stat} \cong 1,1$), y como primera aproximación, puede considerarse despreciable.[2]

En general, los agregados no juegan un papel importante ya que no son sensibles al efecto viscoso, exceptuando el caso de agregados muy porosos.

El Código Europeo del Hormigón[4] contempla el aumento de la resistencia del hormigón bajo altas velocidades de deformación. Para ello propone, por ejemplo, para el caso de tracción, la siguiente expresión que reproduce los resultados experimentales de Figura 1

$$\frac{f_{ct}}{f_{ctm}} = \beta_s \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{ct}}{\dot{\varepsilon}_{cto}}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{1}$$

donde $\dot{\varepsilon}_{cto}$ = 3.E-6 s^{-1}, $\dot{\varepsilon}_{ct}$ es la velocidad de deformación, f_{ctm} es la resistencia a tracción uniaxial del hormigón cuasi-estática, f_{ct} es la resistencia a tracción del hormigón dependiente de la velocidad de deformación y β_s es un coeficiente que depende del valor de $\dot{\varepsilon}$ y de $\dot{\varepsilon}_{ct}$. La expresión para la relación de resistencias a compresión es análoga a la de tracción.

En las referencias se encuentran diversos modelos constitutivos formulados con el objeto de reproducir numéricamente el comportamiento observado en ensayos experimentales. Entre ellos, puede citarse el modelo de plasticidad propuesto por Malvar *et al.*,[5] el cual incorpora un factor de mayoración de la superficie de falla dependiente de la velocidad de deformación. Otro tipo de modelos son los basados en la elasto-viscoplasticidad como el de López Cela.[6] Una vez obtenida la solución invíscida, coincidente con el modelo de Drucker-Prager, se aplica la corrección viscoplástica de Duvaut-Lions.

Merece citarse también el modelo de Sercombe *et al.*[7,3] que incorpora el mecanismo de disipación viscosa desde el planteo termodinámico y resuelve en forma acoplada un modelo viscoelástico con otro de plasticidad. Al endurecimiento/ablandamiento plástico estándar, asociado a la deformación irreversible del esqueleto, se le agrega un endurecimiento viscoso que genera una sobrerresistencia dependiente de la velocidad de carga y, en régimen de postpico, un ablandamiento viscoso.

Los modelos constitutivos basados en la mecánica del daño continuo relacionan la degradación de las propiedades materiales con la iniciación, crecimiento e interconexión de microvacíos.[8] En estos modelos, el efecto de la velocidad de deformación puede tenerse en cuenta definiendo una regla de evolución de la variable interna de daño de tipo viscosa.[9,10,11,12]

Centrando el objetivo en el análisis de estructuras bajo la acción de cargas de tipo impulsivo, una de las formas más simples de incorporar la dependencia de la velocidad de deformación en el comportamiento de materiales cohesivo friccionales del tipo del hormigón, es a partir de un modelo de daño continuo. En este trabajo, se incorpora la dependencia de la velocidad de deformación en un modelo de daño escalar[13,14] definiendo una regla de evolución de la variable interna de daño similar a la de la deformación viscoplástica de Perzyna.[15] La resolución numérica del modelo de daño escalar[13,14] resulta simple y rápida, lo cual es particularmente conveniente para cargas explosivas que requieren de un gran número de intervalos pequeños de tiempo.

MODELO DE DAÑO DEPENDIENTE DE LA VELOCIDAD DE DEFORMACIÓN

El modelo constitutivo desarrollado para simular el comportamiento material frente a cargas de tipo impulsivas es un modelo de daño isótropo dependiente de la velocidad de deformación.

Bases termodinámicas

La formulación[13,14] está basada en la hipótesis de *elasticidad desacoplada*.[16] Puede suponerse entonces, que la energía libre total Ψ está formada por dos partes independientes: la parte elástica Ψ^e y la parte plástica Ψ^p, en correspondencia con procesos elásticos y plásticos respectivamente. Es decir

$$\Psi(\varepsilon_{ij}^e;\alpha;\beta)=\Psi^e(\varepsilon_{ij}^e;\beta)+\Psi^p(\alpha) \tag{2}$$

donde ε_{ij}^e es el tensor de deformaciones elásticas que representa la variable libre del problema y α y β son grupos de variables internas plásticas y no plásticas respectivamente. Para el caso de problemas térmicamente estables y pequeñas deformaciones, la parte elástica de la energía libre se expresa como[17]

$$\Psi^e(\varepsilon_{ij}^e;\beta)=\frac{1}{2m}[\varepsilon_{ij}^e C_{ijkl}^s(\beta)\varepsilon_{kl}^e] \tag{3}$$

donde m es la densidad del material y $C_{ijkl}^s(\beta)$ es el tensor constitutivo elástico secante que depende de las variables internas no plásticas. Para el caso de daño escalar planteado por Kachanov[18] se tiene:[13,14]

$$C_{ijkl}^s(\beta)=(1-d)C_{ijkl}^0 \tag{4}$$

donde C_{ijkl}^0 es el tensor secante inicial del material no dañado y d es la variable interna de daño, tal que

$$\begin{aligned}&0\le d\le 1\\ &d=0 \quad \text{para el material no dañado}\\ &d=1 \quad \text{para el material totalmente dañado}\end{aligned}$$

Para el caso particular de daño escalar, la parte elástica de la energía libre resulta

$$\Psi^e = (1-d)\Psi^0 = (1-d)\frac{1}{2m}[\varepsilon_{ij}^e C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^e] \tag{5}$$

donde Ψ^0 es la energía elástica libre del material no dañado.

La desigualdad de Clasius-Duhem[19] puede escribirse en términos de la energía libre como

$$\Xi = m(-\dot{\Psi} - \eta_e \dot{\theta}) + \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{\theta} q_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \geq 0 \tag{6}$$

donde η_e es la entropía, θ es una medida de la temperatura y q_i es el flujo de calor.

Reemplazando la expresión de la energía libre total (2) en la (6), y en ausencia de deformaciones permanentes o plásticas, se obtiene la siguiente inecuación

$$\left(\sigma_{ij} - m\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)\dot{\varepsilon}_{ij} - m\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \eta_e\right)\dot{\theta} - m\frac{\partial \Psi}{\partial \beta_{kl}}\dot{\beta}_{kl} - \frac{1}{\theta} q_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \geq 0 \tag{7}$$

Las relaciones de Coleman,[16] que se expresan a continuación, garantizan el cumplimiento de la inecuación (7) para un estado termodinámico dado.

$$\sigma_{ij} = m\frac{\partial \Psi(\varepsilon_{ij};\beta)}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad \text{y} \quad \eta_e = -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \tag{8}$$

Por otro lado, para problemas termomecánicos desacoplados deben satisfacerse en forma independiente las inecuaciones de Clasius-Planck, por lo cual la disipación mecánica resulta

$$\Xi_m = \Xi_m^d = -m\frac{\partial \Psi}{\partial \beta_{kl}}\dot{\beta}_{kl} = m\Psi^0\dot{d} \geq 0 \tag{9}$$

Criterio de daño

Se define un criterio de daño que marca el umbral del comportamiento elástico. El mismo se expresa como una función escalar de las componentes del tensor de tensiones[13,14]

$$G^d = \bar{\sigma}(\sigma_{ij}) - f_c(\sigma_{ij}, d) \tag{10}$$

donde $\bar{\sigma}(\sigma_{ij})$ es la tensión equivalente para la cual pueden utilizarse, por ejemplo, las funciones de fluencia de la teoría de plasticidad (Tresca, Von Mises, Mohr-Coulomb, etc.) y f_c es el *umbral de daño* que en este caso, a diferencia de trabajos anteriores,[20] se define como una función explícita de la variable interna de daño, de la siguiente manera

$$f_c(\sigma_{ij}, d) = r(\sigma_{ij})\sigma_t(d) + \lfloor 1 - r(\sigma_{ij}) \rfloor \sigma_c(d) \tag{11}$$

donde las funciones $\sigma_t(d)$ y $\sigma_c(d)$ representan la evolución de la tensión en función de la degradación de la rigidez en procesos de tracción y compresión uniaxial y pueden deducirse de las curvas $\sigma_t - \varepsilon_t$ y $\sigma_c - \varepsilon_c$ experimentales.

El factor $r(\sigma_{ij})$, definido como sigue,[13,14] se introduce para tener en cuenta el tipo de estado tensional

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{3} \langle \sigma_i \rangle}{\sum_{i=1}^{3} |\sigma_i|} \tag{12}$$

donde σ_i son las tensiones principales y $\langle x \rangle = \frac{1}{2}(x + |x|)$ es la función rampa.

Regla de evolución de la variable interna de daño $\boldsymbol{d}$

Se define una regla de evolución del daño análoga a la de la deformación viscoplástica propuesta por Perzyna[8,10,11,12]

$$\dot{d} = \frac{1}{\eta}\left[\frac{\langle G^d \rangle}{f_c}\right]^N \tag{13}$$

donde η y N son parámetros del material que pueden determinarse mediante ensayos experimentales con velocidades de deformación controlada. N es un parámetro adimensional, mientras que η tiene dimensiones de tiempo y representa una especie de viscosidad.

De acuerdo a la ec. (13), el daño sólo crece cuando $G^d > 0$, es decir, cuando el estado tensional es tal, que la tensión equivalente $\bar{\sigma}(\sigma_{ij})$ supera al umbral de degradación $f_c(\sigma_{ij}, \kappa^d)$ y se inicia el proceso de degradación en el material. Como en la teoría de la viscoplasticidad, se admiten valores de tensión fuera de la superficie de daño definida por ec. (10).

La velocidad de degradación depende de la sobretensión existente y de los parámetros materiales η y N. A modo de ejemplo, para un valor muy elevado de η, la velocidad de daño resulta prácticamente nula, obteniéndose un comportamiento cuasi- elástico.

Esta regla de evolución de daño permite simular numéricamente la disminución de la fisuración observada experimentalmente, cuando se incrementa la velocidad de deformación. La sobrerresistencia se obtiene retardando el retorno del estado tensional a la superficie de daño mediante un retardo en la evolución del daño.

Ley constitutiva secante total

De acuerdo a la ec. (8), en ausencia de deformaciones permanentes, la *ley constitutiva secante total* puede escribirse de la siguiente manera

$$\sigma_{ij} = m\frac{\partial \Psi(\varepsilon_{ij}; d)}{\partial \varepsilon_{ij}} = C^s_{ijkl}\varepsilon_{kl} = (1-d)C^0_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{14}$$

$$\sigma_{ij} = (1-d)\sigma^0_{ij} \tag{15}$$

donde σ^0_{ij} es el tensor de tensiones de un sólido ficticio no dañado.[13,14]

TRATAMIENTO NUMÉRICO DEL MODELO PROPUESTO

Algoritmo de integración de la ecuación constitutiva

Para la integración de las ecuaciones constitutivas correspondientes al modelo propuesto se utiliza un algoritmo de tipo *Euler Backward* basado en un único residuo en tensiones. A continuación esquematiza dicho algoritmo.

0) `Datos del incremento:` $\Delta u^n_k, \Delta\varepsilon^n_{kl}, \varepsilon^n_{kl}$

1) `Predictor`, $k=0$: $d^n_0 = d^{n-1},\ \Delta d^n_0 = 0,\ (f_c)^n_0 = (f_c)^{n-1}$

$$(\sigma^0_{ij})^n = C^0_{ijkl}\varepsilon^n_{kl},\ (\sigma_{ij})^n_0 = (1-d^n_0)C^0_{ijkl}\varepsilon^n_{kl}$$

2) `Cálculo de la función de daño:` $(G^d)^n_k = \bar{\sigma}[(\sigma_{ij})^n_k] - (f_c)^n_k$

3) `Cálculo del residuo:` $\tilde{R}_k = \Delta d_k^n - \frac{\Delta t}{\eta} \left\langle \frac{(G^d)_k^n}{(f_c)_k^n} \right\rangle^N$

4) `Si` $|\tilde{R}_k| \leq$ `tolerancia, vaya a 9)`

   `De lo contrario :` $k = k+1$

5) `Corrección de la variable de daño:`

   $(\delta\Delta d)_k = -\left(\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \Delta d}\right)_{k-1}^{-1} \tilde{R}_{k-1},\ \Delta d_k^n = \Delta d_{k-1}^n + (\delta\Delta d)_k,\ d_k^n = d^{n-1} + \Delta d_k^n$

6) `Cálculo de la tensión:` $(\sigma_{ij})_k^n = (1-d_k^n)(\sigma_{ij}^0)^n$

7) `Actualización del umbral de daño:` $(f_c)_k^n = r(\sigma_k^n)\sigma_t \lfloor (d)_k^n \rfloor + \lfloor 1 - r(\sigma_k^n) \rfloor \sigma_c \lfloor (d)_k^n \rfloor$

8) `Vuelva a 2)`

9) `Actualización de las variables:` $(\sigma_{ij})^n = (\sigma_{ij})_k^n,\ d^n = d_k^n,\ (f_c)^n = (f_c)_k^n$

10) `Cálculo del operador tangente consistente` C_{ijkl}^T

11) `FIN`

Operador tangente consistente

Cuando la resolución de la ecuación de movimiento en el tiempo se realiza mediante un método implícito, se requiere el operador tangente consistente para el cálculo de la matriz jacobiana

$$C_{ijkl}^T = \frac{d\sigma_{ij}}{d\varepsilon_{kl}} \tag{16}$$

Como el modelo de daño descrito no posee una condición de consistencia que obligue al estado tensional a ubicarse sobre la superficie de daño, el operador tangente no puede ser deducido derivando la expresión secante, sino que debe obtenerse numéricamente en consistencia con el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva. Expresando en forma implícita las ecuaciones que definen el modelo y que dependen de la deformación específica ε_{kl}, se tiene[21]

$$R_{ij}^\sigma[\varepsilon;\sigma(\varepsilon),d(\varepsilon)] = \sigma_{ij}^n - (1-d^n)C_{ijkl}^0\varepsilon_{kl}^n = 0 \tag{17}$$

$$R^d[\varepsilon;\sigma(\varepsilon),d(\varepsilon)] = d^n - d^{n-1} - \frac{\Delta t}{\eta}\left[\frac{(G^d)^n}{(f_c)^n}\right]^N = 0 \tag{18}$$

Las variables de estado se determinan mediante el algoritmo de integración dela ecuación constitutiva. Si se diferencian las ecuaciones (17) y (18), se deduce lo siguiente

$$\frac{\partial R_{ij}^\sigma}{\partial \sigma_{kl}}\frac{d\sigma_{kl}}{d\varepsilon_{mn}} + \frac{\partial R_{ij}^\sigma}{\partial d}\frac{dd}{d\varepsilon_{mn}} = \frac{\partial R_{ij}^\sigma}{\partial \varepsilon_{mn}} \tag{19}$$

$$\frac{\partial R^d}{\partial \sigma_{kl}}\frac{d\sigma_{kl}}{d\varepsilon_{mn}} + \frac{\partial R^d}{\partial d}\frac{dd}{d\varepsilon_{mn}} = \frac{\partial R^d}{\partial \varepsilon_{mn}} \tag{20}$$

donde

$$\frac{\partial R^{\sigma}_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} = \delta_{ik}\delta_{jl} \tag{21}$$

$$\frac{\partial R^{\sigma}_{ij}}{\partial d} = C^{0}_{ijkl}\varepsilon_{kl} = \sigma^{0}_{ij} \tag{22}$$

$$\frac{\partial R^{\sigma}_{ij}}{\partial \varepsilon_{mn}} = (1-d)C^{0}_{ijmn} \tag{23}$$

$$\frac{\partial R^{d}}{\partial \sigma_{ij}} = -\frac{\Delta t}{\eta} N \left\langle \frac{\bar{\sigma}-f_c}{f_c} \right\rangle^{N-1} \frac{1}{f_c}\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \tag{24}$$

$$\frac{\partial R^{d}}{\partial d} = 1 + \frac{\Delta t}{\eta} N \left\langle \frac{\bar{\sigma}-f_c}{f_c} \right\rangle^{N-1} \left(\frac{1}{f_c}\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}}\sigma^{0}_{ij} + \frac{\bar{\sigma}}{f_c^2}\frac{\partial f_c}{\partial d} \right) \tag{25}$$

$$\frac{\partial R^{d}}{\partial \varepsilon_{mn}} = \frac{\Delta t}{\eta} N \left\langle \frac{\bar{\sigma}-f_c}{f_c} \right\rangle^{N-1} \left(\frac{1}{f_c}\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}}(1-d)C^{0}_{ijmn} - \frac{\bar{\sigma}}{f_c^2}\frac{\partial f_c}{\partial d}\frac{\partial d}{\partial \varepsilon_{mn}} \right) \tag{26}$$

Despejando $\frac{\partial d}{\partial \varepsilon_{mn}}$ de la ec. (20) y reemplazando en la ec. (19) se puede obtener el operador tangente $C^{t}_{klmn} = \frac{d\sigma_{kl}}{d\varepsilon_{mn}}$ y resulta

$$C^{T}_{klmn} = \frac{d\sigma_{kl}}{d\varepsilon_{mn}} = \left[\frac{\partial R^{\sigma}_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{\partial R^{\sigma}_{ij}}{\partial d}\left(\frac{\partial R^{d}}{\partial d}\right)^{-1}\frac{\partial R^{d}}{\partial \sigma_{kl}} \right]^{-1} \left[\frac{\partial R^{\sigma}_{ij}}{\partial \varepsilon_{mn}} - \frac{\partial R^{\sigma}_{ij}}{\partial d}\left(\frac{\partial R^{d}}{\partial d}\right)^{-1}\frac{\partial R^{d}}{\partial \varepsilon_{mn}} \right] \tag{27}$$

y para el caso de $N = 1$

$$C^{T}_{klmn} = \left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \sigma^{0}_{ij} H \frac{\Delta t}{\eta}\frac{1}{f_c}\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{kl}} \right)^{-1} \left[C^{s}_{ijmn} - \sigma^{0}_{ij} H \frac{\Delta t}{\eta}\left(\frac{1}{f_c}\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{pq}} C^{s}_{pqmn} - \frac{\bar{\sigma}}{f_c^2}\frac{\partial f_c}{\partial \varepsilon_{mn}} \right) \right] \tag{28}$$

donde:

$$\begin{aligned} H &= \left(1 + \frac{\Delta t}{\eta}\left(\frac{1}{f_c}\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}}\sigma^{0}_{ij} + \frac{\bar{\sigma}}{f_c^2}\frac{\partial f_c}{\partial d} \right) \right)^{-1} \\ \sigma^{0}_{ij} &= C^{0}_{ijkl}\varepsilon_{kl} \end{aligned} \tag{29}$$

Se puede observar que cuando $\frac{\Delta t}{\eta} \to 0$, $C^{t}_{ijkl} \to C^{s}_{ijkl} = (1-d)C^{0}_{ijkl}$, es decir, coincide con el operador secante.

Si en cambio $\frac{\Delta t}{\eta} \to \infty$, se obtiene el operador tangente consistente correspondiente al modelo de daño independiente del tiempo.[13,14]

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

El modelo de daño propuesto fue implementado en un programa de elementos finitos planos dinámico para problemas con no linealidad física y geométrica. Con el objeto de analizar el comportamiento del modelo y los algoritmos desarrollados, se realizan a continuación distintos ejemplos numéricos.

Ejemplo cuasi-estático de deformación controlada

Se analiza el comportamiento a compresión uniaxial de un elemento plano de cuatro nodos y cuatro puntos de integración, como el de la Figura 3.

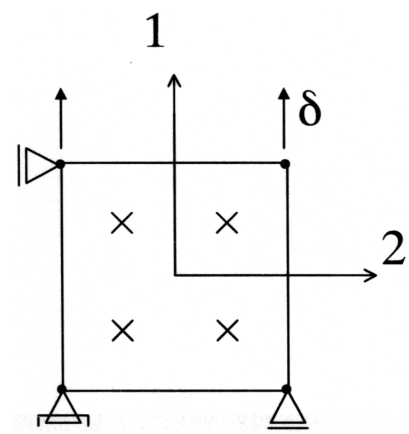

Figura 3. Compresión uniaxial cuasi- estática con deformación controlada

Las propiedades mecánicas del hormigón utilizado son las siguientes:

Módulo de elasticidad:	$E = 30\ 000$ MPa
Módulo de Poisson:	$\nu = 0.2$
Umbral de daño inicial en tracción uniaxial cuasi-estática:	$f_{ctm} = 2.2$ MPa

En primer lugar, se adoptan $N = 1$ y $\eta = 0.001$ s y se obtienen las curvas tensión-deformación específica para distintas velocidades de deformación que se han representado en la Figura 4. Se observa que un aumento en la velocidad de deformación implica una disminución en la velocidad de daño y, consecuentemente, un aumento de la resistencia.

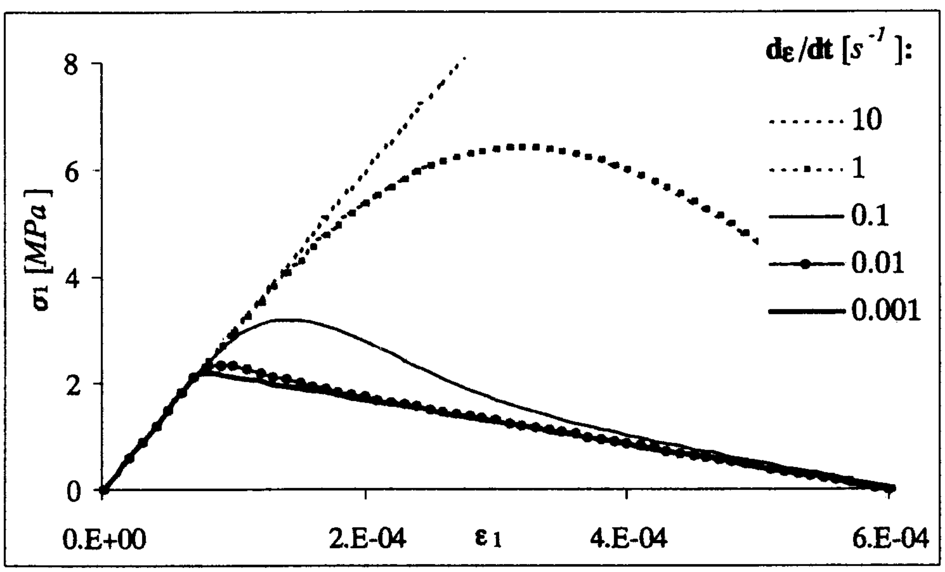

Figura 4. Curvas tensión σ_1 - deformación ε_1 para distintas velocidades de deformación, con $N = 1$ y $\eta = 0.001$ s

A fin de realizar una correcta elección de los parámetros N y η, los cuales determinan la velocidad de daño, es conveniente estudiar el efecto que los mismos tienen en el comportamiento.

El Código Europeo[4] da expresiones para el cálculo de la resistencia pico del hormigón en función de la velocidad de deformación. Las mismas pueden ser utilizadas como referencia para la elección de los valores de los parámetros N y η.

En la Figura 5 se grafica la relación de resistencias f_{ct}/f_{ctm} e en función de la velocidad de deformación, obtenida con el modelo propuesto para $\eta = 0.001$ s y distintos valores del parámetro N. En la misma figura se representa, además, la curva correspondiente a las expresiones del CEB-FIP'90.[4] Puede observarse que, para valores de N mayores que uno, el modelo no supera el triple de la resistencia estática. En particular, para velocidades de deformación del orden de 1 s^{-1}, la resistencia resultante es aproximadamente el doble de la resistencia original. La evolución de la resistencia con la velocidad de deformación puede ajustarse a los datos experimentales tomando valores altos del parámetro N, mayores que 2.

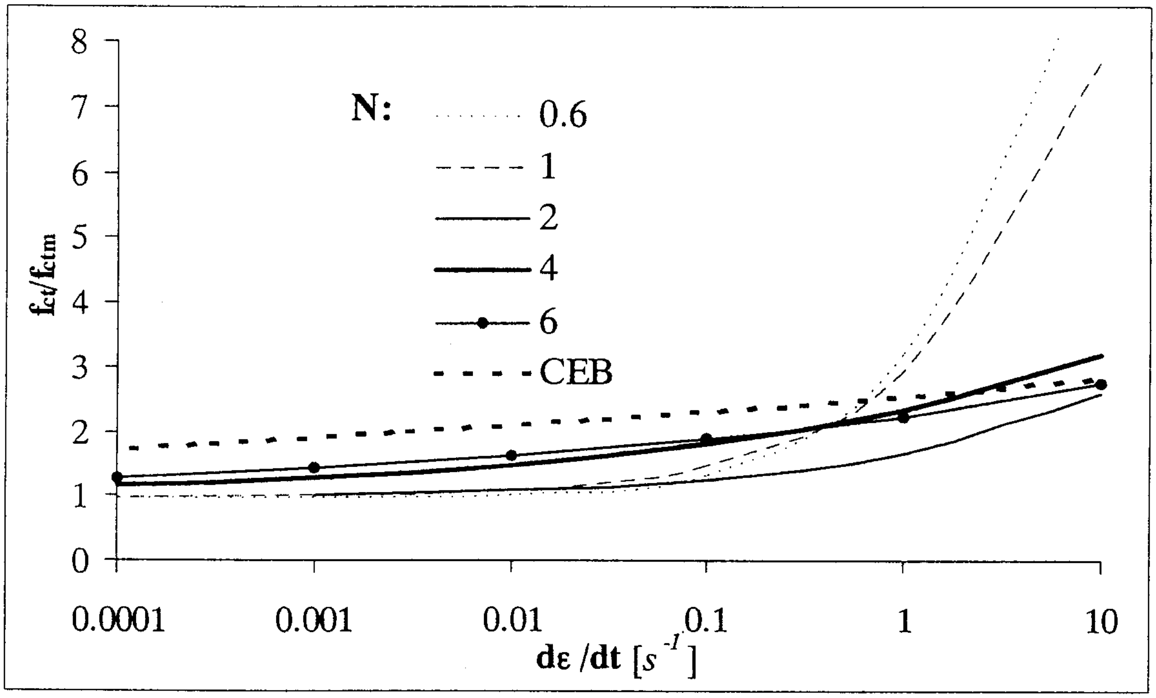

Figura 5. Resistencia relativa f_{ct}/f_{ctm} en función de la velocidad de deformación para $\eta = 0.001$ s y distintos valores de N

En forma análoga, en la Figura 6 se representa la relación de resistencias f_{ct}/f_{ctm} para distintos valores del parámetro η. Para valores pequeños de η el comportamiento es prácticamente coincidente con el daño independiente del tiempo.[13,14] A medida η crece, el comportamiento se aleja del correspondiente al modelo de daño independiente del tiempo y se acerca al elástico. Para valores de η menores que 0.001 s y velocidades de deformación menores que 10 s^{-1}, la relación de resistencias f_{ct}/f_{ctm} se mantiene menor que 3. Es importante destacar que los valores de η que mejor ajustan los resultados experimentales son del orden de 0.0001 s.

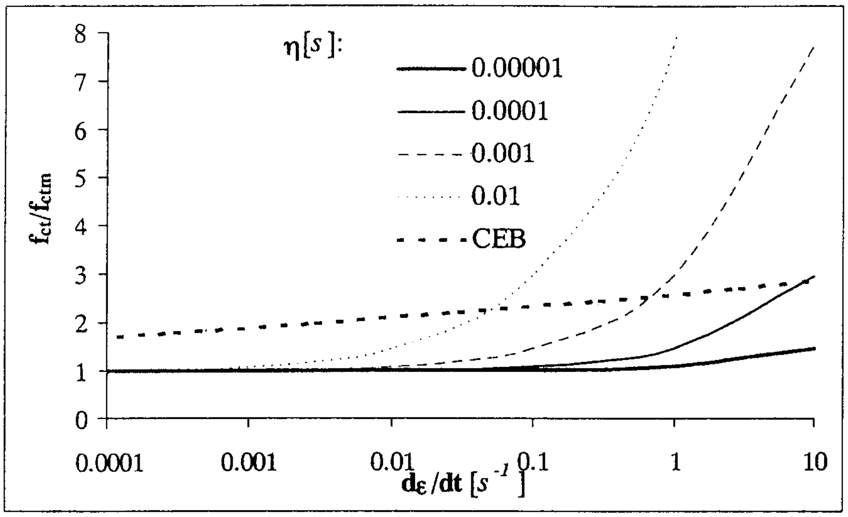

Figura 6. Resistencia relativa f_{ct}/f_{ctm} en función de la velocidad de deformación para distintos valores de η y $N = 2$

Barra sometida a una carga de tipo impulsiva

En este ejemplo se analiza el comportamiento de la barra de la Figura 7 sometida a fuerzas de tracción, en lo que respecta a la propagación de onda a lo largo de la misma. La barra está fija en un extremo y sometida en el extremo opuesto a una carga dinámica que varía en el tiempo, como se indica en la misma figura.

Se analiza el problema con mallas de 5, 10 y 20 elementos de tensión plana, 8 nodos y 2×2 puntos de integración.

El pulso de carga se define con $P_0 = 0.9(Af_{ctm})$, donde $A = 1$ cm^2 es el área de la barra y $f_{ctm} = 2.2$ MPa la resistencia a tracción del hormigón en un ensayo cuasi-estático (Figura 7).

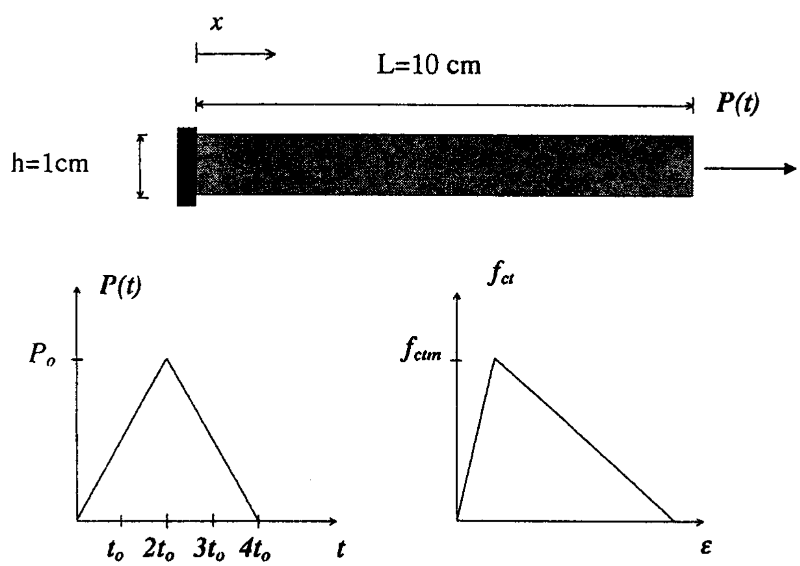

Figura 7. Barra sometida a carga impulsiva en un extremo ($t_0 = 0.001$ s)

La integración en el tiempo de las ecuaciones de campo se realiza mediante un esquema implícito de Newmark con $\alpha = 0.25$ y $\delta = 0.5$.

Cuando la onda llega al extremo fijo de la barra, rebota duplicando el valor de la acción y el material entra en la etapa de ablandamiento posterior al pico. En la Figura 8 se grafica la deformación específica a lo largo de la barra, en $t = 5t_0$, para las mallas de 5, 10 y 20 elementos. Puede observarse que los resultados obtenidos con las distintas discretizaciones resultan coincidentes y la localización de la deformación ocurre en un ancho de banda independiente del tamaño del elemento, lo cual verifica que la ecuación de onda resulta bien condicionada.

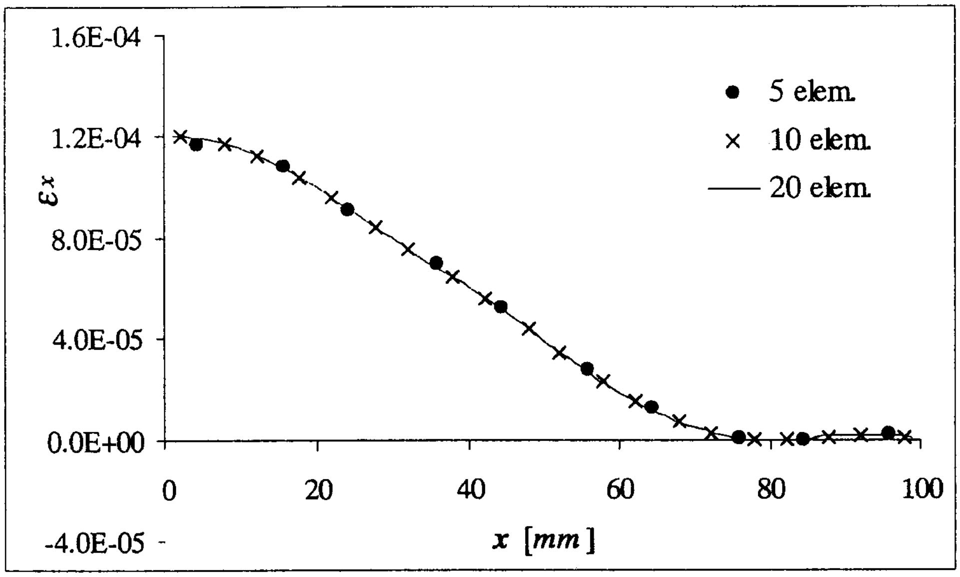

Figura 8. Deformación ε_x a lo largo de la barra para distintas mallas en el tiempo $t = 5t_0$, ($N = 2$ y $\eta = 0.001$ s)

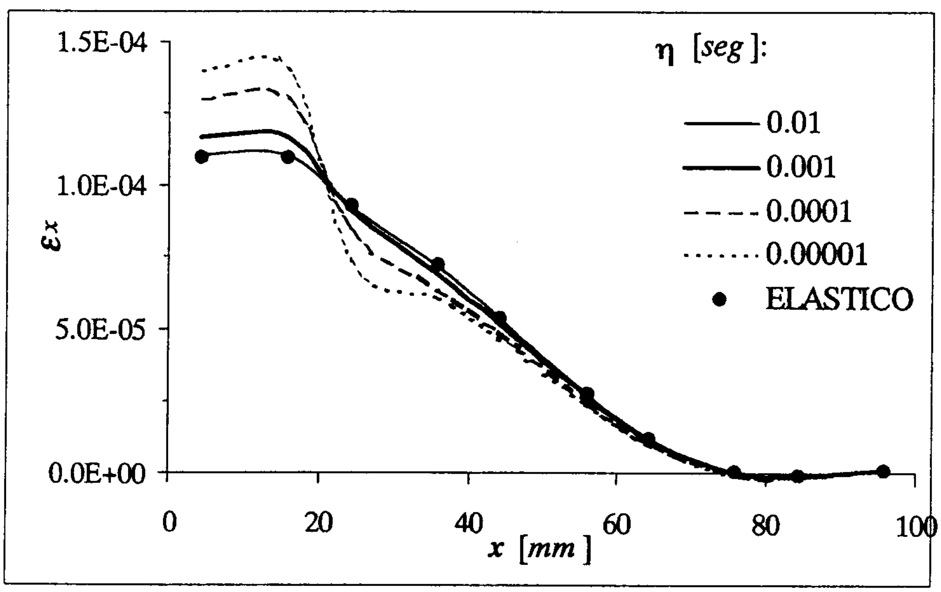

Figura 9. Deformación ε_x a lo largo de la barra con distintos η, ($N = 2$, 5 elem., $t = 5t_0$)

Cuando $t = 5t_0$, la onda rebota en el extremo fijo de la barra y comienza la degradación en el hormigón y, por consiguiente, la evolución de la variable de daño. En la Figura 9 se grafica la deformación ε_x a lo largo de la barra, en ese instante de tiempo para distintos valores de η. Se observa que para valores de η mayores que 0.01 s, la deformación específica es prácticamente coincidente con la correspondiente al comportamiento elástico. En cambio, cuando η disminuye, el comportamiento se acerca al de un modelo de daño independiente del tiempo. Más aún, la aproximación al modelo de daño independiente del tiempo implica también una disminución de la banda de localización de deformaciones y la consecuente aparición del problema falta de objetividad en la respuesta que caracteriza a los modelos independientes del tiempo.

La variable interna de daño evoluciona en mayor medida en la zona cercana al extremo fijo de la barra. En la Figura 10 puede observarse la evolución de la variable interna de degradación d en dos intervalos de tiempo consecutivos, como consecuencia del rebote de la onda en dicho extremo.

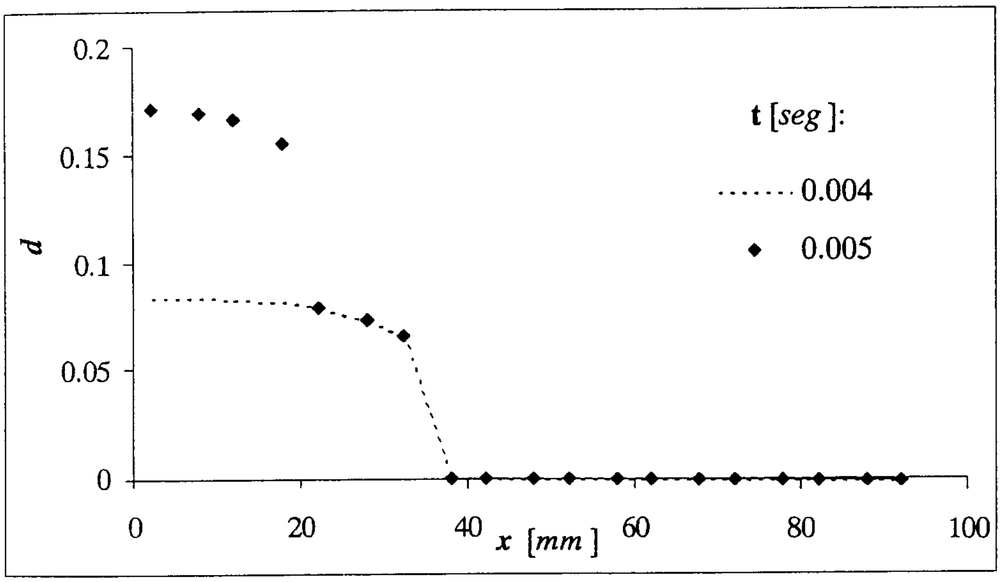

Figura 10. Evolución de la variable de daño d a lo largo de la barra en dos intervalos consecutivos de tiempo ($N = 2$ y $\eta = 0.001$ s)

CONCLUSIONES

En este trabajo se propone un *modelo de daño dependiente de la velocidad de deformación* y se describe el algoritmo desarrollado para su implementación numérica.

La dependencia de la velocidad de deformación se incorpora al modelo a través de una regla de evolución de la variable interna de daño de tipo viscosa, análoga a la ley de evolución de la deformación viscoplástica de Perzyna. Ello permite obtener tensiones por encima de la superficie de daño para ejemplos cuasi-estáticos y simular un comportamiento dependiente de la velocidad de deformación. Ajustando adecuadamente los parámetros intervinientes, el modelo puede reproducir, como casos extremos, un comportamiento elástico o uno de daño independiente del tiempo.

La resolución numérica resulta simple y rápida, lo cual es particularmente conveniente para cargas explosivas que requieren un gran número de intervalos pequeños de tiempo. La integración de la ecuación constitutiva se realiza mediante un algoritmo tipo *full Euler* *backward*, basado en la corrección iterativa de un único residuo en términos de la variable de daño. Ello representa una ventaja importante frente al tratamiento numérico de otros modelos, en particular frente al de los modelos viscoplásticos.

El operador tangente consistente puede ser deducido a partir de un sistema de ecuaciones implícitas dependientes de la deformación específica. El mismo coincide con el operador tangente secante (elástico degradado) cuando $\Delta t/\eta$ tiende a cero y con el de daño independiente del tiempo cuando $\Delta t/\eta$ tiende a infinito.

De los ejemplos numéricos realizados se puede concluir que, adoptando adecuadamente los parámetros intervinientes, el modelo es capaz de simular satisfactoriamente la sobrerresistencia del hormigón existente bajo velocidades deformación del orden de 10^{-5} a 10 s^{-1}.

El análisis de la propagación de onda en una barra empotrada en un extremo y sometida en el otro extremo a la acción de una carga dinámica permite verificar que la ecuación de movimiento se mantiene bien condicionada. Los resultados no varían al densificar la malla.

REFERENCIAS

1 F. Toutlemonde y P. Rossi, "Major parameters governing concrete dynamic behaviour and dynamic failure of concrete structures", *DYMAT Journal*, Vol. **2**, N° 1, March, pp. 69–77, (1995).

3 P. Rossi y F. Toutlemonde, "Effet de vitesse dans le comportement en traction du béton. Descripcion des mécanismes physiques", *Bull. Liaison Laboratoire Central des Ponts et Chaussées*, Paris, France, Vol. **193**, Sept.-Oct., ref. 3844, (1994).

3 J. Sercombe, J.F.-Ulm y F. Toutlemonde, "Viscous hardening plasticity for concrete in high rate dynamics", *J. Engng. Mech.*, ASCE, Vol. **124**, N° 9, September 1998, pp. 1050–1057, (1998).

4 Comité Euro-International du Beton, CEB-FIP Model Code 1990, Thomas Telford, London.

5 L.J. Malvar, J.E. Crawford, J.W. Wesevich y Don Simons, "A plasticity concrete material model for DYNA3D", *Int. J. Impact Engng.*, Vol. **19**, N° 9-10, pp. 847–873, (1997).

6 J.J. López Cela, "Analysis of reinforced concrete structures subjected ti dynamic loads with a viscoplastic Drucker-Prager model", Elsevier Science Inc., "*Applied mathematical modelling*", pp. 495–515, (1998).

7 J. Sercombe y J.F.-Ulm, "Viscous hardening plasticity for concrete in high rate dynamics", "*Computational plasticity, fundamentals and applications*", D.R.J. Owen, Oñate y E. Hinton (Eds.), CIMNE, Barcelona, pp. 1556–1561, (1997).

8 J.W. Ju, "On energy-based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modeling and computational aspects", *Int. Jour. Solids & Structures*, Vol. **25**, N° 7, pp. 803–833, (1989).

9 J.C. Simo y J.W. Ju, "Strain and stress based continuum damage models. Part I: Formulation", *Int. Jour. Solids & Structures*, Vol. **23** N° 7, pp. 821–840, (1987a).

10 L.J. Sluys, "Wave propagation, localisation and dispersion in strain softening solids", Tesis doctoral, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, (1992).

11 J.F. Dubé y G. Pijudier Cabot, "Rate dependent damage model for concrete in dynamics", *J. Engng. Mech.*, ASCE, Vol. **122**, N° 10, pp. 939–947, (1996).

12 C. Comi y Perego, "On visco-damage models for concrete at high strain rates", "*Computational plasticity, fundamentals and applications*", D.R.J. Owen, Oñate y E. Hinton (Eds.), CIMNE, pp. 1551–1555, Barcelona, (1997).

13 B.M. Luccioni, "Formulación de un modelo constitutivo para materiales ortótropos", Tesis presentada como requerimiento parcial para la obtención del grado académico de Doctor en Ingeniería, Universidad Nacional de Tucumán, (1993).

14 B. Luccioni, S. Oller y R. Danesi, "Coupled plastic-damaged model", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **129**, pp. 81–89, (1996).

15 P. Perzyna, "Fundamental problems in viscoplasticity", "*Recent advances in applied mechanics*", Academic Press, New York, N.Y, (1966).

16 J. Lubliner, "*Plasticity theory*", Mc.Millan Publishing, USA, New York, (1990).

17 S. Oller, J. Oliver, M. Cervera y E. Oñate, "Simulación de procesos de localización en mecánica de sólidos, mediante un modelo plástico", *Memorias del I Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, SEMNI, pp. 423–431, (1990).

18 L.M. Kachanov, "Time of the rupture process under creep conditions", IVZ Akad. Nauk SSSR, Otd. Tech. Nauk, Vol. **8**, (1958).

19 L.E. Malvern, "*Introduction to the mechanics of continuous medium*", Prentice Hall, USA, (1969).

20 M. Luege, "Simulación del comportamiento de materiales bajo cargas explosivas", Tesis presentada como requerimiento parcial para la obtención del grado académico de Magister en Ingeniería, Universidad Nacional de Tucumán, (1999).

21 S. Hartmann, G. Lührs y P. Haupt, "An efficient stress algorithm with applications in viscoplasticity and plasticity", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **40**, pp. 991–1013, (1997).