FORMA GENERAL DEL ESTADO QUE PRODUCE LAS CORRELACIONES DE BELL.

Alejandro A. Hnilo[1].

Centro de Investigaciones en Laseres y Aplicaciones (CEILAP), (CITEFA-CONICET-UNSAM).
Zufriategui 4380, (1603) Villa Martelli, Argentina.
e-mail: ahnilo@citefa.gov.ar

La característica no-clásica de los *entangled states* (de fotones, en la variable polarización) se manifiesta en la práctica a través de la curva de coincidencias en función del ángulo de los analizadores. Los *entangled states* son estados puros y, como tales, son muy frágiles ante perturbaciones. Por estos motivos, es de interés práctico saber si la misma curva de correlaciones puede obtenerse mediante un estado mezcla. Se realiza el cálculo explícito de la expresión de la matriz densidad general y se concluye que los estados de Bell son los únicos que producen la correlación deseada. Sin embargo, si se acepta la hipótesis (no ortodoxa) de valores de probabilidad fuera del rango [0,1], se obtiene una familia de estados mezcla que reproducen la curva y tienen además algunas propiedades interesantes, aunque no existe método conocido para prepararlos.

In the practice, the non classical feature of the entangled states (of photons in the polarization variable) is observed in the shape of the curve that relates the number of coincidences as a function of the angle between the analyzers. The entangled states are pure states and, in consequence, they are extremely fragile against perturbations. For this reason, it is of practical interest knowing if a curve of coincidences of the same shape can be obtained from a mixed state. The calculation of the form of the most general density matrix that produces the desired correlation curve is carried out in an explicit way. It is concluded that the Bell's states are the only ones that can produce the desired correlation curve. However, if the (non orthodox) hypothesis of probability values outside the range [0,1] is accepted, a family of mixed states is obtained, which is able to produce the desired curve. They have, in addition, some interesting properties, but there is no known method to prepare them.

Los estados de Bell:

$$|\psi^{\pm}\rangle = (1/\sqrt{2})\,[\,|x_a\rangle\otimes|x_b\rangle \pm |y_a\rangle\otimes|y_b\rangle] \qquad (1)$$

$$|\phi^{\pm}\rangle = (1/\sqrt{2})\,[\,|x_a\rangle\otimes|y_b\rangle \pm |y_a\rangle\otimes|x_b\rangle] \qquad (2)$$

producen correlaciones (entre mediciones realizadas sobre las partículas "a" and "b") mayores que las permitidas por las nociones intuitivas de localidad y objetividad[(1)]. En el caso en que las partículas son fotones y la variable es la polarización, la probabilidad de una doble detección detrás de sendos polarizadores orientados según ángulos *a* y *b* es:

$$P^{++} = \tfrac{1}{2}\cos^2(a-b) \qquad (3)$$

para el estado de Bell simétrico $|\psi^{+}\rangle$. La curva (3) pasa por encima del límite clásico de máxima correlación para $(a-b)$ entre 0 y $\pi/4$, y debajo del límite clásico de mínima correlación para $(a-b)$ entre $\pi/4$ y $\pi/2$. Como consecuencia de esta característica, después de una medición sobre el fotón "a", la información obtenida acerca del estado del fotón "b" es mayor que el límite clásico[(2)]. Este hecho está en la raíz de las aplicaciones propuestas para los estados de Bell en *quantum criptography* [(3)] y *dense coding*[(4)].
Los estados puros son más frágiles que las mezclas ante ruido proveniente del entorno, por lo que sería de interés práctico poder reproducir la correlación (3) con estados mezcla. El propósito de este breve trabajo es simplemente buscar la expresión del estado *más general posible* (ya sea puro o mezcla) capaz de reproducir (3). Por supuesto, como (3) viola las desigualdades de Bell, sabemos desde el principio que tal estado general deberá tener *alguna* propiedad "no clásica".
La expresión general se obtiene de manera algo laboriosa pero simple, a través del cálculo explícito de $\mathrm{Tr}(\rho Q^{++})$, donde ρ es la matriz densidad desconocida y Q^{++} es el operador de proyección sobre las polarizaciones *a* y *b*, escritos en la base natural para estados enganchados, en el orden: $\{|x_a,x_b\rangle, |x_a,y_b\rangle, |y_a,x_b\rangle, |y_a,y_b\rangle\}$ (donde $|x_a,x_b\rangle \equiv |x_a\rangle\otimes|x_b\rangle$, etc.). El resultado se iguala a (3), agrupado en coeficientes de funciones trigonométricas ortogonales (de argumentos *a-b* y *a+b*) y se obtienen las condiciones sobre los elementos de la matriz densidad. La notación para éstos surge de la expresión general:

$$\begin{aligned}\rho &= \Sigma\, w_m\, \Sigma \alpha_{ijm}\, \alpha_{klm}^{*}\, |i_a j_b\rangle\langle k_a l_b| \equiv \\ &\equiv C_{ikjl}\, |i_a j_b\rangle\langle k_a l_b| \end{aligned} \qquad (4)$$

así que los índices $\{i,k\}$ toman los valores $\{x_a,y_a\}$ y los $\{j,l\}$ los valores $\{x_b,y_b\}$. Es más fácil entender la notación mostrando la matriz en forma explícita:

[1] Inv.Adjunto (sin Dir.) CONICET.

$$\begin{pmatrix} Cxxxx & Cxxxy & Cxyxx & Cxyxy \\ Cxxyx & Cxxyy & Cxyyx & Cxyyy \\ Cyxxx & Cyxxy & Cyyxx & Cyyxy \\ Cyxyx & Cyxyy & Cyyyx & Cyyyy \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Con esta notación, la forma más general posible de la matriz que reproduce la ec.(3) resulta ser:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} ½ & is_1 & is_1 & r_3+is_3 \\ -is_1 & 0 & ½-r_3 & is_2 \\ -is_1 & ½-r_3 & 0 & is_2 \\ r_3-is_3 & -is_2 & -is_2 & ½ \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Los coeficientes w_m son la proporción, o la probabilidad de aparición, del estado m en la mezcla. Están restringidos a las condiciones $\Sigma w_m = 1$ y $w_m>0$. La primera condición normaliza la traza, y la segunda asegura que todos los autovalores de Γ son positivos. Para obtener la expresión (6) fue necesario usar la primera, pero no la segunda de estas condiciones, que debe agregarse ahora. Nótese que la expresión (6) requiere que los elementos centrales de la diagonal sean cero, p.ej.:

$$C_{xxyy} = \Sigma\, w_m\, \alpha_{xym}\, \alpha_{xym}{}^* = \Sigma\, w_m\, |\alpha_{xym}|^2 = 0 \qquad (7)$$

Si todos los $w_m>0$, la ec.(7) puede cumplirse sólo si todos los α_{xym} son cero. Entonces los elementos anti-diagonales de (6) como, p.ej.:

$$C_{xyyx} = \Sigma\, w_m\, \alpha_{xym}\, \alpha_{yxm}{}^* = ½ - r_3 \qquad (8)$$

son también cero, lo que implica que $r_3 = ½$. En este caso, los autovalores de Γ son las raíces del polinomio:

$$x.\{x^3 - x^2 - x.[2.(s_1{}^2 + s_2{}^2) + s_3{}^2\,] + (s_1 + s_2)^2\,\} = 0 \qquad (9)$$

que tiene raíces no negativas sólo si todos los $s_i = 0$, y entonces la matriz (6) queda de la forma:

$$\begin{pmatrix} ½ & 0 & 0 & ½ \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ ½ & 0 & 0 & ½ \end{pmatrix}$$

que es la matriz densidad de $|\psi^+>$. Un resultado análogo se obtiene para los otros tres estados de Bell. En otras palabras, los únicos estados (ya sea puros o mezcla) que son capaces de reproducir la curva de correlación deseada son los estados de Bell. En principio, este resultado cierra la búsqueda de estados mezcla alternativos.

Sin embargo, hay cierta base para especular con una ampliación de las expresiones aceptables para la matriz densidad. Se sabía desde el principio que los estados buscados debían tener *alguna* propiedad no clásica, porque de otro modo sería imposible que violaran las desigualdades de Bell. Una de las maneras en que es posible reproducir "clásicamente" la curva de correlación deseada es mediante el uso de *probabilidades extendidas*, es decir, distribuciones con valores de probabilidad fuera del rango [0,1]. La hipótesis parece extraña a primera vista, pero se ha señalado que las probabilidades extendidas son una propiedad esencial de la mecánica cuántica, inextricablemente relacionada con las propiedades más conocidas de "indefinición contrafactual" y "no separabilidad", y que debe ser aclarada independientemente del problema que nos ocupa aquí. La Referencia 5 es un trabajo de revista sobre este tema.

Los estudios anteriores sobre el tema permiten abrir cierto espacio para especular con una relajación de la condición $1>w_m>0$, al menos con un espíritu exploratorio. Por otra parte, como la búsqueda es la de la expresión *más general posible* del estado que reproduce (3), no debería descartarse a esta altura la admisibilidad de las probabilidades extendidas, ya que el tema no parece estar cerrado. Se deja de lado por el momento el cómo preparar una mezcla con probabilidades extendidas. Discutir los problemas relacionados con la realización experimental de probabilidades extendidas está mucho más allá de los propósitos de este trabajo.

Si se deja de lado la condición $w_m>0$ los elementos centrales de la diagonal pueden hacerse cero sin forzar a que sean cero también los elementos centrales en la anti-diagonal, y la expresión (6) pasa a ser la forma más general posible del estado que reproduce (3). Como se buscaba, (6) es, en general, un mezcla:

$$\mathrm{Tr}(\Gamma^2) - \mathrm{Tr}^2(\Gamma) = 4.(s_1{}^2 + s_2{}^2) + 2.s_3{}^2 - 4.r_3.(½ - r_3) \qquad (11)$$

Matrices con la forma (6) pueden obtenerse fácilmente como una mezcla, aún de estados que son producto de los estados locales de los fotones, pero esto no contradice el teorema de Bell. La característica no-clásica existe, simplemente ha cambiado de lugar, de la "no localidad" de los estados puros *entangled* ec.(1), al uso de probabilidades extendidas en los coeficientes de la mezcla.

Las matrices extendidas tienen algunas propiedades interesantes. Nótese que la matriz reducida que describe al fotón individual "a" es:

$$\Gamma^a{}_{red} = \begin{pmatrix} ½ & i.(s_1+s_2) \\ -i.(s_1+s_2) & ½ \end{pmatrix}$$

(la matriz para "b" es su conjugada).

Si se pide que cada fotón individual aparezca como no polarizado (como en el caso de los estados de Bell), entonces aparece una condición adicional $s_1+s_2 = 0$. Si en cambio se impone que $s_1+s_2 = ½$, la matriz que describe "a"("b") es la de un fotón circularmente polarizado a izquierda (derecha). Este es un resultado curioso. En los estados de Bell, el estado total es puro, y cada fotón individual está en un estado mezcla (no polarizado). En cambio, aquí una matriz Γ en la que $s_1+s_2 = ½$ corresponde en general a una mezcla, y los fotones individuales están en un estado puro. A primera vista, se podría pensar que aquí está la contradicción que invalida las probabilidades extendidas: hace tiempo fue propuesto un sistema de comunicación a velocidades superiores a la de la luz (FLASH)[6], que es inviable (entre otros motivos) por la imposibilidad básica de amplificar un estado cuántico arbitrario[7]. Como aquí el fotón individual sí estaría en un estado definido, sí sería posible amplificarlo, y la principal objeción contra la propuesta FLASH se desvanecería. Esto llevaría a una contradicción frontal entre las probabilidades extendidas y la teoría de la relatividad. Sin embargo no es así, pues la matriz $\Gamma^{a}{}_{red}$ no lleva información alguna sobre el resultado de la medición (ni siquiera si se ha realizado una medición) sobre el fotón "b", como ya fue señalado hace tiempo[8]. Es, para este propósito, tan inútil como el estado mezcla no polarizado.

En cambio, estos fotones correlacionados con polarización definida podrían tener una ventaja interesante en la transmisión de la correlación a través de fibras ópticas, ya que los efectos (no deseados) de birrefringencia en la fibra son más fáciles de controlar que en el caso de un haz no polarizado.

Finalmente, vale la pena comentar que todos los cálculos que se mostraron se refieren solamente a la correlación entre dos coincidencias "pasó el polarizador", P^{++}. Las otras correlaciones: P^{+-}, P^{-+}, P^{--} no introducen restricciones adicionales en la expresión general de Γ. Es equivalente pedir que la matriz reproduzca una cualquiera de las P^{ij}, o todas ellas a la vez.

En síntesis: desde el punto de vista ortodoxo, los estados (puros) de Bell son los únicos capaces de producir la útil curva de correlación no clásica. Si se acepta la hipótesis de probabilidades extendidas para los coeficientes de la mezcla, se abre una puerta hacia una familia de estados cuya expresión general es la matriz (6) (para la curva ec.(3)). Estos estados (cuya exploración no se ha completado aquí) tendrían algunas ventajas prácticas sobre los estados de Bell.

En mi opinión, este resultado aumenta el interés práctico potencial de la hipótesis de probabilidades extendidas, lo que promueve el estudio de su interpretación y sus consecuencias, y de los eventuales procedimientos de preparación.

Este trabajo fue financiado por el proyecto PIP CONICET 0425/98. Muchas gracias a Alejandro Peuriot por su lectura crítica de la primera versión de este trabajo.

Referencias.

1- J.Clauser y A.Shimony; Rep.Prog.Phys. **41** p.1881 (1978).
2- S.Braunstein y C.Caves; Phys.Rev.Lett. **61**, p.662 (1988).
3- A.Ekert, J.Rarity, P.Tapster y G.Massimo Palma; Phys. Rev. Lett. **69**, p.1293 (1992); también: A.Sergienko, M.Atature, Z.Walton, G.Jaeger, B.Saleh y M.Teich; Phys.Rev.A **60** p.R2622 (1999).
4- C.Bennett y S.Wiesner; Phys.Rev.Lett. **69**, p.2881 (1992).
5- W.Muckenheim, G.Ludwig, C.Dewdney, P.Holland, A.Kyprianidis, J.Vigier, N.Cufaro Petroni, M.Bartlett y E.Jaynes; Phys.Rep. **133** p.337 (1986).
6- N.Herbert; Found. Phys. **12** p.1171 (1982); también P. Bussey; Phys.Lett. **90A** p.9 (1982) y las referencias allí incluídas.
7- W.Wooters y W.Zurek; Nature **299** p.802 (1982).
8- C.Cantrell y M.Scully; Phys.Rep. **43** p.499 (1978).