



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Trabajo de Tesis Doctoral:

***Dispersión inelástica profunda y estructura
hadrónica desde la teoría de cuerdas***

Tesista: *Lic. Nicolás Kovensky*

Director: *Dr. Martín Schvellinger*

Año: 2018

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	V
Introducción	VII
Estructura de la tesis	XI
 I Breve introducción teórica	 1
1. Conceptos básicos sobre la dualidad AdS/CFT	1
1.1. La conjetura de Maldacena	1
1.2. Extensiones de la dualidad AdS/CFT	12
2. Conceptos básicos sobre DIS	17
2.1. Cinemática	17
2.2. Modelo de partones y relaciones de Callan-Gross	21
2.3. Secciones eficaces de dispersión	21
2.4. Relación con la dispersión de Compton	26
2.5. Expansión en producto de operadores de W	30
2.6. La región de Regge	33
 II DIS para blancos escalares: el modelo más simple y sus complicaciones	 37
3. Descripción holográfica del proceso	39
3.1. El modelo <i>hard-wall</i> como caso testigo y el ejemplo del glueball	42
3.2. El proceso de dispersión dual: cinemática	45
3.3. El régimen de $\lambda^{-1/2} \ll x < 1$	46
4. El régimen de x pequeño	51
4.1. Contribuciones simétricas	51
4.2. Contribuciones antisimétricas	60
5. El régimen de x exponencialmente pequeño	71
5.1. Dispersión gravitatoria para energías altas	71
5.2. El Pomerón	75
5.3. DIS en el régimen del Pomerón	82

6. Correcciones no planares	87
6.1. Análisis general de los diagramas a un <i>loop</i>	87
6.2. Espectro y diagrama dominante	90
6.3. Cálculo de las funciones de estructura a un <i>loop</i>	97
6.4. Comentarios sobre los diagramas con más <i>loops</i>	104
 III Aplicaciones y fenomenología	 107
7. Blancos mesónicos	109
7.1. DIS holográfico para mesones	109
7.2. Secciones eficaces y momentos	117
7.3. Correcciones $1/N$	128
7.3.1. Consecuencias fenomenológicas	133
 8. Blancos fermiónicos	 137
8.1. DIS holográfico en el caso de hadrones de espín-1/2	137
8.2. Comparación con los datos experimentales	145
 Conclusiones y trabajo a futuro	 153
 A. Convenciones generales	 157
B. Algunos detalles sobre la dualidad de Maldacena	159
C. DIS holográfico en el gauge axial	167
 Bibliografía	 169

Agradecimientos

AGRADECIMIENTOS PERSONALES

A mis jurados, Guillermo Silva, Norberto Scoccola y Diego Marqués.

A las siguientes personas por diversos comentarios y lecturas con respecto a nuestros trabajos: Prof. S. K. H. Auluck, Prof. José Goity, Prof. Edmund Iancu, Dr. Sebastián Macaluso y Prof. Carlos Núñez.

A los Dres. David Jorjin, Ezequiel Koile y el Lic. Gustavo Michalski quienes son coautores de varios de los trabajos publicados a lo largo de mi doctorado.

Al Instituto de Física La Plata (IFLP-CONICET-UNLP) y Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata (DF-FCE-UNLP), donde esta Tesis fue desarrollada. Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) por la beca doctoral de 5 años que me permitió desarrollar los trabajos de investigación científica presentados en esta Tesis. A la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT) que a través del Fondo para la Investigación Científica y Tecnológica (FONCyT), mediante los Proyectos de Investigación Científica y Tecnológica PICT-2015-1525 y PICT-2017-1647, al CONICET por los proyectos PUE-Búsqueda de Nueva Física y el proyecto CONICET-PIP 0595/13, a la UNLP por el proyecto UNLP-11/X648, que contribuyeron en parte al financiamiento de las investigaciones desarrolladas en este trabajo.

A las siguientes instituciones por estadías de investigación y visitas académicas durante el desarrollo de mi trabajo de Tesis: Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad de Buenos Aires (FCEyN, UBA), Institut de Physique Théorique (CEA Saclay, Francia), Institute for Theoretical Physics (University of Amsterdam, Holanda) y International Center for Theoretical Physics (Trieste, Italia).

Resumen

En este trabajo estudiamos procesos de dispersión de altas energías en teorías de Yang-Mills confinantes en el régimen de acoplamiento fuerte. Para esto, la herramienta principal está dada por la dualidad AdS/CFT, propuesta por Maldacena en [1], que relaciona los observables de la teoría de campos con los de la teoría de supercuerdas en un fondo asintóticamente anti-de Sitter.

Nos concentramos en particular en procesos de dispersión inelástica profunda (DIS), que permiten analizar la estructura interna de los blancos hadrónicos en términos de las funciones de estructura. Para esto, tomamos como punto de partida el modelo construido por Polchinski y Strassler en [2], que analiza el caso de blancos escalares tipo *glueball* en teorías similares a $\mathcal{N} = 4$ SYM en el ultravioleta.

El objetivo de la tesis consiste en extender el modelo original del DIS holográfico para aplicarlo en situaciones más realistas. Para esto, consideramos distintos modelos de Dp -branas con una menor cantidad de supersimetrías que incluyen materia en la representación fundamental del grupo de gauge, permitiendo describir el DIS para blancos mesónicos escalares y vectoriales en términos de la supergravedad. Luego, extendemos esta descripción al régimen en el que es necesario considerar la teoría de cuerdas completa. Estudiamos también las correcciones no planares, interpretadas como correcciones cuánticas en el proceso dual en el interior del AdS. En este contexto estudiamos la no-conmutatividad de los límites $N \rightarrow \infty$ y $q \gg \Lambda$, donde N es el número de colores, q es la virtualidad del fotón absorbido por el hadrón y Λ es la escala IR asociada al fenómeno de confinamiento de color. Finalmente, analizamos las posibles contribuciones a las funciones de estructura antisimétricas y a las que violan la invariancia ante paridad, y aplicamos las técnicas desarrolladas al estudio de los blancos fermiónicos de espín 1/2.

Finalmente, en todos los casos realizamos comparaciones cuantitativas y cualitativas con la fenomenología disponible: los resultados experimentales y los resultados de las simulaciones de *lattice QCD*.

Introducción

La antigua teoría de cuerdas tiene su origen en los años 60 como una propuesta superadora de las teorías cuánticas de campos para describir la física hadrónica, que constituye nuestro principal objeto de estudio. En su momento, la teoría de cuerdas hadrónica se vio rápidamente opacada por el éxito de la cromodinámica cuántica (QCD) basada en el modelo de quarks y gluones y en la teoría de Yang-Mills, cuya propiedad más célebre probablemente sea la de la libertad asintótica, que aparece en el régimen ultra violeta (UV). La contracara viene dada por el fenómeno de confinamiento de los quarks que rige la física en las escalas infrarrojas (IR). En este régimen aparecen los hadrones como partículas efectivas que constituyen singletes de color: los bariones, que en una primera aproximación pueden pensarse como formados por tres quarks, y los mesones, descritos por un par quark-antiquark. En cierto sentido, podemos decir que la fase confinante de QCD permite desarrollar una descripción efectiva en términos de objetos extendidos similares a las cuerdas, dados por los tubos de flujo de color o *flux tubes*, en inglés. Más aún, en un cierto rango de energías conocido como *régimen de Regge* los experimentos hadrónicos indican la presencia de partículas efectivas con masas y espines cada vez mayores que se acomodan aproximadamente a lo largo de una recta con pendiente positiva, la *trayectoria de Regge*¹. Este comportamiento es difícil de recuperar a partir de la construcción perturbativa de las teorías de campos, pero resulta intuitivo en el contexto de la teoría de cuerdas, donde las fluctuaciones pueden tener espines arbitrariamente grandes. Sin embargo, originalmente no se encontró una manera cuantitativa de plasmar esta intuición. Las cuerdas no parecían describir correctamente los resultados de los experimentos hadrónicos, al menos en su versión más simple, es decir, construidas perturbativamente sobre un vacío caracterizado por un espacio-tiempo plano.

Las décadas de los '80 y '90 estuvieron marcadas por un resurgimiento de la teoría de supercuerdas, pensada ahora como candidata a una *teoría del todo* gracias a su espectacular capacidad para describir de manera consistente una versión cuántica de la interacción gravitatoria. La primera de estas *revoluciones* de cuerdas se dio entre 1984 y 1986, apoyada en el descubrimiento de las cancelaciones de anomalías mediante el mecanismo de Green-Schwarz, las versiones supersimétricas de las cuerdas y las teorías heteróticas con sus compactificaciones de Calabi-Yau. La segunda, a su vez, sucedió entre 1994 y 1997 gracias al descubrimiento de las D-branas por Polchinski y al de las múltiples dualidades entre los distintos tipos de cuerdas, y culminó con la propuesta de una teoría de objetos extendidos unificadora: la teoría M ².

En términos generales, la física de los hadrones y las teorías de cuerdas parecían estar evolucionando por caminos disconexos hasta que en 1997 Maldacena conjeturó la dualidad AdS/CFT. Una forma breve de expresar esta propuesta es decir que las teorías de supercuerdas con fondos de curvatura constante negativa tipo anti-de Sitter (AdS) y las teorías de campos de gauge no abelianos con simetría conforme constituyen simplemente dos formalismos matemáticos distintos que describen exactamente la misma física. Los argumentos principales provienen, por un lado, del

¹Repasaremos algunos detalles sobre la física de Regge en el capítulo 2.

²Al día de hoy esta atractiva propuesta no ha sido concretada satisfactoriamente.

análisis de las simetrías, y por otro, del estudio del límite planar propuesto por 't Hooft, mientras que el concepto de renormalización y su reformulación en términos de una quinta coordenada espacial, debido a Polyakov, también juegan un papel fundamental. De hecho, rápidamente quedó claro que la teoría de campos podía pensarse como definida literalmente en el borde (conforme) plano del espacio-tiempo AdS, dando lugar a una realización de la idea de holografía. Este concepto, que había surgido anteriormente en el contexto de los agujeros negros (y sus horizontes), plantea la posibilidad de que toda la información contenida en el volumen de la teoría gravitatoria pueda pensarse en términos de la física del borde. Esta correspondencia y su potencial para describir fenómenos no perturbativos en un lenguaje fundamentalmente distinto (y complementario) reavivó el objetivo de poder describir QCD en términos de las teorías de cuerdas. Surgieron diversas modificaciones a la dualidad original que permitieron alejarse de los casos estrictamente conformes y disminuir el número de supersimetrías, algunas de las cuales estudiaremos más adelante. También se destacan los modelos de Dp -branas, que permiten por ejemplo describir materia en la representación fundamental. En síntesis, el dual holográfico de QCD parecía estar *a la vuelta de la esquina*. En perspectiva podemos decir que si bien esta esperanza se fue diluyendo, al menos en su versión más literal, la conjetura de Maldacena ha permitido estudiar el confinamiento y los fenómenos no perturbativos desde una óptica profundamente distinta y realmente útil, tanto desde lo conceptual como en términos cuantitativos.

Entre 2001 y 2002 Polchinski y Strassler introdujeron en [2, 3] lo que probablemente constituyen los trabajos fundacionales de una de las líneas de investigación más importantes en este sentido, iniciando un camino que apunta a reconciliar a la teoría de cuerdas con su objetivo original. A diferencia de los intentos originales, el método que los autores propusieron consiste en atacar el mismo problema desde un punto de vista muy distinto, pues toma como punto de partida un vacío tal que la geometría sea asintóticamente AdS. Asimismo, aplicaron este formalismo al estudio de un proceso central en la historia de la física hadrónica, tanto desde el punto de vista teórico como del experimental: la dispersión profundamente inelástica (DIS, por el término en inglés, *Deep Inelastic Scattering*). Presentamos en la figura 1 una representación esquemática de dicho proceso, que describiremos en detalle en el capítulo 2.

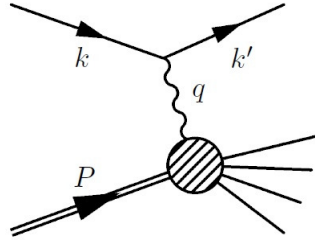


Figura 1: Esquema del proceso de DIS, en el que un leptón interactúa con un hadrón mediante el intercambio de un fotón virtual altamente energético, *rompiéndolo*. De esta manera, el DIS permite estudiar la estructura interna de los hadrones.

La descripción holográfica que obtuvieron Polchinski y Strassler es consistente con los datos parciales que pueden obtenerse directamente en la teoría de campos a partir del análisis basado en la expansión en producto de operadores (OPE), y provee a su vez una imagen intuitiva en términos de la física de las cuerdas en el interior del AdS. Sin embargo, la validez de esta descripción está restringida a la región de acoplamiento fuerte, y a teorías en las que el número de colores N (el rango del grupo de gauge) es infinito, al menos en una primera aproximación.

En el límite $N \rightarrow \infty$, conocido como límite planar, la variable relevante resulta ser el parámetro

de Bjorken x , que toma valores físicos entre 0 y 1 y está relacionado con la energía del proceso en el sistema centro de masa (CM). Más precisamente, el parámetro relevante está dado por la relación entre x y la constante de 't Hooft $\lambda \equiv g_{\text{YM}}^2 N$, siendo g_{YM} la constante de acoplamiento definida tradicionalmente en las teorías de Yang-Mills. La situación es la siguiente:

1. En el rango $\lambda^{-1/2} \ll x < 1$, la descripción efectiva de la teoría de cuerdas para bajas energías dada por la teoría de supergravedad resulta lo suficientemente precisa.
2. En el rango $\exp(-\lambda^{1/2}) \ll x \ll \lambda^{-1/2}$, la energía del proceso se vuelve comparable con la escala característica de las cuerdas, asociada a la tensión y determinada por $\alpha' = l_s^2$, con l_s la longitud característica de las cuerdas. Como veremos, afortunadamente la interacción tiene asociada una escala de longitud mucho más pequeña que la curvatura de AdS, por lo que podemos utilizar el formalismo desarrollado para las interacciones entre cuerdas en espacio plano. En este régimen entramos en contacto con la física de Regge.
3. En el rango $x \sim \exp(-\lambda^{1/2})$, es decir, para valores extremadamente pequeños del parámetro de Bjorken, la interacción ya no puede considerarse como efectivamente local debido a un efecto difusivo en la dirección radial. Entonces, resulta necesario introducir el formalismo del Pomerón: una partícula efectiva que comparte ciertas características con un gravitón, pero a la vez tiene en cuenta la presencia de una torre de estados excitados de la cuerda.

Al relajar la condición sobre el número de colores y permitir que N tome valores finitos (aunque siempre grandes) cobra importancia la competencia entre la expansión en potencias de $1/N$ y el hecho de que en el contexto del DIS siempre pensamos en que la virtualidad q del fotón es grande en comparación con la masa en reposo del hadrón, $P \sim \Lambda$. Resulta interesante entender por qué estos límites no conmutan, y cuáles son las consecuencias a nivel fenomenológico. Desde el punto de vista holográfico, en este contexto es necesario comenzar a incluir las correcciones cuánticas en el proceso dual. Analizaremos todos estos regímenes en detalle en el cuerpo de la tesis.

A partir de [2] se han desarrollado una enorme cantidad de trabajos cuyo objetivo consiste en profundizar esta propuesta inicial, ya sea incluyendo nuevos regímenes paramétricos de gran importancia conceptual, expandiendo el rango de modelos en los que se pueden aplicar este tipo de técnicas (en general apuntando a modelos cada vez más realistas) o incrementando la precisión en las comparaciones cualitativas y cuantitativas con los datos experimentales, los modelos fenomenológicos y las simulaciones numéricas (*lattice QCD*). Este es el marco en el que debe entenderse el proyecto de investigación del que forma parte esta tesis.

En términos generales, el objetivo consistió en estudiar y extender en la mayor medida posible el modelo y las técnicas presentadas en [2] para el análisis de modelos y aspectos del proceso de DIS conectados más directamente con la fenomenología disponible. Para esto, decidimos encarar tres proyectos distintos, aunque íntimamente conectados entre sí. A continuación presentamos brevemente el enforque de estos proyectos:

- En primer lugar decidimos estudiar el DIS para blancos mesónicos en la representación fundamental del grupo de gauge a partir de los modelos basados en arreglos de branas. Mostramos cómo describir el proceso tanto en el régimen de supergravedad³ como en el que se vuelve necesario considerar la teoría de cuerdas completa, donde los mesones están asociados a fluctuaciones de cuerdas abiertas. Obtuvimos la totalidad de las funciones de estructura en todo el rango paramétrico, con resultados análogos para distintos modelos de branas, lo que

³Cabe aclarar que esta parte del proyecto en realidad se inició previamente al comienzo de este doctorado a través de las publicaciones [4, 5].

parece apuntar hacia la validez universal de las conclusiones a las que llegamos en cualquier descripción de los mesones basada en la correspondencia holográfica. Finalmente, calculamos la sección eficaz diferencial del DIS y los momentos asociados a las funciones de estructura, y comparamos los resultados con la fenomenología disponible.

- En segundo lugar, estudiamos las primeras correcciones en la expansión en serie de potencias de $1/N$ tanto en el modelo original (en el caso de prueba, con blancos escalares) como en uno de los modelos de branas, incluyendo los mesones escalares y vectoriales más livianos. Demostremos la no conmutatividad de los límites $N \rightarrow \infty$ y $q \rightarrow \infty$ en estos ejemplos, concluyendo que esta *corrección* en realidad no necesariamente lo es: existe una región paramétrica en la que realmente produce la contribución dominante. También analizamos la consecuencia de esta afirmación en el contexto de la comparación con la fenomenología descripta en el punto anterior, encontrando en todos los casos una mejora sustancial en los ajustes realizados.
- En tercer lugar, estudiamos la posibilidad de que aparezcan contribuciones no despreciables a las funciones de estructura antisimétricas o a las que violan la invariancia ante paridad, como puede suceder en el DIS para la teoría electro-débil. Nuevamente comenzamos analizando el caso base del blanco escalar, para luego extender los resultados a blancos de spin-1/2. Por último, mostramos que los resultados obtenidos permiten describir satisfactoriamente parte de los resultados experimentales asociados a blancos protónicos, al menos en el régimen del Pomerón.

Las publicaciones realizadas junto con mi director, el Prof. Dr. Martín Schvellinger (MS), y mis co-autores Ezequiel Koile, David Jorrín y Gustavo Michalski en el marco de la tesis y en el contexto de cada uno de estos proyectos son las siguientes:

- E. Koile, N. Kovensky y M. Schvellinger, “Hadron structure functions at small x from string theory,”
JHEP **1505** (2015) 001 doi:10.1007/JHEP05(2015)001 [arXiv:1412.6509 [hep-th]]. [6].
- E. Koile, N. Kovensky y M. Schvellinger, “Deep inelastic scattering cross sections from the gauge/string duality,”
JHEP **1512** (2015) 009 doi:10.1007/JHEP12(2015)009 [arXiv:1507.07942 [hep-th]]. [7].
- D. Jorrin, N. Kovensky y M. Schvellinger, “Towards $1/N$ corrections to deep inelastic scattering from the gauge/gravity duality,”
JHEP **1604** (2016) 113 doi:10.1007/JHEP04(2016)113 [arXiv:1601.01627 [hep-th]]. [8].
- D. Jorrin, N. Kovensky y M. Schvellinger, “Deep inelastic scattering off scalar mesons in the $1/N$ expansion from the D3D7-brane system,”
JHEP **1612** (2016) 003 doi:10.1007/JHEP12(2016)003 [arXiv:1609.01202 [hep-th]]. [9].
- N. Kovensky, G. Michalski y M. Schvellinger, “DIS off glueballs from string theory: the role of the chiral anomaly and the Chern-Simons term,”
JHEP **1804** (2018) 118 doi:10.1007/JHEP04(2018)118 [arXiv:1711.06171 [hep-th]]. [10].
- N. Kovensky, G. Michalski and M. Schvellinger, “Deep inelastic scattering from polarized spin-1/2 hadrons at low x from string theory,”
JHEP **1810** (2018) 084 doi:10.1007/JHEP10(2018)084 [arXiv:1807.11540 [hep-th]]. [11].

- N. Kovensky, G. Michalski and M. Schvellinger, “ $1/N$ corrections to F_1 and F_2 structure functions of vector mesons from holography,” arXiv:1809.10515 [hep-th]. [12]

Los autores están presentados en orden alfabético. Todos estos artículos fueron publicados en la revista especializada *Journal of High Energy Physics* (JHEP), exceptuando el último que se encuentra enviado. También pueden encontrarse en el repositorio de acceso libre *ArXiv.org*.

Estructura de la tesis

A continuación presentamos la estructura general de la tesis, detallando en particular dónde están presentados los resultados originales.

La parte I constituye la introducción teórica a los objetos de estudio y las técnicas utilizadas en este trabajo. En el capítulo 1 introducimos brevemente la dualidad AdS/CFT, mientras que en el capítulo 2 describimos el DIS y repasamos los principales resultados que se obtienen a partir del tratamiento perturbativo en la teoría cuántica de campos para este proceso. Este capítulo contiene parte del desarrollo original presentado en [7].

La parte II está dedicada a la descripción holográfica dual del DIS. Nos concentramos en el caso más simple: el DIS para blancos escalares, y lo describimos detalladamente. Este caso base es poco realista debido a la inexistencia de hadrones escalares (los estados tipo glueball siguen siendo, por ahora, una conjetura, ya que no han sido observados, aunque desde las simulaciones agrupadas generalmente bajo el nombre de *lattice QCD* existe una evidencia muy importante en favor de su existencia). Sin embargo, nos permite introducir todos los conceptos fundamentales que estudiamos en los casos posteriores sin tener que lidiar con complicaciones que podrían oscurecer la interpretación física de los fenómenos relevantes en cada régimen, entorpeciendo la lectura. En el capítulo 3 describimos los aspectos básicos del modelo dual propuesto por Polchinski y Strassler en [2] y analizamos brevemente la descripción que se obtiene a partir de la aproximación de supergravedad. En los capítulos 4 y 5 analizamos las regiones en las que es necesario considerar los estados excitados de cuerdas. En un primer momento, el proceso resulta ser local en términos efectivos, situación descrita en el capítulo 4. En una segunda instancia, un proceso difusivo indica que esta aproximación deja de ser válida y resulta necesario introducir el formalismo del Pomeron [13], situación que estudiamos en el capítulo 5. En ambos capítulos, las secciones relacionados con las contribuciones a la función de estructura F_3 (que pertenece a la parte antisimétrica del tensor hadrónico) están basadas en los aportes originales publicados en [10]. Por último, en el capítulo 6 analizamos las primeras correcciones no planares y la competencia entre los límites de N y q grandes, describiendo los resultados originales de la referencia [8].

La parte III contiene las extensiones a los blancos más realistas y las comparaciones con la fenomenología disponible, tanto a partir de datos experimentales como de simulaciones numéricas. En el capítulo 7 nos concentramos en la utilización de los modelos de branas para describir los blancos mesónicos, para los que analizamos las acciones efectivas provenientes de teoría de cuerdas en diversos modelos, las secciones eficaces [7] y las correcciones en la expansión en potencias de $1/N$. Estos desarrollos fueron presentados en [6], [7] y [9], respectivamente. En el capítulo 8, en cambio, estudiamos el caso de los blancos de spin-1/2, concentrándonos en la física de Regge. En este caso seguimos el tratamiento presentado en [11].

Finalmente, en la parte IV esbozamos nuestras conclusiones junto con algunos comentarios sobre el trabajo a futuro y las preguntas abiertas. Además, incluimos algunos apéndices con ciertos detalles sobre las convenciones utilizadas en la tesis y los cálculos expuestos en el cuerpo de la misma.

Concluimos esta introducción presentando en la figura 2 un esquema del flujo de información entre las distintas partes y capítulos de la tesis cuyo objetivo es el de facilitar la lectura.

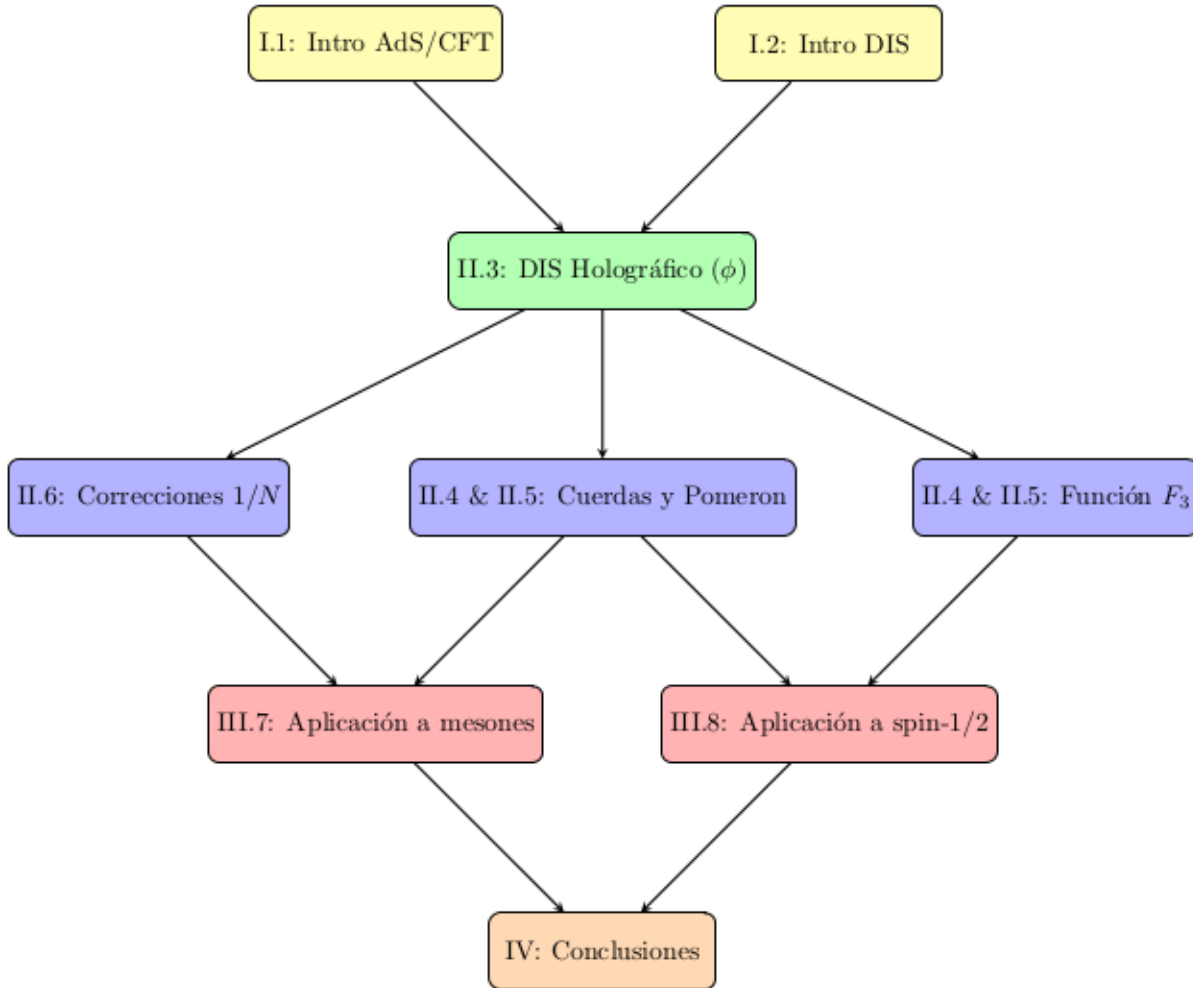


Figura 2: Esquema de lectura de la tesis.

Parte I

Breve introducción teórica

Capítulo 1

Conceptos básicos sobre la dualidad AdS/CFT

Este capítulo está dedicado a introducir los conceptos fundamentales que constituyen a la dualidad AdS/CFT, la herramienta esencial en esta tesis a la hora de estudiar los procesos de dispersión profundamente inelástica a través de la teoría de cuerdas.

La correspondencia entre teorías cuánticas de campos y teorías de cuerdas fue propuesta originalmente hace unos veinte años por Maldacena en [1], y luego por Gubser, Klebanov y Polyakov y Witten en [14, 15]. A pesar de la enorme cantidad de cálculos que apoyan su validez en una infinidad de casos particulares, al día de hoy esta conjetura aún no ha sido demostrada rigurosamente.

Existen en la literatura una cantidad considerable de libros, notas y tesis que introducen y describen la dualidad AdS/CFT en mayor o menor detalle y en base a diversas orientaciones en las nos hemos basado para abordar y desarrollar este tópico. Algunos ejemplos son [16-18], mientras que en [19, 20] también se pueden encontrar algunos comentarios importantes para aplicaciones similares a las que realizamos en este trabajo. No es nuestro objetivo proveer una nueva referencia bibliográfica, sino simplemente repasar algunos conceptos básicos para motivar nuestro enfoque y presentar algunos argumentos que subyacen a las técnicas holográficas de las que haremos uso en la parte principal de la tesis.

1.1. La conjetura de Maldacena

En 1997, Maldacena propuso en [1] una identificación entre dos teorías físicas en principio muy distintas desde el punto de vista del lenguaje matemático utilizado hasta el momento para formularlas. La primera es una teoría cuántica de campos conformes en cuatro dimensiones conocida bajo el nombre de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills (SYM) con grupo de gauge $SU(N)$. Esta teoría de campos no es un ejemplo como cualquier otro: se trata de uno de los casos con mayor cantidad de simetrías y propiedades especiales, cuya presencia ha permitido desarrollar una gran cantidad de técnicas para calcular con una precisión sin precedentes muchos de sus principales observables en diversos regímenes, incluyendo situaciones en las que la expansión perturbativa deja de ser válida¹. La segunda teoría involucrada en la dualidad viene dada por una teoría de cuerdas del tipo IIB construida sobre la base de una solución clásica caracterizada por una geometría espacio-temporal del tipo $AdS_5 \times S^5$, junto con la presencia de un flujo de Ramond-Ramond (R-R) que *infla* esta cinco-esfera.

¹De hecho, desde entonces algunos autores sugieren la posibilidad de resolver $\mathcal{N} = 4$ SYM de manera exacta, basándose principalmente en argumentos de integrabilidad en el límite planar.

El trabajo de Maldacena está basado en dos ideas que ya habían sido sugeridas previamente en la literatura: la posibilidad de formular ciertas teorías de campos en base a variables extendidas y en un cierto límite paramétrico, propuesta por 't Hooft [21], y el principio holográfico, surgido en el seno de la física de agujeros negros y relacionado con la posibilidad de codificar toda la información física contenida en un cierto volumen directamente en términos de variables relacionadas con la superficie que define el horizonte de eventos del mismo. Las particularidades de los espacios exacta o asintóticamente anti-de Sitter también juegan un papel fundamental en esta propuesta en relación a la identificación de las simetrías de ambas teorías. En las siguientes secciones describimos brevemente estas ideas basándonos fuertemente en el enfoque desarrollado en [19, 22].

El límite de 't Hooft

Consideremos una teoría de Yang-Mills con grupo de gauge $SU(N)$, en la que por ahora simplemente consideramos los grados de libertad asociados a los campos de gauge, es decir a las excitaciones bosónicas $A_\mu = A_\mu^a T^a$, donde $\mu = 0, \dots, 3$ es un índice espacio-tiempo, y $a = 1, \dots, N^2 - 1$ etiqueta a los generadores del álgebra de Lie de $SU(N)$. Cuando el número de colores es mayor a uno la teoría se vuelve no abeliana: en lugar de los fotones estamos en presencia de gluones, que pueden interactuar entre sí. El ejemplo más famoso es el de QCD, el caso $N = 3$. Este tipo de teorías se formulan a partir de una acción determinada por la simetría de gauge $S_{YM} = (4g_{YM}^2)^{-1} \int d^4x \text{Tr} F^2$ con $F \equiv dA + A \wedge A$, donde si fijamos el número de colores el único parámetro libre es el acoplamiento g_{YM} , que mide la intensidad de las autointeracciones del campo de gauge.

La acción del grupo de renormalización sobre la teoría indica que el parámetro g_{YM} no es constante, sino que depende de la escala de energía de observación, μ . Esta dependencia está caracterizada por la función β , que toma la forma²

$$\beta(g_{YM}) \equiv \frac{d g_{YM}}{d \log \mu} = -\frac{g_{YM}^3}{(4\pi)^2} \frac{11}{3} N + \mathcal{O}(g_{YM}^5). \quad (1.1)$$

Esta ecuación es sumamente interesante: el signo negativo indica que el acoplamiento se hace cada vez más débil al ir a energías más altas. Como consecuencia obtenemos la famosa propiedad conocida como *libertad asintótica*: en el límite UV, la teoría se vuelve no interactuante. Este resultado se mantiene para QCD, que incluye a los quarks, campos de materia fermiónica en la representación fundamental de $SU(N)$. En este régimen, los quarks y gluones constituyen las excitaciones de bajas energías. Resolviendo (1.1) a primer orden vemos que resulta necesario introducir una escala de referencia que llamaremos M de manera tal que

$$\lambda(\mu) \equiv g_{YM}^2(\mu) N = \lambda_0 \left[1 + \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{11}{3} N \log \left(\frac{\mu^2}{M^2} \right) \right]^{-1}, \quad (1.2)$$

donde hemos definido el acoplamiento de 't Hooft, λ . Podemos ver que el comportamiento de bajas energías de la teoría es muy distinto al que tenemos en el UV. En efecto, en el IR el acoplamiento se vuelve cada vez mayor, hasta que para energías del orden de o menores a $\Lambda_{QCD} \approx 220 \text{ MeV}$ emerge el fenómeno de *confinamiento*, responsable de que no puedan observarse quarks libres en la naturaleza. En este contexto, los quarks y gluones interactúan fuertemente formando partículas efectivas conocidas como *hadrones*, que no pueden describirse directamente a partir de la teoría

²Para realizar el cálculo de la función β es necesario cuantizar la teoría, por ejemplo utilizando el formalismo de fijado de gauge de Fadeev-Popov. Cabe resaltar que el resultado que presentamos en (1.1) corresponden a una teoría de Yang-Mills sin campos de materia.

de Yang-Mills. Cuando en cambio tenemos $\beta = 0$ podemos decir que la ausencia de una escala de energía da lugar a la simetría de las teorías conformes³.

La propuesta de 't Hooft consiste considerar a N como un parámetro adicional, y en analizar qué sucede con este tipo de teorías cuando el número de colores es muy grande, es decir, pensándolas en términos de una expansión en serie de potencias de $1/N$. Para ser más precisos, en esta sección estamos interesados en analizar el límite de 't Hooft, definido por

$$N \rightarrow \infty, \text{ manteniendo } \lambda \text{ fijo.} \quad (1.3)$$

Para ver qué sucede al tomarlo conviene analizar el comportamiento del propagador del campo de gauge con respecto a los índices de color. En la notación tradicional tenemos $\langle A^a A^b \rangle \sim \delta^{ab}$, mientras que en la notación de doble línea definida a partir de los índices matriciales de los generadores T^a según $A_j^i \equiv A^a (T^a)_j^i$, con $i, j = 1, \dots, N$ asociados a las representaciones fundamental y anti-fundamental, respectivamente, vemos que $\langle A_j^i A_l^k \rangle \sim \delta_j^k \delta_l^i - N^{-1} \delta_j^i \delta_l^k$. Para valores grandes de N podemos despreciar el segundo de estos términos. Además, podemos definir las reglas de Feynman asociadas a los vértices, que indican que un diagrama genérico con E propagadores, V vértices y F líneas de color cerradas generará un factor

$$N^{V-E+F} \lambda^{E-V} = N^\chi \lambda^{E-V}. \quad (1.4)$$

En la última expresión hemos definido la característica de Euler $\chi \equiv F + V - E = 2 - 2g$, donde g representa el número de *manijas* del diagrama. La aparición de los parámetros χ y g indican la preponderancia del aspecto topológico. En efecto, a partir de (1.4) vemos que en el límite de 't Hooft las contribuciones dominantes a cualquier proceso estarán generadas por diagramas con el mayor valor posible de χ , es decir, los planares, mientras que los diagramas con un número no nulo de manijas estarán suprimidos por potencias de $1/N^2$. En la figura 3 presentamos algunos ejemplos: cuyos comportamientos están dados por (a) $\sim \lambda N^2$, (b) $\sim \lambda$ y (c) $\sim \lambda^2 N^2$, respectivamente.

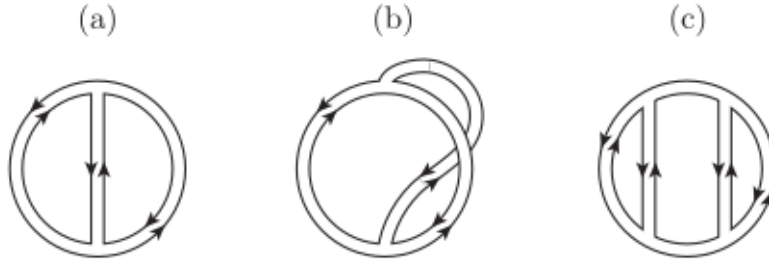


Figura 3: Algunos ejemplos de diagramas de Feynman en teorías de gauge en la representación de doble línea [22].

En conclusión, podemos ordenar la expansión diagramática en una doble serie en potencias de $1/N^2$ y λ , donde la principal contribución en el régimen $N \rightarrow \infty$ con λ fijo estará dada por la sumatoria de los diagramas planares. Este análisis es válido tanto para la función de partición de la teoría como para los demás observables básicos: los invariantes de gauge dados por las funciones de correlación de operadores \mathcal{O}_i , que escribimos como

³En apariencia, la acción S_{YM} es invariante ante cambios de escala. Sin embargo, esta propiedad no se mantiene a nivel cuántico. Cuando hablamos de teorías conformes nos referimos a los casos en los que la simetría se mantiene incluso a nivel cuántico.

$$\langle \mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_n \rangle \sim \sum_{g=0}^{\infty} \left(\frac{1}{N} \right)^{n+2g-2} F_g(\lambda), \quad (1.5)$$

para ciertas funciones F_g .

La observación esencial de 't Hooft consistió en notar que la expansión que acabamos de escribir es totalmente análoga a la que obtendríamos en una teoría de cuerdas, donde la expansión perturbativa se da en términos de superficies bidimensionales. Esto puede pensarse desde un punto de vista intuitivo: al ir agregando vértices y propagadores, los diagramas de la figura 3 irán *llenándose* hasta generar superficies suaves (variedades diferenciables), situación en la que las cantidades χ y g tienen una generalización natural. Es importante notar que estas superficies no tienen borde, es decir que son cerradas. Llevando esta idea al extremo, observamos que el caso $g = 0$ es topológicamente equivalentes a una esfera S^2 , el caso $g = 1$ se asemeja a un toro T^2 , y así sucesivamente. La manera de concretar esta conexión intuitiva está contenida en (1.5): de alguna manera debemos identificar el parámetro de la teoría de campos que pesa la cantidad de manijas con el que juega un rol similar en una teoría de cuerdas, el acoplamiento g_s . Basados en la ecuación (1.5), tenemos

$$g_s \sim g_{\text{YM}}^2. \quad (1.6)$$

En consecuencia, deberá existir también una relación entre el parámetro restante en ambos formalismos: por un lado, el acoplamiento de 't Hooft λ , y por otro, la escala de longitud característica de la cuerda, α' , que define su tensión $T = (2\pi\alpha')^{-1}$. Veremos en un momento las formas precisas de estas identificaciones. Sin embargo, culminamos esta sección resaltando que más allá de plantear una relación intuitiva entre campos y de cuerdas, el análisis de 't Hooft no permite identificar de manera precisa cuál es la teoría de cuerdas que corresponde a cada teoría de campos en particular. Dado el tipo de superficies que estamos describiendo, lo que podemos afirmar es que buscamos teorías de cuerdas cerradas.

Cuerdas cerradas y cuerdas abiertas

El último comentario de la sección anterior puede parecer sorprendente. En efecto, existe otra relación mucho más intuitiva entre los formalismos de cuerdas y de campos que hasta ahora no hemos nombrado: una teoría de cuerdas abiertas tiene como límite de bajas energías ($\alpha' \rightarrow 0$) alguna teoría de Yang-Mills. Sabemos que en caso de elegir condiciones de borde tipo Dirichlet, los extremos de las cuerdas abiertas están confinados a moverse en ciertas regiones extendidas del espacio-tiempo llamadas D-branas. La dinámica de bajas energías sobre el volumen de mundo de estas D-branas está dada por una teoría de gauge.

Considerando la propuesta de 't Hooft descrita en la sección anterior, vemos que a partir de una misma teoría de campos emergen dos tipos de teorías de cuerdas: las primeras, cerradas, y las segundas, abiertas. Una de las claves para entender la correspondencia AdS/CFT radica en relacionar estos conceptos con la dualidad que relaciona cuerdas abiertas y cuerdas cerradas. Podemos motivar esta relación de manera sencilla recurriendo a un caso particular, esto es, a partir del proceso descrito esquemáticamente en la figura 4. Los rectángulos en la figura 4 representan dos D-branas. Se trata de un ejemplo clásico: el proceso descrito puede entenderse de dos maneras distintas: por un lado, el intercambio de una cuerda cerrada entre una brana y la otra, y por otro, un *loop* realizado por una cuerda abierta extendida entre ambas branas.

Ahora bien, como dijimos la teoría de gauge representa en términos efectivos el límite $\alpha' \rightarrow 0$ de una teoría de cuerdas abiertas. Por lo tanto, es tentador interpretar la propuesta de 't Hooft como una versión de bajas energías de la dualidad entre cuerdas abiertas y cerradas que acabamos de

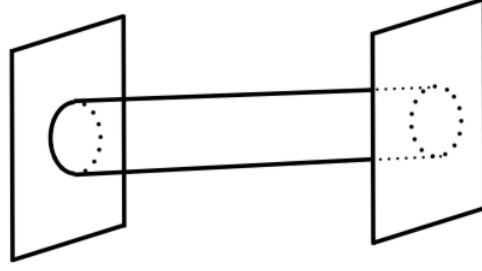


Figura 4: Ejemplo de un proceso de teoría de cuerdas que puede ser interpretado tanto en términos de cuerdas abiertas como en el ámbito de las cuerdas cerradas.

motivar. Esta intuición resulta ser correcta. Para entenderla un tanto más en detalle necesitamos recordar que, en el caso de las cuerdas cerradas, para energías muy por debajo del inverso de la longitud característica $l_s = \sqrt{\alpha'}$ la física puede ser descrita en términos de una teoría gravitatoria, y finalmente analizar cómo reaparece el concepto de D-brana en este contexto.

Branas en supergravedad

Podemos acercarnos paulatinamente a la dualidad propuesta por Maldacena si consideramos una D3-brana plana (sobre la que vivirá alguna teoría de campos efectiva definida en 4d) colocada en un espacio ambiente de diez dimensiones⁴. Esta configuración se caracteriza por mantener la simetría de Lorentz en las cuatro direcciones en las que se extiende la brana, junto con una simetría de rotación en las seis direcciones transversales. Cabe preguntarse entonces si existe una solución gravitatoria con las mismas propiedades.

La respuesta es positiva. Dado que las D3-branas con objetos cargados con respecto a ciertas 4-formas (de R-R), debemos buscar esta solución en el seno de la supergravedad del tipo IIB. De hecho, podemos considerar no una sino N D3-branas superpuestas. Elegimos tomar $N \gg 1$, de manera que la energía del cúmulo de D-branas tenga un efecto apreciable sobre la geometría, generando localmente una curvatura importante. La notación que estamos utilizando no es casual: la teoría sobre las branas tendrá necesariamente una simetría de gauge $SU(N)$, de manera que simplemente estamos usando otro lenguaje para describir el límite planar. Las ecuaciones de Einstein para la métrica acopladas a las de la 4-forma de R-R (cuyo flujo \mathcal{F}_5 debe satisfacer adicionalmente una condición de auto-dualidad) admiten la siguiente solución:

$$ds^2 = \frac{1}{H(r)^{1/2}} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu) + H(r)^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \quad \mathcal{F}_5 = (1 + \star) dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^3 \wedge dH^{-1}, \quad (1.7)$$

donde η es la métrica de Minkowski en cuatro dimensiones, $d\Omega_5$ está asociado a las coordenadas de una esfera S^5 , \star representa el operador estrella de Hodge y la función $H(r)$ está dada por

$$H(r) \equiv 1 + \frac{R^4}{r^4}. \quad (1.8)$$

El parámetro R está determinado por la cantidad N de branas, y en términos de los parámetros de la teoría de cuerdas subyacente puede escribirse como $R \equiv [4\pi g_s \alpha'^2 N]^{1/4}$. Macroscópicamente hablando, esta solución tiene exactamente los mismos números cuánticos que la configuración de

⁴En las teorías de supercuerdas la dimensionalidad crítica en la que la teoría resulta ser consistente corresponde al caso de una dimensión temporal y nueve espaciales.

branas original. En este sentido, puede pensarse que estas branas están situadas en el origen de la coordenada radial r . Teniendo en mente estas dos situaciones (representadas en la figura 5),

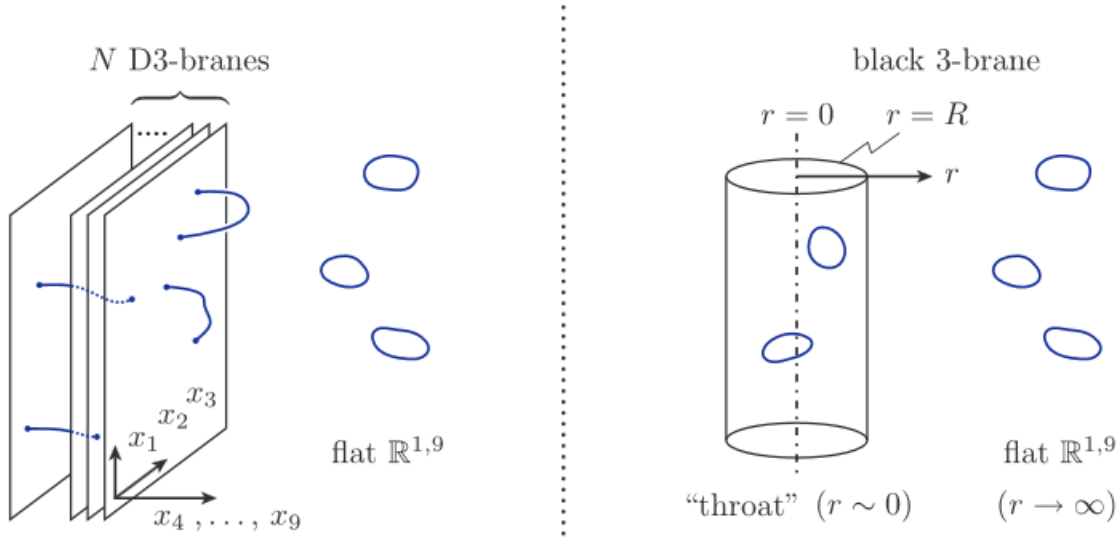


Figura 5: Dos perspectivas distintas de una única configuración: a la izquierda en términos de D3-branas en un espacio plano (cuerdas abiertas) y a la derecha en términos de la solución de supergravedad presentada en (1.7). Figura extraída de la referencia [22].

analicemos ahora las fluctuaciones y los correspondientes límites de bajas energías.

En la primera, sabemos que están los modos de cuerdas abiertas *sobre* las branas, aunque también debemos tener en cuenta la presencia de las cuerdas cerradas que se propagan en todo el espacio (ver figura 5). Además de las interacciones de cuerdas cerradas y abiertas por separado, los modos de las branas y los del interior o *bulk* también están acoplados. Ahora bien, en el límite $\alpha' \rightarrow 0$ no sólo nos deshacemos de las excitaciones masivas sino que también apagamos las interacciones gravitatorias. Por lo tanto, obtenemos dos sistemas desacoplados: por un lado, el de las cuerdas abiertas sobre las branas, y por el otro, un conjunto de modos no masivos de la supergravedad IIB que se propagan libremente en el espacio plano ambiente. Como estamos a bajas energías, la teoría sobre las branas es en términos efectivos una teoría de campos, más precisamente una teoría de Yang-Mills con grupo de gauge $SU(N)$. El análisis de las supersimetrías y demás aspectos indica que se trata de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM⁵, y su formulación perturbativa será válida en el régimen $\lambda = g_{\text{YM}}^2 N \ll 1$.

En la segunda descripción toda la física del sistema está planteada en términos de cuerdas cerradas, pero en un espacio curvo. En este lenguaje podemos ver que tomando los mismos límites también obtenemos dos teorías desacopladas. En efecto, a primera vista tomar $\alpha' \rightarrow 0$ parece llevarnos directamente al régimen de bajas energías. Esto ciertamente es así en la región $r \gg R$ (muy lejos de las branas) donde la definición (1.8) indica que el espacio se vuelve asintóticamente plano. Sin embargo, en la región $r \ll R$ necesitamos proceder con más cuidado ya que una energía E_r medida por un observador en un punto dado del interior está corrida al rojo con respecto a la que mide un observador distante, E_∞ . Más precisamente, la relación está dada por $E_\infty = H^{-1/4}(r)E_r$. En consecuencia, existe una *garganta* en la región donde r toma valores muy pequeños donde las energías pueden ser arbitrariamente altas aún para $\alpha' \rightarrow 0$. Podemos acceder a esta

⁵No será importante para nosotros repasar en detalle la definición de esta teoría. El contenido de campos, el espectro BPS y el estudio de las fases dinámicas, entre otras cosas pueden encontrarse por ejemplo en el capítulo 3 de [18].

región considerando $r \ll R$ y tomando $r, \alpha' \rightarrow 0$ manteniendo la relación r/α' fija. Analizando las ecuaciones (1.7) y (1.8) concluimos que la métrica en esta región conocida como *de horizonte cercano* toma la forma factorizada

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu) + \frac{R^2}{r^2} dr^2 + R^2 d\Omega_5^2, \quad (1.9)$$

de manera que la geometría es $\text{AdS}_5 \times S^5$ donde tanto el AdS como la 5-esfera tienen radio R . Obtenemos entonces una vez más dos tipos de fluctuaciones desacopladas: para $r \gg R$ tenemos la misma teoría gravitatoria libre con fondo plano que antes, mientras que para $r \ll R$ debemos considerar incluir la teoría de supercuerdas completa. Es importante notar que para $\lambda \gg 1$ tenemos $R \gg l_s$, de manera que la aproximación de supergravedad es válida. Finalmente, en el límite $N \rightarrow \infty$ la teoría se vuelve clásica.

Formulación de la dualidad $\text{AdS}_5/\text{CFT}_4$

La conclusión de la sección anterior es la siguiente. Ambas descripciones plantean una situación análoga, en la que en el límite de bajas energías obtenemos dos teorías desacopladas, una de las cuales consiste simplemente en modos no masivos de cuerdas cerradas que se propagan libremente en un vacío sin curvatura. Resulta natural, entonces, identificar la segunda teoría en cada caso:

$$SU(N) \mathcal{N} = 4 \text{ SYM en } D = 4 \quad \equiv \quad \text{Supercuerdas tipo IIB en } \text{AdS}_5 \times S^5. \quad (1.10)$$

Del análisis que acabamos de realizar se deduce que la forma precisa de identificar los parámetros de ambos lados de la dualidad está dada por

$$\frac{R^2}{\alpha'} \equiv \sqrt{\lambda}, \quad 4\pi g_s \equiv g_{\text{YM}}^2. \quad (1.11)$$

En el límite de 't Hooft, donde $N \rightarrow \infty$ y λ está fijo, la CFT se vuelve planar mientras que la teoría IIB se vuelve clásica. Ambas formulaciones describen los mismos grados de libertad en regímenes complementarios: para $\lambda \ll 1$ podemos utilizar la expansión perturbativa de la teoría de campos, mientras que para $\lambda \gg 1$ (siempre con $\lambda \ll N$) disponemos de una descripción gravitatoria en la que las correcciones α' están suprimidas. En este último régimen la situación de las cuerdas es opuesta a la de la teoría de campos: el acoplamiento en la teoría de la hoja de mundo de las cuerdas, dado por α'/R^2 , se vuelve muy pequeño. La afirmación inversa es válida en para $\lambda \ll 1$. En este sentido, decimos que la AdS/CFT es una dualidad débil/fuerte.

La denominada versión fuerte de la dualidad AdS/CFT establece que ambas teorías son equivalentes para cualquier valor de los parámetros λ y N (o bien g_s y α').

Análisis de las simetrías globales

Hasta ahora, nuestros argumentos en favor de la propuesta (1.10) han tenido que ver sobre todo con la simetría de gauge. A continuación describimos la identificación de las simetrías globales⁶ a ambos lados de la dualidad:

1. La teoría de SYM tiene $\mathcal{N} = 4$ supersimetrías, lo que equivale a 16 supercargas de Poincaré. En cambio, la supergravedad IIB es invariante ante la acción de 32 supercargas pero sólo la mitad aniquila el vacío $\text{AdS}_5 \times S^5$ debido a la presencia de las D3-branas. Sin embargo,

⁶En cierto sentido el concepto de simetría global pierde sentido en el contexto de la gravedad cuántica, por lo que en este análisis sólo pensamos en perturbaciones sobre un fondo $\text{AdS}_5 \times S^5$.

también debemos incluir las 16 cargas superconformes, que aparecen naturalmente en la teoría de campos, mientras que en la teoría dual reaparecen en el límite de horizonte cercano.

2. La simetría de Lorentz $SO(1, 3)$ está presente en ambos casos. El único detalle importante es que la métrica de $AdS_5 \times S^5$ no depende de las coordenadas x^μ .
3. Hasta ahora no hemos hecho mucho hincapié en un punto importante: $\mathcal{N} = 4$ SYM es una teoría conforme. Por lo tanto, debemos considerar el grupo conforme $SO(2, 4)$, que contiene al de Lorentz. Del lado gravitatorio, identificamos los generadores correspondientes con los de las isometrías de AdS_5 . Hablaremos un tanto más sobre la geometría AdS más abajo.
4. Habiendo tenido en cuenta las isometrías del AdS_5 , es evidente que también debemos incluir las isometrías de la S^5 . Las mismas forman el grupo de rotaciones en \mathbb{R}^6 , dado por $SO(6)$. Del lado de campos, en cambio, esta simetría bosónica adicional tiene que ver con las rotaciones en el espacio de las supercargas, es decir, la simetría R descrita por $SU(4)$, que resulta ser isomorfo a $SO(6)$.

En ambos casos, el (super)grupo completo de simetrías globales se conoce bajo el nombre de $PSU(2, 2|4)$.

Para concluir, vale la pena destacar una *simetría* adicional que ha sido relevante a la hora de estudiar la dualidad AdS/CFT en el ejemplo que estamos considerando: el grupo de dualidad $SL(2, \mathbb{Z})$. Sin entrar en detalles, podemos decir que tanto en $\mathcal{N} = 4$ SYM como en la teoría IIB en $AdS_5 \times S^5$ puede observarse que la física es invariante ante la acción del generador T , que actúa sobre el ángulo θ de la teoría de SYM, y la de la S -dualidad, bajo la cual

$$g_{YM}^2 \rightarrow \frac{-1}{g_{YM}^2}, \quad (1.12)$$

cambiando acoplamiento débil por acoplamiento fuerte. Del lado de la supergravedad, estos generadores actúan sobre los valores de expectación del dilatón (que define el valor de g_s) y el axiόν. Cabe destacar que esta simetría se mantiene al considerar la teoría de cuerdas completa, donde actúa intercambiando el rol de las cuerdas fundamentales con el de las D1-branas (que son objetos no perturbativos).

La geometría AdS y la simetría conforme

La geometría AdS_5 describe un espacio-tiempo de curvatura constante negativa. La manera más sencilla de construirlo es como una hipersuperficie embebida en un espacio plano $\mathbb{R}^{2,4}$ con una dimensión extra, " X^{-1} ", y definida por la condición

$$-(X^{-1})^2 - (X^0)^2 + (X^1)^2 + \dots + (X^3)^2 = -R^2. \quad (1.13)$$

Este tipo de espacios son soluciones de las ecuaciones de Einstein en presencia de una constante cosmológica negativa que determina el valor del radio. Como dijimos, el grupo de isometrías está dado por $SO(2, 4)$. Técnicamente hablando, las coordenadas utilizadas en (1.9) (donde $r \in [0, \infty)$) no cubren la totalidad del espacio sino únicamente el denominado parche de Poincaré. Aún cuando cualquier punto del borde se encuentra a una distancia infinita de otro ubicado en el interior, las geodésicas nulas pueden conectarlos en un tiempo finito. En contraste, demoran infinitamente en llegar al origen $r = 0$. Las coordenadas de Poincaré, en las que la métrica toma la forma

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2), \quad (1.14)$$

con $z \equiv R^2/r$ permiten, tal vez, entender esta geometría un tanto más intuitivamente ubicando al borde en $z = 0$ y al origen en $z \rightarrow \infty$ ⁷.

Para entender un poco sobre la dinámica en un espacio AdS podemos considerar una perturbación de un campo escalar ϕ de masa m propagándose en AdS_5 . La acción es simplemente la de Klein-Gordon en un espacio curvo. Puede verse que es posible agregar un término de borde tal que el Hamiltoniano esté acotado por debajo para cualquier $m^2 \geq -4/R^2$, de manera que existe un rango de masas *taquiónicas* que no violan unitariedad y resultan perfectamente aceptables [23]. La ecuación de movimiento es la siguiente:

$$[z^5 \partial_z z^{-3} \partial_z - (m^2 R^2 + z^2 k^2)] \phi_k = 0, \quad (1.15)$$

donde hemos expandido en modos de Fourier en las direcciones planas y considerado en particular un modo de momento definido k^μ . Estudiaremos las soluciones exactas en el capítulo 3. Por ahora, nos contentamos con decir que cerca de $z = 0$ podemos despreciar el término proporcional a k^2 y expandir en potencias de z de modo que

$$\phi_k(z \rightarrow 0) \sim z^\Delta, \quad \Delta(\Delta - 4) = m^2 R^2. \quad (1.16)$$

El parámetro Δ puede tomar dos valores:

$$\Delta_\pm \equiv 2 \pm (4 + m^2 R^2), \quad (1.17)$$

con lo que volviendo al espacio de coordenadas tenemos

$$\phi(z \rightarrow 0, x) \sim a(x) z^{\Delta_-} + b(x) z^{\Delta_+}. \quad (1.18)$$

Con qué término nos quedamos depende de las condiciones de contorno. La solución con $\phi \sim z^{\Delta_+}$ corresponde a modos normalizables pues se anulan los términos de borde de la acción evaluada on-shell, mientras que $\phi \sim z^{\Delta_-}$ se asocia con los denominados modos no-normalizables.

Conceptualmente, y apelando a nuestra intuición de mecánica cuántica, podemos decir que AdS_5 representa en algún sentido un pozo cilíndrico infinitamente profundo. Para tener un sistema físicamente bien definido simplemente necesitamos especificar las condiciones de contorno en el borde $z = 0$. Notemos que en $z = 0$, el espacio AdS tiene en realidad lo que se conoce como un borde conforme: se trata de una región plana tipo Minkowski, donde sin embargo no tenemos una métrica inducida a partir de la de AdS_5 en el interior pues las distancias se vuelven divergentes. En este sentido, la información geométrica sólo está definida a menos de escaleos, o, más precisamente, transformaciones conformes. Las observaciones realizadas en este párrafo nos remiten al principio holográfico. En el contexto de la correspondencia de Maldacena podemos pensar que la teoría de campos se encuentra definida exactamente sobre el borde del espacio AdS. Formalizaremos un tanto más esta idea en la sección siguiente.

Identificación de estados y operadores

Pensar en la teoría de campos como definida en el borde del AdS nos invita a exponer un nuevo argumento en favor de la dualidad: la posibilidad de identificar uno a uno los estados presentes en la teoría de supergravedad el espectro de la teoría de SYM.

Nuestra teoría de gauge es además una teoría conforme, donde los estados están a su vez identificados con los operadores disponibles a partir del concepto de cuantización radial. Nos concentramos

⁷En el espacio completo, los puntos $z = \infty$ forman simplemente un horizonte que conecta la región descrita por las coordenadas de Poincaré con el resto. En muchas aplicaciones no es necesario tomar en cuenta la geometría completa.

en los operadores primarios quirales⁸, que están etiquetados en base a su dimensión conforme. Habiendo identificado al grupo conforme con las isometrías de AdS, la descripción del generador de las dilataciones en ambos lenguajes (y cerca del borde) indica que este parámetro debe coincidir con el escaleo en potencias de z : el Δ de nuestro ejemplo escalar. La conexión principal con las partículas de la teoría gravitatoria viene dada por las condiciones de contorno: interpretamos a la inserción de un operador local en el borde como el valor asintótico del modo asociado según

$$\mathcal{O}_\Delta(x) \leftrightarrow \lim_{z \rightarrow 0} z^{-\Delta} \phi(z, x) \quad (1.19)$$

a menos de una constante de normalización. En efecto, esta propuesta satisface trivialmente el hecho de que una redefinición $x \rightarrow \zeta x$ produzca una transformación $\mathcal{O}_\Delta(x) \rightarrow \zeta^\Delta \mathcal{O}_\Delta(\zeta x)$ debido a que $\phi \sim z^\Delta$. Notemos que una misma masa m está asociada a dos posibles dimensiones de escaleo Δ_\pm . Además, reinterpretando la condición de *positividad* sobre m^2 en términos de Δ obtenemos exactamente la cota establecida por el requisito de unitariedad sobre las dimensiones conformes en la teoría conforme.

En el caso particular descrito por Maldacena, podemos identificar uno a uno los operadores primarios de la CFT (o al menos los estados BPS) y sus descendientes con las distintas torres de modos presentes en la supergravedad efectiva en AdS₅ que obtenemos al compactificar la teoría tipo IIB en la S^5 en base a sus propiedades de transformación frente a la acción de los generadores de las simetrías descritas hace algunas páginas. Los casos más sencillos están dados por las corrientes conservadas J^μ y el tensor de energía-momento $T^{\mu\nu}$, asociados a los campos de gauge y al gravitón en el interior, respectivamente.

De hecho, podemos describir brevemente una de las consecuencias importantes de la dualidad. Sabemos que las dimensiones de escaleo de los operadores de una teoría de campos pueden verse modificadas por el proceso de renormalización. El estudio perturbativo de las masas de los estados excitados de cuerdas, intrínsecamente masivos en diez dimensiones, y de los estados que simplemente adquieren una masa de Kaluza-Klein permite obtener el comportamiento de las dimensiones anómalas en el régimen en el que el acoplamiento λ se vuelve grande.

El Ansatz GKPW

El último paso importante para formalizar lo que entendemos por correspondencia AdS/CFT consiste indicar cómo podemos utilizarla para computar observables. Del lado de la teoría de campos los observables básicos que generalmente estamos interesados en calcular son las funciones de correlación. Poco tiempo después de la publicación de Maldacena y basado en la identificación de estados que acabamos de describir, Gubser, Klebanov y Polyakov y Witten propusieron en [14, 15] una prescripción para calcular estos objetos (que para valores grandes de λ no pueden ser obtenidos perturbativamente) en términos de las cantidades de la teoría gravitatoria.

Consideremos una CFT definida por una acción S_{CFT} en la que disponemos de un operador local \mathcal{O} . Para definir funciones de correlación de n -puntos (conexas) de este operador simplemente necesitamos perturbar la acción con un término

$$S_{\text{CFT}} \rightarrow S_{\text{CFT}} + \int d^4x f(x) \mathcal{O}(x), \quad (1.20)$$

donde $f(x)$ representa una fuente genérica, y tomar sucesivamente n derivadas funcionales con respecto a $f(x)$ de la funcional generatriz definida por el valor de expectación

⁸En el límite planar los operadores más relevantes son los de traza única.

$$\exp [W(f)_{\text{CFT}}] \equiv \langle \exp \left(\int d^4x f(x) \mathcal{O}(x) \right) \rangle \quad (1.21)$$

según

$$\langle \mathcal{O}(x_1) \dots \mathcal{O}(x_n) \rangle \equiv \frac{\delta^n W_{\text{CFT}}}{\delta f(x_1) \dots \delta f(x_n)} \Big|_{f=0}. \quad (1.22)$$

Ahora bien, en el caso de un operador escalar \mathcal{O}_Δ sabemos que tenemos un campo dual ϕ de masa $R^{-2}\Delta(\Delta-4)$. Los modos normalizables están descriptos por la solución Δ_+ , y notamos que para que (1.20) tenga sentido la dimensión de escaleo de f debe ser $4 - \Delta_+ = \Delta_-$. Por lo tanto, identificamos a la fuente $f(x)$ con el valor asintótico del correspondiente modo no-normalizable, es decir, la función $a(x)$ en (1.18). En contrapartida, el coeficiente $b(x)$ del modo normalizable de la solución clásica resulta ser el valor de expectación del operador, es decir, la función de un punto (correctamente normalizada). Estas condiciones de contorno definen unívocamente una solución clásica de $\phi(f)$ en el interior: se trata de una perturbación que se propaga desde el borde generada por las inserciones de \mathcal{O} . La propuesta de GKPW es muy simple: en el límite en que la supergravedad se vuelve clásica consiste en identificar esta funcional generatriz con la acción gravitatoria evaluada en dicha solución, es decir,

$$W_{\text{CFT}}(f) = S_{\text{SUGRA IIB en AdS}_5}[\phi(f)]. \quad (1.23)$$

En otras palabras, en lenguaje euclídeo podemos decir que en términos de la función de partición perturbativa del lado gravitatorio Z_{IIB} tenemos

$$\langle \exp \left(\int d^4x f(x) \mathcal{O}(x) \right) \rangle = Z_{\text{IIB}}[\phi(f)]. \quad (1.24)$$

En la práctica, la segunda condición de contorno simplemente tiene que ver con mantener la consistencia en el origen de AdS.

El ejemplo más simple que podemos analizar es el de la función de dos puntos de un operador escalar primario. Para evaluar la acción de Klein-Gordon en la solución relevante y expresar el resultado en función de la condición de contorno $\phi(z=0, x) \propto f(x)$ simplemente necesitamos integrar por partes en la dirección radial. Obtendremos dos términos: una integral sobre todo el espacio AdS que se anula por las ecuaciones de movimiento y una integral en el borde de la forma $\int d^4x \phi(z, x) \partial_z \phi(z, x)|_{z=0}$. Si bien no contribuyen a las ecuaciones de movimiento, a la hora de evaluar la acción es necesario incluir también los términos de borde originales. Al final, obtenemos

$$S[\phi(f)] \sim \int d^4x d^4x' \frac{f(x)f(x')}{(x-x')^{2\Delta}} + \dots \quad (1.25)$$

Tomando dos derivadas funcionales con respecto a f y evaluando en $f=0$ nos deshacemos de los términos de mayor orden y reconocemos la forma de la función de dos puntos

$$\langle \mathcal{O}_\Delta(x) \mathcal{O}_\Delta(x') \rangle_{\text{CFT}} \sim \frac{1}{(x-x')^{2\Delta}}, \quad (1.26)$$

que en una CFT está completamente determinada por la simetría conforme a menos de la normalización.

1.2. Extensiones de la dualidad AdS/CFT

La correspondencia holográfica entre teorías de campos y teorías de cuerdas constituye una idea general que se extiende mucho más allá del ejemplo inicial estudiado por Maldacena. En primer lugar porque resulta ser válida cualquiera sea la cantidad de dimensiones espacio-tiempo que estemos considerando: el caso $\text{AdS}_5/\text{CFT}_4$ es en sólo un ejemplo particular de las dualidades $\text{AdS}_{d+1}/\text{CFT}_d$ en el contexto de las teorías de cuerdas tipo I, IIA, IIB, y también de la teoría M . En segundo lugar, porque podemos encontrar nuevas dualidades introduciendo alguna *deformación* en las teorías del caso original. Para esto es necesario entender la modificación que estamos realizando en ambos lenguajes para poder realizar exactamente la misma deformación de ambos lados. En general, las deformaciones rompen parte de la simetría global y pueden verse del lado de cuerdas a partir de alguna construcción en base a D-branas. De esta manera se pueden generar teorías que comparten ciertos aspectos fenomenológicos con teorías más realistas: una menor cantidad de supersimetrías, algún tipo de ruptura de la simetría conforme y la presencia de materia en la representación fundamental del grupo de gauge, entre otros. En muchos casos la geometría resultante se asemeja sólo asintóticamente a un AdS, de manera que la teoría dual se vuelve conforme solamente en el UV debido a la introducción de alguna deformación relevante (en el IR). En esta sección describimos algunos modelos que serán relevantes a lo largo de la tesis.

Cabe resaltar que la dualidad AdS/CFT ha sido utilizada incluso más allá de los modelos *top-down* a los que nos referimos. En efecto, existen diversos modelos *bottom-up* construidos en base a conexiones entre ciertas teorías de campos y ciertos modelos gravitacionales que no tienen su origen en la teoría de cuerdas (o al menos no se lo ha descubierto).

Ruptura de la simetría conforme

Tomando como punto de partida la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM podemos introducir una perturbación añadiendo a la acción un término extra. Si el término agregado está construido a partir de un operador de dimensión $\Delta < 4$ (o $\Delta < d$ en el caso general) el efecto de la perturbación se vuelve importante a bajas energías, y decimos que se trata de una deformación *relevante*. La interpretación dual es consistente: tenemos un cambio en las condiciones de contorno de los modos correspondientes a dicho operador, que tienen un comportamiento tipo $z^{4-\Delta}$, es decir que crecen hacia el interior de AdS.

Otro camino posible consistiría en comenzar con una dualidad construida en un número mayor de dimensiones, y compactificar algunas de ellas de manera tal de ir rompiendo algunas de las supersimetrías. En ambos casos, en general es útil conservar al menos una simetría $\mathcal{N} = 1$ para garantizar la estabilidad de las soluciones correspondientes.

No es nuestro objetivo entrar en detalles con respecto a este tipo de deformaciones no sólo porque nos llevaría mucho tiempo sino sobretudo porque nuestros cálculos se desarrollarán principalmente del lado gravitatorio y serán válidos de manera general para distintos tipos de modelos. Nos concentraremos en modelos invariantes de escala (exacta o aproximadamente) por encima de una escala de energía Λ . Por debajo de la misma, nuestras teorías serán confinantes. El ejemplo más relevante es el de la teoría definida por Polchinski y Strassler en [24] que preserva $\mathcal{N} = 1$ supersimetrías, en la que los campos no masivos son los de una teoría asintóticamente libre mientras que en una escala m aparecen también modos escalares y fermiónicos masivos. Si λ es grande en el UV, la teoría es aproximadamente conforme hasta escalas similares a $m \sim \Lambda$, mientras que en caso contrario aparece una región paramétrica con un comportamiento logarítmico (ver figura 6).

El modelo de [25] exhibe ciertas propiedades cualitativas similares a QCD:

- Tiene un *gap* de masas del orden de Λ , que por lo tanto identificaremos con Λ_{QCD} . Veremos

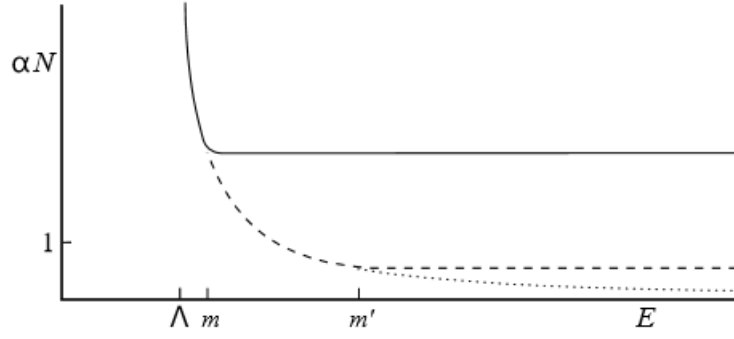


Figura 6: El acoplamiento de t Hooft $\lambda = \alpha N$ en función de la escala de energía E [2]. Aquí $\alpha \propto g_{YM}^2$.

esto explícitamente en el cuerpo de la tesis.

- Genera el confinamiento de los campos cargados ante el grupo de gauge. Para comprobarlo basta con estudiar el comportamiento del Wilson *loop* rectangular, directamente relacionado con el potencial quark-antiquark.
- Otras propiedades en las que no ahondaremos incluyen la existencia de un vértice bariónico [26], las características de los instantones, la existencia de condensados, etc.

Concluimos esta sección destacando otros dos modelos que han sido importantes en el desarrollo de las aplicaciones de la dualidad AdS/CFT en este contexto: el de Klebanov y Strassler [27] y el de Maldacena-Núñez [28].

Modelos de branas

Nuestro objetivo consiste en utilizar la dualidad AdS/CFT para analizar procesos de dispersión en teorías que sean lo más realistas posible. Nos interesa entonces poder analizar la física asociada por ejemplo a los grados de libertad mesónicos. Para incluir materia en la representación fundamental del grupo de gauge necesitamos cuerdas abiertas con un único extremo restringido a moverse en las D3-branas, de manera que debemos introducir nuevas Dp -branas en el modelo holográfico en las que pueda terminar el extremo opuesto. En caso de utilizar un número N_f de estos nuevos objetos superpuestos generaremos además una simetría de sabor $SU(N_f)$.

En principio, la presencia de las branas de sabor modificará la geometría, generando una *back-reaction* considerable y una solución de supergravedad distinta. Sin embargo, en el límite $N_f \ll N$ podemos interpretar a las branas como objetos de prueba que no afectan la geometría de fondo, es decir que cumplen un papel similar al de una carga de prueba en una configuración electromagnética dada. En consecuencia, simplemente necesitamos encontrar la manera más conveniente de incluir la o las branas de prueba en la geometría de fondo. En otras palabras, debemos encontrar la configuración que minimiza la acción de Dirac-Born-Infeld (DBI) que describe las fluctuaciones de bajas energías de las D-branas.

En la sección siguiente nos concentramos en la descripción del denominado modelo D3D7 propuesto por Kruczenski, Mateos, Myers y Winters en [29]. Elegimos este modelo en particular porque las diferencias entre la dualidad original y esta configuración tienen una interpretación muy sencilla tanto desde el punto de vista geométrico como con respecto al contenido de campos, facilitando los cálculos. Sin embargo, la mayoría de los resultados que obtuvimos pueden extenderse a casos más generales como los modelos $D4D8\overline{D8}$ [30] y $D4D6\overline{D6}$ [31] que analizamos explícitamente en [5-7].

	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9
D3	x	x	x	x	-	-	-	-	-	-
D7	x	x	x	x	x	x	x	x	-	-

Tabla 1.1: Configuración del modelo D3D7.

Sería interesante, además, extenderlos a los modelos de branas relacionados con las soluciones de Klebanov-Strassler y Maldacena-Núñez [32-35].

Modelo D3D7

Como lo indica su nombre, el modelo D3D7 se contruye introduciendo N_f D7-branas de prueba en el fondo curvo generado por las N D3-branas. En la tabla 1.1 detallamos las direcciones en las que se acomodan cada uno de los objetos extendidos.

Como vemos, las branas añadidas ocupan las cinco direcciones del AdS, de manera que seguiremos teniendo una teoría dual en 4d. Por otro lado, sólo ocupan tres de las direcciones de la S^5 . A la hora de pensar en las fluctuaciones, se deben considerar los modos de las cuerdas abiertas del tipo 3-7 (y 7-3), cuya masa estará asociada a la separación entre las D3 y las D7. Desde el punto de vista de la teoría de campos, esto corresponde a incluir N_f hipermultipletes, preservando una simetría $\mathcal{N} = 2$ en cuatro dimensiones. Estos modos representan quarks dinámicos, y bajo ciertas condiciones puede verse favorecida la formación de mesones escalares y vectoriales. La función β de la teoría es proporcional a la relación N_f/N . Para simplificar la notación describimos aquí el caso $N_f = 1$.

Al estar inmersas en una geometría $\text{AdS}_5 \times S^5$, las D7-branas no permanecerán sin curvatura. La forma que adquieren se obtiene minimizando la parte relevante de la acción DBI, en este caso asociada simplemente a la hipersuperficie ocupada por las branas. Teniendo en cuenta además la presencia del término topológico de Wess-Zumino (WZ), la acción tiene la forma

$$S_{D7} = -\mu_7 \int d^8\xi \sqrt{-\det [P[g]_{\alpha\beta} + (2\pi\alpha')G_{\alpha\beta}]} + \mu_7 \frac{(2\pi\alpha')^2}{2} \int P[A_4] \wedge G \wedge G, \quad (1.27)$$

donde las ξ con $\alpha = 1, \dots, 8$ son coordenadas sobre la hoja de mundo de la brana, g es la métrica inducida, $\mu_7 = [(2\pi)^7 g_s \alpha'^4]^{-1}$ es su tensión y P denota el *pullback* de los campos de fondo, definido por ejemplo en el caso de la métrica como

$$P[g]_{\alpha\beta} \equiv g_{MN} \frac{dx^M}{d\xi^\alpha} \frac{dx^N}{d\xi^\beta}. \quad (1.28)$$

Además, $G = dB$ está asociado a los campos de gauge sobre la brana, que describen las fluctuaciones del *embedding* en las direcciones paralelas a la brana, mientras que las fluctuaciones transversales corresponden a modos escalares φ y χ implícitamente contenidas en los *pullbacks*. Si juntamos la coordenada radial r con las de la cinco-esfera definiendo coordenadas Y^i con $i = 1, \dots, 6$ de manera tal que $|\vec{Y}| = r$ y según

$$\frac{R^2}{r^2} dr^2 + R^2 d\Omega_5^2 = \frac{R^2}{r^2} d\vec{Y} \cdot d\vec{Y}, \quad (1.29)$$

y separamos a la D7-brana de las D3-branas una distancia $L > 0$ en el plano (8,9) podemos comprobar que la configuración que minimiza la acción está dada por la geometría

$$ds_{D7}^2 = \frac{\rho^2 + L^2}{R^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu) + \frac{R^2}{\rho^2 + L^2} [d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_3^2], \quad (1.30)$$

donde hemos definido una nueva coordenada radial $\rho^2 \equiv r^2 - L^2$. Vemos que la D7-brana envuelve una S^3 descrita por coordenadas esféricas en el hiperplano (4,5,6,7), lo que rompe el $SO(6)$ de la teoría original al subgrupo $SO(4) \sim SU(2)_L \times SU(2)_R$. El radio de esta tres-esfera varía con ρ , y la brana termina *de manera suave* en el IR al llegar a $\rho = 0$, es decir, $r = L$. Analizando el límite opuesto $\rho \gg L$ vemos que recuperamos una geometría $\text{AdS}_5 \times S^3$. La escala L define la masa de los *quarks* $m_q = L/(2\pi\alpha')$, de manera que en el caso $L = 0$ estos modos se vuelven no masivos y la teoría recupera la simetría conforme.

Espectro mesónico

Los mesones corresponden a las fluctuaciones escalares y vectoriales que nombramos en la sección anterior. Más precisamente, podemos elegir que los primeros estén asociados a las fluctuaciones de la D7-brana en las direcciones $Y^{5,6}$ según

$$Y^5 = (2\pi\alpha')\chi, \quad Y^6 = L + (2\pi\alpha')\varphi. \quad (1.31)$$

De esta manera, podemos utilizar $r^2 = \rho^2 + (L + 2\pi\alpha'\varphi)^2 + (2\pi\alpha'\chi)^2$ y la expansión matricial genérica⁹

$$\begin{aligned} \sqrt{\det(M_{\alpha\beta} + m_{\alpha\beta})} &= \sqrt{M} \left[1 + \frac{1}{2}m + \left(\frac{1}{8}m^2 - \frac{1}{4}m \cdot m \right) \right. \\ &\quad + \left(\frac{1}{48}m^3 - \frac{1}{8}m(m \cdot m) + \frac{1}{6}m \cdot m \cdot m \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{384}m^4 + \frac{1}{32}(m \cdot m)^2 - \frac{1}{32}m^2(m \cdot m) + \frac{1}{12}m(m \cdot m \cdot m) \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{8}m \cdot m \cdot m \cdot m \right) \right], \end{aligned} \quad (1.32)$$

con

$$m \equiv m_\alpha^\alpha = M^{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}, \quad m^2 = (M^{\alpha\beta} m_{\alpha\beta})^2, \quad m \cdot m \equiv m_\beta^\alpha m_\alpha^\beta = M^{\beta\gamma} M^{\alpha\delta} m_{\alpha\beta} m_{\gamma\delta}. \quad (1.33)$$

para expandir la acción al orden cuadrático. Obtenemos entonces la siguiente expresión para el Lagrangiano asociado a la propagación de las fluctuaciones:

$$\begin{aligned} L_2 &= -\mu_7 \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}m^{(2)} - \frac{1}{4}m^{(1)} \cdot m^{(1)} + \frac{1}{8}(m^{(1)})^2 \right] \\ &= -\mu_7 \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}X^{(2)} + \frac{1}{4}\tilde{G} \cdot \tilde{G} \right] \\ &= -\mu_7 (2\pi\alpha')^2 \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \frac{R^2}{\rho^2 + L^2} g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + \partial_\alpha \chi \partial_\beta \chi) - \frac{1}{4} G_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta} \right]. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Las ecuaciones de movimiento son de la forma

$$\partial_\alpha \left(\frac{\rho^3}{\rho^2 + L^2} g^{\alpha\beta} \partial_\beta \Phi \right) = 0, \quad \Phi = \varphi, \chi, \quad (1.35)$$

⁹Escribimos aquí algunos términos de orden superior que serán necesarios para el estudio de las interacciones.

para los mesones escalares, y

$$\partial_\alpha \left(\sqrt{-g} G^{\alpha\beta} \right) - \frac{4\rho(\rho^2 + L^2)}{R^4} \epsilon^{\beta jk} \partial_j B_k = 0 , \quad (1.36)$$

para los vectoriales. Notamos que el segundo término de (1.36) proviene del término de WZ, y está presente solamente cuando β corresponde a una coordenada de la S^3 . Puede verse que cuando el acoplamiento de 't Hooft es grande, la energía que une los pares quark-antiquark es muy parecida a la suma de sus masas, de manera tal que los mesones son mucho más livianos que los quarks. La perspectiva geométrica provee una manera muy clara de visualizar este efecto: dos cuerdas extendidas entre las D3 y las D7 y orientadas en sentidos opuestos se unen, formando un modo 7-7 mucho más liviano.

La forma exacta de las soluciones puede encontrarse en [29]. En este trabajo, estaremos interesados en la forma de las soluciones normalizables en la región cercana al borde conforme. Para los modos escalares, las expresiones correspondientes están dadas por

$$\Phi^{(l)}(x^\mu, z, \Omega) \sim e^{ik \cdot x} z J_{\Delta-2}(kz) Y^l(\Omega) , \quad (1.37)$$

con k el momento en las direcciones planas y $Y^l(\Omega_3)$ los armónicos esféricos escalares sobre la S^3 . Para los modos vectoriales, en cambio, encontramos tres tipos de soluciones:

$$\text{tipo I} : \quad B_\mu = 0, \quad B_\rho = 0, \quad B_i = \phi_I^\pm(\rho) e^{ik \cdot x} Y_i^{l,\pm 1}(\Omega), \quad (1.38)$$

$$\text{tipo II} : \quad B_\mu = \zeta_\mu \phi_{II}(\rho) e^{ik \cdot x} Y^l(\Omega), \quad k \cdot \zeta = 0, \quad B_\rho = 0, \quad B_i = 0, \quad (1.39)$$

$$\text{tipo III} : \quad B_\mu = 0, \quad B_\rho = \phi_{III}(\rho) e^{ik \cdot x} Y^l(\Omega), \quad B_i = \tilde{\phi}_{III}(\rho) e^{ik \cdot x} \nabla_i Y^l(\Omega). \quad (1.40)$$

$Y_i^{l,\pm 1}(\Omega)$ y $\nabla_i Y^l(\Omega)$ son los armónicos esféricos vectoriales. La dependencia radial asintótica de los modos I y III está dada por

$$\phi_I^{\pm 1}(\rho) \sim \frac{J_{\Delta-2}(\frac{MR^2}{\rho})}{\rho^2}, \quad \phi_{III}(\rho) \sim \frac{J_{\Delta-2}(\frac{MR^2}{\rho})}{\rho^2}, \quad \tilde{\phi}_{III}(\rho) = \frac{\frac{1}{\rho} \partial_\rho(\rho^3 \phi_{III}(\rho))}{l(l+2)}. \quad (1.41)$$

Los modos del tipo II tienen soluciones equivalentes a las de los vectores en AdS_5 y son los únicos que tienen carácter vectorial en la teoría efectiva luego de compactificar sobre la S^3 . Por lo tanto, son los que identificaremos con los mesones vectoriales.

Capítulo 2

Conceptos básicos sobre DIS

El proceso o conjunto de procesos comúnmente agrupados bajo el nombre de *dispersión inelástica profunda* (en inglés *deep inelastic scattering*, o DIS) han sido estudiados extensamente durante las últimas décadas. El objetivo de los análisis teóricos así como experimentales y fenomenológicos al respecto consiste en describir la estructura interna de los hadrones, cuyas características son por definición no perturbativas pues están asociadas a la física en la escala del confinamiento de los grados de libertad de color. Aún así, el análisis del proceso desde la perspectiva de la teoría cuántica de campos permite obtener una serie de resultados básicos pero importantes. En este capítulo, y siguiendo principalmente [36], describimos la cinemática y la dinámica básica del DIS junto con algunas conclusiones que son importantes para la lectura e interpretación de los resultados de esta tesis.

2.1. Cinemática

Como puede verse esquematizado en la figura 1, en el DIS un haz de leptones l de momento k incide sobre un blanco hadrónico h (generalmente protones o neutrones) de momento P y masa¹ $P^2 = -M^2$. En concreto, las masas hadrónicas son estimativamente del orden de la escala de confinamiento, esto es, $M \sim \Lambda_{QCD}$ en el caso de QCD. La interacción es mediada por el intercambio de un fotón virtual de momento q emitido por el leptón, que es absorbido por el hadrón, generando un estado final X . Por otro lado, en un contexto más general que llamaremos *electro-weak* DIS o EW-DIS, puede considerarse la situación en la que la partícula emitida es un bosón W^\pm . Como veremos más adelante, el hecho de que las interacciones débiles violen *paridad* genera la aparición de nuevas contribuciones a la sección eficaz.

En el contexto de QCD, la dispersión se dice elástica si X coincide con el hadrón inicial, mientras que el DIS se da cuando el fotón virtual es lo suficientemente energético como para que h se fragmente en diferentes partículas. En general, este proceso se analiza de manera inclusiva: sin analizar el estado X y sumando sobre los posibles estados finales. Además de los invariantes P^2 , q^2 y la masa del leptón, las magnitudes asociadas a la descripción de la amplitud de dispersión asociada suelen expresarse en términos del denominado parámetro de Bjorken x , definido según

$$x \equiv \frac{-q^2}{2P \cdot q}, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2.1)$$

Es interesante resaltar que en el modelo de partones (en el que los hadrones se modelan en términos de sus constituyentes o quarks pensados como partículas elementales libres) el parámetro de Bjorken

¹Notar que trabajamos con la signatura $(-, +, +, +)$.

está asociado a la probabilidad de encontrar un partón con una fracción x del momento total del hadrón, P . Notemos que podemos considerar a la segunda desigualdad como estricta dado que $x = 1$ corresponde al caso elástico. Puede decirse que el DIS ocurre cuando tomamos el límite de q grande manteniendo x fijo. Finalmente, a la hora de escribir la sección eficaz también resulta útil definir $y \equiv P \cdot q / P \cdot k$ (donde nuevamente tenemos $0 \leq y \leq 1$), que parametriza la pérdida de energía del leptón, y notar que el ángulo de dispersión θ con respecto a la dirección del haz de leptones es aproximadamente proporcional a M/q , con $q = \sqrt{-q^2}$, de manera que resulta ser considerablemente pequeño. La sección eficaz diferencial puede entonces escribirse como

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy d\phi} = \frac{e^4}{16\pi^2 q^4} y l^{\mu\nu} W_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

donde ϕ es el ángulo azimutal y e es la carga del electrón (o la carga del leptón correspondiente en un caso más general), mientras que $l^{\mu\nu}$ y $W^{\mu\nu}$ se conocen como tensor leptónico y tensor hadrónico, respectivamente. El primero codifica la interacción electromagnética asociada a la emisión del fotón virtual, y por lo tanto puede definirse en el régimen perturbativo de la electrodinámica cuántica (pQED) sin inconvenientes:

$$\begin{aligned} l^{\mu\nu} &\equiv \sum_{s'_l} \langle k', s'_l | j_l^\mu(0) | k, s_l \rangle \langle k, s_l | j_l^\nu(0) | k', s'_l \rangle \\ &= \sum_{s'_l} \bar{u}(k', s'_l) \gamma^\mu u(k, s_l) \bar{u}(k', s'_l) \gamma^\nu u(k, s_l), \end{aligned}$$

con j_l^μ la corriente electromagnética del leptón cargado. Definiendo los vectores de espín para partículas de espín 1/2 según

$$s^\mu \equiv \frac{1}{2} \bar{u}(k, s_l) \gamma^\mu \gamma^5 u(k, s_l), \quad (2.3)$$

y utilizando las identidades

$$u(k, s_l) \bar{u}(k, s_l) = \frac{1}{2} (\not{k} + m_l) (1 + \gamma^5 \not{s}_l) / m_l, \quad \sum_{s_l} u(k, s_l) \bar{u}(k, s_l) = \not{k} + m_l, \quad k^2 = m_l^2, \quad (2.4)$$

y despreciando m_l^2 obtenemos

$$l^{\mu\nu} = l_{\text{sym}}^{\mu\nu} + l_{\text{asym}}^{\mu\nu} \approx 2 (k^\mu k'^\nu + k'^\mu k^\nu - \eta^{\mu\nu} k \cdot k' - i \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q_\rho (s_l)_\sigma). \quad (2.5)$$

El tensor hadrónico contiene la información asociada a la interacción entre el fotón virtual y el estado hadrónico incidente, de manera que no puede ser descripto perturbativamente. Su definición formal viene dada por

$$W^{\mu\nu} \equiv i \int d^4x e^{ix \cdot q} \langle P, S | [J^\mu(x), J^\nu(0)] | P, S \rangle = i \langle P, S | [\tilde{J}^\mu(q), J^\nu(0)] | P, S \rangle \quad (2.6)$$

con S el vector de espín del estado hadrónico inicial, mientras que extendiendo la definición a dos estados hadrónicos distintos y caracterizando al estado de polarización más general mediante una matriz de densidad ρ_h (que depende linealmente de S) también podemos escribir

$$W^{\mu\nu}(P, q, S) = \text{Tr}(\rho_h W^{\mu\nu}). \quad (2.7)$$

Si bien en general las propiedades de los estados hadrónicos no pueden estudiarse en detalle analíticamente cuando el acoplamiento es fuerte, describimos a continuación algunas consideraciones basadas principalmente en las simetrías del problema que permiten imponer condiciones sobre $W^{\mu\nu}$ y *parametrizar nuestra ignorancia* de una manera más práctica.

- Las interacciones fuertes son invariantes ante cambios en la paridad. El hecho de que los vectores transformen según $v \rightarrow v_P \equiv (v^0, -\vec{v})$ y los pseudo-vectores como S no reaccionen de la misma manera implica que $W^{\mu\nu}$ sea invariante ante paridad. Definiendo convenientemente la aplicación del operador de paridad a los índices de Lorentz a través de $v^{\mu_P} \equiv (\hat{P}v)^\mu = \pm v^\mu$ con el signo positivo para $\mu_P = 0$ y el negativo para $\mu_P = 1, 2, 3$, podemos caracterizar esta propiedad mediante la identidad

$$W^{\mu\nu}(P, q, S) = W^{\mu_P \nu_P}(P_P, q_P, S_P). \quad (2.8)$$

Cabe aclarar que esta propiedad deja de cumplirse en el contexto de interacciones o teorías en general que no preservan paridad, como por ejemplo en el EW-DIS.

- De la misma manera, la invariancia ante inversión temporal (con $q \rightarrow q_T = (q^0, -\vec{q})$, $x \rightarrow x_T = (-x^0, \vec{x})$ y $S \rightarrow S_T = (S^0, -\vec{s}_h)$) puede expresarse en una notación similar a través de

$$W^{\mu\nu}(P, q, S) = W^{\mu_T \nu_T}(P_T, q_T, S_T)^*, \quad (2.9)$$

Vemos que parece la conjugación en el lado derecho, como era de esperarse debido a la antiunitariedad del operador asociado.

- Por otro lado, la propiedad de hermiticidad de las corrientes y de la matriz de densidad implica que

$$W^{\mu\nu}(P, q, S) = W^{\nu\mu}(P, q, S)^*, \quad (2.10)$$

- Además, a partir de la definición del tensor hadrónico vemos que intercambiar los índices y cambiar de signo el momento q es equivalente a intercambiar los fotones entrantes por salientes, de manera que resulta válida la siguiente identidad, estrechamente relacionada con el concepto de *crossing symmetry*:

$$W^{\mu\nu}(P, q, S) = -W^{\nu\mu}(P, -q, S). \quad (2.11)$$

- Finalmente, la conservación de las corrientes se traduce en

$$q_\mu W^{\mu\nu}(P, q, S) = q_\nu W^{\mu\nu}(P, q, S) = 0. \quad (2.12)$$

- Por último, es importante notar que $W^{\mu\nu}$ sólo puede depender linealmente de S . Esto es particularmente claro en el lenguaje de la matriz de densidad: la única dependencia aparece a través de los factores de S presentes en los elementos de matriz de ρ_h

Todas estas propiedades restringen la estructura hadrónica más general posible del tensor $W^{\mu\nu}$, construida en base a los vectores y tensores disponibles: $\eta^{\mu\nu}$, P^μ y q^μ , junto con el pseudo-tensor de Levi-Civita $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ y el vector de espín y la polarización asociados al hadrón. Los grados de libertad que no quedan determinados pueden codificarse en una serie de funciones escalares denominadas

funciones de estructura que únicamente pueden depender de x y de q^2 (o más precisamente de su relación con la escala de confinamiento, que denominaremos genéricamente Λ). Por ejemplo, para blancos escalares queda reducido a

$$W^{\mu\nu} = F_1 \left(x, \frac{q^2}{\Lambda^2} \right) \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + \frac{2x}{q^2} F_2 \left(x, \frac{q^2}{\Lambda^2} \right) \left(P^\mu + \frac{q^\mu}{2x} \right) \left(P^\nu + \frac{q^\nu}{2x} \right). \quad (2.13)$$

Sin embargo, gracias a las propiedades (2.12) y a que el $l^{\mu\nu}$ satisface identidades análogas, es posible omitir los términos proporcionales a q^μ sin perder información.

A continuación presentamos el tensor hadrónico más general posible para blancos de espín $s = 0$, $s = 1/2$ y $s = 1$, que a lo largo de este trabajo estarán asociados a glueballs y mesones escalares, glueballinos y hadrones fermiónicos (bariones), y mesones vectoriales, respectivamente. Descomponiendo según las propiedades de simetría

$$W^{\mu\nu} = W_{\text{sym}}^{\mu\nu} + iW_{\text{asym}}^{\mu\nu} \quad (2.14)$$

y omitiendo la dependencia de las funciones de estructura obtenemos

$$W_{\text{sym}}^{\mu\nu}|_{s=0} = F_1 \eta^{\mu\nu} - \frac{1}{P \cdot q} F_2 P^\mu P^\nu, \quad W_{\text{asym}}^{\mu\nu}|_{s=0} = -\frac{1}{2P \cdot q} F_3 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q_\rho P_\sigma, \quad (2.15)$$

para los escalares y [37]

$$W_{\text{sym}}^{\mu\nu}|_{s=1/2} = W_{\text{sym}}^{\mu\nu}|_{s=0} - \frac{S \cdot q}{(P \cdot q)^2} (g_3 + g_4) P^\mu P^\nu - \frac{1}{2P \cdot q} g_3 (P^\mu S^\nu + S^\mu P^\nu), \quad (2.16)$$

$$W_{\text{asym}}^{\mu\nu}|_{s=1/2} = W_{\text{asym}}^{\mu\nu}|_{s=0} - \frac{1}{P \cdot q} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q_\rho \left[g_1 S^\sigma + g_2 \left(S_\sigma - \frac{S \cdot q}{P \cdot q} P_\sigma \right) \right], \quad (2.17)$$

para los fermiones. Notemos que las funciones F_3, g_3, g_4 y g_5 sólo están presentes si se desestima la identidad (2.8). Finalmente, para los blancos vectoriales omitimos nuevos términos asociados a la violación de paridad, e incluimos el vector de polarización ζ^μ , que cumple las condiciones $P \cdot \zeta = 0$ y $\zeta \cdot \zeta^* = M^2$ y cuya relación con S viene dada por

$$S^\mu = \frac{i}{M^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \zeta_\nu \zeta_\rho^* P_\sigma. \quad (2.18)$$

En este contexto sólo aparecen nuevos términos en la parte simétrica del tensor $W^{\mu\nu}$ más general, que en este caso se escribe convencionalmente de la siguiente manera [38]:

$$\begin{aligned} W_{\text{sym}}^{\mu\nu}|_{s=1} &= W_{\text{sym}}^{\mu\nu}|_{s=0} + W_{\text{sym}}^{\mu\nu}|_{s=1/2} \\ &+ b_1 r^{\mu\nu} - \frac{1}{6} b_2 (s^{\mu\nu} + t^{\mu\nu} + u^{\mu\nu}) - \frac{1}{2} b_3 (s^{\mu\nu} - u^{\mu\nu}) - \frac{1}{2} b_4 (s^{\mu\nu} - t^{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde

$$\begin{aligned} r_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{(P \cdot q)^2} \left(q \cdot \zeta^* q \cdot \zeta - \frac{1}{3} (P \cdot q)^2 \tilde{\kappa} \right) \eta_{\mu\nu} \\ s_{\mu\nu} &\equiv \frac{2}{(P \cdot q)^3} \left(q \cdot \zeta^* q \cdot \zeta - \frac{1}{3} (P \cdot q)^2 \tilde{\kappa} \right) P_\mu P_\nu \\ t_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{2(P \cdot q)^2} \left(q \cdot \zeta^* P_\mu \zeta_\nu + q \cdot \zeta^* P_\nu \zeta_\mu + q \cdot \zeta P_\mu \zeta_\nu^* + q \cdot \zeta P_\nu \zeta_\mu^* - \frac{4}{3} (P \cdot q) P_\mu P_\nu \right) \\ u_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{P \cdot q} \left(\zeta_\mu^* \zeta_\nu + \zeta_\nu^* \zeta_\mu - \frac{2}{3} M^2 \eta_{\mu\nu} - \frac{2}{3} P_\mu P_\nu \right) \end{aligned}$$

con $\tilde{\kappa} = 1 - 4x^2 P^2/q^2 \approx 1$ en el régimen que nos interesa.

2.2. Modelo de partones y relaciones de Callan-Gross

Los estados hadrónicos como los bariones o los distintos mesones son objetos que surgen debido al fenómeno de confinamiento. Si bien no se sabe cómo describirlos analíticamente y desde primeros principios, existen algunos modelos efectivos que resultan ser muy útiles. El ejemplo que consideraremos en esta sección es el modelo de *partones*, propuesto por Feynman en 1969 para estudiar procesos de dispersión altamente energéticos, y basado en el concepto de libertad asintótica.

La idea es simple: consiste en pensar en los hadrones como formados por objetos puntuales (partones) que se comportan en los choques aproximadamente como si fuesen libres (además de estar *on-shell*). Si esta aproximación es válida, permite calcular la amplitud de dispersión como una suma de amplitudes en las que el hadrón entrante es reemplazado por quarks o gluones libres. De esta manera, las funciones de estructura se reinterpretan en base a funciones de distribución de los distintos tipos de partones que puedan llevar alguna fracción del momento y la energía del hadrón total.

A primer orden en la teoría de perturbaciones, tendrá lugar una única interacción entre algún partón y el fotón virtual de momento q . Supongamos que consideramos un partón con una fracción del momento total ξP , con $0 < \xi < 1$. En ese caso, la amplitud incluirá un factor de la forma

$$\delta[(\xi P + q - p_X)^2] \delta^{(4)}(\xi P + q - p_X) \approx \frac{1}{2P \cdot q} \delta(\xi - x) \delta^{(4)}(\xi P + q - p_X) \quad (2.20)$$

asociado por un lado a la conservación del momento total y por otro a que el parton está en un estado *on-shell*. En el último paso hemos supuesto que la dispersión entre el partón y el fotón virtual es elástico, de manera que la masa del partón saliente es despreciable, tal como lo era la del entrante. De esta manera, podemos interpretar al parámetro de Bjorken x como la fracción de momento que lleva el partón que participa de la interacción. Más aún, considerando la interacción con un partón libre de carga Q y adaptando el análisis cinemático que realizamos anteriormente, puede verse que las funciones de estructura resultantes (promediando el espín del blanco) son de la forma

$$F_1(x) = \frac{Q^2}{2} \delta(\xi - x), \quad F_2(x) = Q^2 \xi \delta(\xi - x). \quad (2.21)$$

Ahora bien, para dar un ejemplo, consideremos un protón formado por distintos quarks y antiquarks de manera tal que $q_+(\xi)$, $q_-(\xi)$, $\bar{q}_+(\xi)$ y $\bar{q}_-(\xi)$ son las probabilidades de encontrar un partón del tipo adecuado (con la carga positiva o negativa indicada por el \pm) con una fracción de momento x . En este contexto, y considerando (2.21), las funciones de estructura totales consistirán en una suma sobre los distintos partones con sus respectivas cargas, mientras que las funciones de distribución quedarán evaluadas en x . Si hubiésemos considerado blancos polarizados, aparecería por ejemplo la función g_1 en términos de $q_+(x) - q_-(x)$ y un término análogo para las antipartículas.

Una de las consecuencias esenciales de este análisis es la denominada relación de Callan-Gross:

$$F_2(x) = 2x F_1(x). \quad (2.22)$$

Esta relación será válida siempre que consideremos hadrones compuestos exclusivamente por partículas de espín $1/2$. Por lo tanto, las posibles desviaciones permitirán extraer conclusiones sobre la estructura interna de los hadrones en QCD o de sus análogos en otros modelos.

2.3. Secciones eficaces de dispersión

Esta tesis consiste en el desarrollo y la descripción de los métodos y resultados que se obtienen a la hora de estudiar el DIS desde un punto de vista holográfico, y los objetos de interés son

concretamente las funciones de estructura. Una vez obtenida la descomposición del tensor hadrónico más general (hasta espín 1), es conveniente describir la sección en términos de dichas variables y analizar las diferentes posibilidades en términos de polarizaciones para poder hacer contacto con la fenomenología [7, 36].

Elegimos un sistema de referencia en el que el momento del leptón incidente pueda escribirse como $k^\mu = (E, 0, 0, E)$. Reemplazando en (2.2) por ejemplo para las contribuciones asociadas a F_1 y F_2 obtenemos²

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy d\phi}|_{F_1, F_2} = \frac{e^4}{16\pi^2 q^4} y l_{\text{sym}}^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^{\text{sym}}|_{F_1, F_2} = \frac{e^4 M E}{4\pi^2 q^4} [xy^2 F_1 + (1-y)F_2], \quad (2.23)$$

mientras que a partir de g_1 y g_2 (y para el DIS electromagnético) surge

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dx dy d\phi}|_{g_1, g_2} &= \frac{e^4}{16\pi^2 q^4} y l_{\text{sym}}^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^{\text{sym}}|_{g_1, g_2} \\ &= \frac{e^4 M E}{4\pi^2 q^4} \left\{ y^2 \left[2x \frac{S \cdot s_l}{P \cdot q} + \frac{(q \cdot S)(q \cdot s_l)}{(P \cdot q)^2} \right] g_1 + \right. \\ &\quad \left. 2xy^2 \left[\frac{S \cdot s_l}{P \cdot q} - \frac{(q \cdot S)(q \cdot s_l)}{(P \cdot q)^2} \right] g_2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

La contribución de los términos exclusivamente vectoriales es más extensa debido a que necesitamos calcular las contracciones

$$l_{\text{sym}}^{\mu\nu} r_{\mu\nu} \quad ; \quad l_{\text{sym}}^{\mu\nu} s_{\mu\nu} \quad ; \quad l_{\text{sym}}^{\mu\nu} t_{\mu\nu} \quad ; \quad l_{\text{sym}}^{\mu\nu} u_{\mu\nu}.$$

Para simplificar la notación, definimos un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dado por

$$\langle k_1 k_2 \rangle \equiv \frac{3}{2} \frac{(k_1 \cdot \zeta^*)(k_2 \cdot \zeta) + c.c.}{(P \cdot q)^2}, \quad (2.25)$$

donde *c.c.* indica la conjugación compleja. Este producto es bilineal y simétrico. Obtenemos entonces

$$\begin{aligned} l_{\text{sym}}^{\mu\nu} r_{\mu\nu} &= [2(k^\mu k'^\nu + k^\nu k'^\mu) - 2\eta^{\mu\nu} k \cdot k'] \frac{1}{(P \cdot q)^2} \left(q \cdot \zeta^* q \cdot \zeta - \frac{1}{3}(P \cdot q)^2 \right) \eta_{\mu\nu} \\ &= -\frac{4}{3}(k \cdot k') [\langle qq \rangle - 1] \\ &= \frac{4}{3} M E x y [\langle qq \rangle - 1], \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} l_{\text{sym}}^{\mu\nu} s_{\mu\nu} &= [2(k^\mu k'^\nu + k^\nu k'^\mu) - 2\eta^{\mu\nu} k \cdot k'] \frac{2}{(P \cdot q)^3} \left(q \cdot \zeta^* q \cdot \zeta - \frac{1}{3}(P \cdot q)^2 \right) P_\mu P_\nu \\ &= \frac{4}{3} \left[\frac{2(P \cdot k)(P \cdot k')}{(P \cdot q)} - \frac{P^2(k \cdot k')}{(P \cdot q)} \right] [\langle qq \rangle - 1] \\ &= -\frac{8}{3} M E [\langle qq \rangle - 1] \left[\frac{1}{y} - 1 + x^2 y t \right], \end{aligned} \quad (2.27)$$

²Estos resultados son válidos en la aproximación $\tilde{\kappa} \approx 1$.

$$\begin{aligned}
l_{sym}^{\mu\nu} t_{\mu\nu} &= [2(k^\mu k'^\nu + k^\nu k'^\mu) - 2\eta^{\mu\nu} k \cdot k'] \frac{1}{2(P \cdot q)^2} \times \\
&\quad \left[-\frac{4}{3}(P \cdot q) P_\mu P_\nu + \left((q \cdot \zeta^*)(P_\mu \zeta_\nu + P_\nu \zeta_\mu) + c.c. \right) \right] \\
&= \frac{-1}{\langle qq \rangle - 1} l_{sym}^{\mu\nu} s_{\mu\nu} + \frac{4}{3} \langle qk' \rangle (k \cdot P) + \frac{4}{3} \langle qk \rangle (k' \cdot P) \\
&= \frac{4}{3} ME \left[2 \left(\frac{1}{y} - 1 + x^2 y t \right) - \langle qk' \rangle - \langle qk \rangle (1 - y) \right], \tag{2.28}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
l_{sym}^{\mu\nu} u_{\mu\nu} &= [2(k^\mu k'^\nu + k^\nu k'^\mu) - 2\eta^{\mu\nu} k \cdot k'] \frac{1}{(P \cdot q)} \left[(\zeta_\mu^* \zeta_\nu + \zeta_\nu^* \zeta_\mu) - \frac{2}{3} M^2 \eta_{\mu\nu} - \frac{2}{3} P_\mu P_\nu \right] \\
&= \left[\frac{4}{3} \langle kk' \rangle (P \cdot q) - 2 \frac{M^2 (k \cdot k')}{(P \cdot q)} \right] - \frac{2M^2}{(P \cdot q) [\langle qq \rangle - 1]} l_{sym}^{\mu\nu} r_{\mu\nu} - \frac{1}{\langle qq \rangle - 1} l_{sym}^{\mu\nu} s_{\mu\nu} \\
&= \frac{8}{3} ME \left[-y \langle kk' \rangle + \left(\frac{1}{y} - 1 \right) + 2x^2 y t \right], \tag{2.29}
\end{aligned}$$

de donde obtenemos una contribución de la forma

$$\begin{aligned}
&\frac{MEe^4}{12\pi^2 q^4} \left\{ b_1 x y^2 [\langle qq \rangle - 1] + \frac{1}{6} [(2 - 3y) \langle qq \rangle + y(2 - 3y) \langle qk \rangle + 2y^2 \langle kk \rangle - 6(1 - y)] b_2 \right. \\
&\quad \left. + [(1 - y) \langle qq \rangle - y^2 \langle kk \rangle + y^2 \langle qk \rangle] b_3 + \frac{1}{2} [(2 - y) \langle qq \rangle + y(-2 + y) \langle qk \rangle] b_4 + \mathcal{O} \left(\frac{P^2}{q^2} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Ahora, en el límite $\sqrt{P^2/q^2} \ll 1$ podemos relacionar las expresiones $\langle qq \rangle$, $\langle qk \rangle$, y $\langle kk \rangle$, ya que resulta válida la identidad $\frac{q^\mu}{q^0} = \frac{k^\mu}{E}$. Luego, en el sistema en el que el hadrón está en reposo tenemos

$$\frac{q^\mu q^\nu}{M^2 (q^0)^2} = \frac{\frac{1}{2}(q^\mu k^\nu + k^\mu q^\nu)}{M^2 q^0 E} = \frac{k^\mu k^\nu}{M^2 E^2},$$

$$2 \frac{q^\mu q^\nu}{(P \cdot q)^2} \zeta_\mu \zeta_\nu^* = \frac{(q^\mu k^\nu + k^\mu q^\nu)}{(P \cdot q)(P \cdot k)} \zeta_\mu \zeta_\nu^* = 2 \frac{k^\mu k^\nu}{(P \cdot k)^2} \zeta_\mu \zeta_\nu^*,$$

$$\frac{3}{2} \frac{(q \cdot \zeta^*)(q \cdot \zeta) + c.c.}{(P \cdot q)^2} = \frac{(P \cdot q)}{(P \cdot k)} \frac{3}{2} \frac{(q \cdot \zeta^*)(k \cdot \zeta) + c.c.}{(P \cdot q)^2} = \frac{(P \cdot q)^2}{(P \cdot k)^2} \frac{3}{2} \frac{(k \cdot \zeta^*)(k \cdot \zeta) + c.c.}{(P \cdot q)^2},$$

y por ende

$$\langle qq \rangle = y \langle qk \rangle = y^2 \langle kk \rangle.$$

Por lo tanto, en este régimen la parte de la sección eficaz diferencial asociada a las funciones de estructura b_i con $i = 1, 2, 3, 4$ se reduce a

$$\frac{d^2 \sigma}{dx dy d\phi} \Big|_{b_i} = \frac{e^4}{16\pi^2 q^4} y l_{sym}^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^{sym} \Big|_{b_i} \approx \frac{MEe^4}{2^2 3 \pi^2 q^4} (\langle qq \rangle - 1) [b_1 x y^2 + b_2 (1 - y)]. \tag{2.30}$$

Notemos que las contribuciones asociadas a b_3 y b_4 resultan subdominantes en este régimen a pesar de que dichas funciones de estructura no sean necesariamente despreciables.

Polarizaciones del blanco hadrónico

En este apartado calculamos el factor adimensional

$$\langle qq \rangle = \frac{3}{2} \frac{(q \cdot \zeta^*)(q \cdot \zeta) + c.c.}{(P \cdot q)^2} = 3 \frac{q^\mu q^\nu}{(P \cdot q)^2} \zeta_\mu \zeta_\nu^*, \quad (2.31)$$

para diferentes polarizaciones del hadrón incidente con el objetivo de obtener las secciones eficaces diferenciales de los casos particulares de DIS que son relevantes experimental y fenomenológicamente hablando: el caso no polarizado, el caso de polarización longitudinal y el caso de polarización transversal. También analizamos el caso de las polarizaciones parciales. En todos los casos el eje longitudinal (\hat{z}) se define a partir de la componente espacial del momento k del leptón, es decir la dirección del haz leptónico.

Blancos no polarizados

Para describir hadrones no polarizados es necesario sumar sobre todas las posibles polarizaciones, obteniéndose

$$\overline{\zeta_\mu \zeta_\nu^*} = \frac{1}{3} (\eta_{\mu\nu} M^2 + P_\mu P_\nu). \quad (2.32)$$

Por lo tanto,

$$\langle qq \rangle_{unpol} = \langle \overline{qq} \rangle = \frac{1}{(P \cdot q)^2} [M^2 q^2 + (P \cdot q)^2] = 1 - 4x^2 t = \kappa \simeq 1, \quad (2.33)$$

de manera que obtenemos una contribución nula para las funciones de estructura b_i , como era de esperarse [38]. En particular, para leptones polarizados longitudinalmente tenemos $s_l = H_l k$ with $H_l = \pm 1$, donde el signo está asociado a helicidades positivas y negativas, respectivamente. En este caso concluimos que

$$\frac{d\sigma}{dx dy d\phi} = \frac{MEe^4}{4\pi^2 q^4} \{xy^2 F_1 + (1-y)F_2\}.$$

Blancos polarizados longitudinalmente

Ahora, consideramos el caso en que los hadrones están polarizados paralelamente al haz leptónico incidente. En consecuencia, podemos tomar

$$\zeta_L = \frac{M}{\sqrt{2}}(0, 1, iH_h, 0) \rightarrow s^\sigma = H_h M \hat{z}, \quad (2.34)$$

donde $H_h = 1$ ($H_h = -1$) indica que polarización paralela (antiparalela) a la del leptón. Se deducen entonces las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} (q \cdot \zeta_L) &= -\frac{ME' \sin \theta}{\sqrt{2}} e^{iH_h \phi}, \\ (q \cdot \zeta_L^*)(q \cdot \zeta_L) &= \frac{M^2 E'^2 \sin^2 \theta}{2} = \frac{q^2 M^2}{2} [(1-y) + tx^2 y^2], \\ \langle qq \rangle_{LP} &= \frac{3}{2} \frac{1}{(P \cdot q)^2} M^2 E'^2 \sin^2 \theta = -6x^2 t [(1-y) + tx^2 y^2] \simeq 0, \end{aligned} \quad (2.35)$$

En este caso el factor $\langle qq \rangle - 1$ solamente aporta un signo. En particular, para un haz de leptones longitudinalmente polarizados obtenemos

$$\frac{d\sigma}{dx dy d\phi} = \frac{MEe^4}{4\pi^2 q^4} \left\{ xy^2 \left[F_1 - \frac{1}{3}b_1 \right] + (1-y) \left[F_2 - \frac{1}{3}b_2 \right] - H_l H_h (2-y) y x g_1 + \mathcal{O}(t) \right\}. \quad (2.36)$$

Blancos polarizados transversalmente

Dado que el sistema que estamos considerando tiene simetría azimutal, podemos elegir cualquier polarización hadrónica en el plano (\hat{x}, \hat{y}) sin pérdida de generalidad. Aquí elegimos el eje \hat{x} , lo que equivale a tomar

$$\zeta_T = \frac{M}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, iH_h) \rightarrow s^\sigma = H_h M \hat{x} \quad ; \quad H_h = \pm 1. \quad (2.37)$$

En este caso,

$$\begin{aligned} (q \cdot \zeta_T) &= \frac{M^2}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{(1-y)}{-t}} - x^2 y^2 \sin\phi + iH_h \left(-\frac{1}{2xt} + x y \right) \right] \\ &\simeq \frac{M^2}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{(1-y)}{-t}} \sin\phi - \frac{iH_h}{2xt} \right], \\ (q \cdot \zeta_T^*)(q \cdot \zeta_T) &= \frac{M^4}{2t^2} \left[\frac{1}{4x^2} - t(1-y)\sin^2\phi \right], \\ \langle qq \rangle_{TP} &= \frac{3}{2} \frac{1}{(P \cdot q)^2} \frac{M^4}{t^2} \left[\frac{1}{4x^2} - t(1-y)\sin^2\phi \right] \\ &= 6x^2 \left[\frac{1}{4x^2} - t(1-y)\sin^2\phi \right] \simeq \frac{3}{2}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

por lo que $\langle qq \rangle - 1 \approx \frac{1}{2}$. En particular, para un haz de leptones longitudinalmente polarizados obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dx dy d\phi} &= \frac{MEe^4}{4\pi^2 q^4} \left\{ xy^2 \left[F_1 + \frac{1}{6}b_1 \right] + (1-y) \left[F_2 + \frac{1}{6}b_2 \right] \right. \\ &\quad \left. + H_l H_h 2x^2 \sqrt{-t} \sqrt{1-y} (y g_1 + 2g_2) \cos\phi \right\}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Blancos parcialmente polarizados

Los términos asociados a las funciones de estructura b_i en la ecuación (2.30) y en particular el factor $\langle qq \rangle - 1$ se pueden escribir de manera más general:

$$\frac{e^4}{16\pi^2 q^4} y l_{sym}^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^{Sb} = \frac{MEe^4}{2\sqrt{3}\pi^2 q^4} \text{Tr}(\rho \cdot \lambda_8) [b_1 x y^2 + b_2 (1-y)] + \mathcal{O}(\sqrt{-t}). \quad (2.40)$$

donde $\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{diag}(1, 1, -2)$ y ρ es la matriz de densidad de espín 1 que incluye la posibilidad de considerar una producción estadística para los blancos. Notemos que

$$\text{Tr}(\rho \cdot \lambda_8) = \frac{1}{2\sqrt{3}} [\langle S_x^2 \rangle + \langle S_y^2 \rangle - 2\langle S_z^2 \rangle + 3\langle S_z \rangle]. \quad (2.41)$$

Las situaciones que describimos en las secciones anteriores surgen como casos particulares. En efecto, con las mismas convenciones tenemos $\rho_{unpol} = (1/3) \text{diag}(1, 1, 1)$ y

$$\rho_{pLP} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} H_L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2(1 - H_L^2) & 0 \\ 0 & 0 & H_L^2 \end{pmatrix}; \quad \rho_{pTP} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 - H_T^2 & 0 & -2 + 3H_T^2 \\ 0 & 2H_T^2 & 0 \\ -2 + 3H_T^2 & 0 & 2 - H_T^2 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

donde H_L y H_T corresponden a las fracciones longitudinal y transversalmente polarizadas, respectivamente. En este contexto, $H^2 = 1$ representa el caso totalmente polarizado mientras que $H^2 = \frac{2}{3}$ describe al hadrón no polarizado. Identificamos entonces

$$\langle qq \rangle_{pLP} = -3 \left(\frac{2}{3} - H_L^2 \right) \langle qq \rangle_{LP} + 3(1 - H_L^2) \langle qq \rangle_{unpol}, \quad (2.43)$$

$$\langle qq \rangle_{pTP} = -3 \left(\frac{2}{3} - H_T^2 \right) \langle qq \rangle_{TP} + 3(1 - H_T^2) \langle qq \rangle_{unpol}, \quad (2.44)$$

donde el subíndice p indica polarización parcial. Por lo tanto, las secciones eficaces diferenciales correspondientes pueden escribirse

$$\frac{e^4}{16\pi^2 q^4} y l_{sym}^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^{Sb} = \frac{MEe^4}{2^2 \pi^2 q^4} \left(\frac{2}{3} - H_L^2 \right) [b_1 xy^2 + b_2(1 - y)] + \mathcal{O}(\sqrt{-t}), \quad (2.45)$$

para polarización longitudinal parcial, y

$$\frac{e^4}{16\pi^2 q^4} y l_{sym}^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^{Sb} = \frac{MEe^4}{2^3 \pi^2 q^4} \left(H_T^2 - \frac{2}{3} \right) [b_1 xy^2 + b_2(1 - y)] + \mathcal{O}(\sqrt{-t}), \quad (2.46)$$

para polarización transversal parcial.

Estas expresiones conducen a los resultados finales, que generalizan las expresiones obtenidas anteriormente:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dx dy d\phi} = & \frac{MEe^4}{4\pi^2 q^4} \left\{ xy^2 \left[F_1 + \left(\frac{2}{3} - H_L^2 \right) b_1 \right] + (1 - y) \left[F_2 + \left(\frac{2}{3} - H_L^2 \right) b_2 \right] \right. \\ & \left. - H_l H_h (2 - y) y x g_1 \right\}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dx dy d\phi} = & \frac{MEe^4}{4\pi^2 q^4} \left\{ xy^2 \left[F_1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} H_T^2 \right) b_1 \right] + (1 - y) \left[F_2 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} H_T^2 \right) b_2 \right] \right. \\ & \left. + H_l H_h 2x^2 \sqrt{-t} \sqrt{1 - y} (y g_1 + 2g_2) \cos \phi \right\}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Hemos considerado haces de leptones longitudinalmente polarizados en ambos casos. Además, vale la pena resaltar que si suponemos que se satisfacen exactamente las relaciones de Callan-Gross $F_2(x) = 2xF_1(x)$ y $b_2(x) = 2xb_1(x)$ recuperamos los resultados de [38].

2.4. Relación con la dispersión de Compton

En la teoría cuántica de campos interactuante, la denominada matriz S describe la amplitud de dispersión entre un estado inicial $|i\rangle$ y un estado final $|f\rangle$, ambos asintóticamente libres. En general, esta matriz se descompone separando la identidad, asociada a la preservación del estado inicial,

a través de $S = \mathbb{1} + iT$, de manera que el elemento de matriz de T entre dos estados asintóticos distintos $|i\rangle$ y $|f\rangle$ viene dado por

$$\langle i|T|f\rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_{m \in i} k_m - \sum_{m \in f} p_m\right) \mathcal{M}(k_m \rightarrow p_m) \quad (2.49)$$

donde hemos separado la delta de Dirac asociada a la conservación de momento de la amplitud de probabilidad de dispersión, \mathcal{M} , que no tiene por qué ser real, pero a partir de cuyo módulo cuadrado permite construir la sección eficaz diferencial. Ahora bien, como podemos pensar en la matriz S como un operador de evolución temporal asociado al Hamiltoniano (incluyendo la parte de interacción), que tiene que ser hermítico, es necesario se trate de una matriz unitaria, es decir que cumpla $S^\dagger S = \mathbb{1}$. Por lo tanto, obtenemos la identidad matricial

$$-i(T - T^\dagger) = T^\dagger T, \quad (2.50)$$

y luego evaluando el elemento de matriz entre dos estados, insertando una identidad o suma de estados entre las dos matrices del lado derecho, y suponiendo que $\mathcal{M}_{i \rightarrow f} = \mathcal{M}_{f \rightarrow i}^*$ vemos que en términos de las probabilidades de transición tenemos esquemáticamente

$$2\text{Im}[\mathcal{M}_{i \rightarrow f}] = \sum_k \mathcal{M}_{i \rightarrow k} \mathcal{M}_{f \rightarrow k}^* (2\pi)^4 (i - k) = \sum_k |\mathcal{M}_{i \rightarrow k}|^2 (2\pi)^4 (i - k), \quad (2.51)$$

donde la última igualdad vale solamente si el estado inicial y el final coinciden³.

En QFT perturbativa, la matriz S viene definida por las reglas de Feynman. Dado un proceso en particular, puede pensarse en $\mathcal{M}(s)$ como función de variable de Mandelstam s asociada al cuadrado de la energía en el sistema CM (que es un invariante de Lorentz). En el caso del DIS tendremos $s = -(P + q)^2$. Cuando la energía no es suficiente como para crear una partícula nueva en el proceso, la función es analítica, y luego puede extenderse analíticamente a (casi) todo el plano complejo. Si la condición anterior puede caracterizarse mediante $s < s_0$ para alguna escala s_0 , vemos que aparece un corte o *branch cut* en la extensión para el eje real a partir de $s > s_0$. Entonces, la discontinuidad en el corte viene dada por

$$\text{Disc}[\mathcal{M}(s)] = 2i\text{Im}[\mathcal{M}(s + i\epsilon)]. \quad (2.52)$$

Las discontinuidades o partes imaginarias aparecen en los diagramas de Feynman exclusivamente cuando alguno o varios de los propagadores internos pasan a estar *on-shell*, y en términos concretos se pueden calcular simplemente reemplazando dichos propagadores genéricamente por las deltas de Dirac asociadas a dicha condición. Por ejemplo para el de una partícula interna escalar de masa m y momento p tenemos

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow -2\pi i \delta(p^2 - m^2). \quad (2.53)$$

De esta manera, tenemos un conjunto de reglas muy simple para calcular la parte imaginaria de un dado diagrama, conocido como reglas de Cutkosky:

1. Cortamos el diagrama de todas las formas posibles en las que todos los propagadores afectados pueden estar *on-shell* simultáneamente.
2. Reemplazamos todos estos propagadores según (2.53) en el cálculo de la amplitud.

³Este caso se conoce como *forward scattering*.

3. Sumamos todas las contribuciones.

Este procedimiento resulta válido a todo orden en teoría de perturbaciones y permite demostrar la validez del teorema óptico en ese contexto.

En este trabajo nos interesa en particular la relación que establece el teorema óptico entre el DIS y otro proceso, denominado *forward Compton scattering* (FCS), que es el que podremos describir holográficamente. En el FCS, por ejemplo, se estudia el proceso $\gamma + h \rightarrow \gamma + h$ (donde γ representa un fotón y h un hadrón) según el esquema de la figura 7.

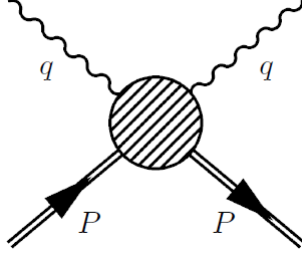


Figura 7: Esquema del proceso de FCS.

Como puede verse en dicha figura, el estado inicial es idéntico a la parte del DIS a partir de la cual definimos el tensor hadrónico $W^{\mu\nu}$. Como los estados salientes del DIS tienen que estar *on-shell*, la relación entre ambos procesos viene dada por el teorema óptico y puede pensarse esquemáticamente como se indica en la figura 8.

$$2\text{Im} \left(\text{Diagrama de FCS} \right) = \sum_X \left| \text{Diagrama de DIS} \right|^2$$

Figura 8: Relación esquemática entre el DIS y el FCS a partir del teorema óptico.

En efecto, la sección eficaz del FCS puede calcularse a partir de un nuevo tensor denominado $T^{\mu\nu}$ cuyos elementos de matriz son muy similares a los de (2.6):

$$T^{\mu\nu} \equiv i \int d^4x e^{ix \cdot q} \langle P, h | \mathcal{T} (J^\mu(x) J^\nu(0)) | P, h \rangle, \quad (2.54)$$

donde el conmutador de las corrientes se ve reemplazado por el producto temporalmente ordenado. Analizando la cinemática y las simetrías análogamente al caso del tensor hadrónico, podemos obtener una descomposición tensorial del $T^{\mu\nu}$ idéntica, en la cual los grados de libertad quedan codificados en unas nuevas funciones de estructura que llamaremos \tilde{F}_i, \tilde{g}_i y \tilde{b}_i . Concretamente, la relación entre estas funciones de estructura y las del tensor $W^{\mu\nu}$ es la siguiente:

$$F_i(x, q^2) = 2\pi \text{Im} \left[\tilde{F}_i(x, q^2) \right], \quad (2.55)$$

y análogamente para las funciones g_i y b_i . Cabe aclarar que la parte imaginaria que aparece en la ecuación (2.55) puede pensarse en consonancia con lo que dijimos anteriormente a partir de la

extensión analítica de las funciones en términos de la variable $\omega = 1/x$ y sus discontinuidades en los semiejes reales asociados a la región físicamente relevante $1 < |\omega| < \infty$.

Teniendo en cuenta las reglas de Cutkovsky aplicadas al caso del FCS, podemos obtener una expresión para la parte imaginaria del tensor asociado que será útil más adelante. En efecto, pensando en los cortes como en la inserción de una *identidad* en el espacio de estados *on-shell* y concentrándonos de momento en el caso de los estados de una partícula que llamaremos X , la identidad (2.51) reescrita en términos de $T^{\mu\nu}$ resulta ser

$$\begin{aligned} \text{Im}(T^{\mu\nu}) &= \pi \sum_{X, P_X} \langle P, h | J^\nu(0) | X, P_X \rangle \langle X, P_X | \tilde{J}^\mu(q) | P, h \rangle \\ &= 2\pi^2 \sum_X \delta(M_X^2 + (P + q)^2) \langle P, h | J^\nu(0) | X, P + q \rangle \langle X, P + q | J^\mu(0) | P, h \rangle, \end{aligned} \quad (2.56)$$

donde la sumatoria del primer renglón indica una integral sobre todos los posibles momentos *intermedios* P_X y posibles estados *on-shell* X , cada uno con su respectiva masa M_X . La relación entre los elementos de matriz viene dada por

$$\langle X, P_X | \tilde{J}^\mu(q) | P, h \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_X - (P + q)) \langle X, P + q | J^\mu(0) | P, h \rangle. \quad (2.57)$$

Para ser precisos, este tipo de expresiones son las que obtendremos mediante la utilización de los métodos holográficos. De hecho, nuestro estudio de correcciones en la expansión $1/N$ nos llevará a considerar estados intermedios de dos partículas, cuyos momentos llamaremos p' y q' . En ese caso, un análisis similar al anterior lleva a

$$\begin{aligned} \text{Im}(T^{\mu\nu}) &= \pi \sum_{X_1, p', X_2, q'} \langle P, h | J^\nu(0) | X_1, X_2 \rangle \langle X_1, X_2 | \tilde{J}^\mu(q) | P, h \rangle \\ &= \pi \sum_{X_1, X_2} \int \frac{d^3 p'}{2E_{p'}(2\pi)^3} \int \frac{d^3 q'}{2E_{q'}(2\pi)^3} \langle P, h | J^\nu(0) | X_1, X_2 \rangle \langle X_1, X_2 | \tilde{J}^\mu(q) | P, h \rangle \\ &= 4\pi^3 \sum_{X_1, X_2} \int \frac{d^4 q'}{(2\pi)^4} \delta(M_1^2 + q'^2) \delta(M_2^2 + (P + q - q')^2) |\langle P, h | J^\mu(0) | P, h \rangle|^2, \end{aligned} \quad (2.58)$$

donde la expresión cuadrática del final no es más que un abuso de notación.

Existen otras ventajas asociadas a estas relación entre el DIS y el FCS más allá del uso concreto que le daremos en el contexto de esta tesis y con el objetivo de implementar un estudio holográfico del primero de estos procesos. Esto es porque la dispersión de Compton suele analizarse en términos de las denominadas **amplitudes de helicidad**, en las que se eligen condiciones de helicidad bien definidas para los estados iniciales y finales. Existen algunas condiciones que estas amplitudes deben satisfacer, como por ejemplo que si tomamos $\gamma_h + h_H \rightarrow \gamma_{h'} + h_{H'}$, que denominaremos $\mathcal{A}(h, H, h', H')$, la conservación del momento angular implica que las amplitudes no nulas deberán cumplir $h + H = h' + H'$. Es por esto que no son todas independientes. Por ejemplo, para el caso de blancos de espín $1/2$ (y sin violación de paridad) sólo hay cuatro amplitudes independientes, que permiten darle un significado físico a ciertas combinaciones de las funciones de estructura:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(+, \uparrow, +, \uparrow) &= \tilde{F}_1 - \tilde{g}_1, & \mathcal{A}(+, \downarrow, +, \downarrow) &= \tilde{F}_1 + \tilde{g}_1, \\ \mathcal{A}(0, \uparrow, 0, \uparrow) &= \frac{\tilde{F}_2}{2x\tilde{F}_1}, & \mathcal{A}(+, \downarrow, 0, \uparrow) &= 2\sqrt{2} \frac{P}{Q} (\tilde{g}_1 + \tilde{g}_2). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Finalmente, para poder interpretar nuestros resultados para blancos dados por mesones vectoriales, también escribimos las fórmulas análogas considerando las definiciones de [38], donde $a_3 \equiv b_2/3 - b_3$ y $a_4 \equiv b_2/3 - b_4$:

$$\begin{aligned} A_{++,++} &= F_1 - \frac{(1 - 4x^2t)b_1}{3} - \frac{xt}{3}a_3 - g_1 - 4x^2tg_2 \\ &\simeq F_1 - \frac{b_1}{3} - g_1, \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} A_{+0,+0} &= F_1 + \frac{2(1 - 4x^2t)b_1}{3} + \frac{2xt}{3}a_3 \\ &\simeq F_1 + \frac{2b_1}{3}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} A_{+0,0+} &= \sqrt{-t} \left[2x(g_1 + g_2) + \frac{a_3}{2} + \frac{(1 - 4x^2t)a_4}{4} \right] \\ &\simeq \sqrt{-t} \left[2x(g_1 + g_2) + \frac{a_3}{2} + \frac{a_4}{4} \right], \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} A_{+-,+-} &= F_1 - \frac{(1 - 4x^2t)b_1}{3} - \frac{xt}{3}a_3 + g_1 + 4x^2tg_2 \\ &\simeq F_1 - \frac{b_1}{3} + g_1, \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} A_{+-,00} &= \sqrt{-t} \left[2x(g_1 + g_2) - \frac{a_3}{2} - \frac{(1 - 4x^2t)a_4}{4} \right] \\ &\simeq \sqrt{-t} \left[2x(g_1 + g_2) - \frac{a_3}{2} - \frac{a_4}{4} \right], \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$A_{+-,-+} = -2xta_3 \simeq 0, \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} A_{0+,0+} &= -F_1 + \frac{(1 - 4x^2t)F_2}{2x} + \frac{(1 - 4x^2t)b_1}{3} - \frac{(3 - 12x^2t + 16x^4t^2)b_2}{18x} \\ &\quad + \frac{4(-2x^2t)b_3}{3x} + \frac{2xt}{3}(1 - 4x^2t)b_4 \\ &\simeq -F_1 + \frac{F_2}{2x} + \frac{b_1}{3} - \frac{b_2}{6x}, \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} A_{00,00} &= -F_1 + \frac{(1 - 4x^2t)F_2}{2x} - \frac{2(1 - 4x^2t)b_1}{3} + \frac{(3 - 12x^2t + 16x^4t^2)b_2}{9x} \\ &\quad - \frac{8(-2x^2t)b_3}{3x} - \frac{4xt}{3}(1 - 4x^2t)b_4 \\ &\simeq -F_1 + \frac{F_2}{2x} - \frac{2b_1}{3} + \frac{b_2}{3x}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Notemos que la segunda línea en cada una de estas expresiones corresponde siempre al límite $|t| \ll 1$.

2.5. Expansión en producto de operadores de W

El tensor $T^{\mu\nu}$ asociado al FCS está definido en (2.54) en términos de los elementos de matriz del producto temporalmente ordenado de dos corrientes. Dada la transformada de Fourier $\tilde{J}^m(q) = \int d^4x e^{iq \cdot x} J^\mu(x)$, vemos que en el régimen de $q \rightarrow \infty$ los puntos de aplicación de ambas corrientes resultan ser muy cercanos. Tiene sentido entonces plantear una expansión en producto de operadores

(OPE) [2, 36]. De manera genérica, basándonos en la invariancia de Lorentz y considerando por el momento blancos sin espín (o en casos más generales promediando el espín), tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\tilde{J}^n(q)) \approx & \sum_{n=0,2,4,\dots;j} \mathcal{O}_{n,j}^{\rho_1 \dots \rho_n} \frac{q_{\rho_3 \dots \rho_n}}{q^{n+\delta_{n,j}}} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\frac{1}{2}\gamma_{n,j}} \times \\ & \left[C_{n,j}^{(1)} q_{\rho_1} q_{\rho_2} (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) + C_{n,j}^{(2)} (q^2 g_{\mu\rho_1} - q_\mu q_{\rho_1}) (q^2 g_{\nu\rho_2} - q_\nu q_{\rho_2}) \right] \end{aligned} \quad (2.68)$$

donde también hemos tenido en cuenta que nos interesan los elementos de matriz diagonales. En (2.68), n indica el espín del operador, mientras que el índice j numera los distintos operadores de espín n . Además, la dimensión de escaleo clásica viene dada por $\delta_{n,j}$ mientras que $\gamma_{n,j}$ es la denominada dimensión anómala, que permite incorporar las correcciones cuánticas. Los coeficientes adimensionales $C_{n,j}^{(i)}$ pueden ser determinados en el contexto perturbativo calculando la suficiente cantidad de valores de expectación entre estados de quarks y gluones libres. Por otro lado, suelen definirse dos cantidades importantes en este contexto a partir de estos parámetros: la dimensión total $\Delta_{n,j} \equiv \delta_{n,j} + \gamma_{n,j}$ y el *twist* $\tau_{n,j} \equiv \Delta_{n,j} - n$. Notemos que los elementos de matriz sólo pueden depender de P^μ y de la masa M , o equivalentemente, de la escala de confinamiento Λ . Por análisis dimensional tienen que ser de la forma

$$\langle P, h | \mathcal{O}_{n,j}^{\rho_1 \dots \rho_n} | P, h \rangle = A_{n,j} (-2)^n \frac{P^{\rho_1} \dots P^{\rho_n}}{\Lambda^{n+2-\delta_{n,j}}} + \dots \quad (2.69)$$

para algún conjunto de coeficientes numéricos $A_{n,j}$ (y donde el $(-2)^n$ ha sido extraído por conveniencia). Los puntos suspensivos representan a los denominados términos de traza, en los que alguna cantidad de pares de factores $P^\alpha P^\beta$ son reemplazados por $g^{\alpha\beta} P^2$, y la aparición de la masa hadrónica indica que en lo que sigue podemos despreciarlos. Por lo tanto, al insertar este resultado en (2.68), contraer con los factores de q^μ y recordar la definición del parámetro de Bjorken $x = -q^2/2P \cdot q$ obtenemos expresiones de la forma

$$\langle P, h | \mathcal{O}_{n,j}^{\rho_1 \dots \rho_n} | P, h \rangle \frac{q_{\rho_3 \dots \rho_n}}{q^{n+\delta_{n,j}}} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\frac{1}{2}\gamma_{n,j}} = A_{n,j} \left(\frac{1}{x} \right)^{n-2} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\frac{1}{2}\tau_{n,j}-2} P^{\rho_1} P^{\rho_2}. \quad (2.70)$$

Antes de continuar ya podemos extraer dos conclusiones importantes. La primera es que la expansión en serie que estamos analizando sólo tiene validez en la región $1 < x < \infty$, que se encuentra fuera del rango físico del DIS. Esto era de esperarse dado que estamos analizando el FCS: para obtener el resultado físico es necesario realizar una continuación analítica en el plano $\omega = 1/x$ y deformar el contorno de integración, de la misma manera que para obtener las funciones de estructura del tensor hadrónico $W^{\mu\nu}$ a partir de las del tensor $T^{\mu\nu}$. La segunda es que, como $q^2 \gg \Lambda^2$ el OPE estará dominado por los operadores que clásicamente tienen menor *twist*. En QCD, por ejemplo, los objetos fundamentales son los campos asociados a los quarks y a los gluones y las derivadas covariantes. Por lo tanto, cobran particular relevancia los de *twist* $\tau = 2$ que son los del menor *twist* posible: están contruidos a partir de dos operadores de quarks o dos curvaturas gluónicas, junto con cualquier número de derivadas covariantes (sin contraer). En concreto, (2.68) se transforma en

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} \approx & i \sum_{n_{\text{par}},j} A_{n,j} \frac{1}{x^n} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\frac{1}{2}\tau_{n,j}-1} \times \\ & \left[C_{n,j}^{(1)} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + C_{n,j}^{(2)} \frac{4x^2}{q^2} \left(P_\mu + \frac{q_\mu}{2x} \right) \left(P_\nu + \frac{q_\nu}{2x} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.71)$$

de manera que emerge la estructura de (2.13).

El resultado que acabamos de enunciar contiene la máxima información que podemos obtener a partir del OPE sin especificar el régimen en el que estamos trabajando: las conclusiones un tanto más profundas que pueden obtenerse no serán las mismas si la teoría está débil o fuertemente acoplada. En el caso (libre) de acoplamiento nulo, por ejemplo, el *twist* de los operadores exclusivamente en las dimensiones de escaleo clásicas $\delta_{n,j}$, y en el contexto de una teoría que contenga únicamente campos en la representación adjunta del grupo de gauge como $\mathcal{N} = 4$ SYM esto implica que (2.72) estará dominado por los que tengan una única traza: los únicos que pueden tener $\tau_{n,j} = 2$. Cuando se enciende el acoplamiento, aparecen dimensiones anómalas $\gamma_{n,j}$. En los casos como QCD o una teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM deformada en la escala de confinamiento IR Λ , es decir, en el contexto de teorías con libertad asintótica en escalas UV, esta dimensión anómala permanece pequeña para $q \rightarrow \infty$ y valores razonables del número de colores N , de manera que la descripción anterior se mantiene. Sin embargo, cuando nos movemos hacia una situación en la que $N \rightarrow \infty$ y la constante de 't Hooft $\lambda = g_{YM}^2 N$ se hace grande, las dimensiones anómalas de los operadores que estábamos analizando crecen. En este contexto, es razonable esperar que el OPE pase a estar dominado por los denominados operadores *protegidos*, cuya dimensión anómala permanece pequeña por alguna razón de simetría. Para $\mathcal{N} = 4$ SYM, éstos resultan ser operadores de *doble traza*, e incluyen por ejemplo al tensor de energía-momento y a las corrientes conservadas. Diremos que estos operadores *protegidos* tienen *twists* τ_p . Cualitativamente hablando, puede decirse que hay una transición cerca de $\lambda \sim 1$ que separa los dos comportamientos que acabamos de describir.

Antes de completar esta sección, resta analizar un aspecto relevante en el régimen de N grande: el conteo de potencias de $1/N$. Si los operadores están normalizados de manera tal que la creación de hadrones se da al orden N^0 . Si llamamos $\mathcal{O}(\mathcal{P})$ a los operadores de un dado *twist* construidos a partir de algún operador protegido \mathcal{P} que dominan en acoplamiento fuerte, tenemos que distinguir dos casos:

$$\begin{aligned} A_{n,p} \equiv \langle P, h | \mathcal{O}(\mathcal{P}) | P, h \rangle &\sim N^0 \text{ si } \langle P, h | \mathcal{O}(\mathcal{P}) | 0 \rangle \neq 0, \\ \langle P, h | \mathcal{O}(\mathcal{P}) | P, h \rangle &\sim N^{-2} \text{ si } A_{n,p} \equiv \langle P, h | \mathcal{O}(\mathcal{P}) | 0 \rangle = 0, \end{aligned}$$

donde la diferencia en la potencia de N proviene del hecho de que en el segundo caso el diagrama de Feynman dominante es conexo, mientras que en el primero resultan ser más relevantes ciertos diagramas con sectores desconexos. En pocas palabras, en el primer caso estamos considerando un operador que pueden crear hadrones. Pensando en la notación de doble índice de 't Hooft, esto genera estructuras de trazas de color distintas. En el límite estricto $N \rightarrow \infty$ la creación de hadrones en el proceso está estrictamente prohibida, pero en los casos un tanto más realistas en que N es grande pero finito, debemos considerar esta posibilidad pues en principio permite la aparición de operadores en la expansión que podrían tener un *twist* más pequeño que los demás.

Definiendo los momentos de las funciones de estructura F_1 y F_2 (cuya relevancia fenomenológica analizaremos más adelante) según

$$M_n^{(s)}(q^2) \equiv \int_0^1 dx x^{n-1} (2x)^{1-s} F_s(x, q^2), \quad (2.72)$$

con $s = 1, 2$, podemos resumir todos los resultados de esta sección en la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
M_n^{(s)}(q^2) \approx & \frac{1}{4} \sum_j C_{n,j}^{(s)} A_{n,j} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\frac{1}{2}\tau_{n,j}-1} + \frac{1}{4} \sum_{Q_p=Q} C_{n,p}^{(s)} A_{n,p} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\tau_p-1} \\
& + \frac{1}{4N^2} \sum_{Q_p \neq Q} C_{n,p}^{(s)} a_{n,p} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\tau_p-1}.
\end{aligned} \tag{2.73}$$

En conclusión, los tres términos que aparecen en (2.73) dominan el proceso de DIS (siempre con $\Lambda^2 \ll q^2$) en algún régimen:

- El primero es el más relevante para acoplamiento débil, y representa la contribución de los operadores con una sólo traza.
- El segundo domina en el límite de acoplamiento fuerte con un número de colores infinito en el que la creación hadrónica está suprimida, y representa la contribución de operadores de doble traza protegidos. Si los etiquetamos en base a su carga Q la carga asociada a la corriente J^μ , estos operadores cumplen en general que $\tau_Q \sim Q$.
- El tercero domina cuando el acoplamiento es grande y el número de colores es grande pero finito. La contribución más relevante vendrá dada por el operador de menor *twist* de la teoría, que llamaremos τ_c .

La transición entre el dominio del segundo y el tercer término se da aproximadamente cuando $q^2 \sim \Lambda^2 N^{2/(\tau_Q - \tau_c)}$. Esto quiere decir que si bien está suprimido por un factor de $1/N^2$ con respecto a los demás, este término será especialmente importante en el límite que llamaremos de altas energías $q \rightarrow \infty$.

Como veremos más adelante, el análisis holográfico permite describir desde primeros principios toda la estructura que aparece en el régimen de acoplamiento fuerte.

2.6. La región de Regge

En el proceso de DIS que estamos considerando, la energía en el sistema centro de masa (CM) viene dada por

$$s \equiv -(P+q)^2 = M^2 - q^2 - 2P \cdot q \approx q^2 \left(\frac{1}{x} - 1 \right), \tag{2.74}$$

es decir el invariante de Mandelstam asociado al canal- s . En esta sección analizamos más detalladamente la región paramétrica en la que el parámetro de Bjorken es muy chico. Como vemos en (2.74), esto es equivalente a considerar la región en la que la energía del CM es muy grande.

En el lenguaje partónico, cuando las interacciones son fuertemente acopladas se esperaría que los partones se vayan separando en una cantidad cada vez mayor de partículas con fracciones de la energía y del momento del hadrón cada vez menores. Si bien esta imagen esquemática no es confiable en el régimen que estamos estudiando, da una buena idea esquemática de por qué las funciones de estructura desarrollan un pico en la región $x \rightarrow 0$. En el contexto de QCD, esta región paramétrica se denomina región Regge, y este comportamiento suele explicarse en base al intercambio de un *Pomeron*, un objeto compuesto por una trayectoria de estados tipo *glueball* con espines cada vez mayores, cuya existencia ha sido conjeturado repetidas veces y en distintos contextos. No es nuestro objetivo abarcar los detalles del cálculo perturbativo, que pueden encontrarse en [39].

A continuación simplemente destacamos algunas de sus principales consecuencias, con los que más adelante compararemos los resultados holográficos.

El análisis de las propiedades analíticas de las amplitudes de dispersión de cuatro puntos permite anticipar que la misma crecerá como s^{α_0} con s , donde α_0 toma un valor entre 1 y 2 y se denomina pendiente de Regge (a veces también se la nota α_R). Los diferentes estados que componen al Pomeron forman una trayectoria aproximadamente lineal en el espacio de fases formado por los cuadrados de las masas y los espines, y α_0 representa a la pendiente de esta recta. En términos efectivos, tanto la interacción como la amplitud puede pensarse como mostramos en la figura 9. Este

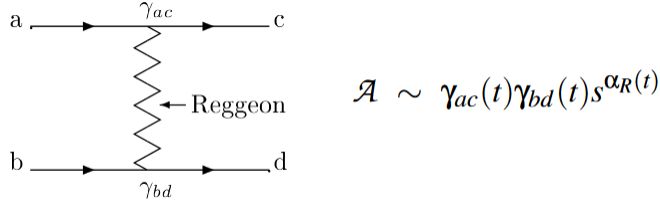


Figura 9: A la izquierda, presentamos representamos de manera efectiva la descripción de una dispersión de cuatro puntos en la teoría de Regge. A la derecha, damos la forma aproximada que toma la amplitud correspondiente. Los factores γ_{ij} contienen la información de los estados externos, y t es el invariante de Mandelstam asociado al intercambio que se da en la figura.

tipo de resultados se enmarcan en lo que se conoce como la teoría de Regge. Aplicado al proceso de DIS, esto implica que las funciones de estructura deben comportarse como $x^{-\alpha_0}$.

No siempre es sencillo reproducir los comportamientos predichos por la teoría de Regge a partir del tratamiento perturbativo de las teorías de campos. En el contexto de QCD, la principal herramienta se conoce como *formalismo BFKL* [40-43]. Esta técnica se basa en resumar los diagramas tipo escalera a partir de una recursión esquematizada en la figura 10. En el caso del DIS tenemos

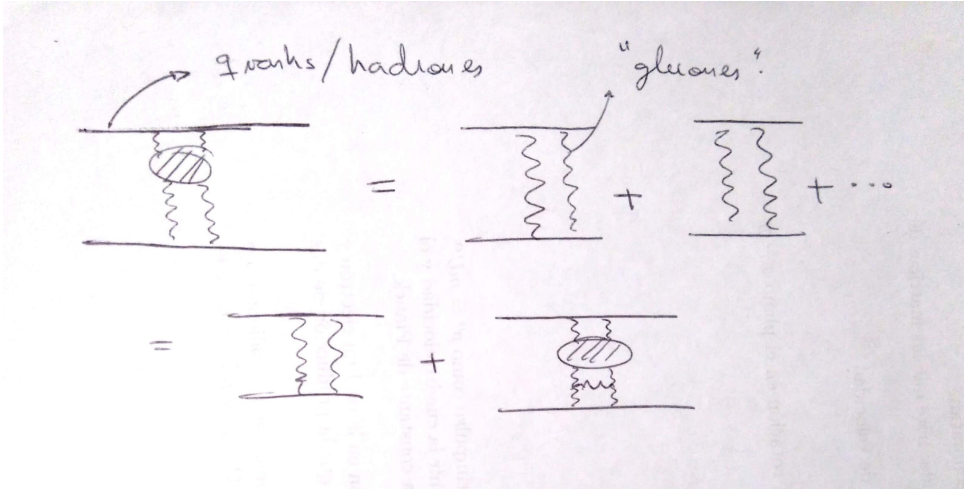


Figura 10: Representación esquemática de la recursión en la que se basa el formalismo BFKL.

$t = 0$, y la ecuación recursiva se vuelve simplemente una ecuación de difusión. En consecuencia, la amplitud puede escribirse de la siguiente manera:

$$\mathcal{A} \sim \int \frac{dp_{\perp}}{p_{\perp}} \int \frac{dp'_{\perp}}{p'_{\perp}} P_{ac}(p_{\perp}) P_{bd}(p'_{\perp}) \mathcal{K}(s, p_{\perp}, p'_{\perp}), \quad (2.75)$$

En (2.75), p_\perp es el momento transverso intercambiado en la dispersión, los P_{ab} se denominan factores de impacto y contienen la información de los estados externos, y \mathcal{K} se conoce como el *kernel* BFKL. Para N grande y $\lambda = 4\pi\alpha_s N = g_{YM}^2 N$ pequeño este kernel toma la forma

$$\mathcal{K}(s, p_\perp, p'_\perp) \approx \frac{s^{j_0}}{\sqrt{4\pi D \log s}} \exp \left[\frac{-1}{4D \log s} (\log p_\perp / p'_\perp)^2 \right], \quad (2.76)$$

con $j_0 = 1 + \frac{\log 2}{\pi^2} \lambda$ y $D = \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2} \lambda$. La presencia del \mathcal{K} expresado en (2.76) indica que en la dispersión que estamos considerando se produce un fenómeno difusivo en el *momento transverso*.

Como veremos más adelante, en el régimen en el que la constante de acoplamiento de 't Hooft se vuelve grande, estos comportamientos pueden ser explicados en detalle desde el punto de vista holográfico. En este contexto, el Pomeron está relacionado con un modo particular asociado a las perturbaciones de la métrica y, como es de esperarse debido a su relación con los gravitones, establecida en el diccionario holográfico, el tensor de energía-momento de la teoría juega un papel preponderante en esta descripción.

Parte II

DIS para blancos escalares: el modelo más simple y sus complicaciones

Capítulo 3

Descripción holográfica del proceso

En la parte I presentamos una descripción resumida de la dualidad entre teorías de gauge y teorías de campos, así como del proceso de dispersión de altas energías conocido como DIS. El objetivo de esta tesis consiste en aprovechar al máximo la dualidad AdS/CFT para extraer información sobre la estructura interna de los hadrones y la física del confinamiento mediante la descripción holográfica del DIS. El método que describimos a continuación para lograrlo fue presentado inicialmente por Polchinski y Strassler en [2] para el caso de blancos escalares y de espín 1/2 (promediando sobre las polarizaciones), aunque luego fue extendido a casos más generales. Los resultados que pueden obtenerse utilizando este método serán válidos en el régimen de λ grande y $N \rightarrow \infty$, aunque nos adentraremos un tanto en las correcciones no planares.

El procedimiento consiste en considerar la descripción del DIS basada en su relación con el FCS y utilizar la dualidad AdS/CFT y más precisamente el *Ansatz* de Witten para calcular los elementos de matriz relevantes: valores de expectación de una y dos corrientes electromagnéticas J^μ evaluados entre distintos estados hadrónicos.

Consideremos una teoría de campos genérica en la que la simetría conforme esté rota aproximadamente en una escala IR Λ , de manera tal que dicha simetría se recupere asintóticamente en el UV. La teoría gravitatoria dual tendrá entonces alguna geometría que en el infrarojo dependerá del mecanismo de ruptura empleado, pero tal que para distancias radiales mucho mayores a $r_0 = \Lambda R^2$ se verá aproximadamente como $\text{AdS}_5 \times W$

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{R^2}{r^2} dr^2 + R^2 ds_W^2 = \frac{R^2}{z^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2) + R^2 ds_W^2, \quad (3.1)$$

con W alguna variedad de Einstein compacta de cinco dimensiones, y donde en la última igualdad hemos escrito el intervalo en términos de la variable $z = R^2/r$. Recordemos que en términos de la constantes que definen las teorías de cuerdas y de campos involucradas el radio es tal que $R^4/\alpha'^2 = 4\pi\lambda$, donde $\alpha' = l_s^2$, con l_s la longitud de las cuerdas fundamentales (el único parámetro libre de la teoría) y λ es la constante de 't Hooft. Ahora bien, la escala característica de nuestro proceso es $r_{\text{int}} = qR^2$, por lo que el hecho de estudiar el régimen de altas energías en el que $q^2 \gg \Lambda^2$ indica que, al menos en una primera aproximación, podemos concentrarnos en la región asintótica (3.1). Igualmente, en la sección siguiente analizaremos más detalladamente un ejemplo específico: el modelo *hard-wall*. Aquí y en adelante utilizaremos las convenciones descriptas en el apéndice A.

Ahora bien, no estamos trabajando en el contexto del Modelo Estándar, que describe las interacciones fundamentales entre las partículas de la naturaleza, sino considerando una deformación de $\mathcal{N} = 4$ SYM, y por lo tanto necesitamos definir a qué nos referimos cuando hablamos de la *corriente eléctrica*. El contenido de campos de la teoría está descrito en el apéndice B. Podemos pensar que para simular el electromagnetismo *gaugeamos* un subgrupo $U(1) \subset SU(4)$, agregando

un nuevo campo de gauge. Entre los quince generadores del álgebra de Lie correspondiente T^A con $A = 1, \dots, 15$ existen tres que son diagonales, comúnmente denominados T^3 , T^8 y T^{15} . Resulta convencional [44, 45] elegir a $T^3 = \text{diag}(1/2, -1/2, 0, 0)$ como generador de la simetría *electromagnética*¹, ante el cual los fermiones tienen cargas $\pm 1/2$ y dos de los escalares tienen carga $1/2$. Asimismo, la corriente conservada está dada por

$$J_{\text{EM}}^\mu = J_3^\mu = \frac{1}{2} \left[\lambda_1^\dagger \bar{\sigma}^\mu \lambda_1 - \lambda_2^\dagger \bar{\sigma}^\mu \lambda_2 + \sum_{p=3,4} X_{1p}^\dagger \left(-i \vec{D}_\mu + i \overleftarrow{D}_\mu \right) X_{1p} \right], \quad (3.2)$$

donde en todos los términos estamos sumando sobre los índices de color de manera implícita, mientras que D_μ representa a la derivada covariante tanto con respecto a $SU(N)$ como con respecto al $U(1)$ extra. A partir de esta corriente tenemos un Lagrangiano de interacción $L_{\text{int}} \equiv e A_\mu J_3^\mu$, con A_μ el campo de gauge que hemos agregado y e la *carga eléctrica*. Más aún, para reproducir el DIS en su totalidad podemos incluso agregar un leptón l con masa m cargado ante este $U(1)$ pero sin otras interacciones con los campos de la teoría original. En resumen, trabajaremos con

$$L = L_{\mathcal{N}=4\text{SYM}} + L_{\text{int}} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \bar{l} (\not{D} + m) l. \quad (3.3)$$

El diccionario holográfico indica que las fuentes de las corrientes conservadas en la teoría de campos que vive en el borde del espacio asintóticamente AdS están asociadas a vectores de algún campo de gauge A_m , con un índice $m = 0, \dots, 4$ asociado a las coordenadas en AdS_5 . Estas coordenadas están definidas de manera tal que para $m = \mu$ coinciden con las del borde. El vector A_m no es otra cosa que el bosón de gauge asociado a alguna simetría interna (una isometría de W) que haya sido *gaugeada*. Más precisamente aún, notemos que nuestro objetivo es que la perturbación sea tal que pueda llegar hasta el borde del espacio AdS, situado a una distancia infinita de cualquier punto del interior o *bulk*, por lo que es necesario excitar un modo no-normalizable del campo A_m . Dependiendo del modelo en particular la reducción dimensional de Kaluza-Klein (KK) será distinta, pero el bosón no-masivo A_m siempre proviene en parte de una perturbación de la forma

$$\delta g_{ma} \sim A_{(m} K_{a)}, \quad (3.4)$$

donde K^a es el vector de Killing asociado a la isometría gaugeada. Las ecuaciones de movimiento correspondientes a las componentes de A_m son las de Einstein-Maxwell en AdS_5 , y junto con la condición de contorno impuesta por considerar una inserción $n \cdot \tilde{J}(q)$ vienen dadas por

$$\nabla_m F^{mn} = 0, \quad A_\mu(x, r \rightarrow \infty) = A_\mu^{(4d)}(x) = n_\mu e^{iq \cdot x}, \quad A_r(x, r \rightarrow \infty) = 0, \quad (3.5)$$

con ∇ la derivada covariante en AdS, n_μ algún vector de polarización y $F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m$.

Análogamente, si los estados hadrónicos *on-shell* $|P, h\rangle$ son creados por un operador $\mathcal{O}_{h,P}$, en la descripción holográfica estarán relacionados con modos normalizables del campo que en el borde funcione como fuente para dicho operador, y que llamaremos genéricamente Φ_h . Existirá entonces² algún término de interacción entre A_m y Φ en la acción del *bulk*, y lo denominaremos $S_{A\Phi\Phi}$. En ese caso, el *Ansatz* de Witten implica la identificación

$$\langle \mathcal{O}_h(i) | \tilde{J}^\mu(q) | \mathcal{O}_h(f) \rangle \equiv \frac{\delta}{\delta A_\mu(x, r \rightarrow \infty)} \left(S_{A\Phi\Phi} [A_m(x, z), \Phi_i(x, z), \Phi_f^*(x, z)] \right) |_{A_\mu(x, r \rightarrow \infty)=0}, \quad (3.6)$$

¹Presentamos un análisis detallado en el apéndice A. Por otro lado, volveremos sobre este tema en el capítulo 4.

²Notemos que dada la relación entre A_m y el gravitón este término de interacción tiene que existir, y se puede obtener en parte expandiendo el término cinético de Φ a partir de (3.4).

con la acción de interacción evaluada en las correspondientes soluciones *on-shell*. Cabe resaltar que una identificación análoga será válida para la función de dos corrientes y una interacción (fundamental o efectiva) $S_{AA\Phi\Phi}$.

En resumen, el cálculo holográfico de las funciones temporalmente ordenadas de una y dos corrientes entre estados hadrónicos asociadas al tensor $T^{\mu\nu}$ corresponde a considerar un proceso análogo al FCS en la teoría dual. En efecto, podemos pensar que una perturbación no-normalizable del fotón A_m se propaga desde el borde hacia el interior de AdS_5 e interactúa con una perturbación normalizable asociada al estado hadrónico correspondiente. En la figura 11 ilustramos esta idea con uno de los procesos posibles en el interior de AdS , que de hecho será relevante a lo largo de este capítulo.

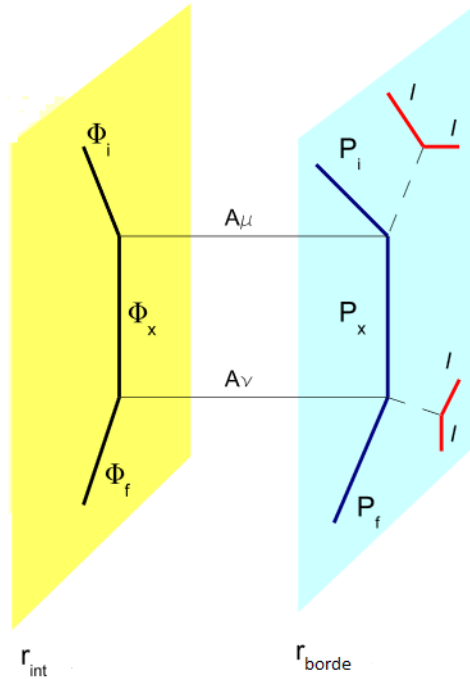


Figura 11: Descripción esquemática del proceso de DIS en la teoría definida en el borde de AdS_5 y su dual holográfico. El proceso en el borde es el DIS (FCS) de la teoría de campos, del que participan el leptón l , los fotones virtuales y los hadrones inicial, intermedio y final, cuyos momentos están dados por P_i , P_x y P_f , respectivamente. Las inserciones de las corrientes generan una perturbación de los campos de gauge del interior de AdS , que interactúan con modos del campo Φ que representan a los hadrones duales cerca del radio de interacción $r_{int} = qR^2$.

La que acabamos de describir es simplemente una visión esquemática, pero un análisis más detallado de la amplitud asociada a este proceso de dispersión en el *bulk* llevará a conclusiones más complejas tanto en el régimen de $x \ll \lambda^{-1/2}$ como al considerar las correcciones en la expansión en serie de potencias de $1/N^2$. En particular, es importante resaltar que tomando de manera estricta el límite $N \rightarrow \infty$ generamos una simplificación drástica la teoría gravitatoria: como hemos visto en la introducción, sólo nos permite estudiar el régimen clásico. En efecto, en el límite de bajas energías de la teoría de cuerdas sólo sobreviven los grados de libertad de la supergravedad, y la acción efectiva en cinco dimensiones es esquemáticamente de la forma

$$S_{5d} = \frac{1}{2\kappa_5^2} \int d^5x \sqrt{-g} \left[R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \dots \right], \quad (3.7)$$

donde R es el escalar de Ricci, ϕ es algún campo escalar, por ejemplo el dilatón, y los puntos suspensivos incluyen a todos los demás campos. El punto importante es que la constante de acoplamiento κ^5 es tal que $\kappa_5^{-2} \propto N^2$ (y este es el único lugar en el que aparece el parámetro N). Ahora bien, en la expresión (3.7) vemos que para obtener un campo escalar canónicamente normalizado es necesario redefinirlo según $\phi \rightarrow \tilde{\phi} = N\phi$. De hecho, será necesario realizar una redefinición similar para cada uno de los campos de la teoría. En consecuencia, los términos de interacción cúbicos quedarán suprimidos por un factor $1/N$, los cuárticos serán proporcionales a $1/N^2$, y así sucesivamente. De esta manera, vemos que el límite $N \rightarrow \infty$ suprime una gran cantidad de diagramas, restringiendo el análisis a procesos con la menor cantidad posible de vértices. En particular, se eliminan todos los diagramas con *loops*, asociados a las correcciones cuánticas. Volveremos sobre esto más adelante y con un mayor grado de detalle.

3.1. El modelo *hard-wall* como caso testigo y el ejemplo del glueball

En esta sección realizamos explícitamente los cálculos descriptos genéricamente en la sección anterior en el caso del modelo holográfico denominado *hard-wall*. Sabemos que una teoría en la que la simetría conforme está rota en una escala Λ tendrá un dual holográfico cuya métrica asintótica será de la forma (3.1), pero en la que la geometría se verá deformada en las cercanías de r_0 , y la idea del modelo que estamos considerando consiste en suponer la deformación más simple posible: el espacio-tiempo se *termina* en $r = r_0$, mientras que la métrica de $AdS_5 \times W$ es válida para $r_0 \leq r < \infty$. Además, consideramos que el espacio interno es una 5-esfera, y denominamos genéricamente Ω al conjunto de ángulos $\theta^1, \dots, \theta^5$ con los que la parametrizamos. De esta manera, se maximizan las coincidencias con los cálculos que suelen aparecer en el contexto de $\mathcal{N} = 4$ SYM sin deformaciones. Cabe aclarar que, como era de esperarse dado la manera abrupta en que impusimos el *cutoff* radial, esta geometría no es una solución exacta³ de la supergravedad tipo IIB. Sin embargo, ha mostrado a lo largo de los años ser un modelo efectivo que captura gran parte de la física relevante. Por otro lado, y si bien elegimos este modelo para poder realizar más simplemente los cálculos, es importante notar que gran parte de los resultados de este capítulo son mucho más generales. Esto es porque dependen casi exclusivamente de los comportamientos asintóticos pues por ahora nos concentramos en el régimen de supergravedad $1 \ll \lambda \ll N$ y en el límite $N \rightarrow \infty$. Para poder continuar necesitamos dos ingredientes: las soluciones de las ecuaciones de movimiento para los modos relevantes de campos vectoriales y hadrones duales, por un lado, y las correspondientes acciones de interacción, por el otro.

El campo A_m será en este caso el bosón de gauge asociado a un subgrupo $U(1)$ del grupo de isometrías de la esfera, asociado a la simetría- R del lado de la teoría de campos. Como dijimos, convencionalmente suele considerarse el bosón asociado al generador T^3 para evitar las anomalías. En términos de la coordenada z y trabajando en el gauge axial en el que $A_z = 0$ y eligiendo una componente de Fourier $A_\mu(x, z) = e^{iq \cdot x} A_\mu^{(q)}(z)$ basada en la condición de contorno (3.5), las ecuaciones de Maxwell-Einstein para el bosón de gauge resultan ser

$$iq \cdot \partial_z A^{(q)} = 0, \quad \partial_z^2 A_\mu^{(q)} - \frac{1}{z} \partial_z A_\mu^{(q)} - q^2 A_\mu^{(q)} + q \cdot A^{(q)} q_\mu = 0, \quad (3.8)$$

donde la contracción simboliza $v \cdot w = \eta^{\mu\nu} v_\mu w_\nu$. La primera ecuación implica que $q \cdot A^{(q)}$ es una

³En las soluciones reales, la deformación cerca de la escala r_0 viene en general acompañada por un perfil dilatónico no trivial, y el espacio ya no puede considerarse como AdS_5 en la región IR. Un ejemplo de este fenómeno sería el modelo denominado *soft-wall* [46], aunque existen otros.

constante en términos de z . Para los modos normalizables, sabemos que $A_\mu(z \rightarrow 0) \rightarrow 0$, lo que implica que $q \cdot A = 0$ en todo el rango, con lo que puede eliminarse este término en la segunda ecuación. Sin embargo, si queremos describir una excitación que viene desde el borde la condición de contorno impide esta simplificación. Tenemos entonces que

$$A_\mu(z \rightarrow 0) \rightarrow n_\mu e^{iq \cdot x} \Rightarrow q \cdot A|_{z=0} = q \cdot n e^{iq \cdot x} = \text{const.} \quad (3.9)$$

Por lo tanto, el la solución no normalizable toma la forma

$$A_\mu(x, z) = \left[c_\mu q z K_1(qz) + \frac{(n \cdot q) q_\mu}{q^2} \right] e^{iq \cdot x}, \quad c_\mu = n_\mu - \frac{(q \cdot n) q_\mu}{q^2}. \quad (3.10)$$

Donde K_ν refiere a las funciones de Bessel modificadas de segunda especie. A modo de comparación, vale la pena decir que en el trabajo original [2] los autores utilizan la coordenada r y un gauge similar al gauge Lorentz, de manera que obtienen

$$A_\mu(x, z) = n_\mu e^{iq \cdot x} \frac{q R^2}{r} K_1\left(\frac{q R^2}{r}\right), \quad A_r(x, z) = i(n \cdot q) e^{iq \cdot x} \frac{R^4}{r^3} K_0\left(\frac{q R^2}{r}\right). \quad (3.11)$$

En el apéndice C mostramos que ambas expresiones llevan a los mismos resultados para las funciones de estructura. Para esto, notamos que dada la estructura tensorial de $W^{\mu\nu}$ podemos trabajar suponiendo sin pérdida de generalidad que la polarización de fotón es transversal, esto es, $n \cdot q = 0$ (y por lo tanto $A_r = 0$). Por otro lado, notemos que las funciones de Bessel K_ν decaen exponencialmente al adentrarse en el interior de AdS_5 , y como q es muy grande este decaimiento es extremadamente rápido, por lo que la interacción que nos interesa deberá tener lugar cerca del borde, más precisamente alrededor de la escala característica r_{int} .

Con respecto a los hadrones, vamos a utilizar el caso de los blancos escalares como ejemplo simplificado en gran parte de esta tesis. Más específicamente, consideraremos los estados de *glueballs* en la teoría de campos, que en el dual gravitatorio están asociados a las fluctuaciones del dilatón en diez dimensiones. Las ecuaciones de movimiento son similares a las que consideramos en la introducción para campos escalares en espacios AdS , aunque en este caso hay que tener en cuenta la dependencia en las coordenadas internas. Por lo tanto, tenemos un campo escalar $\Phi = \Phi(x, z, \Omega)$ que debe cumplir la ecuación de Klein-Gordon no masiva $\square_{\text{AdS}_5 \times S^5} \Phi = 0$. Ahora bien, los espacios producto como $\text{AdS}_5 \times S^5$ son tales que su laplaciano se separa en la suma de laplacianos de 5 dimensiones: $\square_{\text{AdS}_5 \times S^5} = \square_{\text{AdS}_5} + \square_{S^5}$. Por lo tanto, proponemos una separación de variables

$$\Phi(x, z, \Omega) = \phi_\Delta(x, z) Y_\Delta(\Omega) = \phi_\Delta^{(P)}(z) e^{iP \cdot x} Y_\Delta(\Omega), \quad (3.12)$$

donde los armónicos esféricos $Y_\Delta(\Omega)$ de la S^5 satisfacen

$$\square_{S^5} Y_\Delta(\Omega) = -\frac{1}{R^2} \Delta(\Delta - 4) Y_\Delta(\Omega). \quad (3.13)$$

Aquí hemos identificado al momento en 4 dimensiones con la variable P_μ del DIS. Además, como vimos en la introducción, el parámetro Δ está relacionado con el índice k , que indica la representación de $SU(4)$ a la que pertenece el armónico esférico, según $\Delta = k + 4$ (con $k \geq 0$). La ecuación de autovalores de este armónico esférico indica que en términos de la teoría en cinco dimensiones el campo⁴ $\phi(x, z)$ adquiere una masa de KK debido a la reducción dimensional, es decir que su ecuación de movimiento es de la forma

⁴En adelante omitimos los subíndices Δ y supraíndices (P) para no recargar demasiado la notación.

$$(\square_{\text{AdS}_5} - m_{KK}^2) \phi(x, z) = 0, \quad m_{KK}^2(\Delta) \equiv \frac{1}{R^2} \Delta(\Delta - 4). \quad (3.14)$$

Pasando al espacio de momentos en las direcciones planas, obtenemos entonces una ecuación de la forma

$$[z^2 \partial_z^2 - 3z \partial_z + z^2 P^2 - \Delta(\Delta - 4)] \phi(z) = 0, \quad (3.15)$$

cuyas soluciones normalizables (es decir que se anulan en el borde) son de la forma

$$\phi(z) \sim z^2 J_{\Delta-2}(Pz), \quad (3.16)$$

con $J_\nu(x)$ una función de Bessel de primera especie. Estas funciones no son otra cosa que el análogo de las ondas planas para la geometría de curvatura constante negativa.

Todavía debemos establecer las condiciones de contorno en el interior. En el contexto de nuestro espacio AdS trunco, las fluctuaciones que estamos analizando pueden pensarse simplemente como modos normales en una caja de potencial, por lo que pedimos que la solución se anule en $z = z_0$. Como suele suceder en mecánica cuántica, esto implica que los momentos deben estar cuantizados. En este caso deben estarlo de manera tal que el producto Pz_0 constituya un cero de la correspondiente función de Bessel. Esto representa un aspecto físico que queríamos obtener: para grandes valores de su argumento, las funciones de Bessel pueden aproximarse por una potencia multiplicada por un coseno (con alguna fase que por ahora es irrelevante), lo que quiere decir que en el interior y lejos del borde los ceros pueden aproximarse por múltiplos de $\pi/2$. Por lo tanto, vemos que los momentos P pueden tomar valores cercanos a los múltiplos de $z_0^{-1} = \Lambda$, que no es otra cosa que la escala de confinamiento de la teoría del borde. En secciones más avanzadas nos referiremos a esta escala P del hadrón holográfico como m_{AdS} . En contraste, no hay una restricción semejante para q .

Finalmente, debemos indicar la manera en que estos estados están normalizados⁵. Para esto, basta considerar el Lagrangiano a orden cuadrático e imponer la normalización canónica, que en el espacio de posición de nuestro modelo en diez dimensiones no es otra cosa que la condición

$$[\Phi(\vec{x}, z, \Omega), \Pi_\Phi(\vec{x}', z', \Omega')] = i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \delta(z - z') \delta^{(5)}(\Omega - \Omega'), \quad (3.17)$$

a tiempos iguales. Ahora bien, para relacionarlo con nuestra solución debemos, por un lado, tener en cuenta que el espacio es curvo, por lo que podemos rescribir esta expresión como

$$\left[\Phi(\vec{x}, z, \Omega), \dot{\Phi}(\vec{x}', z', \Omega') \right] = i \frac{-g_{00}}{\sqrt{-g}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \delta(z - z') \delta^{(5)}(\Omega - \Omega'), \quad (3.18)$$

y por otro, que estamos trabajando en el espacio de momentos para las coordenadas x , es decir que el campo Φ puede escribirse en términos de los modos de momento definido según

$$\Phi = \sum_{\Delta} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} [a_{\Delta}(p) (e^{ip \cdot x} \phi(z) Y_{\Delta}(\Omega)) + \text{c.c.}] \quad (3.19)$$

con operadores de creación y destrucción también canónicamente normalizados. Reemplazando en (3.18) y teniendo en cuenta que para nosotros $g_{00} = -R^2/z^2$ y $\sqrt{-g} = R^5/z^5 \times \sqrt{g_{S^5}}$ y el hecho de que tomamos convencionalmente los armónicos esféricos ortonormalizados a en una 5-esfera unitaria, obtenemos entonces

⁵Ver el apéndice de [3].

$$\int_0^{z_0} dz \frac{R^8}{z^3} |\phi(z)|^2 = 1. \quad (3.20)$$

Por lo tanto, la solución exacta y debidamente normalizada es

$$\phi(z) = \frac{\sqrt{2}}{z_0 R^4 |J_{\Delta-1}(Pz_0)|} z^2 J_{\Delta-2}(Pz). \quad (3.21)$$

3.2. El proceso de dispersión dual: cinemática

En esta sección analizamos los aspectos cinemáticos que definen el proceso de dispersión que podemos pensar que se da en el *bulk*. En la introducción vimos que en el contexto de cuatro dimensiones los invariantes que definen el proceso vienen dados por

$$q^2 \text{ y } s = -(P+q)^2 \approx q^2 \left(\frac{1}{x} - 1 \right), \quad (3.22)$$

siempre en el régimen $q \gg P \sim \Lambda$. Esta condición tiene consecuencias importantes para la dispersión en el *bulk* que pueden verse a partir de la forma funcional de las soluciones y el comportamiento de la métrica.

Por un lado, la función de onda asociada al fotón dual⁶ tiende a un valor finito en el borde pero desaparece rápidamente (exponencialmente, de hecho) en el interior, es decir para $z > 0$, con una escala de decaimiento determinada por el valor de q . Por lo tanto, la interacción sólo puede ocurrir aproximadamente en

$$z_{\text{int}} \sim \frac{1}{q} \ll \frac{1}{\Lambda} = z_0, \quad (3.23)$$

es decir muy cerca del borde. Por otro lado, la solución asociada al hadrón decae como una potencia al acercarse al borde. Estos comportamientos pueden observarse en la figura 12.

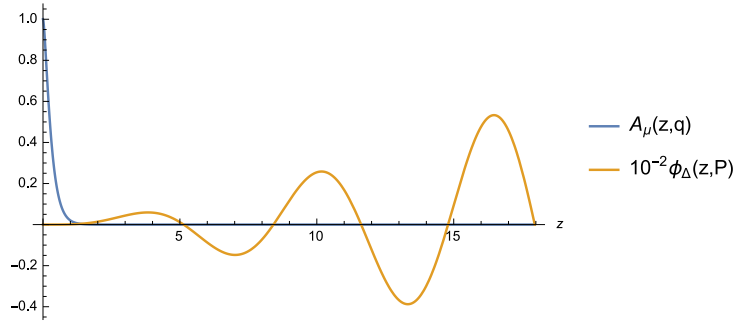


Figura 12: Comportamiento de las soluciones involucradas en el proceso que se desarrolla en el interior de AdS y es dual al FCS. El campo de gauge y el campo escalar se grafican con $q = 5$, $P = 1$ y $\Delta = 2$ (en unidades naturales).

Queda claro que la región de solapamiento es muy pequeña. Sólo la *cola* de la función de onda del hadrón vive en esta región, donde (dado que $P \sim \Lambda$) podemos aproximar

$$\phi_i(x, z) \approx e^{iP \cdot x} \frac{c_i}{\Lambda R^4} \left(\frac{z}{z_0} \right)^\Delta, \quad z \sim z_{\text{int}} \ll z_0, \quad (3.24)$$

⁶En adelante dejaremos de aclarar cuál es el dual, pues esto se entiende por el contexto.

para el hadrón incidente ϕ_i , con c_i una constante numérica adimensional.

En estas condiciones, la variable de Mandelstam en el espacio curvo $\tilde{s} \equiv s_{10d}$ satisface

$$\begin{aligned} \tilde{s} &= -g^{MN}(P+q)_M(P+q)_N \leq -g^{\mu\nu}(P+q)_\mu(P+q)_\nu \\ &\lesssim \frac{z_{\text{int}}^2}{R^2} q^2 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) = \frac{1}{\alpha' \sqrt{\lambda}} \left(\frac{1}{x} - 1 \right), \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde hemos denominado esquemáticamente P_M y q_M a los momentos en diez dimensiones: sus componentes en las direcciones planas coinciden con los de cuatro dimensiones, mientras que en este cálculo las componentes radiales y angulares son operadores diferenciales. Los autovalores de las partes radial y angular de \tilde{s} pueden ser despreciados en este régimen. La condición (3.25) es importante, pues como estamos trabajando en el régimen de acoplamiento fuerte y a nivel árbol,

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \ll x < 1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{s} \ll \frac{1}{\alpha'}, \quad (3.26)$$

es decir que para valores moderados de x no pueden producirse estados excitados de cuerdas en el canal intermedio y por lo tanto podemos trabajar en la aproximación de supergravedad. A lo largo de esta tesis llamaremos a esta región paramétrica " x grande", en contraposición con el régimen de " x pequeño", donde será necesario considerar la teoría de cuerdas propiamente dicha.

3.3. El régimen de $\lambda^{-1/2} \ll x < 1$

Habiendo analizado las soluciones y las características cinemáticas del proceso dual al DIS, estamos ya en condiciones de realizar el primer cálculo propiamente dicho: vamos a utilizar la dualidad AdS/CFT para calcular los elementos de matriz del tensor hadrónico $W^{\mu\nu}$ asociado al DIS en la teoría del borde. Más precisamente, estaremos considerando blancos escalares en el límite en el que la teoría tiene un número de colores N infinito y en el régimen de acoplamiento fuerte $\lambda \gg 1$ (manteniendo $\lambda \ll N$). Recordemos que dichos elementos de matriz fueron definidos en la introducción en (2.6), y que a partir de ellos se puede calcular la sección eficaz diferencial del proceso y obtener las funciones de estructura, que permiten describir las características de nuestro blanco hadrónico. Recordemos también que el teorema óptico relaciona al tensor hadrónico con la parte imaginaria de otro tensor $T^{\mu\nu}$ asociado al correspondiente FCS⁷, que también definimos en la introducción en (2.57) (y recordamos aquí para facilitar la lectura) según

$$\begin{aligned} n_\mu n_\nu^* \text{Im}(T^{\mu\nu}) &= \pi \sum_{X, P_X} \langle P, h | n \cdot J(0) | X, P_X \rangle \langle X, P_X | n^* \cdot \tilde{J}(q) | P, h \rangle \\ &= 2\pi^2 \sum_X \delta(M_X^2 + (P+q)^2) \langle P | n \cdot J(0) | X, P+q \rangle \langle X, P+q | n^* \cdot \tilde{J}(q) | P \rangle. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Podemos darnos una idea intuitiva con respecto a este cálculo. En efecto, sabemos que en el régimen del DIS la amplitud de dispersión en el *bulk* está dominada por la contribución asociada al diagrama del denominado canal s , que puede verse representado esquemáticamente en la figura 13.

Por lo tanto, (3.28) representa simplemente la parte imaginaria de dicha amplitud. El teorema óptico en el *bulk* indica que para esto simplemente debemos considerar el intercambio de modos

⁷En realidad, siempre que nos referimos al proceso de DIS *dual* o *en el bulk* deberíamos hablar más precisamente del FCS dual.

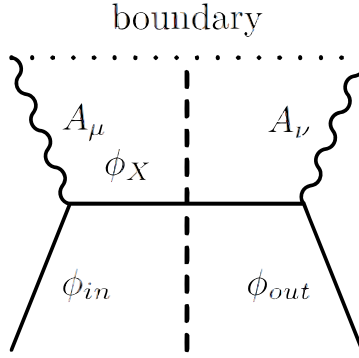


Figura 13: Diagrama del proceso dominante para el DIS en el régimen en que es válida la aproximación de supergravedad. Un modo escalar es intercambiado en el canal s . El corte en el propagador indica que este debe ser considerado *on-shell* a la hora de calcular la parte imaginaria de la amplitud. La palabra *boundary*, del inglés, indica el borde de AdS.

on-shell. Vemos entonces que la utilidad de la dualidad radica *simplemente* en permitirnos usar el *Ansatz* de Witten para calcular las funciones de un punto de la corriente J^μ entre estados hadrónicos que aparecen en esta última fórmula. Pensando en términos de la parte imaginaria de la amplitud o simplemente utilizando la prescripción (3.6), sabemos que esto corresponde a evaluar *on-shell* la acción de interacción de interacción $S_{A\Phi\Phi}$ insertando las soluciones que obtuvimos en las secciones anteriores.

Hay distintas maneras de llegar a la acción de interacción que nos interesa. La más simple consiste en partir del término cinético del dilatón en diez dimensiones y realizar el reemplazo⁸ (3.4). Tomando la convención en que los campos están canónicamente normalizados en 10d, obtenemos entonces

$$S_{A\Phi\Phi} = 2 \int d^{10}x \sqrt{-g} A^{(m} K^a) \partial_m \Phi^* \partial_a \Phi. \quad (3.28)$$

Ahora bien, podemos suponer sin pérdida de generalidad que el hadrón incidente Φ_i se encuentra en un autoestado de *carga*, es decir que cumple ecuación de autovalores

$$K^a \partial_a \Phi_i = iQ \Phi_i. \quad (3.29)$$

Lo que estamos llamando *carga* corresponde a un autovalor de la derivada $K^a \cdot \partial_a$ en las direcciones angulares, que sólo actúan sobre el armónico esférico $Y = Y_\Delta(\Omega)$ de S^5 . Si estuviésemos hablando de una 2-esfera, el número cuántico Δ sería el asociado al momento angular L^2 , comúnmente denominado l , y la carga correspondería al autovalor de proyección m , es decir los posibles valores absolutos de Q están acotados por Δ . Por otro lado, dado que la solución A_m no depende de los ángulos de la 5-esfera, la condición de ortonormalidad de los $Y(\Omega)$ implica que el hadrón intermedio (que denominaremos Φ_X) tiene exactamente la misma dependencia angular. En otras palabras, vemos que no hay *mixing* y la carga se conserva. Además, como todas nuestras soluciones son ondas planas en las direcciones x^μ , las correspondientes direcciones simplemente generan una

⁸Notar que este reemplazo sin introducir ninguna constante perturbativa indica que elegimos trabajar en las normalizaciones de [2], que no coinciden con las normalizaciones de los campos generalmente utilizadas en las acciones de supergravedad en las que se escribe explícitamente la constante de Einstein, κ .

delta de Dirac asociada a la conservación del cuadri-momento que indican que $P_X = P + q$. Por lo tanto, integrando por partes obtenemos

$$S_{A\Phi\Phi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \times i\mathcal{Q}(P + q - P_X) \int dz \sqrt{-g} A^m (\Phi_i \partial_m \Phi_X^* - \Phi_X^* \partial_m \Phi_i). \quad (3.30)$$

Donde vemos aparecer la forma concencional de la corriente escalar $J_\mu = i\mathcal{Q} \Phi \overset{\leftrightarrow}{\partial}_m \Phi^*$. Esta estructura para la acción de interacción puede obtenerse también a partir de la derivada de Lie de Φ en la dirección del vector de Killing K^a asociado al campo de gauge. Por otro lado, cabe resaltar que la expresión (3.30) es conveniente para poder obtener (3.28) debido a la identidad (2.57).

Pasemos al análisis de la integral restante en z . Sabemos que la contribución dominante debe venir de la región $z \sim z_{\text{int}}$, por lo que podemos utilizar la aproximación (3.24) para Φ_i para simplificar el cálculo, así como también reemplazar el límite superior de integración por $+\infty$. Sin embargo, no podemos hacer lo mismo para el estado intermedio Φ_X ya que $P_X \sim \sqrt{s} \sim q$ para $x \sim \mathcal{O}(1)$. Lo que sí podemos hacer es usar la condición $\sqrt{s} \ll \Lambda$ para aproximar la constante de normalización de (3.21), obteniendo

$$\Phi_X = e^{i(P+q) \cdot x} \frac{c_X s^{1/4} \Lambda^{1/2}}{R^4} z^2 J_{\Delta-2}(\sqrt{s}z). \quad (3.31)$$

Reemplazando todo en la expresión para $S_{A\Phi\Phi}$, utilizando la condición $n \cdot q = 0$ y extrayendo la delta de conservación de momento concluimos que

$$\langle X | n \cdot J(0) | i \rangle = 2(n \cdot P) c_i c_X \mathcal{Q} s^{1/4} \Lambda^{\Delta-1/2} \int_0^{z_0 \rightarrow \infty} dz z^\Delta J_{\Delta-2}(\sqrt{s}z) K_1(qz) \quad (3.32)$$

$$= 2^\Delta \Gamma(\Delta) (n \cdot P) c_i c_X \mathcal{Q} \frac{\Lambda^{\Delta-1/2} s^{\Delta/2-3/4} q^2}{(s+q^2)^\Delta}. \quad (3.33)$$

Vale la pena detenernos un momento para pensar cómo hubiese cambiado este resultado en caso de no haber tomado $n \cdot q = 0$, que hizo que sólo contribuyeran los términos con derivadas angulares. La respuesta depende del gauge en el que elijamos trabajar. En el gauge tipo Lorentz $\eta^{\mu\nu} q_\mu A_\nu + (\text{radial}) = 0$ de [2], habría segunda contribución proveniente del término proporcional a $A^z \Phi_i \overset{\leftrightarrow}{\partial} \Phi_X^*$ cuyo resultado correspondería al reemplazo

$$P^\mu \rightarrow P^\mu - \frac{q^2}{P \cdot q} q^\mu = P^\mu + \frac{1}{2x} q^\mu. \quad (3.34)$$

Trabajando en el gauge axial la modificación final es obviamente la misma, pero esta vez el nuevo término aparece por considerar el vector $n^\mu \rightarrow c^\mu$, con c^μ definido en (3.10). Sin embargo, en este caso aparece un tercer término (el segundo en la solución dada en (3.10)) que hay que tratar con más cuidado ya que no contiene a la función de Bessel $K_1(qz)$, y por lo tanto no decae exponencialmente al alejarse del borde. En este caso no podemos aproximar Φ_i ni tampoco modificar el límite de integración. Puede verse explícitamente que este término extra se anula debido a la condición de borde $J_\Delta(Pz)|_{z=z_0} = 0$.

Las funciones de estructura

El último paso necesario para obtener las funciones de estructura luego de reemplazar nuestro resultado para la acción *on-shell* (3.33) en (3.28) consiste en realizar la sumatoria sobre los posibles valores de M_X . En otras palabras, queremos sumar sobre los posibles valores que puede tomar la

m_{AdS} del estado intermedio Φ_X . Sabemos que en el modelo *hard-wall* estos valores corresponden a los distintos ceros de la función de Bessel, y, como dijimos, para Λ relativamente pequeño comparado con \sqrt{s} podemos identificarlos con los ceros de un coseno (ver apéndice B), es decir que

$$\sum_{M_X} \approx \sum_n \text{ tal que } M_X \approx M_n = n\pi\Lambda. \quad (3.35)$$

El hecho de que la separación entre dos ceros sucesivos sea pequeña nos permite aproximar la sumatoria por una integral, de manera que podemos tomar

$$\sum_{M_X} \delta(M_X^2 - s) = \sum_n \delta(M_n^2 - s) \approx \int dn \delta((n\pi\Lambda)^2 - s) = \frac{1}{2\pi\Lambda\sqrt{s}}. \quad (3.36)$$

Por lo tanto, obtenemos

$$\text{Im}[T^{\mu\nu}] = \text{Cte} \times \frac{2xP^\mu P^\nu}{q^2} \times \mathcal{Q}^2 \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\Delta-1} x^{\Delta+1} (1-x)^{\Delta-2} \quad (3.37)$$

con todas nuestras constantes numéricas consideradas en $\text{Cte} = 2^{2\Delta-1} \Gamma^2(\Delta) \pi |c_i c_X|^2$ donde hemos expresado el resultado final en función de q^2 y el parámetro de Bjorken x . Teniendo en cuenta la relación entre el FCS y el DIS expresada en (2.55) y la descomposición más general para un tensor hadrónico asociado a un blanco escalar dada por (2.13), el resultado final para las funciones de estructura resulta ser

$$F_1(x, q^2) = 0, \quad F_2(x, q^2) = 2\pi \text{Cte} \times \mathcal{Q}^2 \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\Delta-1} x^{\Delta+1} (1-x)^{\Delta-2}. \quad (3.38)$$

Hay algunos comentarios interesantes a la hora de analizar físicamente las expresiones (3.38):

- El hecho de que la función de estructura F_1 haya resultado nula en el caso de un blanco escalar no es sorprendente. En efecto, puede demostrarse que esta función es proporcional al operador de Casimir de Lorentz del objeto que interactúa con el fotón virtual, lo que para nosotros puede verse de la siguiente manera: trabajando en el gauge axial, el A^μ en una interacción con campos escalares sólo puede contraerse con derivadas, es decir que nunca puede obtenerse una estructura final de la forma $\eta^{\mu\nu} n_\mu n_\nu^*$. En general, este objeto no será necesariamente el hadrón sino alguno de sus partones de espín 1/2, por ejemplo. Sin embargo, en el límite $N \rightarrow \infty$ la producción de estados intermedios de más de una partícula en el *bulk* está completamente suprimida, por lo que el fotón sólo puede interactuar con el hadrón en su totalidad, de manera que necesariamente se obtiene $F_1 = 0$. En cierto sentido esto es un *accidente*: veremos más adelante que el comportamiento de F_1 para blancos más generales, es decir fuera del caso escalar, es similar al de F_2 .
- En la figura 14 presentamos las curvas obtenidas para F_2 como función de x correspondientes a los primeros valores que puede tomar el parámetro Δ (sin considerar las distintas dependencias de la constante multiplicativa en q).

Como puede verse, se trata de campanas invertidas que se anulan para $x \rightarrow 0$ y $x \rightarrow 1$ (donde la dispersión se vuelve elástica) cuyos máximos están situados aproximadamente en $x_{\text{max}} \approx 0.6$. Es interesante analizar la consistencia de nuestro resultado cerca de $x \approx 1$, donde a partir de (3.22)

$$s \approx q^2(1-x). \quad (3.39)$$

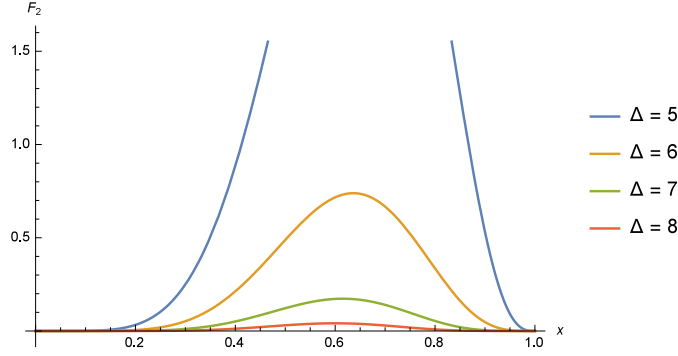


Figura 14: Función de estructura F_2 en términos del parámetro de Bjorken x obtenidas en el régimen de supergravedad. Se muestran los casos correspondientes a los valores más pequeños de Δ , omitiendo las normalizaciones y la dependencia en q^2 .

Vemos que para valores grandes de q^2 , mantener s fijo implica $x \rightarrow 1$. En este régimen, z_{int} se acerca mucho al borde incluso comparado con la escala del hadrón intermedio \sqrt{s} , de modo que también podemos aproximar Φ_X de manera similar a (3.24) y la dispersión se vuelve aproximadamente elástica. En términos de la integral en la dirección radial, la dependencia en x se factoriza y obtenemos automáticamente el factor $(1-x)^{\Delta-2}$. En cambio, es importante recordar que este gráfico no es confiable para valores muy pequeños de x (podemos tomar $x \sim 0,1 - 0,2$ como valor de referencia). De hecho, veremos en la próxima sección que la modificación en esta región es drástica.

- Por último, analizamos la dependencia del resultado para F_2 con la escala q^2 , o más precisamente con la relación Λ^2/q^2 . En primer lugar, notamos que es completamente consistente con el análisis realizado a partir del OPE del producto de corrientes JJ en la teoría de campos. En efecto, la forma funcional corresponde a la del segundo término de (2.73), que es dominante en acoplamiento fuerte y en el límite $N \rightarrow \infty$, ya que en el caso de un blanco escalar evidentemente el *twist* τ coincide con la dimensión conforme Δ del operador que crea el hadrón. De hecho, también vemos reflejado en nuestro proceso dual la presencia de la sumatoria restringida a operadores con la misma carga inicial, condición impuesta por la relación de ortonormalidad de los armónicos esféricos en S^5 . El decaimiento como potencia de Λ^2/q^2 tiene una interpretación directa en términos de nuestras soluciones: la función de onda hadrónica vive principalmente en la zona IR de la teoría cercana al cutoff $z_0 = \Lambda^{-1}$, por lo que el hadrón se ve obligado a valerse del efecto túnel para propagarse hacia la región de interacción $z_{\text{int}} \sim q$ para poder interactuar con el fotón virtual. Para $N \rightarrow \infty$ no hay producción de estados intermedios y el proceso lo realiza el hadrón completo. Finalmente, la geometría curva provoca el decaimiento de la amplitud de dispersión como una ley de potencias que indica que la probabilidad de producirse el efecto túnel decae como $(\Lambda^2/q^2)^{\Delta-1}$ para un hadrón creado por un operador de dimensión Δ . Esta conclusión se verá modificada al considerar el caso de N finito, donde veremos la versión dual de la aparición del tercer término en (2.73).

Capítulo 4

El régimen de x pequeño

El estudio del DIS utilizando los métodos holográficos se vuelve mucho más interesante a la hora de analizar qué sucede para valores muy pequeños de x . Cuando hablamos de *valores muy pequeños* nos referimos más precisamente a la comparación con la constante de 't Hooft λ , pues la expresión aproximada para la variable de Mandelstam en diez dimensiones \tilde{s} presentada en (3.25) indica que

$$\text{si } x \ll \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \Rightarrow \tilde{s} \sim \frac{1}{\alpha'}. \quad (4.1)$$

Esto quiere decir que la energía del CM es lo suficientemente alta como para generar estados masivos (excitados) de cuerdas en la dispersión en AdS, de modo que la aproximación de gravedad ya no es confiable. En este régimen, es necesario considerar la teoría de cuerdas completa (por ahora en su límite clásico, $N \rightarrow \infty$) sobre el espacio curvo de diez dimensiones $\text{AdS}_5 \times S^5$. El análisis no puede realizarse en total generalidad de manera controlada debido a que no se sabe cómo cuantizar la teoría de cuerdas en espacio curvo debido a la presencia de los campos de Ramond-Ramond (R-R). Sin embargo, existen diferentes aproximaciones que pueden realizarse en este caso que permiten obtener resultados físicamente relevantes. Concretamente, podremos realizar una aproximación de la amplitud de dispersión para valores de \tilde{s} muy grandes en comparación con \tilde{t} (la versión diez dimensional de la variable de Mandelstam asociada al canal t), que corresponden en realidad a utilizar la validez de una expansión tipo OPE en la teoría de hoja de mundo de la cuerda [13].

Del lado de la teoría de campos, el régimen que analizamos en esta sección corresponde a la denominada región Regge, de la que dijimos algunas palabras en el capítulo 2. Si pudiésemos utilizar un lenguaje partónico, diríamos que la cantidad de partones con fracciones de momento cada vez más pequeñas $\sim xP$ crece en gran medida cuanto más chico sea x , con lo que las funciones de estructura, interpretadas como probabilidades de dispersión, deberían aumentar también. Veremos que, en algún sentido, esta mirada físicamente intuitiva sobrevive incluso en la teoría fuertemente acoplada.

4.1. Contribuciones simétricas

El régimen de x pequeño (con q^2 fijo) corresponde a la región cinemática descrita por

$$-2P \cdot q \gg q^2 \gg -P^2, \quad (4.2)$$

y donde $s \approx q^2/x$. Esto quiere decir que la energía del centro de masa es muy grande, mientras que para el DIS (FCS) la variable t asociada al intercambio de momento transversal es exactamente nula.

Para el proceso dual el análisis es un tanto más sutil debido a la presencia de las seis dimensiones adicionales. En lo que respecta a la dirección radial, por ejemplo, recordamos que nuestras soluciones no son autoestados de momento en z : hasta ahora sólo trabajamos en el espacio de Fourier en lo que respecta a las direcciones planas. La relación precisa entre las variables de Mandelstam viene dada por

$$\alpha' \tilde{s} \equiv \alpha' \left[\frac{z^2}{R^2} s + \frac{1}{R^2} (z^2 \nabla_z^2 + \nabla_{S^5}^2 |_{R=1}) \right] = \alpha' \frac{z^2}{R^2} s + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right), \quad (4.3)$$

$$\alpha' \tilde{t} \equiv \alpha' \left[\frac{z^2}{R^2} t + \frac{1}{R^2} (z^2 \nabla_z^2 + \nabla_{S^5}^2 |_{R=1}) \right] = \mathcal{O} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right). \quad (4.4)$$

Vemos que la variable \tilde{s} está dominada simplemente por su versión 4d multiplicada por el factor de corrimiento al rojo, mientras que la variable \tilde{t} no es exactamente cero, aunque en el límite de acoplamiento fuerte necesariamente sigue siendo muy pequeña. En este contexto, concluimos que en términos generales la amplitud deberá estar dominada por un diagrama del tipo canal t . Además, tomará esquemáticamente la forma

$$\mathcal{A} \sim f(\alpha' \tilde{t}) \times (\alpha' \tilde{s})^j, \quad (4.5)$$

donde j representa el espín de la partícula intercambiada. Si nuestra teoría fuese exclusivamente (super)gravitatoria, podríamos adivinar entonces el (único) proceso dominante: el intercambio de un gravitón ($j = 2 = j_{\max}$) en el canal t . Presentamos el correspondiente diagrama en la figura 15.

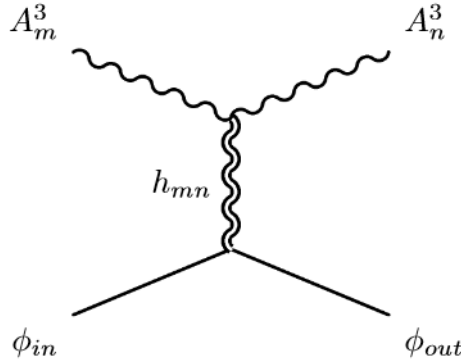


Figura 15: Diagrama dominante para la obtención de la parte simétrica del tensor hadrónico en acoplamiento fuerte. El proceso consiste en el intercambio de un gravitón en el canal t .

En este momento, vale la pena detenernos a considerar cuánto de esta discusión general sobre amplitudes de dispersión es relevante para el análisis holográfico del DIS. Notamos que caso de intercambiar un gravitón, la amplitud que uno calcularía en una teoría de (super)gravedad que es real, por lo que a primera vista no arroja ninguna contribución al DIS.

Sin embargo, debemos recordar que en el régimen de x pequeño quedarnos en la aproximación de supergravedad deja de ser válido: debemos considerar un proceso de dispersión de cuerdas en el que se pueden intercambiar estados masivos (con $m^2 \sim 1/\alpha'$). Es más, este proceso no se da en espacio plano, donde las amplitudes de cuerdas son analizadas generalmente, sino en el fondo curvo dual asociado a nuestra teoría de campos. Afortunadamente, la intuición que acabamos de desarrollar resulta útil incluso en este contexto. Esquemáticamente, lo que sucede puede entenderse notando que

$$\frac{R^2}{\alpha'} = \sqrt{4\pi\lambda} \gg 1 \quad (4.6)$$

implica que la energía del CM \sqrt{s} , que es al menos del orden de $1/\sqrt{\alpha'}$, es mucho mayor que la escala asociada a la curvatura de AdS. Esto quiere decir que la interacción ocurre en escalas de distancia muy cortas, de manera que en una primera aproximación debe comportarse exactamente como si se diera en espacio plano. Cabe resaltar que esto no quiere decir que los estados iniciales sean similares: siguen siendo los mismos con los que venimos trabajando hasta ahora. Por lo tanto, nuestra tarea consiste en extraer de los resultados conocidos para las amplitudes de cuerdas algún tipo de acción efectiva para describir una dispersión aproximadamente *local* en AdS_5 . Esta acción efectiva deberá reflejar la posibilidad de intercambiar estados excitados, y consecuentemente contendrá una parte imaginaria no nula.

Comentarios sobre la aproximación local

Podemos ser más precisos¹ en lo que quiere decir esta *aproximación local*. Para esto, nos concentramos por un momento en un problema más simple: la dispersión de cuatro modos escalares.

Consideremos el proceso desde el punto de vista de la teoría en la hoja de mundo de las cuerdas. En un fondo de espacio plano, la constante de acoplamiento viene dada directamente por la tensión de la cuerda $T_s \sim 1/(2\pi\alpha')$. Sin embargo, en una geometría no trivial tanto los términos cinéticos como los términos de interacción (no lineales) de la parte bosónica de la acción están descriptos por la expansión de

$$\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^M(\sigma, \tau) \partial_\beta X^N(\sigma, \tau) G_{MN}[X^P(\sigma, \tau)] \quad , \quad \alpha, \beta = \tau, \sigma, \quad (4.7)$$

con $h_{\alpha\beta}$ la métrica inducida. Por lo tanto, si la métrica tiene una escala característica $G_{MN} \sim R^2$ podemos extraerla, generando una constante de acoplamiento efectiva $R^2/\alpha' \sim \sqrt{\lambda}$, lo que quiere decir que si la teoría de campos está muy fuertemente acoplada, para la teoría en la hoja de mundo vale lo contrario. En este régimen la teoría se vuelve aproximadamente gaussiana con respecto a la integración funcional $D[X]$. Para esto debemos tratar por separado a los modos zero: $X^M = x^M + \tilde{X}^M$. Vemos entonces que la amplitud puede pensarse como un proceso local para cada punto del espacio tiempo, que luego debe ser integrado sobre todo el espacio $\text{AdS}_5 \times S^5$:

$$\mathcal{A}[\text{curved space}] \approx \int_{\text{AdS}_5 \times S^5} d^{10}x \mathcal{A}_{\text{flat}}(x). \quad (4.8)$$

Sin embargo, aún no hemos llegado a la conclusión que queríamos: la expresión que obtuvimos no necesariamente puede considerarse como local. Esto es porque, en términos generales, las amplitudes de cuerdas como $\mathcal{A}_{\text{flat}}(x)$ se calculan para estados con momento definido en diez dimensiones y por lo tanto quedan expresadas en función de los invariantes \tilde{s} , \tilde{t} y \tilde{u} . El hecho de que estemos trabajando en un espacio curvo le da sentido a la relación (4.8): la dependencia con respecto a las coordenadas está contenida en las definiciones de dichos invariantes y su relación con los que definimos en cuatro dimensiones. El problema es que, al mismo tiempo, las expresiones (4.3) y (4.4) no son triviales: para soluciones como las que estamos utilizando generalmente se trata en realidad de operadores diferenciales. En el contexto del DIS \tilde{s} (y \tilde{u}) puede ser tratado aproximadamente como un escalar, pero esto no es cierto para \tilde{t} .

¹Este apartado está basado, por un lado, en los argumentos originalmente presentados en [13], y por otro, en ciertos comentarios introducidos en nuestro trabajo [10].

Podemos describir la situación a partir del ejemplo de la amplitud de cuatro modos escalares (dilatones en la teoría de supercuerdas). La amplitud viene dada por [47]

$$\mathcal{A}[4 \text{ escalares}] = \mathcal{G}(\alpha', \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}) \times K(\tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}), \quad K \propto \tilde{s}^2 \tilde{t}^2 + \tilde{t}^2 \tilde{u}^2 + \tilde{s}^2 \tilde{u}^2 \quad (4.9)$$

donde K es un factor cinemático que depende de los invariantes de Mandelstam pero no de α' , y \mathcal{G} es el prefactor usual de las amplitudes de cuatro estados de supercuerdas definido como

$$\mathcal{G}(\alpha', \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}) = -\frac{\alpha'^3}{64} \frac{\Gamma(-\alpha' \tilde{s}/4) \Gamma(-\alpha' \tilde{t}/4) \Gamma(-\alpha' \tilde{u}/4)}{\Gamma(1 + \alpha' \tilde{s}/4) \Gamma(1 + \alpha' \tilde{t}/4) \Gamma(1 + \alpha' \tilde{u}/4)}. \quad (4.10)$$

Este tipo de expresiones factorizadas serán válidas para cualquier otra dispersión de cuatro puntos, con la salvedad de que K también dependerá de las respectivas polarizaciones. En todos los casos, este factor cinemático se puede obtener directamente desde la aproximación de supegravedad (haremos uso de este detalle a la hora de analizar el caso mesónico en la parte III), válida para $\alpha' \rightarrow 0$. En este límite, la expansión de las funciones gamma implica que

$$\mathcal{G}[\alpha' \rightarrow 0] = \frac{1}{stu} \Rightarrow \mathcal{A} \sim \left(\frac{\tilde{s}\tilde{u}}{\tilde{t}} + \frac{\tilde{u}\tilde{t}}{\tilde{s}} + \frac{\tilde{s}\tilde{t}}{\tilde{u}} \right) \quad (4.11)$$

con lo que recuperamos las expresiones asociadas al intercambio de un gravitón en los canales t , s y u , respectivamente. Como anticipamos, en nuestro régimen no hay una parte imaginaria en esta amplitud porque la variable \tilde{t} nunca puede ser nula incluso cuando la correspondiente variable en espacio plano t sí lo es. Afortunadamente, este no es el límite que nos interesa: estamos trabajando a energías muy altas. Vemos que \mathcal{G} contiene la información asociada al intercambio de todos los posibles modos masivos de la cuerda: las funciones gamma contienen polos en

$$\tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u} = \frac{4}{\alpha'} n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.12)$$

En efecto, en algún sentido se trata de la versión extendida de los propagadores *completada en el ultravioleta por la teoría de cuerdas*. Al tomar la parte imaginaria de la amplitud obtendremos entonces una contribución proporcional a $\text{Im}[\mathcal{G}]$.

En el régimen de Regge, nos concentramos en el límite $\tilde{t} \ll \tilde{s}$ y $\tilde{u} \approx -\tilde{s}$. Por lo tanto, consideramos

$$\mathcal{G} \approx -\frac{1}{\tilde{s}^2} \left[\frac{1}{\tilde{t}} + \pi \cot \left(\frac{\pi \alpha' \tilde{s}}{4} \right) \right] \left(\frac{\alpha' \tilde{s}}{4} \right)^{\alpha' \tilde{t}/2}, \quad K \sim \tilde{s}^4. \quad (4.13)$$

Vemos que, en este límite, el producto $\tilde{s}^2 \mathcal{G}$ es exactamente la versión generalizada del propagador $1/\tilde{t}$ que generalmente obtenemos en teoría cuántica de campos, y contiene una parte imaginaria dada por

$$\text{Im}[\tilde{s}^2 \mathcal{G}] \approx \frac{\pi \alpha'}{4} \sum_{m=1}^{+\infty} \delta \left(m - \frac{\alpha' \tilde{s}}{4} \right) m^{\alpha' \tilde{t}/2}, \quad (4.14)$$

donde hemos omitido el polo $\tilde{t} = 0$ al que ya argumentamos que no podemos acceder. En general, la suma de modos intercambiados en este régimen es denominada gravitón *reggeizado* por razones obvias.

Ahora bien, el último paso de la justificación de la aproximación local consiste en notar que considerar el límite de acoplamiento fuerte corresponde en la teoría de campos a tomar $\tilde{t} \rightarrow 0$ ya que todas sus posibles contribuciones son $\mathcal{O}(\lambda^{-1/2})$. Por lo tanto, podemos despreciar el último factor

en (4.14). Pero entonces, el resultado final sólo depende de \tilde{s} , que ya sabemos que podemos aproximar por un factor escalar (*redshift* $\times s$). Todos los operadores diferenciales han desaparecido en este régimen y luego de tomar la parte imaginaria! Notemos que este último paso no es válido para valores extremadamente grandes de \tilde{s} (valores exponencialmente chicos de x).

Una manera intuitiva de llegar a la misma conclusión podría ser la siguiente. En la acción efectiva, todos los campos estarán evaluados en el mismo punto. En la aproximación de supergravedad, podríamos ver la amplitud esquemáticamente utilizando el lenguaje de la mecánica cuántica² como

$$\mathcal{A} \sim \kappa_{10}^2 \sum_x \sum_{x'} \langle T^\phi | x \rangle \langle x | G | x' \rangle \langle x' | T^A \rangle \sim \kappa_{10}^2 \sum_x \langle T^\phi | x \rangle \langle x | G | T^A \rangle \quad (4.15)$$

donde las expresiones de la forma $G(x, x')$ corresponden a los elementos de matriz $\langle x | G | x' \rangle$. El término G_{grav} asociado a la propagación de un gravitón viene dado (a menos de índices) por $G_{\text{grav}} \sim \tilde{t}^{-1}$, pero al considerar la teoría de cuerdas ahora sabemos que en realidad debemos reemplazarlo por una expresión similar a $\tilde{s}\mathcal{G}$, que dependerá genéricamente tanto de \tilde{t} como de \tilde{s} . Entonces, como vimos, aparece una parte imaginaria no nula y, al menos en acoplamiento fuerte, resulta ser sólo función de $\alpha'\tilde{s}$, una cantidad aproximadamente escalar. Ya no es necesario entonces pensar en \mathcal{G} como un operador, y la amplitud puede ser considerada local.

La acción efectiva para el caso del DIS

Volvamos al proceso que nos interesa en esta tesis: el proceso dual al DIS en el interior de AdS. El análisis es similar al caso que acabamos de analizar en cuanto al intercambio de un gravitón con un propagador modificado: lo que cambia son los estados entrantes. En cinco dimensiones, los modos asociados a las inserciones de las corrientes J^μ que se propagan desde el borde están representados por vectores de gauge, pero para poder realizar el tratamiento que acabamos de describir necesitamos pensar en términos de la teoría de cuerdas y considerar las diez dimensiones. En este contexto, lo más simple es recordar (3.4): los fotones no son otra cosa que modos del gravitón (que llamaremos genéricamente h pensando en una expansión $g_{MN} \rightarrow g_{MN} + 2\kappa_{10}h_{MN}$) con una polarización en particular. En consecuencia, la amplitud de cuerdas que constituye nuestro punto de partida es

$$\mathcal{A}(h_1(A), \phi_2, \phi_3, h_4(A)). \quad (4.16)$$

La estructura factorizada \mathcal{GK} se da como en el caso escalar. Se trata de una amplitud de cuatro cuerdas cerradas, más precisamente de cuatro modos de NS-NS. Una de las maneras más simples de obtener esta amplitud es a partir de las relaciones KLT [48], que permiten escribir amplitudes de cuerdas cerradas en términos de amplitudes de cuerdas abiertas. A nivel árbol y para amplitudes de cuatro puntos, la relación toma la forma

$$\mathcal{A}_{\text{closed}}(\tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}) \sim \sin\left(\frac{\pi\tilde{t}}{8}\right) \mathcal{A}_{\text{open}}(\tilde{s}/4, \tilde{t}/4) \times \mathcal{A}_{\text{open}}(\tilde{t}/4, \tilde{u}/4). \quad (4.17)$$

Numerando los estados entrantes (no masivos) de manera tal que

$$\tilde{s} = -2p_1 \cdot p_3, \quad \tilde{t} = -2p_1 \cdot p_2, \quad \tilde{u} = -2p_1 \cdot p_4, \quad (4.18)$$

toma la forma

²De hecho, podemos pensar el proceso en términos de un problema de mecánica cuántica en la dirección radial. Esta idea nos será útil más adelante.

$$\mathcal{A}_{\text{open}}(\tilde{s}, \tilde{t}) = -\frac{1}{2}g_{\text{op}} \frac{\Gamma(-\tilde{s}/2)\Gamma(-\tilde{t}/2)}{\Gamma(1-\tilde{s}/2-\tilde{t}/2)} K_{\text{op}}(\xi_i, p_i) \quad (4.19)$$

donde hemos definido las respectivas polarizaciones ξ_i , tomado $\alpha' = \frac{1}{2}$ momentáneamente (aprovechando que ya sabemos cómo aparecerá en el resultado final) y definido un factor cinemático

$$K_{\text{op}}(1, 2, 3, 4) = -\frac{1}{4} (\tilde{s}\tilde{t}\xi_1 \cdot \xi_4 \xi_2 \cdot \xi_3 + \tilde{s}\tilde{u}\xi_1 \cdot \xi_2 \xi_3 \cdot \xi_4 + \tilde{t}\tilde{u}\xi_1 \cdot \xi_3 \xi_2 \cdot \xi_4 + \dots) \equiv \xi_1^M \xi_2^N \xi_3^O \xi_4^P K_{MNOP}. \quad (4.20)$$

Los términos omitidos siempre darán contribuciones despreciables en el régimen en el que estamos trabajando. De hecho, para el primero de nuestros factores de $\mathcal{A}_{\text{open}}$ sólo nos interesa el término proporcional a $\tilde{s}\tilde{u} = -\tilde{s}^2$, y similarmente para el segundo intercambiando $\tilde{s} \rightarrow \tilde{t}$ y $\tilde{t} \rightarrow \tilde{u}$. A partir de todos estos ingredientes, los factores con funciones gamma se combinan para formar el prefactor \mathcal{G} y la amplitud de cuerdas cerradas queda expresada como³

$$\mathcal{A}_{\text{closed}}(\tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}) = \mathcal{G} \times \xi_1^{MM'} \xi_2^{NN'} \xi_3^{OO'} \xi_4^{PP'} K_{MNOP} K_{M'N'O'P'} = \mathcal{G} \times K_{\text{cl}}, \quad (4.21)$$

donde hemos definido las polarizaciones de las cuerdas cerradas según

$$\xi_i^{MN} \equiv \xi_i^M \times \xi_i^N. \quad (4.22)$$

Estas representan en principio cualquier modo de NS-NS: para elegir un gravitón o un dilatón, según corresponda, es necesario imponer

$$\xi_h^{MN} = \xi_h^{NM}, \quad \xi_\phi = g_{MN} - p_M \bar{p}_N - p_N \bar{p}_M. \quad (4.23)$$

con \bar{p}_M un momento de referencia arbitrario que debe cumplir las condiciones $p \cdot \bar{p} = 1$ y $\bar{p} \cdot \bar{p} = 0$. Este momento de referencia se introduce únicamente para poder implementar las condiciones de transversalidad y de traza nula: el resultado final es independiente del mismo.

En el régimen de Regge, el factor cinemático se reduce a simplemente a

$$K_{\text{cl}}(\tilde{s} \gg \tilde{t}) \approx -\frac{1}{16} \tilde{s}^4 \xi_h^{(1)} \cdot \xi_h^{(2)} \xi_\phi^{(3)} \cdot \xi_\phi^{(4)} = -\frac{1}{2} \tilde{s}^4 \xi_h^{(1)} \cdot \xi_h^{(2)}, \quad (4.24)$$

donde $\xi_i \cdot \xi_j \equiv \xi_i^{MN} \cdot \xi_{j,MN}$. Lo que vamos a hacer es extraer un factor \tilde{s}^2 para juntarlo con \mathcal{G} , como hicimos antes, y construir una acción efectiva que asociada a lo que resta de la amplitud. Como estamos en una región paramétrica en la que $\tilde{u} \approx -\tilde{s}$, está claro que basta con considerar una estructura (con la cantidad de derivadas necesaria) dada por

$$S_{\text{eff}} \propto \int d^{10}x \partial_M h_{OP} \partial_N h^{OP} \partial^M \phi \partial^N \phi. \quad (4.25)$$

Para obtener la acción efectiva final basta con restaurar las constantes numéricas y el prefactor de cuerda cerrada \mathcal{G} , tomar la parte imaginaria como hemos indicado en (4.14), y finalmente elegir la polarización de los gravitones asociada a los vectores de gauge $h_{MN} = h_{(ma)} = A_{(m} K_{a)}$. Tomando sólo el término dominante en potencias de \tilde{s} , el resultado final es el siguiente:

³Notar que estamos omitiendo mencionar una importante redefinición de los invariantes con un factor 2 (o equivalentemente de α' con un factor 4) debido a que cada una de las dos cuerdas abiertas que, esquemáticamente hablando, forman la cuerda cerrada llevan sólo la mitad de su momento total.

$$S_{\text{eff}}^{\text{sym}(\phi)} = \frac{1}{2} \int d^{10}x \sqrt{-g} \text{Im}[\tilde{s}^2 \mathcal{G}] (K^a K_a) F_{mn} F^{pn} \partial^m \phi \partial_p \phi \quad (4.26)$$

donde todas las contracciones deben ser realizadas con la métrica curva.

Acciones efectivas: método heurístico

En esta sección describimos brevemente lo que llamamos el método heurístico para el cálculo de acciones efectivas en el régimen de x pequeño. Se trata de un método simple basado en la acción de supergravedad que sólo utiliza la idea muy básica de que, en el fondo, la teoría completa tiene como objetos fundamentales las cuerdas, en este caso cerradas, pero que no necesita del cálculo explícito de la amplitud de cuerdas. Obviamente, este método será útil únicamente en el régimen paramétrico en el que la amplitud puede ser tomada como aproximadamente local. En el caso de las contribuciones simétricas, la idea parecerá trivial pues las amplitudes involucradas son simples y ampliamente conocidas: se las encuentra incluso en los libros de texto dedicados a la teoría de cuerdas. Sin embargo, aprovecharemos mucho más esta idea en los casos en los que las características del proceso dominante no están tan claras. Este será el caso, por ejemplo, de las contribuciones antisimétricas para escalares y fermiones, así como también el de las funciones de estructura asociadas a los mesones holográficos.

La idea es simple, y debemos comenzar pensando en un proceso de dispersión en el marco de la supergravedad IIB en AdS_5 . Los términos relevantes de la acción vienen dados por

$$S_{5D} = \frac{1}{2\kappa_5^2} \int d^5x \sqrt{-g_{\text{AdS}_5}} \left(\mathcal{R} - \frac{1}{2} (\partial_m \phi)^2 - \frac{1}{4} (F_{mn}^A)^2 + \dots \right) \quad (4.27)$$

Sabemos que en el régimen $\tilde{s} \gg \tilde{t}$ la contribución asociada al intercambio de un modo de espín j en el canal t es esquemáticamente de la forma $\mathcal{A} \sim \tilde{s}^j$. Esto es fácil de ver en el caso en que todos los modos externos son escalares pues todos los índices del propagador deben estar contraídos con derivadas a cada lado, pero, en general, la idea sigue siendo válida de una manera u otra para estados externos más generales. Por lo tanto, como vimos el proceso dominante es que describe el intercambio de un gravitón. Notemos que, como vimos en la sección anterior, este proceso sólo contribuye a los términos simétricos en $\mu \leftrightarrow \nu$ del tensor hadrónico $W^{\mu\nu}$. Volveremos a este tema en un momento.

Ahora bien, los gravitones se acoplan universalmente a los tensores de energía-momento de cada uno de los campos de la teoría, de manera que necesariamente la amplitud (o la acción efectiva) del DIS deberán tener la estructura⁴

$$\mathcal{A} = \kappa_5^2 \int d^5x \int d^5x' T_{mn}^\phi(x) G^{mnkl}(x, x') T_{mn}^A(x'), \quad (4.28)$$

donde el propagador del gravitón en AdS_5 puede ser expresado en el límite de altas energías como⁵ [49, 50]

$$G^{mnkl}(x, x') = \left(g^{mk} g^{nl} + g^{ml} g^{nk} - \frac{2}{3} g^{mn} g^{kl} \right) G_{\text{grav}}(x, x'), \quad (4.29)$$

⁴Partiendo de la acción (4.27), definimos las perturbaciones de un campo genérico Φ según $\Phi \rightarrow \Phi_0 + \sqrt{2}\kappa_5\Phi$, de manera tal que ni el tensor de energía momento ni el propagador contienen potencias de κ_5 . Estas no son exactamente las convenciones que veníamos utilizando, pero esto no es un problema debido a que el tratamiento en esta sección es cualitativo.

⁵En esta sección usamos $g \equiv g_{\text{AdS}_5}$.

con $G_{\text{grav}}(x, x')$ alguna función que es irrelevante en este contexto, mientras que los tensores de energía momento asociados al bosón de gauge y al dilatón vienen dados por

$$T_{mn}^\phi = (g_{m\alpha}g_{n\beta} + g_{m\beta}g_{n\alpha} - g_{mn}g_{\alpha\beta})\partial^\alpha\phi^*\partial^\beta\phi, \quad T_{kl}^A = g^{\rho\sigma}F_{k\rho}F_{l\sigma} - \frac{1}{4}g_{kl}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}. \quad (4.30)$$

Realizando las contracciones, obtenemos

$$T_{mn}^\phi(x) G^{mnlk}(x, x') T_{kl}^A(x') = G_{\text{grav}}(x, x') \left[4\partial^k\phi^*(x)\partial^l\phi(x) F_{k\rho}(x')F_{l\sigma}(x')g^{\rho\sigma} + \dots \right], \quad (4.31)$$

de manera que, como vemos, emerge la estructura de índices descubierta a partir de la amplitud de cuerdas en la sección anterior. Esto era esperable: hemos dicho que el factor cinemático K_{cl} era independiente de α' , y por lo tanto es el mismo que se obtiene en el régimen de supergravedad. Por otro lado, para tratar el factor escalar remanente del propagador del gravitón lo pensamos como cuando justificamos la aproximación local más arriba: naturalmente tomaríamos $G_{\text{grav}}(x, x') \sim \tilde{t}_{5d}^{-1}$, pero tener en cuenta el intercambio de modos masivos de cuerdas induce el reemplazo $\tilde{t}_{5d}^{-1} \rightarrow [\tilde{s}^2\mathcal{G}]$.

Cálculo de las funciones de estructura

La acción efectiva que acabamos de obtener es el punto de partida para obtener las funciones de estructura. Necesitamos evaluarla *on-shell* insertando las funciones de onda y la métrica en $\text{AdS}_5 \times S^5$.

Las integrales en las direcciones planas y las angulares son sencillas: las primeras arrojan la delta de Dirac asociada a la conservación del momento en 4d, mientras que las segundas dan simplemente una constante dada por

$$\rho R^2 \equiv \int d^5\Omega \sqrt{g_{S^5}} K^a K_a |Y_\Delta|^2. \quad (4.32)$$

Notemos que otros términos con dependencia explícita en la carga \mathcal{Q} resultan dar contribuciones despreciables en comparación con el término dominante. La forma de las funciones de estructura tendrá en este régimen un carácter que a primer orden es incluso independiente de la carga del hadrón.

Hasta ahora,

$$n_\mu n_\nu^* W^{\mu\nu} = 2\pi \times \frac{\pi\alpha'}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \int dz \sqrt{g_{\text{AdS}}} F_{mn}^* F^{pn} \partial^m \phi^* \partial_p \phi \quad (4.33)$$

donde hemos cambiado de la convención usual de las amplitudes de cuerdas a la que veníamos manejando anteriormente, en la que los estados salientes se conjugan. Cabe recordar que hemos despreciado un factor multiplicativo $\sim (\alpha'\tilde{s})^{\alpha'\tilde{t}}$. En esta expresión, podemos ver fácilmente que la contracción asociada al bosón de gauge tiene un término dominante de la forma

$$F_{\mu m}^* F_\nu^m = n_\mu^* n_\nu \frac{q^4}{R^2} z^4 [K_0^2(qz) + K_1^2(qz)] + |n|^2 q_\mu q_\nu \frac{q^2}{R^2} z^4 K_1^2(qz), \quad (4.34)$$

donde nuevamente estamos trabajando con $n \cdot q = 0$. El segundo término indica que en este régimen obtendremos una F_1 no nula. En cuanto a las funciones de onda dilatónicas, este caso es incluso más sencillo que el del canal s ya que no hay estados intermedios con los que tengamos que tener cuidado y podemos aproximar ambos factores de ϕ por la expresión válida cerca del borde (3.24).

Nos queda por realizar únicamente la integral radial, junto con la sumatoria sobre los modos excitados de cuerda cerrada. Notemos que están correlacionadas: existe una dependencia explícita

de z en el invariante curvo $\tilde{s} \approx s(z^2/R^2)$. Para realizar el cálculo, podemos aprovechar esta relación utilizando la delta de Dirac para realizar trivialmente la integral en z . Luego, vemos que la suma debe realizarse sobre los valores z_m tales que

$$\frac{\alpha' s z_m^2}{R^2} = m \Rightarrow z_m^2 \approx m \frac{x \lambda^{1/2}}{q^2}. \quad (4.35)$$

Esto quiere decir que para valores de x mucho menores que $\lambda^{-1/2}$ la separación entre dos términos consecutivos es muy pequeña, de modo que la sumatoria puede aproximarse por una integral. También podríamos haber hecho esta aproximación desde el inicio. De cualquier manera, definiendo la variable $w = qz$, las integrales que nos quedan resultan ser todas de la forma

$$I_{j,n} = \int_0^\infty dw w^n K_j^2(w) = 2^{n-2} \frac{\Gamma(\nu+j)\Gamma(\nu-j)\Gamma^2(\nu)}{\Gamma(2\nu)}, \quad \nu = \frac{1}{2}(n+1). \quad (4.36)$$

Nos interesan los casos $j = 1$ y $j = 0$ con $n = 2\Delta + 3$. Estas integrales s en particular satisfacen la identidad

$$I_{1,2\Delta+3} = \frac{\Delta+2}{\Delta+1}. \quad (4.37)$$

Comparando finalmente con el tensor hadrónico $W_\phi^{\mu\nu}$ más general para un blanco escalar obtenemos las siguientes funciones de estructura:

$$F_1(x, q^2) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\Delta-1} \frac{\rho \pi^2 |c_i|^2}{4\pi\sqrt{\lambda}} I_{1,2\Delta+3}, \quad F_2(x, q^2) = 2x \left(\frac{2\Delta+3}{\Delta+2} \right) F_1. \quad (4.38)$$

A la hora de analizar estos resultados, podemos marcar los siguientes aspectos fundamentales:

- Debemos recordar que estos resultados son válidos en el régimen $\exp(-\lambda^{1/2}) \ll x \ll \lambda^{-1/2}$.
- Vemos que el factor de supresión en potencias de Λ/q que obtuvimos sigue siendo el mismo que para el régimen de x grande. Esto era esperable: mientras estemos en el límite $N \rightarrow \infty$, su presencia puede argumentarse como lo hicimos anteriormente a partir de consideraciones cinemáticas como lo hicimos anteriormente.
- Notamos que hemos obtenido una función de estructura F_1 no nula incluso para nuestro blanco escalar. Esto es por que la interacción del fotón dual se da no con el estado entrante sino, esquemáticamente hablando, con un gravitón *reggeizado*.
- Hemos obtenido el crecimiento de las funciones de estructura conforme el parámetro de Bjorken x toma valores cada vez más pequeños: $F_1 \sim x^{-2}$ y $F_2 \sim x^{-1}$. Este crecimiento es perfectamente compatible con la interpretación probabilística de las funciones de estructura del DIS. También resulta ser similar a los resultados que se obtienen en el régimen perturbativo a partir de la física de Regge. Este comportamiento se mantendrá incluso para valores exponencialmente chicos de x , con pequeñas correcciones en los exponentes.
- Además, resaltamos que la relación entre ambas funciones ahora toma la forma $F_2 \sim 2xF_1$ de manera que hemos recuperado la x que faltaba en la importante relación de Callan-Gross! La identidad no se cumple de manera exacta debido a la presencia del factor numérico $3/2 < \frac{2\Delta+3}{\Delta+2} < 2$.

- Finalmente, notamos que si los resultados que obtuvimos fuesen válidos hasta $x = 0$ estaríamos obteniendo momentos $M_n(F)$ divergentes para los primeros valores de n . Esto indica que debemos comprender la manera en que este cálculo se corrige para poder tener una imagen físicamente válida en todo el rango físico $0 < x < 1$. Trataremos este problema en el capítulo 5.

4.2. Contribuciones antisimétricas

Antes de pasar a otro régimen, debemos preguntarnos si realmente tuvimos en cuenta todas las contribuciones dominantes. Si bien tienen un régimen de validez más restringido, los métodos utilizados a lo largo de este capítulo son más generales que los del anterior. En efecto, dados ciertos estados entrantes, las amplitudes de cuerdas incluyen por construcción todos los posibles diagramas de Feynman que uno podría imaginarse en un tratamiento tipo teoría de campos (en la expansión perturbativa). Nuestras conclusiones parecen entonces firmes, y los resultados finales son los de las ecuaciones (4.38) sumados a la conclusión de que $F_3(x, q^2) = 0$ que surge de la comparación con (2.15). Esta conclusión parece razonable: en el modelo estándar sólo puede haber una F_3 no nula si se consideran procesos que violan paridad dados por el denominado DIS electro-débil, donde el fotón es reemplazado por un bosón de gauge de $SU(2)$.

Sin embargo, la respuesta a nuestra pregunta inicial es negativa. Si bien tienen algunos aspectos en común, la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM no se comporta en este aspecto como QCD: se trata de una teoría quiral en la que los fermiones están representados por espinores de Weyl izquierdos. Por lo tanto, debemos tener cuidado a la hora de pensar en las contribuciones que pueda recibir F_3 , incluso en el contexto de un blanco escalar.

Análisis heurístico

En el régimen de Regge, las contribuciones correspondientes al siguiente orden en la expansión en potencias de \tilde{s} sólo puede provenir del intercambio de un campo de gauge en el canal t , y es en este tipo de procesos donde encontraremos nuestra función de estructura antisimétrica F_3 .

Más precisamente, debemos pensar que en el contexto de la reducción de la supergravedad IIB en la esfera S^5 lo que obtenemos en 5d es una supergravedad maximal gaugeada con grupo de gauge $SO(6) \sim SU(4)$ asociado a las isometrías de la esfera. La acción completa de esta supergravedad *gaugeada* contiene la siguiente acción para los campos de gauge, dada por el término cinético usual sumado a una contribución topológica que denominaremos S_{CS} :

$$S_{5d}[A] = \int d^5x \left[\sqrt{-g} \frac{1}{4g_{SG}^2} F_{mn}^A F^{A,mn} + \frac{i\kappa}{96\pi^2} (d^{ABC} \varepsilon^{mnopq} A_m^A \partial_n A_o^B \partial_p A_q^C + \dots) \right], \quad (4.39)$$

donde hemos tomado $R = 1$ para no recargar la notación. Vale la pena detenernos por un momento para recordar que S_{CS} ha tenido un papel destacado en el surgimiento de la dualidad AdS/CFT.

La anomalía quiral

En su trabajo fundacional [15], Witten utiliza la existencia de este término en la acción de supergravedad como una verificación de consistencia de la conjetura de Maldacena. A continuación describimos el razonamiento que promueve esta afirmación.

En la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM existe una anomalía (global) asociada a la simetría-R $SU(4)_R$, lo que quiere decir que la simetría está rota a nivel cuántico. La anomalía puede ser obtenida exactamente

a un *loop* mediante al cálculo de un diagrama de Feynman tipo triángulo con tres patas externas asociadas a la corriente J_μ conectadas por tres propagadores de fermiones quirales. El resultado que se obtiene queda plasmado en la siguiente fórmula (ver por ejemplo [51] y sus referencias):

$$\frac{\partial}{\partial z_\rho} \langle J_\mu^A(x) J_\nu^B(y) J_\rho^C(z) \rangle_- = -\frac{N^2 - 1}{48\pi^2} i d^{ABC} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial x_\rho} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \delta^4(x - z) \delta^4(y - z), \quad (4.40)$$

donde el subíndice con un signo menos indica que se trata de la parte *anormal* de la función de tres puntos. Por otro lado, ε es el símbolo de Levi-Civita, d^{ABC} y f^{ABC} son los símbolos definidos por el álgebra de Lie de $SU(4)_R$ según $\text{Tr}(T^A T^B T^C) \equiv \frac{1}{4}(i f^{ABC} + d^{ABC})$, con T^A los correspondientes generadores hermíticos, normalizados de manera tal que $\text{Tr}(T^A T^B) = \frac{1}{2} \delta^{AB}$. Teniendo en cuenta el acoplamiento minimal $\int d^4x J_\mu^A(x) A^{A,\mu}(x)$ con fuentes externas $A^{A,\mu}(x)$, podemos rescribir la ecuación (4.40) en términos de la relación de operadores dada por

$$(D^\mu J_\mu(x))^A = \frac{N^2 - 1}{96\pi^2} i d^{ABC} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(A_\nu^B \partial_\rho A_\sigma^C + \frac{1}{4} f^{CDE} A_\nu^B A_\rho^D A_\sigma^E \right). \quad (4.41)$$

La existencia de esta anomalía tiene se ve reflejada del lado gravitatorio de una manera elegante: las simetrías globales del borde se corresponden con simetrías de gauge en el interior de AdS_5 , de manera que la acción resulta no ser invariante de gauge. Esta propiedad se debe justamente a la presencia de S_{CS} , cuya variación genera los correspondientes términos de borde. Tanto la anomalía del borde como los términos de borde generados por la variación de S_{CS} pueden ser calculados exactamente, y la correspondencia es exacta [15, 51, 52]. A partir de (4.39) podemos derivar la interacción de tres puntos entre bosones de gauge asociada a este efecto y obtener un correlador de tres puntos de la corriente que, como antes, puede describirse según

$$(D^\mu J_\mu(x))^A = \frac{i \kappa}{96\pi^2} d^{ABC} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(A_\nu^B \partial_\rho A_\sigma^C + \frac{1}{4} f^{CDE} A_\nu^B A_\rho^D A_\sigma^E \right), \quad (4.42)$$

donde hemos considerado condiciones de contorno para los vectores $A_\mu^A(x) \equiv \lim_{z \rightarrow 0} A_\mu^A(x, z)$. Comparando los resultados (4.42) y (4.41) (y haciendo lo mismo con las funciones de dos puntos) obtenemos el valor exacto de los coeficientes involucrados del lado gravitatorio en términos de las constantes asociadas a la teoría de campos: $\kappa = N^2 - 1$ y $g_{SG} = 4\pi/N$.

El mismo resultado puede ser interpretado desde el punto de vista del OPE entre corrientes [45], cuya relevancia para el análisis del DIS resaltamos en la introducción. En efecto, el resultado que hemos presentado para la función de tres puntos escrito en el espacio de coordenadas y la función de dos resultan ser

$$\lim_{y \rightarrow 0} \langle J_A^\mu(y) J_B^\nu(0) J_C^\rho(z) \rangle = \frac{N^2}{8\pi^6} d^{ABC} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\gamma} \frac{y^\sigma}{y^4(y-z)^6} \left(\eta^{\gamma\rho} - 2 \frac{(y-z)^\gamma (y-z)^\rho}{(y-z)^2} \right), \quad (4.43)$$

y

$$\langle J_A^\mu(y) J_B^\nu(z) \rangle = \delta_{AB} \frac{3N^2}{8\pi^4} \frac{1}{(y-z)^6} \left(\eta^{\mu\nu} - 2 \frac{(y-z)^\mu (y-z)^\nu}{(y-z)^2} \right), \quad (4.44)$$

respectivamente. De estas expresiones deducimos que existe una contribución al OPE del producto JJ de la forma

$$J_a^\mu(y) J_b^\nu(0) = d^{abc} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{y_\rho}{3\pi^2 y^4} J_{C,\sigma}(0) + \dots \quad (4.45)$$

Por lo tanto, en el espacio de momentos obtenemos

$$\tilde{J}_A^\mu(q) J_B^\nu(0)|_{\text{asym}} = d^{ABC} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{2q_\rho}{3Q^2} J_{C,\sigma}(0) = d^{ABC} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{q_\rho}{3P \cdot q} \frac{1}{x} J_{C,\sigma}(0). \quad (4.46)$$

Notemos que este razonamiento es válido incluso en el régimen de acoplamiento fuerte.

El proceso dominante

Ahora bien, en el contexto del DIS la observación importante que debemos realizar es que la contribución antisimétrica al OPE del producto JJ que acabamos de describir es el equivalente a la presencia del tensor de energía-momento en el sector simétrico. Por lo tanto, así como en la sección anterior concluimos que el proceso relevante estaba asociado con el intercambio de un gravitón en el canal t , la ecuación (4.46) nos indica que en este caso debemos considerar un diagrama similar asociado al intercambio de un bosón de gauge. Notemos que esta conclusión es consistente con el análisis en potencias de \tilde{s} en el régimen de Regge que nombramos anteriormente.

El proceso dominante viene dado entonces por el descrito en la figura 16. Analizemos este

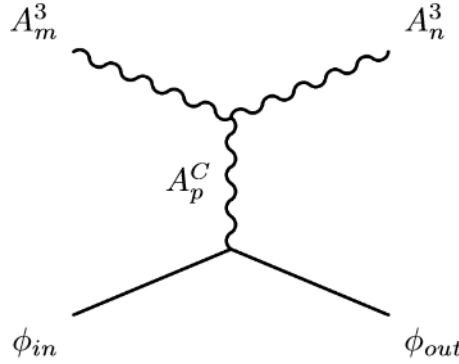


Figura 16: Diagrama dominante para la obtención de la parte antisimétrica del tensor hadrónico en acoplamiento fuerte. El proceso consiste en el intercambio de un bosón de gauge en el canal t .

proceso en detalle. En primer lugar, el vértice superior viene dado por la interacción triple presente en S_{CS} . Dicho vértice tiene una estructura no trivial en lo que respecta a los índices de *color* A, B, C, \dots asociada al símbolo simétrico d_{ABC} , de manera que resulta conveniente indicar explícitamente cuáles son los bosones entrantes según nuestras condiciones de contorno. Como dijimos anteriormente, nuestra corriente *electromagnética* está asociada al generador diagonal T^3 del álgebra de $SU(4)_R$, por lo que los bosones entrantes vienen dados por A_m^3 en ambos casos. Esto tiene consecuencias importantes: vemos que los términos que nos interesan son de la forma d_{33C} , y las únicas contribuciones no nulas corresponden a los otros dos generadores diagonales:

$$d_{338} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad d_{33,15} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad d_{33C} = 0 \quad \forall C \neq 8, 15. \quad (4.47)$$

Esto nos permite analizar el vértice inferior: el acoplamiento con el dilatón tiene la forma usual de la corriente J_ϕ que ya utilizamos en el análisis del régimen de x grande. Sólo necesitamos generalizar la definición de esta corriente y la ecuación de autovalores que define la carga correspondiente para incluir los términos asociados a los generadores diagonales:

$$J_C^n(x') = -\mathcal{Q}_C (\phi \partial^n \phi^* - \phi^* \partial^n \phi), \quad K_a^C \partial^a Y(\Omega) = -\mathcal{Q}^C Y(\Omega). \quad (4.48)$$

Utilizando la misma notación que en el análisis heurístico de la sección anterior, la amplitud asociada a este diagrama en la teoría de supergravedad viene dada por

$$\mathcal{A} = \kappa_5^2 \int d^5x d^5x' \mathcal{J}_C^m(x) G_{mn}^{CD}(x, x') J_D^n(x'), \quad (4.49)$$

donde \mathcal{J}_C^m es la corriente definida por el término de Chern-Simons,

$$\mathcal{J}_C^m(x) = \frac{i}{6} d_{ABC} \varepsilon^{mnopq} \partial_n A_o^A \partial_p A_q^B. \quad (4.50)$$

En el régimen de altas energías, podemos aproximar el propagador del campo de gauge según ⁶

$$G_{mn}^{CD}(x, x') \approx g_{mn} \delta^{CD} G_{\text{gauge}}(x, x'). \quad (4.51)$$

Por lo tanto, el integrando de la amplitud (4.49) resulta ser

$$\mathcal{J}_C^m(x) G_{mn}^{CD}(x, x') J_D^n(x') = -\frac{i}{6} d_{ABC} \mathcal{Q}^C \varepsilon^{mnopq} \partial_n A_o^A \partial_p A_q^B (\phi \partial_m \phi^* - \phi^* \partial_m \phi). \quad (4.52)$$

Como dijimos, los fotones entrantes corresponden a modos A_m^3 .

Finalmente, para obtener la función de estructura antisimétrica $F_3(x, q^2)$ en el régimen $x \ll 1$ debemos construir una acción efectiva con la estructura tenorial de (4.52). Luego, debemos incluir el prefactor de teoría de cuerdas como lo hicimos en el caso simétrico y tomar la parte imaginaria. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}^{\text{Asym}} &= -\frac{i}{6} d_{33C} \mathcal{Q}^C \text{Im} [\mathcal{G} \tilde{s}^2] \kappa_5^2 \times \\ &\int d^5\Omega \sqrt{g_{S^5}} \int d^5x \varepsilon^{mnopq} \partial_m A_n^{*3} \partial_o A_p^3 (\phi \partial_q \phi^* - \phi^* \partial_q \phi). \end{aligned} \quad (4.53)$$

El último paso consistiría en insertar las soluciones asociadas a cada uno de los modos entrantes. Dejamos este cálculo para más adelante. Esto es porque queremos mostrar previamente cómo se obtiene esta acción efectiva mediante un cálculo de primeros principios. Si bien por ahora la inclusión de $\mathcal{G}(\alpha', \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u})$ resulta *ad hoc*, veremos que de manera similar al caso simétrico podemos obtener esta misma expresión final para la amplitud mediante el análisis de la amplitud relevante de supercuerdas cerradas.

Derivación desde la teoría de cuerdas

El Lagrangiano asociado a la interacción efectiva que encontramos en la sección anterior a partir del término de Chern-Simons presente en la acción de supergravedad también puede ser obtenido a partir de la teoría de cuerdas subyacente: supercuerdas tipo IIB en $\text{AdS}_5 \times S^5$, incluyendo el prefactor. Para esto, necesitamos calcular una amplitud de cuatro cuerdas en particular y luego tomar el límite $\tilde{t} \rightarrow 0$, como lo hicimos en el caso simétrico. Los modos entrantes deben corresponder nuevamente a dos dilatones y dos campos de gauge A^3 . Ahora bien, en el caso correspondiente al intercambio de un gravitón, estos campos de gauge podían verse como una perturbación en particular de la métrica. Además, las amplitudes de teoría de cuerdas incluyen todos los posibles diagramas y modos intercambiados. Por lo tanto, debemos preguntarnos cómo es posible que las

⁶Notamos que hay una contribución extra dada por un término de gauge puro que no contribuye a nuestra amplitud [50].

contribuciones antisimétricas (que sabemos que no son nulas ni despreciables a partir del análisis heurístico de la sección anterior) no hayan aparecido al considerar la amplitud $\mathcal{A}(h, h, \phi, \phi)$.

La sutileza radica en el hecho de que, en realidad, los bosones de gauge en AdS_5 que se obtienen al realizar la reducción sobre la 5-esfera surgen en realidad de una combinación lineal de modos del gravitón junto con ciertos modos de la 4-forma de RR [53]. Daremos la relación precisa unos renglones más abajo, pero por el momento queremos resaltar que esta mezcla necesaria para diagonalizar las ecuaciones de movimiento implica que a la hora de pensar en las amplitudes de cuerdas también debemos considerar modos de RR entrantes! En otras palabras, necesitamos considerar una nueva amplitud de la forma

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}_5, \mathcal{F}_5, \phi, \phi). \quad (4.54)$$

Para verificar esta afirmación podemos realizar un cálculo preliminar: es evidente que un razonamiento similar que considere los mismos modos de RR en el contexto de una interacción triple de cuerdas debería llevarnos a un término cuya estructura sea similar a la de S_{CS} ⁷. En la siguiente sección mostraremos como puede obtenerse a partir de la amplitud

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}_5, \mathcal{F}_5, h). \quad (4.55)$$

Más adelante, aplicaremos un razonamiento similar para obtener el Lagrangiano efectivo asociado a las contribuciones antisimétricas al tensor hadrónico del DIS, que luego lo utilizaremos para calcular la función de estructura $F_3(x, q^2)$ para los blancos escalares (glueballs).

La interacción de Chern-Simons a partir de la amplitud de cuerdas

Para empezar, calcularemos una amplitud dispersión de cuatro cuerdas cerradas en la teoría IIB (y en un espacio plano de diez dimensiones). Luego, evaluaremos las polarizaciones de los estados entrantes a partir del *Ansatz* correspondiente a la compactificación en S^5 . Este *Ansatz* produce como resultado final la supergravedad en cinco dimensiones con grupo de gauge $SU(4)$ asociada a la solución de AdS_5 . Seguiremos en gran medida las convenciones de las referencias [53, 54] donde la compactificación fue tratada en detalle a nivel lineal y no lineal, respectivamente.

Nos concentramos primeramente en la forma del *Ansatz* para la reducción de los modos provenientes del gravitón y de la 4-forma de RR. La parte relevante de la acción en diez dimensiones viene dada por

$$S_{10d}^{IIB \text{ sugra}} = \frac{-1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} \left(\mathcal{R}_{10d} - \frac{1}{240} \mathcal{F}_5^2 \right) + \dots, \quad (4.56)$$

con G_{MN} la métrica diez-dimensional. Además, las definiciones de la constante de Newton en 10d κ_{10} y su contrapartida en 5d κ_5 son tales que $2\kappa_{10}^2 = \text{Vol}(S^5) 2\kappa_5^2$ con $\text{Vol}(S^5) = \pi^3$. Debemos además tener cuenta la condición de auto-dualidad $\mathcal{F}_5 = *\mathcal{F}_5$, con $*$ el operador definido como el dual de Hodge, que puede escribirse en componentes como

$$\mathcal{F}_{M_1 \dots M_5} = 5 \partial_{[M_1} a_{M_2 \dots M_5]} , \quad (*\mathcal{F})_{M_1 \dots M_5} = \frac{1}{5!} \sqrt{-G} \varepsilon_{M_1 \dots M_5 N_1 \dots N_5} \mathcal{F}^{N_1 \dots N_5} . \quad (4.57)$$

La reducción en la 5-esfera es consistente, y podemos pensar que todos los demás campos están apagados. Podemos obtener las ecuaciones de movimiento en AdS_5 expandiendo en armónicos escalares, vectoriales y tensoriales en S^5 . Sin embargo, en lo que respecta a los modos vectoriales en AdS

⁷Notemos que no esperamos encontrar S_{CS} ya que este término puede tener contribuciones asociadas un *Ansatz* no lineal en la compactificación en S^5 , así como también contribuciones a un *loop*.

las ecuaciones de movimiento linealizadas correspondientes a estos dos campos están acopladas de manera tal que es necesario considerar una combinación lineal de modos para poder diagonalizarlas. Los modos más livianos de la torre de KK correspondiente son los que generan los bosones de gauge no masivos asociados a las isometrías del espacio interno: los modos que hasta ahora hemos denominado A_m^A . La forma esquemática de las perturbaciones involucradas es la siguiente:

$$h_{ma} = A_m^B K_a^B, \quad a_{mabc} \sim A_m^B Z_{abc}^B. \quad (4.58)$$

En estas expresiones, K_a^B representa a los 15 vectores de Killing y Z_{abc}^A es un pseudo-tensor en la esfera definido a partir de dichos vectores, la forma de volumen y las derivadas covariantes ∇_a según

$$Z_{abc}^A \equiv \epsilon_{abcde} \nabla^d K^{eA}, \quad (4.59)$$

con el tensor de Levi-Civita

$$\epsilon_{abcde} = \sqrt{g_{S^5}} \varepsilon_{abcde}, \quad \epsilon^{abcde} = \frac{1}{\sqrt{g_{S^5}}} \varepsilon^{abcde}.$$

Aquí, ε es simplemente el símbolo totalmente antisimétrico definido de manera tal que $\varepsilon_{12345} = \varepsilon^{12345} = 1$. Concretamente, la combinación lineal que diagonaliza las ecuaciones de movimiento en el caso no masivo no es otra cosa que

$$A_m^A \equiv A_m^A(h) - \frac{16}{R} \tilde{A}_m^A(a). \quad (4.60)$$

Teniendo a mano la expresión (4.58), podemos llevar a cabo nuestra propuesta para derivar la estructura de S_{CS} . Como dijimos, el punto de partida es la amplitud

$$\mathcal{A} \sim \int \prod_{i=1}^3 d^2 z_i \langle V_{RR}^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(z_1, \bar{z}_1) V_{RR}^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(z_2, \bar{z}_2) V_{NSNS}^{(-1, -1)}(z_3, \bar{z}_3) \rangle, \quad (4.61)$$

donde V_{NSNS} y V_{RR} son los operadores de vértice en la teoría de la hoja de mundo, cuyas expresiones pueden encontrarse por ejemplo en [55-57]. En el caso que nos interesa, los V_{RR} corresponden a modos de la 5-forma autodual y V_{NSNS} está asociado a una perturbación de la métrica. La amplitud correspondiente ha sido calculada explícitamente en [57], y toma la siguiente forma:

$$\mathcal{A}_{\text{closed}}^{(3)} = -\frac{i}{2} \kappa \varepsilon_{MN}^1 \text{Tr} (\zeta^2 \mathcal{C} \Gamma^M \zeta^{3T} \mathcal{C} \Gamma^N), \quad (4.62)$$

donde Γ^M son las matrices de Dirac en diez dimensiones (es decir tiene 32×32 componentes) y las polarizaciones ζ^i están definidas según definido por

$$\zeta_{AB}^{IIB} = \mathcal{F}_{M_1 \dots M_5}^{(5)} (\mathcal{C} \Gamma^{M_1 \dots M_5})_{AB}. \quad (4.63)$$

Para obtener una expresión final más clara en términos de las polarizaciones debemos evaluar la traza del producto de doce matrices Gamma en (4.62). Notamos que la matriz de conjugación de carga \mathcal{C} se utiliza para subir y bajar los índices de las matrices Γ , y cumple las propiedades

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{AB}^{-1} \mathcal{C}^{BC} &= \delta_A^C, & \mathcal{C}^{AB} &= -\mathcal{C}^{BA}, \\ (\Gamma^M)_{AB} &= \mathcal{C}_{BC}^{-1} (\Gamma^M)_A^C, & (\Gamma^M)^{AB} &= \mathcal{C}^{AC} (\Gamma^M)_C^B, \\ \mathcal{C}^{AC} (\Gamma_M)_C^D \mathcal{C}_{DB}^{-1} &= -(\Gamma_M^T)_B^A, & (\Gamma_M)_A^B &= -\mathcal{C}_{AC}^{-1} (\Gamma_M^T)_D^C \mathcal{C}^{DB}, \end{aligned}$$

y también son válidas las expresiones

$$\mathcal{C}_{AB}^{-1} = -\mathcal{C}_{BA}^{-1}, \quad \left((\Gamma^{M_1 \dots M_5})^T \right)_B^A = -\mathcal{C}^{AC} (\Gamma^{M_5 \dots M_1})_C^D \mathcal{C}_{DB}^{-1}. \quad (4.64)$$

También utilizamos el hecho de que para cualquier producto de matrices que sean a su vez productos de las Γ^M se cumple que

$$R_{AB} S^{BC} = -R_A^B S_B^C.$$

Teniendo en cuenta todas estas propiedades, podemos ver que la amplitud toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{closed}}^{(3)} &= -\frac{i}{2} \kappa h_{MN}^1 \mathcal{F}_{M_1 \dots M_5}^2 \mathcal{F}_{N_1 \dots N_5}^3 \left((\Gamma^{M_1 \dots M_5} \mathcal{C}^{-1})_{AB} (\mathcal{C} \Gamma^M)^{BC} (\Gamma^{N_5 \dots N_1} \mathcal{C}^{-1})_{CD} (\mathcal{C} \Gamma^N)^{DA} \right) \\ &= -\frac{i}{2} \kappa h_{MN}^1 \mathcal{F}_{M_1 \dots M_5}^2 \mathcal{F}_{N_1 \dots N_5}^3 \left((\Gamma^{M_1 \dots M_5})_A^{B'} (\Gamma^M)_{B'}^C (\Gamma^{N_5 \dots N_1})_C^{D'} (\Gamma^N)_{D'}^A \right) \\ &= -\frac{i}{2} \kappa h_{MN}^1 \mathcal{F}_{M_1 \dots M_5}^2 \mathcal{F}_{N_1 \dots N_5}^3 \text{Tr} (\Gamma^{M_1} \dots \Gamma^{M_5} \Gamma^M \Gamma^{N_1} \dots \Gamma^{N_5} \Gamma^N). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Por lo tanto, analizando la traza resultante obtenemos

$$\mathcal{A}_{\text{closed}}^{(3)} = -\frac{i}{15} k h_{MN}^1 [5 (\mathcal{F}_2^M \cdot \mathcal{F}_3^N + \mathcal{F}_3^M \cdot \mathcal{F}_2^N) - g^{MN} \mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2], \quad (4.66)$$

donde los índices omitidos están contraídos. Finalmente, en el contexto que nos interesa el último término es idénticamente nulo, pues las perturbaciones de la métrica tienen traza cero. Entonces, el resultado final toma la forma

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}_5^{(1)}, \mathcal{F}_5^{(2)}, h) = -\frac{2i\kappa_{10}}{3} h^{MN} \mathcal{F}_{MM_1 \dots M_4}^{(1)} \mathcal{F}_N^{(2) M_1 \dots M_4}. \quad (4.67)$$

Esta amplitud se corresponde con un término presente en la acción de supergravedad que puede obtenerse simplemente perturbando el término cinético de la 4-forma según $G_{MN} \rightarrow G_{MN} + h_{MN}$, y cuya extensión al caso de un espacio-tiempo curvo puede escribirse como

$$\frac{1}{3\kappa_{10}^2} \int_{\text{AdS}_5 \times S^5} d^{10}x \sqrt{-G} h^{MN} \mathcal{F}_{MM_1 \dots M_4} \mathcal{F}_N^{M_1 \dots M_4}. \quad (4.68)$$

Ahora bien, reemplazando las expresiones asociadas a cada una de las perturbaciones presentadas en (4.58) en esta última expresión vemos que emerge la estructura

$$\sqrt{-G} \mathcal{F}_{MM_1 \dots M_4} \mathcal{F}_N^{M_1 \dots M_4} h^{MN} \sim [\varepsilon^{mnopq} \partial_m A_n^A \partial_o A_p^B A_q^C] \left[\sqrt{g_{S^5}} \varepsilon_{abcde} \nabla^a K_A^b \nabla^c K_B^d K_C^e \right]. \quad (4.69)$$

El primer corchete coincide exactamente con la estructura tensorial que define S_{CS} , y concluimos que desde el punto de vista diez-dimensional esta expresión viene acompañada con una integral del segundo corchete sobre la 5-esfera. El integrando es completamente simétrico en los índices A, B y C , y realizando el cálculo de dicha integral explícitamente observamos la aparición del símbolo completamente simétrico d_{ABC} . Para esto, utilizamos la identidad (B.16).

Vemos entonces que, como nos propusimos en el inicio de esta sección, hemos obtenido la estructura completa del término de CS a partir de una amplitud de teoría de cuerdas. Para esto fue importante tener en cuenta la forma correcta de las perturbaciones relevantes, dada por (4.58).

La dispersión $A + \phi \rightarrow A + \phi$

El resultado obtenido en la sección anterior indican que para obtener desde primeros principios la acción efectiva (4.53) debemos considerar una contribución a la amplitud $A + \phi \rightarrow A + \phi$ proveniente de la interacción de cuatro cuerdas cerradas del tipo RR-RR-NSNS-NSNS que podemos expresar esquemáticamente como $\mathcal{A}(\mathcal{F}_5, \mathcal{F}_5, \phi, \phi)$. En este caso, la expresión análoga a (4.61) viene dada por⁸

$$\mathcal{A} \sim \int \prod_{i=1}^4 d^2 z_i \langle V_{\text{RR}}^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(z_1, \bar{z}_1) V_{\text{RR}}^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(z_2, \bar{z}_2) V_{\text{NSNS}}^{(-1, -1)}(z_3, \bar{z}_3) V_{\text{NSNS}}^{(0,0)}(z_4, \bar{z}_4) \rangle. \quad (4.70)$$

Refermios al lector interesado en los detalles del cálculo a la publicación [55]. El resultado final en el caso en que los modos RR están corresponden a perturbaciones de la 5-forma y los modos NS-NS están asociados a dos dilatones viene dado por el producto usual

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}_5^{(1)}, \mathcal{F}_5^{(2)}, \phi^{(3)}, \phi^{(4)}) = \mathcal{G} \mathcal{K}, \quad (4.71)$$

donde en este caso

$$\mathcal{K} = -80\kappa_{10}^2 \tilde{s} \tilde{u} \phi_3 \phi_4 \mathcal{F}_{MM_1 \dots M_4}^{(1)} \mathcal{F}_N^{(2) M_1 \dots M_4} k_4^M k_4^N. \quad (4.72)$$

Ahora bien, en el contexto del estudio holográfico del DIS estamos interesados en el régimen de x pequeño, en el que $\tilde{s} \ll \tilde{t}$ y es válida la aproximación local. En este caso, tomar este límite consiste simplemente en considerar $\tilde{u} = -\tilde{s}$ en (4.72) e intentar construir una interacción efectiva de cuatro puntos que permita reproducir esta amplitud. El Lagrangiano asociado a esta interacción efectiva resulta ser

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}_5 \mathcal{F}_5 \phi \phi} = -20\kappa_{10}^2 [\mathcal{G}(\alpha', \tilde{s}, \tilde{t} \rightarrow 0, \tilde{u}) \tilde{s}^2] \mathcal{F}_{MM_1 \dots M_4} \mathcal{F}_N^{M_1 \dots M_4} \partial^M \phi \partial^N \phi. \quad (4.73)$$

El último paso consiste en insertar la expresión dada en (4.58) para las perturbaciones de \mathcal{F}_5 y reescribir esta interacción en 10d en términos de los campos de gauge en AdS_5 . El reemplazo genera un integrando de la forma

$$[\mathcal{G}(\alpha', \tilde{s}, \tilde{t} \rightarrow 0, \tilde{u}) \tilde{s}^2] \sqrt{g_{S^5}} \left(\epsilon^{abcde} \nabla_a K_b^A \nabla_c K_d^B \right) (\epsilon^{mnopq} \partial_m A_n^A \partial_o A_p^B) \partial_{(e} \phi \partial_{q)} \phi. \quad (4.74)$$

Finalmente, utilizando la identidad (B.17) junto con la ecuación de autovalores (3.29), y volviendo a la convención de estados entrantes y salientes, observamos nuevamente la aparición del símbolo simétrico d_{ABC} y la de la corriente dilatónica J_m^C definida en (4.50) a través de

$$\left(\epsilon^{abcde} \nabla_a K_b^A \nabla_c K_d^B \right) \partial_{(e} \phi \partial_{q)} \phi^* = \frac{4i}{R} d_{ABC} K_C^e \partial_{(e} \phi \partial_{q)} \phi^* = \frac{2i}{R} d_{ABC} J_q^C, \quad (4.75)$$

Además, el factor d_{ABC} combinado con la estructura contenida en el segundo paréntesis del lado derecho de (4.74) permite obtener la corriente de Chern-Simons \mathcal{J}_n^D . Esto quiere decir que hemos obtenido de primeros principios la la estructura de la acción efectiva anticipada en (4.53), que hasta ahora sólo habíamos motivado heurísticamente. Por último, recordamos que en el proceso que nos interesa nos concentramos en la contribución proporcional a d_{33C} .

⁸Notemos que en esta sección utilizamos la convención estándar de teoría de cuerdas en la que todos los estados son considerados entrantes. Volveremos a nuestra convención original con dos estados entrantes y dos salientes a la hora de calcular la función de estructura F_3 .

La función de estructura F_3

La interacción efectiva de cuatro puntos que hemos obtenido en las secciones anteriores permite calcular la contribución dominante a la función de estructura antisimétrica $F_3(x, q^2)$: la única que nos faltaba en el contexto de los blancos escalares. El procedimiento es similar al que realizamos para obtener F_1 y F_2 a partir de (4.26). En este caso, el diccionario de la correspondencia AdS/CFT indica que [37, 45]

$$-iS_{\text{eff}}^{\text{Asym}} \equiv n_\mu n_\nu^* \text{Im} \left(T_{\text{Asym}}^{\mu\nu} \right) = \frac{1}{2\pi} n_\mu n_\nu^* W_{\text{Asym}}^{\mu\nu}, \quad (4.76)$$

donde la última igualdad se deduce del teorema óptico. Para facilitar la lectura, recordamos que la acción efectiva que debemos evaluar *on-shell* está dada por

$$S_{\text{eff}}^{\text{Asym}} = i \frac{R}{6} d_{33C} \mathcal{Q}^C \text{Im} [\mathcal{G}(\alpha', \tilde{s}, \tilde{t} \rightarrow 0, \tilde{u}) \tilde{s}^2] \times \int d^5x \Omega \sqrt{g_{S^5}} \int d^5x \varepsilon^{mnopq} \partial_m A_n^{3*} \partial_o A_p^3 (\phi \partial_q \phi^* - \phi^* \partial_q \phi). \quad (4.77)$$

Las soluciones correspondientes a los modos normalizables de ϕ y no normalizables de A_m^3 son nuevamente (3.24) y (3.11), respectivamente. Además, como en el caso simétrico es necesario trabajar en el límite $\tilde{t} \rightarrow 0$, y tomar la parte imaginaria del prefactor $\tilde{s}^2 \mathcal{G}$, dada por (4.14). Obtenemos entonces

$$n_\mu n_\nu^* W_{\text{asym}}^{\mu\nu} = |c'_i|^2 \frac{\pi^2}{3} \frac{\mathcal{Q} \mathcal{I}_\Delta}{\sqrt{4\pi\lambda}} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\Delta-1} n_\mu n_\nu^* \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{q_\rho P_\sigma}{2P \cdot q} \frac{1}{x} \quad (4.78)$$

donde la *carga* efectiva está se define $\mathcal{Q} = d_{33C} \mathcal{Q}^C$, mientras que \mathcal{I}_Δ corresponde a la integral sobre el producto cruzado de las funciones de Bessel dada por

$$\mathcal{I}_\Delta = \int d\omega \omega^{2\Delta+2} K_0(\omega) K_1(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma(\Delta+1)^2 \Gamma(\Delta+2)}{\Gamma(\Delta+\frac{3}{2})}. \quad (4.79)$$

Finalmente, comparando con la descomposición genérica (2.15) obtenemos la expresión final para la función de estructura F_3 asociada a un blanco escalar (un glueball) en el régimen de x pequeño:

$$F_3(x, q^2) = \frac{1}{x} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\Delta-1} \frac{\mathcal{Q} |c'_i|^2 \pi^2}{3\sqrt{4\pi\lambda}} \mathcal{I}_\Delta. \quad (4.80)$$

Los aspectos más importantes a la hora de analizar el resultado que obtuvimos son los siguientes:

- Es importante recordar en qué contexto estamos trabajando. En efecto, obtuvimos una función de estructura F_3 no nula incluso en el caso del DIS *electro-magnético* y para un blanco escalar. Dado que F_3 pertenece al sector antisimétrico e impar ante una transformación de paridad, esto no hubiese sucedido para QCD, pero es el resultado correcto para la deformación de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM con la que estamos trabajado, en la que asignamos un subgrupo de la simetría R el rol del *electro-magnetismo*. Sin embargo, veremos en el caso de los blancos fermiónicos que un razonamiento similar al presentado en estas últimas secciones permite obtener un resultado potencialmente más general para las funciones de estructura g_1 . Es más: como describiremos más adelante, dicho análisis nos llevará a poder realizar nuevas comparaciones con los datos experimentales.

- Destacamos el hecho de haber encontrado una función de estructura cuya dependencia con respecto al parámetro de Bjorken x es de la forma $F_3 \sim x^{-1}$. Obtenemos nuevamente una divergencia en el límite $x \rightarrow 0$ similar a lo descrito anteriormente para las funciones de estructura simétricas. De hecho, la divergencia es a primer orden la misma que la de F_2 . Encontramos entonces un contraste importante con el régimen de x grande, en el que F_3 era nula o al menos despreciable con respecto a F_1 y F_2 .
- Vemos que la dependencia de F_3 con respecto a q es exactamente la misma que para las funciones de la parte simétrica, es decir que aparece nuevamente el factor de supresión $(\Lambda^2/q^2)^{\Delta-1}$, con Δ el número cuántico asociado a la masa de KK del hadrón incidente. En otras palabras, el proceso relevante también es tal que el campo de gauge interactúa con la parte decreciente de la función de onda del hadrón dual como un todo, como era de esperarse en el límite $N \rightarrow \infty$.
- Notamos que, a diferencia del caso simétrico, F_3 resulta ser proporcional a una carga $\mathcal{Q} = d_{33C} \mathcal{Q}^C$ asociada al hadrón inicial incluso en el régimen de x pequeño. Esto implica una diferencia conceptual para F_3 con respecto a F_1 y F_2 : el hadrón debe estar cargado con respecto a las simetrías generadas por T_8 y T_{15} para tener una función de estructura antisimétrica no nula. En el caso simétrico vimos que no aparece ninguna condición de este tipo para x pequeño.
- La relación entre las integrales \mathcal{I}_Δ definida en (4.79) y las integrales $I_{j,n}$ definidas en (4.36) dada por

$$I_{1,2\Delta+3} = \int d\omega \omega^{2\Delta+3} K_1^2(\omega) = \frac{(2\Delta+2)(\Delta+2)}{2\Delta+3} \mathcal{I}_\Delta. \quad (4.81)$$

indica que hemos encontrado una nueva relación tipo Callan-Gross:

$$F_3(x, q^2) = \frac{\mathcal{Q}}{\rho_\Omega} \frac{4}{3} (\Delta+1) F_2(x, q^2) = \frac{\mathcal{Q}}{\rho_\Omega} \frac{8}{3} \frac{(2\Delta+3)(\Delta+1)}{(\Delta+2)} x F_1(x, q^2). \quad (4.82)$$

- Por último, resaltamos el hecho de que nuestro resultado final es totalmente consistente con el análisis realizado previamente en [45] para el caso de blancos de espín 1/2, válido para valores de x exponencialmente pequeños (a partir de la extrapolación necesaria).

Capítulo 5

El régimen de x exponencialmente pequeño

En esta sección analizamos lo que sucede en la región paramétrica en la que el parámetro de Bjorken x toma valores del orden de $\exp(-\sqrt{\lambda})$ o más pequeños. En estas condiciones, la aproximación local que utilizamos en el capítulo anterior deja de ser válida. Veremos que la amplitud de dispersión todavía se puede describir en términos de una expresión útil tanto para generar una interpretación intuitiva, asociada a la aparición de un fenómeno difusivo en la dirección radial, como para poder realizar comparaciones cualitativas y cuantitativas con los datos experimentales disponibles.

Comenzaremos repasando las propiedades generales de la dispersión de cuatro partículas a energías muy altas en el contexto de una teoría gravitatoria, centrándonos en el caso escalar para resaltar más fácilmente los conceptos fundamentales, y analizaremos tanto el caso plano como lo que sucede en el contexto de un espacio AdS. Luego, veremos cómo se modifica este análisis en el contexto de la teoría de cuerdas (en AdS₅). Finalmente, aplicaremos estos conocimientos a lo que nos interesa en esta tesis: la descripción holográfica del proceso de DIS. Partiendo de la base del capítulo anterior, veremos que se obtienen dos resultados distintos para las contribuciones simétricas y antisimétricas.

5.1. Dispersión gravitatoria para energías altas

En un espacio plano de cuatro dimensiones

Consideremos una dispersión de cuatro modos escalares de masa m en un espacio plano y tal que la energía del CM $s = -(p_1 + p_2)^2$ es mucho mayor que el invariante $t = -(p_1 + p_3)^2$ asociado al momento intercambiado y que m^2 . Es fácil convencerse de que, sea cual sea la teoría, para energías lo suficientemente altas y valores de t lo suficientemente chicos, y siempre y cuando podamos confiar en el un desarrollo perturbativo, el proceso dominante estará dado por el intercambio de una algún modo no masivo en el canal t . Supongamos que en la teoría en cuestión hay diversas partículas no masivas de diversos espines, y consideremos el caso en el que un bosón de spin j es intercambiado. Trabajamos en el espacio de momentos, de modo que las reglas de Feynman indican entonces que la amplitud será proporcional a la contracción del propagador correspondiente $G_{\mu_1 \dots \mu_j, \nu_1 \dots \nu_j}(t)$ con alguna estructura de índices construida a partir de los modos escalares $\phi_i(x) = e^{ip_i \cdot x}$ en cada uno de los vértices. Teniendo modos externos escalares, esos índices solamente pueden corresponder a sus derivadas, es decir a los momentos p_i . Una aproximación razonable consiste en considerar que los momentos de las partículas incidentes casi no se modifican durante la dispersión, de modo que

$p_3 \approx -p_1$ y $p_4 \approx -p_2$. Por lo tanto, vemos que la contribución dominante vendrá dada por situación en la cual la mayor cantidad posible de estas derivadas quedan contraídas entre los dos vértices, generando como máximo un factor s^j . En términos del propagador, esto quiere decir que solamente resulta importante considerar el siempre presente término

$$G_{\mu_1 \dots \mu_j, \nu_1 \dots \nu_j}(t) = \frac{1}{t} [g_{\mu_1 \nu_1} \dots g_{\mu_j \nu_j} + \dots] . \quad (5.1)$$

Ya utilizamos este razonamiento en la sección anterior (aunque en el contexto de AdS). En efecto, hemos notado que en una teoría gravitatoria, el máximo spin disponible es $j = 2$, de manera que el proceso de altas energías está dominado por el intercambio de un gravitón. También sabemos que el acoplamiento se da universalmente con el tensor de energía momento de los modos externos involucrados, del que solamente nos interesa el término

$$T_{\mu\nu}^\phi = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi^* + \dots . \quad (5.2)$$

En conclusión, la amplitud de nuestra dispersión viene dada a primer orden por

$$\mathcal{A}^{(1)}(p_i) = -\kappa^2 \frac{s^2}{t} \quad (5.3)$$

además de una delta de Dirac asociada a la conservación del momento, y donde κ representa la constante de Einstein correspondiente al acoplamiento gravitatorio.

Conviene tomarnos el trabajo de analizar un poco más esta amplitud y de describirla de una manera que nos será útil a la hora de generalizarla. Por empezar, notamos que podemos pensar en que tenemos un acoplamiento efectivo de la forma

$$\kappa_{\text{eff}}(s) = \kappa s, \quad (5.4)$$

totalmente consistente con el hecho de que la gravedad se acopla con la energía, por decirlo de alguna manera, y que nos indica que la expansión perturbativa será válida para energías grandes siempre y cuando mantengamos $\kappa_{\text{eff}} \ll 1$. Por otro lado, en el sistema CM y en coordenadas de cono de luz tenemos aproximadamente

$$p_1^+ \approx -p_3^+, \quad p_2^- \approx -p_4^-, \quad (5.5)$$

con $s \approx -2p_1^+ p_2^-$ de modo que si pasamos al espacio de posición en las direcciones transversas la parte escalar del propagador puede expresarse como [58]

$$\frac{1}{t} \rightarrow - \int \frac{dq_\perp^2}{(2\pi)^2} \frac{e^{iq_\perp \cdot x_\perp}}{q^2 - i\epsilon} \approx - \int \frac{dq_\perp^2}{(2\pi)^2} \frac{e^{iq_\perp \cdot x_\perp}}{q_\perp^2 - i\epsilon} \quad (5.6)$$

con $q = p_1 + p_3$, es decir que resulta ser independiente de las componentes p_i^\pm . Pensando en esta representación mixta, asociada a la noción del parámetro de impacto b (la separación transversal en las condiciones iniciales), describimos la amplitud como

$$\mathcal{A}^{(1)}(s, b) = 2s \int \frac{db^2}{(2\pi)^2} e^{iq_\perp \cdot b} \chi(s, b), \quad \chi(s, b) \equiv \frac{1}{2s} \int \frac{dq_\perp^2}{(2\pi)^2} \kappa^2 s^2 \frac{e^{iq_\perp \cdot b}}{q_\perp^2 - i\epsilon}. \quad (5.7)$$

Por ahora, esto es simplemente una transformada parcial de Fourier, pero veremos en un momento que la definición de la denominada *fase eikonal* $\chi(s, b)$ permite generalizar esta amplitud de manera directa.

En efecto, sabemos que a medida que consideremos energías mayores la expansión perturbativa requiere, al menos en un primer momento, la inclusión de diagramas que incluyan una cantidad cada vez mayor de loops. Siguiendo el mismo razonamiento de los párrafos anteriores, los diagramas que darán la contribución dominante son los denominados *diagramas tipo escalera* como el de la figura 17 que dan cuenta del intercambio de n gravitones.

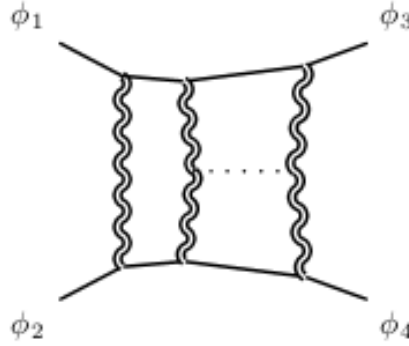


Figura 17: Diagramas tipo escalera para la dispersión de escalares en el régimen de altas energías.

Lo interesante es que, al menos en este régimen, podemos considerarlos a todos y resumarlos en una única expresión compacta. Esto es porque los propagadores escalares también se ven simplificados. Esquemáticamente, si consideramos por ejemplo el modo cuyo momento está dado por $p = p_1 - k_1$, donde k_1 es el momento asociado al primer gravitón que se propaga, tenemos

$$\frac{1}{p^2 + m^2 - i\epsilon} = \frac{1}{(p_1 - k_1)^2 + m^2 - i\epsilon} \approx \frac{1}{2p_1^+ k_1^- - i\epsilon}. \quad (5.8)$$

La integración del momento que circula en el loop tendrá una parte asociada a las componentes transversales, que en virtud de (5.6) resulta ser independiente de las integrales asociadas a las componentes del cono de luz. Estas últimas se pueden realizar a partir de (5.8) aplicada a los escalares cuyos momentos son $(p_1 - k_1)$ y $(p_2 + k_1)$, respectivamente, y utilizando el teorema de residuos. De esta manera, en el caso de un loop simplemente se genera un factor multiplicativo

$$-\frac{1}{2p_1^+} \frac{1}{2p_2^-} = -\frac{1}{2s} \quad (5.9)$$

además de los factores s^2 por cada propagador gravitatorio. En resumen, acabamos de describir esquemáticamente las razones de la factorización que se da en este régimen.

Finalmente, teniendo en cuenta los factores de simetría de los distintos diagramas obtenemos una amplitud que resume todos los intercambios de n gravitones dada por

$$\mathcal{A}_{\text{eikonal}}(s, t = -q_\perp^2) = -2is \int \frac{db^2}{(2\pi)^2} e^{iq_\perp \cdot b} [\exp(i\chi(s, b)) - 1]. \quad (5.10)$$

A diferencia de las amplitudes asociadas a cada uno de los diagramas de la serie, esta fórmula resulta ser válida para valores muy altos de s . En efecto, el crecimiento de la amplitud eikonal (5.10) para valores arbitrariamente grandes de la energía resulta mucho menor al de las potencias de s asociadas a cada uno de los diagramas individuales resumados por la exponencial. De esta manera, (5.10) permite satisfacer los requisitos que existen en cualquier teoría unitaria.

Es interesante notar que, sin embargo, la aproximación deja de ser válida antes de alcanzar energías del orden de la masa de Planck. El problema puede analizarse directamente en términos

de (5.10): la expansión en serie de la exponencial deja de tener sentido cuando la fase toma valores $\chi \sim 1$. A valores fijos de s , puede verse que ésto sucede cuando el parámetro de impacto se acerca al radio de Schwarzschild $R(s)$ definido por la escala de la energía del CM [58]. La interpretación es simple: para dichos parámetros de impacto las condiciones iniciales inducen la formación de un agujero negro. En estas condiciones es claro que la expansión perturbativa de la gravedad de Einstein pensada como teoría efectiva pierde sentido. En el contexto de DIS consideraremos a lo largo de toda esta tesis que las condiciones iniciales en el *bulk* nunca llegan a ser tan extremas. Por otro lado, vale la pena aclarar que el hecho de considerar una teoría de cuerdas en espacio plano como teoría completa de la gravedad no modifica cualitativamente el análisis que hemos realizado en esta sección.

Extensión a AdS_5

El análisis que acabamos de realizar para procesos de dispersión en espacio plano puede extenderse de manera análoga al caso en el que la geometría es la de AdS_5 . La primera diferencia está en la forma de las funciones de onda externas, que deberán incluir las funciones de Bessel asociadas a la dirección radial con las que trabajamos en los capítulos anteriores. Por otro lado, debemos incluir a la dirección radial entre las direcciones transversas, de manera que el propagador del gravitón también se modifica. El análisis del diagrama a nivel árbol es similar al que lleva a (5.7), y el resultado final toma en este contexto la misma forma que antes aunque con una nueva fase χ dada por

$$\chi(s, b, z, z') = \frac{1}{2s} \left[\frac{\kappa_5^2 s^2}{R} \left(\frac{zz'}{R^2} \right) \right] G_3(b, z, z'), \quad (5.11)$$

donde $G_3(b, z, z')$ representa el propagador de un modo escalar en el AdS_3 transverso. Para poder pensar en resumar todas las contribuciones de los diagramas de la serie eikonal, sólo necesitamos analizar el nuevo propagador escalar en AdS_5 . En este caso, el resultado análogo a (5.8) pasa a ser simplemente

$$(zz')^2 \int dk k \frac{J_{\Delta-2}(kz) J_{\Delta-2}(kz')}{k^2 + (k_1)_\perp^2 + 2p_1^+ k_1^-}. \quad (5.12)$$

Utilizando la identidad (B.23) para las integrales que involucran las funciones de Bessel y siguiendo los pasos de la sección anterior obtenemos la siguiente expresión final para la amplitud:

$$\mathcal{A}_{\text{eikonal-AdS}}(s, t = -q_\perp^2, z, z') = -2is \int \frac{db^2}{(2\pi)^2} e^{iq_\perp \cdot b} \left(\frac{zz'}{R^2} \right)^2 [\exp(i\chi(s, b, z, z')) - 1] \quad (5.13)$$

con la fase definida en (5.11), y donde hemos omitido nuevamente las deltas de Dirac asociadas a la conservación del momento longitudinal y a la localidad en las direcciones transversas. Hemos mantenido una representación mixta en términos de momentos en las direcciones planas y posiciones en la dirección radial para obtener el resultado que hemos de comparar más adelante con la amplitud asociada al DIS holográfico.

Vale la pena detenerse un instante para analizar el régimen de validez de la fórmula eikonal que acabamos de obtener. Por ahora hemos trabajado en el régimen en el que la descripción gravitatoria es lo suficientemente precisa, y tomando z y z' muy pequeñas en comparación con una posible deformación IR del espacio AdS alrededor de una escala z_0 . Sin embargo, también necesitamos que z y z' sean lo suficientemente grandes como para que la energía del CM $\tilde{s} \approx s z z' / R^2$ siga siendo grande, por ejemplo, en comparación con la masa de Planck. Por otro lado, notamos que hemos

obtenido una fórmula para la amplitud completa, mientras que para utilizarla en el contexto del DIS necesitaremos considerar $t = 0$ y quedarnos únicamente con la parte imaginaria.

5.2. El Pomerón

Nuestro objetivo en esta sección consiste en intentar utilizar un razonamiento similar al de la sección anterior para extender los resultados que hemos obtenido en la región de x chico a valores exponencialmente pequeños, es decir, a energías del CM aún más altas. Para esto, formalizaremos la idea del intercambio de un modo *reggeizado* más allá del régimen de validez de la aproximación local. En el caso simétrico, conceptualmente cercano al intercambio de un gravitón, este modo efectivo es el denominado *Pomerón*.

Ruptura de la aproximación local

Volvamos al análisis de las contribuciones simétricas al DIS. Hemos visto que para tener en cuenta que la teoría del bulk en es en realidad una teoría de supercuerdas basta con modificar el propagador gravitatorio $1/\tilde{t}$ mediante la inclusión del prefactor $\tilde{s}^2 \mathcal{G}$. Tomando la parte imaginaria en el límite $\tilde{s} \gg \tilde{t}$, este reemplazo se reduce a la inclusión de un factor (4.14). En el capítulo anterior elegimos despreciar el factor

$$\left(\frac{\alpha' \tilde{s}}{4}\right)^{\alpha' \tilde{t}/2} \approx 1 \quad \text{para} \quad \log(\sqrt{\lambda}) \gg s. \quad (5.14)$$

Sin embargo, teniendo en cuenta que $s \sim 1/x$ vemos que esta aproximación deja de ser válida en el régimen de x exponencialmente chico. Más precisamente, en este capítulo nos concentramos en el régimen

$$\lambda, s \rightarrow \infty \quad \text{con} \quad \frac{\log(\sqrt{\lambda})}{s} \quad \text{fijo}. \quad (5.15)$$

Por lo tanto, debemos incluir este factor, y nuestra nueva expresión para la amplitud pasa a ser

$$n_\mu n_\nu^* W^{\mu\nu} = 2\pi \times \frac{\pi\alpha'}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \int dz \sqrt{g_{AdS}} F_{mn}^* F^{pn} (\alpha' \tilde{s})^{\alpha' \tilde{t}/2} \partial^m \phi^* \partial_p \phi. \quad (5.16)$$

Ahora bien, hemos visto que si bien en el régimen del DIS era válido reemplazar a \tilde{s} por una constante, esto no era cierto para \tilde{t} , cuyo caracter de operador diferencial de segundo orden no puede pasarse por alto. En efecto, tenemos

$$\tilde{t} = \alpha' \frac{z^2}{2R^2} t + \frac{1}{R^2} \nabla_z^2 + \dots, \quad (5.17)$$

donde hemos despreciado las fluctuaciones en las direcciones angulares asociadas a S^5 . Como ya hemos discutido, en el caso del DIS tenemos las condiciones iniciales son tales que $t = 0$, aunque esto no es suficiente para tener $\tilde{t} = 0$ en la descripción holográfica debido a presencia de las derivadas en z . Este operador diferencial no actúa de manera simple sobre cada una de las soluciones, sino que puede pensarse como un laplaciano actuando sobre los modos intercambiados, cuyo spin es aproximadamente $j \approx 2$. Por lo tanto, podemos escribir

$$\frac{\alpha'}{2} \tilde{t} \approx \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \Delta_2 = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} [z^2 \partial_z^2 - z \partial_z - 4], \quad (5.18)$$

donde Δ_2 es un caso particular de la expresión válida para un spin genérico j

$$\Delta_j \equiv \frac{1}{z^j} \Delta_0 z^j, \quad \Delta_0 \equiv \frac{1}{R^2} [z^2 \partial_z^2 - 3z \partial_z] \quad (5.19)$$

que coincide con el operador laplaciano a menos de una función escalar:

$$\nabla_z^2|_j = \Delta_j + f(j). \quad (5.20)$$

Para encontrar la función escalar $f(j)$ podemos analizar caso por caso las ecuaciones de movimiento de los diferentes modos en AdS_5 . A partir de la ecuación de movimiento del gravitón vemos, por ejemplo, que $f(2) = 0$.

Consideremos por un momento un caso más simple que el DIS: la dispersión de cuatro modos escalares. En ese caso, y teniendo en cuenta la presencia de los operadores diferenciales que acabamos de describir, la expresión para la amplitud tomaría la forma

$$\mathcal{A} \propto \int dz \sqrt{g(z)} \phi_1 \phi_3 (\alpha' \tilde{s})^{2+\alpha' \frac{z^2}{R^2} t + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} [z^2 \partial_z^2 - z \partial_z - 4]} \phi_2 \phi_4, \quad (5.21)$$

con $\sqrt{g} \sim R^{10} z^{-5}$. Resulta conveniente introducir una nueva variable

$$u = -\ln \frac{z}{z_0} \Rightarrow -\frac{dz}{z} = du \quad \text{y} \quad z^2 \partial_z^2 + z \partial_z = (-z \partial_z)(-z \partial_z) = \partial_u^2 \quad (5.22)$$

utilizando alguna escala arbitraria de referencia z_0 que en este caso podemos hacer coincidir con el *cutoff* IR del modelo *hard-wall* tomando $z_0 = z_{\min} = 1/\Lambda$ para que más adelante sea simple imponer las condiciones de contorno ¹. Que aparezca esta nueva variable u con una representación más simple no es una casualidad: nos está diciendo que ∇_2 es un operador hermítico si pensamos en un problema de mecánica cuántica auxiliar en la dirección radial. En este problema auxiliar u está identificado con el tiempo asociado al *hamiltoniano* $H_2 = -(\partial_u^2 - 4)$. Equivalentemente, podemos considerar el producto interno usual pero con la medida $du = dz/z$. La idea de pensar en un problema de mecánica cuántica consiste en reinterpretar la amplitud utilizando el producto interno que acabamos de describir de la siguiente manera:

$$\mathcal{A}(t=0) \propto R^6 \langle \Phi_{13} | (\alpha' s)^{2+\frac{1}{2\sqrt{\lambda}} [\partial_u^2 - 4]} | \Phi_{24} \rangle = R^6 \int \frac{dz}{z} \langle \Phi_{13} | z \rangle \langle z | (\alpha' s)^{2+\frac{1}{2\sqrt{\lambda}} [\partial_u^2 - 4]} | \Phi_{24} \rangle, \quad (5.23)$$

donde $\langle z | \Phi_{ij} \rangle = \phi_i(z) \phi_j(z)$. Notemos que la medida del producto interno implica que

$$\mathbb{1} = \int du |u\rangle \langle u| = \int \frac{dz}{z} |z\rangle \langle z|, \quad \langle z | z' \rangle = z \delta(z - z'), \quad \langle u | u' \rangle = \delta(u - u'). \quad (5.24)$$

Para evaluar explícitamente la amplitud, lo más sencillo es diagonalizar el operador H_2 , que por ser hermítico tiene una base de autofunciones con autovalores reales, e insertar una identidad construida en base a dichas autofunciones. Este operador tiene una forma muy simple: las autofunciones resultan ser las ondas planas en la coordenada u . Si las etiquetamos en base a su energía E_ν , corresponden a estados $|\nu\rangle$ tales que

$$\langle u | \nu \rangle \equiv e^{i\nu u}, \quad H_2 |\nu\rangle = E_\nu |\nu\rangle, \quad E_\nu = \nu^2 + 4, \quad (5.25)$$

y por lo tanto satisfacen las siguientes identidades:

$$\langle \nu | \nu' \rangle = \int du \langle \nu | u \rangle \langle u | \nu' \rangle = \int du e^{iu(\nu' - \nu)} = 2\pi \delta(\nu - \nu') \Rightarrow \mathbb{1} \equiv \int \frac{d\nu}{2\pi} |\nu\rangle \langle \nu|. \quad (5.26)$$

¹Sin embargo, seguiremos escribiendo algunas fórmulas en términos de z pues será útil tenerlas a la hora de analizar el caso $j = 1$.

Por lo tanto, lo que podemos hacer es insertar una doble identidad

$$\mathbb{1} = \int du \int \frac{d\nu}{2\pi} |\nu\rangle \langle \nu| u' \rangle \langle u'|, \quad (5.27)$$

a la izquierda de Φ_{24} . Notemos que esto quiere decir que no quedarán todos evaluados en el mismo punto, sino que tendremos $\Phi_{13}(u)$ y $\Phi_{24}(u')$: estamos en presencia de la anunciada pérdida de localidad. Lo importante es que de esta manera, aislamos el kernel² $\mathcal{K}(u, u', t = 0, j = 2)$ que ya podemos definir y calcular explícitamente utilizando una integral gaussiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(u, u', t = 0, j = 2) &\equiv \langle u| (\alpha' s)^{2 + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} [\partial_u^2 - 4]} |u'\rangle \\ &= \int \frac{d\nu}{2\pi} \langle u| (\alpha' s)^{2 - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} H_2} |\nu\rangle \langle \nu| u'\rangle \\ &= \int \frac{d\nu}{2\pi} \langle u| (\alpha' s)^{2 - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} (\nu^2 + 4)} |\nu\rangle \langle \nu| u'\rangle \\ &= (\alpha' s)^{2 - \frac{2}{\sqrt{\lambda}}} \int \frac{d\nu}{2\pi} (\alpha' s)^{-\frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \nu^2} \langle u|\nu\rangle \langle \nu| u'\rangle \\ &= (\alpha' s)^{2 - \frac{2}{\sqrt{\lambda}}} \int \frac{d\nu}{2\pi} (\alpha' s)^{-\frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \nu^2} e^{i\nu(u' - u)}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Integrando en $-\infty < \nu < +\infty$ y definiendo $\tau = \ln(\alpha' s)$ resultado final se puede escribir como

$$\mathcal{K}(u, u', t = 0, j = 2) = (\alpha' s)^{2 - \frac{2}{\sqrt{\lambda}}} \sqrt{\frac{\lambda^{1/2}}{2\pi\tau}} e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{2\tau} (u - u')^2}, \quad (5.29)$$

donde la exponencial en $(u - u')^2$ es lo que se conoce como factor de difusión, y los demás factores del exponente forman el *tiempo característico* asociado. Finalmente, la amplitud que queríamos calcular resulta ser

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t = 0) &\propto R^6 \int du \int du' \phi_1(u) \phi_3(u) \mathcal{K}(u, u', t = 0, j = 2) \phi_2(u') \phi_4(u') \\ &= R^6 \int \frac{dz}{z} \int \frac{dz'}{z'} \phi_1(z) \phi_3(z) \mathcal{K}(u(z), u'(z'), t = 0, j = 2) \phi_2(z') \phi_4(z'). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Ahora bien, resulta interesante y necesario contestar las siguientes dos preguntas:

- ¿Qué pasa cuando $t \neq 0$?
- ¿Qué pasa cuando tenemos en cuenta el *hard-wall* (confinamiento)?

Las primera la vamos a contestar sin entrar en detalles, mientras que la segunda va a ser importante y la analizaremos con más cuidado. Por un lado, cuando $t \neq 0$ el planteo es similar pero lo que cambia es el operador que hay que diagonalizar, y teniendo en cuenta (5.17) es fácil ver que lo que hay que hacer es reemplazar

$$H_2 \rightarrow H_2 - V(u), \quad V(u) = z_0^2 e^{-2u} t \quad (5.31)$$

de modo que ahora en el problema efectivo de mecánica cuántica tenemos que considerar la presencia de un potencial. La interpretación es distinta según si es positivo o negativo. Si $t < 0$ tanto

²En realidad esta sería más bien su parte imaginaria. Se lo puede reconstruir en su totalidad usando técnicas de integrales complejas y transformadas de Mellin al espacio j [59].

las autofunciones como el kernel son mas complicados pero se pueden encontrar en términos de funciones de Bessel [13].

En cuanto al confinamiento, lo que cambia la presencia del *cutoff* en $z_0 = z_{\min} = \Lambda^{-1}$ son las condiciones de contorno. Esto ya lo sabíamos de nuestros modos escalares entrantes en DIS, que pueden ser tratados como modos en una caja y anularse en z_0 , pues decidimos imponer condiciones de contorno de Dirichlet. Sin embargo, lo que va a cambiar aquí son las condiciones de contorno de las autofunciones de H_2 en el IR. Vamos a elegir en este caso condiciones de Neumann en el *hard-wall*. La interpretación es la siguiente: en los bordes de la truncación del espacio AdS_5 , el gravitón h_{mn} se acopla con el tensor de energía momento de la teoría de campos. Sin embargo, sin inserciones extra esta cantidad se tiene que conservar, y por lo tanto no puede haber fuentes. Esto quiere decir que nuestra condición de contorno tienen que anular el flujo de las corrientes conservadas asociadas a nuestra fluctuación. Dichas corrientes se pueden construir fácilmente: dada una cierta fluctuación, podemos pensar ahora en el tensor de energía-momento asociado, que deberá satisfacer

$$\nabla_m T^{mn} = 0. \quad (5.32)$$

Ahora bien, para cualquier vector de Killing K^m asociado a nuestra métrica de AdS_5 podemos construir una corriente definida como

$$J_m \equiv K^n T_{mn}, \quad (5.33)$$

que por construcción será conservada, es decir que cumplirá $\nabla_m J^m = 0$. Si lo que queremos es anular los flujos hacia el borde IR (los del borde conforme se anulan automáticamente) tenemos que pedir $J_z = 0$ para todas estas corrientes. Ahora bien, para aplicar esto a nuestra fluctuación del gravitón, podemos usar un truco que consiste en reinterpretarla en términos de una fluctuación escalar efectiva. En efecto, hemos visto que siempre podemos reorientar los ejes de manera que $s = -2p_1^+ p_2^-$, y en este sistema de referencia dijimos anteriormente que el escaleo de la energía implica que la única componente de la fluctuación que nos importa es h_{++} . Este modo cumple la ecuación de movimiento

$$0 = \Delta_2 h_{++} = z^{-2} \Delta_0 (z^2 h_{++}). \quad (5.34)$$

Por lo tanto, si definimos un campo escalar $\phi \equiv z^2 h_{++}(z)$, este deberá cumplir la ecuación de movimiento de un escalar no masivo en AdS_5 (se puede ver que para $j = 0$ el operador Δ_0 coincide con el laplaciano, es decir que $f(0) = 0$), y describe el único grado de libertad relevante. Podemos definir entonces el correspondiente T_{mn} de la misma manera que en (4.30), y eligiendo como vector de Killing cualquiera de las traslaciones en las direcciones x^μ , es fácil ver que cualquiera sea la corriente que armemos, valdrá la propiedad

$$J_z \propto K^m \partial_m \phi \partial_z \phi. \quad (5.35)$$

Entonces, la condición de borde que queremos imponer puede escribirse como sigue:

$$\partial_z(\phi)|_{z_0} = \partial_z(z^2 h_{++})|_{z_0} = 0. \quad (5.36)$$

Esto tiene que valer para las autofunciones de H_2 . La solución más general es

$$\langle z|\nu\rangle = A e^{-i\nu u(z)} + B e^{i\nu u(z)} = A \left(\frac{z}{z_0}\right)^{i\nu} + B \left(\frac{z}{z_0}\right)^{-i\nu}, \quad (5.37)$$

y por lo tanto nos vemos forzados a imponer

$$B = A \left(\frac{\nu - 2i}{\nu + 2i} \right). \quad (5.38)$$

Finalmente, adoptando la normalización $\langle \nu | \nu \rangle = 1$ (o lo que es lo mismo, $|A|^2 + |B|^2 = 1$) concluimos que las autofunciones apropiadas toman la forma

$$\langle u | \nu \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{-i\nu u} + \left(\frac{\nu - 2i}{\nu + 2i} \right) e^{i\nu u} \right]. \quad (5.39)$$

Utilizando estas autofunciones y repitiendo los pasos del caso conforme obtenemos el nuevo kernel:

$$\mathcal{K}_A(u, u', t = 0, j = 2) = \mathcal{K}(u, u', t = 0, j = 2) + F(u, u', \tilde{\tau}) \mathcal{K}(u, -u', t = 0, j = 2), \quad (5.40)$$

donde $\tilde{\tau} = (4\lambda)^{-1/2} \tau$ y hemos definido

$$F(u, u', \tilde{\tau}) = 1 - 4\sqrt{\pi\tilde{\tau}} e^{\eta^2} \text{erfc}(\eta), \quad \eta = \frac{u + u' + 4\tilde{\tau}}{\sqrt{4\tilde{\tau}}}, \quad \text{erfc}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^{\infty} dx e^{-x^2}. \quad (5.41)$$

Contribuciones antisimétricas

En la parte antisimétrica la mayor contribución viene del caso $j \approx 1$, entonces necesitamos entender qué cambia en el método y los resultados de la sección anterior. Para $j = 1$, la partícula que se propaga es un bosón, es decir una partícula vectorial. En consecuencia, el escaleo con la energía será ahora de la forma

$$(\alpha' \tilde{s})^{1+\frac{\alpha'}{2}\tilde{t}} \approx \frac{z^2}{R^2} (\alpha' s)^{1+\frac{\alpha'}{2}\tilde{t}}. \quad (5.42)$$

Esto quiere decir que la medida de lo que jugará las veces de producto interno más adelante ahora pasa a ser dz/z^3 , pero esto no es una sorpresa ya que nuestra representación del operador diferencial \tilde{t} tampoco será la misma. Al tener una partícula intermedia de spin 1, el acoplamiento será con una corriente conservada construida con el campo escalar, en vez de con un tensor simétrico. Por lo tanto, al extraer las derivadas covariantes, tenemos que pensarlas como aplicadas sobre esta corriente

$$J_M \sim \phi \nabla_M \phi, \quad (5.43)$$

lo que nos obliga a concentrarnos en el laplaciano de spin 1. Este se construye a partir del operador

$$R^2 \Delta_1 = z^2 \partial_z^2 - z \partial_z - 3, \quad (5.44)$$

y además se puede ver que la ecuación de movimiento que nos interesa (de un vector no masivo en AdS_5) puede escribirse $(\Delta_1 + 3)A_\mu = 0$ [45], de manera que $f(1) = 3$ y

$$\nabla_{j=1}^2 = \Delta_1 + 3 = z^2 \partial_z^2 - z \partial_z = 4\partial_\rho^2 + 4\partial_\rho \equiv -H_1. \quad (5.45)$$

En la última fórmula hemos introducido una nueva variable tal que $(z/z_0)^2 = e^{-\rho}$, o lo que es lo mismo, $\rho = -2 \ln(z/z_0)$. Vale la pena recordar que por ahora z_0 es una escala arbitraria, pero en el caso confinante tomaremos $z_0 = z_{\min} = \Lambda^{-1}$. Resulta que este operador no es hermítico con el

producto interno definido en la sección anterior, pero sí lo es con la nueva medida, y por lo tanto utilizaremos

$$\mathbb{1} = \int dz \frac{z_0^2}{z^3} |z\rangle\langle z| = \int \frac{d\rho}{2} e^\rho |\rho\rangle\langle\rho|, \quad \langle z|z'\rangle = \frac{z^3}{z_0^2} \delta(z - z'), \quad \langle\rho|\rho'\rangle = 2e^{-\rho} \delta(\rho - \rho'). \quad (5.46)$$

Con este producto interno, H_1 es hermitico y tenemos un problema de mecánica cuántica efectivo bien definido. Lo que sigue es lo mismo que antes: encontrar las autofunciones del operador (con autovalores reales positivos), que ahora vienen dadas por estados $|\nu\rangle$ tales que

$$\langle\rho|\nu\rangle \equiv e^{-\rho/2} e^{i\nu\rho} = \frac{z(\rho)}{z_0} e^{i\nu\rho}, \quad H_1|\nu\rangle = E_\nu|\nu\rangle, \quad E_\nu = 4\nu^2 + 1, \quad \mathbb{1} = \int \frac{d\nu}{\pi} |\nu\rangle\langle\nu|. \quad (5.47)$$

Procediendo como antes, obtenemos para el nuevo kernel

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\rho, \rho', t=0, j=1) &\equiv \langle\rho| (\alpha' s)^{1+\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}[4\partial_\rho^2+4\partial_\rho]} |\rho'\rangle \\ &= \int \frac{d\nu}{\pi} \langle\rho| (\alpha' s)^{1-\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}H_1} |\nu\rangle\langle\nu|\rho'\rangle \\ &= \int \frac{d\nu}{\pi} \langle\rho| (\alpha' s)^{1-\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}(4\nu^2+1)} |\nu\rangle\langle\nu|\rho'\rangle \\ &= (\alpha' s)^{1-\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}} \int \frac{d\nu}{\pi} (\alpha' s)^{-\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\nu^2} \langle\rho|\nu\rangle\langle\nu|\rho'\rangle \\ &= (\alpha' s)^{1-\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}} e^{-(\rho+\rho')/2} \int \frac{d\nu}{\pi} (\alpha' s)^{-\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\nu^2} e^{i\nu(\rho'-\rho)}, \end{aligned} \quad (5.48)$$

de donde finalmente

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\rho, \rho', t=0, j=1) &= (\alpha' s)^{1-\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}} e^{-(\rho+\rho')/2} \sqrt{\frac{\lambda^{1/2}}{2\pi\tau}} e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{8\tau}(\rho-\rho')^2} \\ &= (\alpha' s)^{1-\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}} \left(\frac{z(\rho)z'(\rho')}{z_0^2} \right) \sqrt{\frac{\lambda^{1/2}}{2\pi\tau}} e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{8\tau}(\rho-\rho')^2}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Reemplazando esto en la amplitud obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t=0) &\propto R^6 \int d\rho \frac{e^\rho}{2} \int d\rho' \frac{e^{\rho'}}{2} \phi_1(\rho)\phi_3(\rho)\mathcal{K}(\rho, \rho', t=0, j=1)\phi_2(\rho')\phi_4(\rho') \\ &= R^6 \int dz \frac{z_0^2}{z^3} \int dz' \frac{z_0^2}{z'^3} \phi_1(z)\phi_3(z)\mathcal{K}(\rho(z), \rho'(z'), t=0, j=1)\phi_2(z')\phi_4(z'). \end{aligned} \quad (5.50)$$

Los comentarios de la sección anterior para el caso $t \neq 0$ y las posibles dependencias en la esfera siguen siendo válidos, pero lo que es interesante es lo que sucede con el caso confinante. Como antes, al introducir el *hard-wall* vamos a pensar en una condición de contorno tipo Neumann para las autofunciones de H_1 . Es más, podemos realizar el mismo truco que antes y escribir al tensor de energía-momento de la fluctuación (y luego a las corrientes conservadas asociadas) en términos de un campo escalar. Su definición ahora viene dada por (ver en la ecuación (4.11) de [45]³)

$$0 = z^2(\Delta_1 + 3)A_+ = z^2(z^{-1}\Delta_0 z + 3)A_+ = z(\Delta_0 z + 3z)A_+ = z(\Delta_0 + 3)(zA_+), \quad (5.51)$$

³Recordemos que la definición de Hatta para Δ_j y la nuestra difieren en un signo.

de modo que $\phi \equiv zA_+(z)$ cumple la ecuación de movimiento de un campo escalar (masivo) en AdS_5 , y la condición de contorno resulta ser

$$\partial_z(\phi)|_{z_0} = \partial_z(zA_+)|_{z_0} = 0. \quad (5.52)$$

Ahora bien, como las autofunciones de por sí ya eran de la forma $z \times [\text{onda plana}(\rho)]$, es decir que ya tenían un factor z extra comparada con las del caso $j = 2$, la modificación que estamos encontrando en la condición de borde simplemente corrige esto, y deja todo como en la sección anterior. En consecuencia, ahora tendremos

$$\langle z|\nu\rangle = A \frac{z}{z_0} e^{-i\nu\rho(z)} + B \frac{z}{z_0} e^{i\nu\rho(z)} = A \left(\frac{z}{z_0}\right)^{1+i\nu} + B \left(\frac{z}{z_0}\right)^{1-i\nu} \Rightarrow B = A \left(\frac{\nu - 2i}{\nu + 2i}\right), \quad (5.53)$$

y la modificación en el kernel será análoga:

$$\mathcal{K}_A(\rho, \rho', t = 0, j = 1) = \mathcal{K}(\rho, \rho', t = 0, j = 1) + F(\rho, \rho', \tilde{\tau}) \mathcal{K}(\rho, -\rho', t = 0, j = 1). \quad (5.54)$$

Correcciones en *loops* y unitariedad

En esta sección analizaremos brevemente la aplicación del formalismo eikonal en el contexto del Pomerón. En el diagrama nivel árbol, la única diferencia entre el proceso que hemos decripto en la sección anterior y la dispersión gravitatoria radica en el reemplazo del propagador del gravitón por el propagador del Pomerón, asociado a una partícula efectiva que tiene en cuenta la presencia de la torre de estados excitados de cuerdas presente en la teoría IIB completa [13, 59]. Como ya hemos destacado, en el contexto del DIS este reemplazo es crucial pues induce la aparición de una parte imaginaria no nula en un proceso que de otra manera tendría una amplitud estrictamente real.

Si ahora consideramos procesos donde la energía del CM es cada vez más grande el hecho de que la constante de acoplamiento efectiva de la acción de Einstein-Hilbert esté directamente relacionada con la energía indica que ya no podemos suponer que los diagramas con el intercambio de un número $n > 1$ de Pomerones estén realmente suprimidos con respecto al caso $n = 1$. El razonamiento es similar al de la sección 5.1, donde analizamos el caso puramente gravitatorio. El objetivo de la descripción eikonal es resumir los diagramas en los que se intercambian n Pomerones exactamente como lo hicimos en el caso puramente gravitatorio.

Al igual que en el caso gravitatorio, el primer paso consiste en pasar al espacio de coordenadas en las direcciones (planas) transversales escribir la amplitud en términos del parámetro de impacto. Para esto, consideramos momentáneamente $t \neq 0$ y definimos un momento transversal en dos dimensiones \vec{q}_\perp tal que $t = -\vec{q}_\perp^2$. Es importante tener en cuenta que más allá del nivel árbol debemos utilizar la forma completa del kernel \mathcal{K} , y no solamente su parte imaginaria. En esta sección utilizaremos la notación \mathcal{K} para indicar el kernel (o propagador del Pomerón) completo, definido como la solución de la siguiente ecuación diferencial [59]:

$$\left[-z^5 \partial_z z^{-3} \partial_z - z^2 t + 2\sqrt{\lambda}(j-2) \right] \mathcal{K}(j, t, z, z') = R^{-4} z^5 \delta(z - z'). \quad (5.55)$$

Aquí hemos elegido trabajar directamente en cinco dimensiones. Además, hemos realizado una transformación adicional de Mellin para pasar del parámetro s a la continuación analítica del spin, j . El kernel definido por (5.55) puede obtenerse directamente a partir de las expresiones que venimos utilizando para la parte imaginaria como

$$\mathcal{K}(j, t, z, z') = \int_0^\infty d\hat{s} \hat{s}^{-j-1} \text{Im} [\mathcal{K}(s, t, z, z')] , \quad (5.56)$$

con $\hat{s} \equiv zz's$. Sabemos que la región de mayor interés es $j \approx j_0 = 2 - 2/\sqrt{\lambda}$. Entonces, en términos del parámetro de impacto $\vec{b} \equiv \vec{x}^\perp - \vec{x}'^\perp$ tenemos

$$\mathcal{K}(j, b, z, z') = \int \frac{d^2 q_\perp}{(2\pi)^2} e^{i\vec{q}_\perp \cdot \vec{b}^\perp} \mathcal{K}(j, q_\perp, z, z'). \quad (5.57)$$

Obviamente, a partir de esta definición podemos obtener una expresión para $\mathcal{K}(s, b, z, z')$.

Teniendo estos resultados podemos comenzar a analizar orden a orden la expansión en loops, asociada a diagramas como los de la figura 17. Las reglas de Feynman asociadas a estos diagramas son las siguientes:

- Por cada Pomerón que se propague en la dirección vertical, insertamos un propagador $\mathcal{K}(s, b, z, z')$ y una unidad imaginaria.
- Por cada línea horizontal interna insertamos un propagador escalar en AdS_5 y una unidad imaginaria.
- Por cada vértice insertamos una constante de acoplamiento κ_5 .
- Agregamos un factor global $(-i)$.

Utilizando estas reglas, vemos que nuevamente aparecen las multiplicidades necesarias orden a orden. Obtenemos entonces una amplitud de la forma

$$\mathcal{A}(s, t) = 2i s \int d^2 b e^{-i\vec{q}_\perp \cdot \vec{b}^\perp} \int du du' P_{13}(u) [1 - \exp(i\chi(s, b, u, u'))] P_{24}(u'). \quad (5.58)$$

Los factores de escala

$$P_{ij}(u(z)) = R^3 z^{-2} \phi_i(z) \phi_j(z) \quad (5.59)$$

contienen la información de los estados externos, y la fase eikonal está definida como

$$\chi(s, b, z, z') = \frac{\kappa_5^2 R}{2z^2 z'^2 s} \mathcal{K}(s, b, z, z'). \quad (5.60)$$

Es importante realizar un análisis detallado sobre qué tipo de proceso aporta la contribución dominante en esta amplitud según el valor de los parámetros s , t , λ y, en el caso de la aplicación al DIS, q^2 . Este análisis se vuelve particularmente importante en la región paramétrica conocida bajo el nombre de *línea de saturación*, que indica el límite de validez de la aproximación eikonal por razones de unitariedad, y donde tenemos $\chi \sim \mathcal{O}(1)$. Este estudio escapa al objetivo de nuestro trabajo, pero referimos al lector interesado a las referencias [59, 60].

5.3. DIS en el régimen del Pomerón

En las secciones anteriores hemos calculado expresiones analíticas para los kernels válidas para las espines cercanos a $j \approx 2$ y $j \approx 1$. En el caso conforme las mismas vienen dadas por (5.29) y (5.49), respectivamente, mientras que para el modelo *hard-wall* debemos incluir las modificaciones de (5.40) y (5.54). La interpretación de estos objetos es simple: corresponden a los propagadores de

las perturbaciones del gravitón y del fotón *reggeizados*. El primero es el modo que se intercambia en el canal t en el diagrama dominante en la descripción holográfica del DIS cuando la energía del CM es exponencialmente grande en términos de la constante de 't Hooft, es decir, cuando el parámetro de Bjorken toma valores exponencialmente chicos. Sin embargo, este diagrama sólo contribuye únicamente a las funciones de onda de la parte simétrica del tensor hadrónico $W^{\mu\nu}$. Para el caso de la función de estructura antisimétrica F_3 necesitamos tener en cuenta un proceso adicional, en el que el modo intercambiado tiene un propagador asociado en cambio al modo vectorial con $j \approx 1$.

A partir de los kernels podemos obtener una expresión integral para todas las funciones de estructura que aparecen en el caso del DIS con un blanco escalar como el glueball. Todas las expresiones que deducimos en este contexto son similares a la de la amplitud (5.30), aunque debemos incluir las modificaciones asociadas a los factores que contienen la información de los estados entrantes. Para el DIS estos estados ya no son todos escalares: debemos incluir la información del campo de gauge A_m que excita la inserción de la corriente conservada en el borde. Las expresiones resultantes para las funciones de estructura F_1 y F_2 son las siguientes:

$$F_1(x, q^2) = \frac{\pi\rho}{8}\lambda^{1/2} \int du du' P_A^{(1)}(u) \mathcal{K}(u, u', t=0, j=2) P_\phi(u') , \quad (5.61)$$

$$\frac{1}{2x} F_2(x, q^2) = \frac{\pi\rho}{8}\lambda^{1/2} \int du du' P_A^{(2)}(u) \mathcal{K}_A(u, u', t=0, j=2) P_\phi(u') , \quad (5.62)$$

donde la constante ρ es la que definimos en (4.32), y la información de los estados externos viene dada por los factores de escala

$$P_A^{(1)}(u(z)) = q^2 z^2 K_1^2(qz) , \quad P_A^{(2)}(u(z)) = q^2 z^2 [K_0^2(qz) + K_1^2(qz)] \quad (5.63)$$

y

$$P_\phi(u(z)) = \frac{R^8}{z^2} |\phi(z)|^2 \approx (\Lambda z)^{2\Delta-2}. \quad (5.64)$$

En el último paso hemos aproximado la función de onda del dilatón por su comportamiento en las cercanías del borde de AdS de la misma manera que en la sección anterior. En cuanto a la función de estructura antisimétrica F_3 , el resultado que obtenemos es el siguiente:

$$F_3(x, q^2) = \frac{\mathcal{Q}\pi^2}{12} \int d\rho d\rho' e^{\frac{1}{2}(\rho+\rho')} \mathcal{P}_A(\rho) \mathcal{K}_A(\rho, \rho', t=0, j=1) P_\phi(\rho') \quad (5.65)$$

donde ahora ρ refiere a la variable $\rho(z)$ y el factor de escala asociado al blanco permanece idéntico, pero la necesidad de tener en cuenta la estructura de la interacción de Chern-Simons nos obliga a definir

$$\mathcal{P}_A(\rho(z)) = q^3 z^3 K_0(qz) K_1(qz). \quad (5.66)$$

Resulta complicado obtener expresiones analíticas cerradas a partir las expresiones integrales (5.61), (5.62) y (5.65). Por ahora, simplemente resaltamos los aspectos más importantes de estos resultados (que en algunos casos hemos enfatizado a lo largo del texto) tal y como están presentados:

- La parte esencial de la dependencia en x está contenida en las potencias de $(\alpha'\tilde{s}) \sim 1/x$ presentes en los respectivos kernels. Estos factores indican la aparición de una corrección $\mathcal{O}(\lambda^{-1/2})$ en la potencia que encontramos en la región de x chico en la que la aproximación local resulta apropiada, estudiada en el capítulo 4. En efecto, encontramos

$$F_1 \sim \left(\frac{1}{x}\right)^{2-\frac{2}{\sqrt{\lambda}}}, \quad F_2 \sim \left(\frac{1}{x}\right)^{1-\frac{2}{\sqrt{\lambda}}}, \quad F_3 \sim \left(\frac{1}{x}\right)^{1-\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}}. \quad (5.67)$$

- La presencia de los factores exponenciales en los kernels

$$\mathcal{K} \propto \exp \left[-\frac{\sqrt{\lambda}}{2\tau} \log^2 \left(\frac{z}{z'} \right) \right] \quad (5.68)$$

tanto para el caso $j \approx 2$ como para $j \approx 1$ indica que el proceso de dispersión deja de estar totalmente localizado: se produce difusión en la dirección radial. El tiempo característico de esta difusión queda definido en términos de la constante de 't Hooft λ y de la energía del CM s a través de $\tau = \log(\alpha' s)$.

- El formalismo del Pomerón resulta muy práctico incluso si pensamos en extender estos resultados. Esto es en primer lugar porque resulta muy sencillo incluir la ruptura de la simetría conforme, por ejemplo en el modelo *hard-wall*: simplemente necesitamos modificar las condiciones de contorno. En segundo lugar, también resulta directo incluir las correcciones en *loops*, al menos en el régimen de validez de la aproximación eikonal. Al hacerlo, debemos utilizar una transformada de Fourier para pasar al espacio de posición en las direcciones transversas planas, expresando la amplitud en términos del parámetro de impacto. Esto produce la expresiones como [61]

$$F_2(x, q^2) = \frac{q^2}{2\pi^2} \int d^2b \int du du' P_A^{(2)}(u) \text{Re} [1 - \exp(i\chi(s, b, u, u'))] P_\phi(u'). \quad (5.69)$$

Notemos que el factor $e^{i\vec{q}\vec{b}}$ ha desaparecido como consecuencia de la condición $t = 0$, propia del DIS. Obtenemos también una expresión análoga a (5.69), y lo mismo debería suceder para F_3 , pero no hemos analizado este punto en detalle todavía⁴. Como vimos, la inclusión de estas correcciones permite acercarse a la región de saturación, en donde la fase χ toma valores cercanos a uno. En tercer lugar, si bien es irrelevante para el DIS vale la pena resaltar que también es posible extender el formalismo a las regiones $t < 0$ y $t > 0$, asociados con los conceptos de *soft* y *hard* Pomerón.

- Así como destacamos la versatilidad del formalismo, es necesario admitir que la extensión a teorías en las que la función beta no se anula para energías altas es un tanto complicado. Algunos comentarios en este sentido pueden encontrarse en la sección 6 de [13].
- Por último, dada la similitud evidente entre las expresiones (5.61), (5.62) y (5.65) para las funciones de estructura y la que se obtiene a través del tratamiento perturbativo y el formalismo de BFKL [43] para la amplitud, presentada en (2.75), es inevitable intentar compararlas en detalle. La forma funcional de las amplitudes es exactamente la misma a pesar de que los regímenes que describen son fundamentalmente distintos: el formalismo BFKL es perturbativo, y por lo tanto válido solamente para valores pequeños de λ , mientras que la descripción en términos de teoría de cuerdas sólo tiene sentido para valores grandes de λ .

El fenómeno difusivo aparece en ambos casos: en la descripción de teoría de campos se da en las componentes transversas del momento, y en la descripción de teoría de cuerdas se da en la

⁴Es necesario volver a analizar la validez de la aproximación eikonal cuando la contribución dominante no es la gravitatoria, y la respuesta no está del todo clara [62].

dirección radial. Por ende, al menos conceptualmente podemos realizar la identificación $k_{\perp} \leftrightarrow r$. Este tipo de identificaciones tiene su origen en la dualidad UV/IR de la correspondencia AdS/CFT [13].

En ambos casos el tiempo característico de la difusión es del orden de $\log s$, aunque la dependencia en λ se ve modificada. Esta observación apunta hacia otro aspecto interesante de la comparación: la posibilidad de establecer algún tipo de continuidad a lo largo del eje imaginario que nos permite ir variando el acoplamiento. La dependencia en x que analizamos algunos párrafos atrás, y que también podemos escribir en términos de s , proviene del kernel del Pomeron, y es de la forma s^{j_0} con $j_0 = 2 - 2/\sqrt{\lambda}$. En el contexto de BFKL encontramos una expresión similar en el kernel correspondiente, pero con $j_0 = 1 + \pi^{-2} \log 2\lambda$. Podemos pensar entonces en una transición suave, en la que j_0 varía entre 1 y 2, comenzando en el régimen $\lambda \rightarrow 0$ y terminando en cambio en $\lambda \rightarrow \infty$. Una conclusión análoga puede extraerse para el coeficiente del exponente en el término difusivo.

En la parte III la tesis realizaremos algunas aproximaciones a partir de las cuales podremos calcular las principales funciones de estructura manteniendo el espíritu del formalismo desarrollado a lo largo de este capítulo. Luego, compararemos estos resultados con los datos experimentales disponibles en cada caso para valores de x muy pequeños. Veremos que existen valores de los parámetros que tomaremos como libres que permiten ajustar de una manera sorprendentemente precisa (y autoconsistente) los datos experimentales. El régimen del Pomeron es el que permite realizar el contacto más preciso con los datos experimentales. Presentamos todos los detalles de estas comparaciones en el capítulo 8.

Capítulo 6

Correcciones no planares

Hasta ahora hemos considerado la descripción holográfica casi estrictamente en el límite en el que el número de colores N de la teoría de campos es infinito. En este capítulo analizaremos las primeras correcciones en la expansión en potencias de $1/N$. Veremos que es necesario tener cuidado a la hora de pensar en esta expansión en serie en el contexto del DIS debido a que también se debe tomar otro límite asociado a $q^2 \rightarrow \infty$, y mostraremos (con todo detalle en un ejemplo en particular) que realidad estos límites no conmutan. En consecuencia, existe un régimen paramétrico en el que la primera *corrección* no planar describe en realidad el proceso dominante. De esta manera, logragremos describir holográficamente la totalidad de la fórmula (2.73) obtenida en [2] a partir del análisis en la teoría del borde.

A lo largo de todo este capítulo consideraremos únicamente valores del parámetro de Bjorken x tales que la descripción de supergravedad es lo suficientemente precisa. Consideraciones para la región $x \ll \lambda^{-1/2}$ implican la necesidad de extender muchos de los cálculos y conceptos aquí desarrollados para incluir la dispersión de cuerdas considerando una hoja de mundo con un genus $g \neq 0$.¹

6.1. Análisis general de los diagramas a un *loop*

La constante de Einstein en el *bulk* se escribe en términos de los parámetros relevantes para la teoría gravitatoria según

$$\frac{1}{2\kappa_5^2} = \frac{\text{Vol}[S^5]}{2\kappa_{10}^2} \sim \frac{N^2}{R^3} \quad (6.1)$$

a menos de factores numéricos, y donde $\text{Vol}[S^5] = \pi^3 R^5$. Por lo tanto, en lo que respecta a la teoría gravitatoria el N juega el papel que generalmente asociamos con la constante de Planck \hbar en teoría de campos, o mejor dicho su inversa. Por lo tanto, el límite $N \rightarrow \infty$ es análogo a considerar $\hbar \rightarrow 0$ en el lenguaje usual de teoría de campos, indicando que debe tomarse en cuenta únicamente el comportamiento clásico. Otra forma de decirlo es teniendo en cuenta que para obtener términos cinéticos canónicamente normalizados para las perturbaciones de algún campo genérico Φ (que no tiene por qué ser escalar) es necesario realizar genéricamente la redefinición $\Phi \rightarrow \Phi/N$. Con esta redefinición, el factor N^2 desaparece de los términos cuadráticos pero aparecen potencias inversas en los términos de interacción. Más precisamente, las interacciones triples vienen pesadas por un factor $1/N$ mientras que las cuárticas están acompañadas por un factor $1/N^2$. Por lo tanto, y como sucede con \hbar en las teorías de campos, la expansión en potencias inversas de N representa una expansión en

¹Si bien aún no hemos abordado este desarrollo, pero se trata de uno de nuestros proyectos a futuro.

correcciones cuánticas en el *bulk*, y estas correcciones cuánticas se representan mediante diagramas de Witten con un número no nulo de *loops*. Como veremos más abajo, las reglas de Cutkosky indican que estos diagramas corresponden a procesos de DIS con estados salientes de dos partículas en vez de una.

En lo que resta de este capítulo y como hemos hecho a lo largo de toda esta parte II vamos a concentrarnos en el caso más simple posible: el de un blanco escalar. Esto nos permitirá extraer los conceptos fundamentales que describen la física relevante, y que luego utilizaremos para extraer conclusiones en casos más generales y de mayor interés en cuanto a la fenomenología. En el contexto del *glueball-DIS*, el primer orden de la expansión en potencias de $1/N^2$ lo hemos analizado en su totalidad en los capítulos anteriores. El proceso dominante en el régimen de supergravedad o de x grande es el que presentamos en la figura 18. Hemos analizado detalladamente los resultados que se obtienen en este caso en el capítulo 3 de esta tesis.

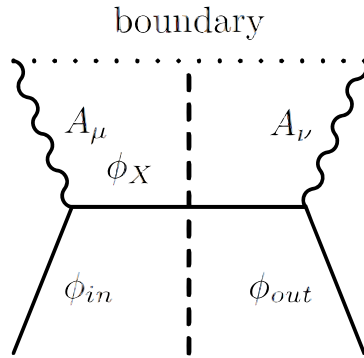


Figura 18: Diagrama de Witten asociado al proceso dominante del FCS dual en el límite $N \rightarrow \infty$. La línea horizontal punteada representa el borde del AdS_5 , mientras que la línea vertical representa esquemáticamente el corte asociado al teorema óptico utilizado para extraer la parte imaginaria de $T^{\mu\nu}$ relevante para el DIS. En este caso hay un único estado intermedio correspondiente a un modo del campo ϕ , lo que indica que sólo estamos considerando estados finales de una partícula en el DIS.

A continuación, queremos obtener el resultado en el caso en el que incluimos una primera corrección en la serie de potencias en $1/N^2$. Esto significa que debemos tener en cuenta todos los posibles diagramas a un *loop* que están permitidos en el contexto de la supergravedad IIB, siempre y cuando cuenten con los mismos estados entrantes y salientes. Para ilustrar el tipo de contribuciones que estamos considerando, en la figura 19 presentamos algunos ejemplos genéricos de los diagramas que debemos calcular y sumar para obtener la amplitud total. El hecho de que los vértices triples escaleen con $1/N$ y los cuádruples con $1/N^2$ garantiza que obtendremos en todos estos casos un factor $1/N^2$ extra con respecto al caso descrito en el párrafo anterior.

Este cálculo presenta serias dificultades debido por un lado a que la geometría en la que estamos trabajando es AdS_5 , y por otro a la presencia de las distintas torres de modos de Kaluza-Klein provenientes de la compactificación en la 5-esfera: en principio deberíamos calcular la suma de las contribuciones de todos los posibles diagramas del tipo de los de la figura 19. En el contexto del tratamiento holográfico del DIS, el primer paso en esta dirección fue llevado a cabo en [63]. El análisis que los autores realizaron se basa en un modelo efectivo simplificado que contiene únicamente un campo vectorial y algunos escalares, de manera que la cantidad de modos que

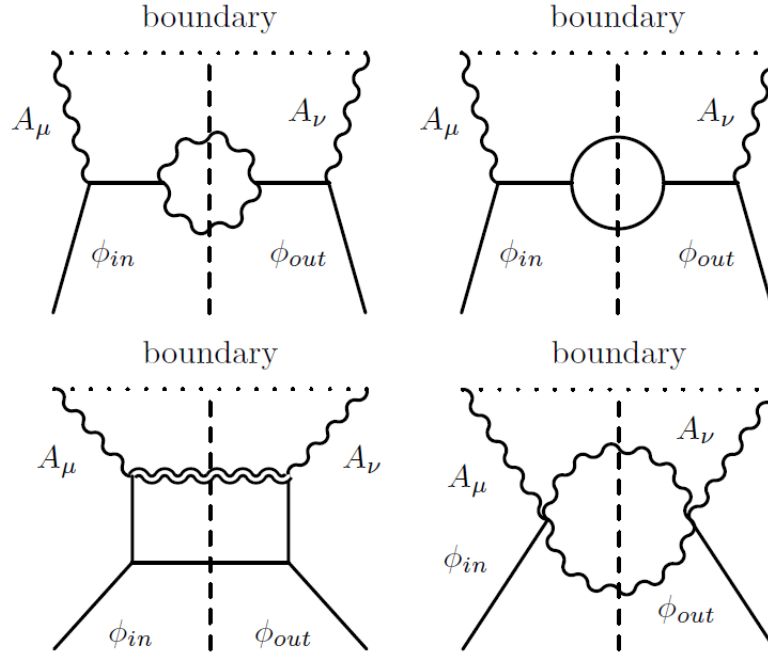


Figura 19: Algunos diagramas de Witten a un *loop* que contribuyen al proceso que estamos considerando en el caso de la supergravedad del tipo IIB. Las líneas llenas, curvadas y curvadas de trazo doble están asociadas a modos escalares, vectoriales y tensoriales, respectivamente.

pueden intercambiarse en los canales intermedios y el tipo de interacciones presentes son mucho menores que las que realmente existen en la supergravedad IIB compactificada a cinco dimensiones. Sin embargo, incluso en este caso simplificado el hecho de que las soluciones de los correspondientes modos normalizables en AdS siempre contengan funciones de Bessel indica que genéricamente aparecerán integrales en la dirección radial del producto de tres de estas funciones (junto con alguna potencia de z). No se conocen expresiones analíticas totalmente generales para este tipo de integrales. Por lo tanto, la pregunta que debemos contestar es la siguiente: ¿hay alguna manera de anticipar la existencia de uno o al menos unos pocos diagramas que constituyan una contribución dominante con respecto al resto?

La respuesta es afirmativa: existe un único diagrama dominante. Como anticipamos más arriba, la pista más relevante en este sentido viene dada por el análisis del OPE de las corrientes de la Eq. (2.73). Esta expresión, o más concretamente el tercer término que encontramos en el lado derecho de la misma, nos permite tener una idea del proceso físico que estamos intentando describir. El razonamiento es el siguiente: en el capítulo 3 hemos visto que cuando el modo no normalizable del bosón de gauge se acopla directamente con la corriente asociada a un modo cuya masa de KK es la correspondiente a una dimensión conforme Δ la amplitud resultante (y por lo tanto las funciones de estructura) será proporcional a $(\Lambda^2/q^2)^{\Delta-1}$. Podemos anticipar que esto debería ser cierto tanto si el hadrón en cuestión es el inicial o si en cambio se trata de un estado intermedio generado en un proceso de *splitting*. En efecto, dicha hipótesis se ve justificada en parte gracias al análisis realizado en [63] en base a una expansión en potencias de Λ^2/q^2 : estudiando los canales s , t y u de los diagramas a 1-*loop* con modos externos e internos escalares, vemos que la contribución dominante, o mejor dicho menos suprimida, viene del caso en el que un modo con la menor masa de

KK posible (o el menor twist en el modelo) es intercambiado en el canal t . Esta intuición se extiende directamente al análisis completo de la supergravedad IIB. Es más: como veremos a continuación en detalle, los términos de interacción que existen en el Lagrangiano correspondiente indican que existe un único diagrama dominante, mientras que los demás están suprimidos por potencias de Λ^2/q^2 . Nuevamente, es importante aclarar que este diagrama es efectivamente el dominante entre todos los diagramas a un *loop* si nos situamos en el régimen de acoplamiento fuerte y tomamos el límite de q grande. Las características principales de este proceso fueron anticipadas en [2].

6.2. Espectro y diagrama dominante

En el capítulo 3 hemos visto que en el modelo *hard-wall* en el que estamos trabajando la geometría $\text{AdS}_5 \times S^5$ se ve modificada únicamente en el IR por un corte abrupto $r = r_0$. En este contexto, el análisis de las fluctuaciones de la supergravedad IIB es muy similar al que presentamos en el capítulo 1. La principal diferencia es que ahora debe considerarse el hecho de que estos modos *viven en una caja*: imponiendo condiciones de Dirichlet vemos que en todos los casos el momento p ya no puede tomar cualquier valor, sino que debe ser tal que la función de onda se anule en r_0 como sucedía en el caso del dilatón.

Reglas de selección

Los distintos modos escalares, vectoriales y tensoriales (por nombrar sólo los bosónicos) pueden interactuar entre ellos de distintas formas. En el capítulo 1 expandimos la acción de supergravedad en diez dimensiones alrededor de la solución $\text{AdS}_5 \times S^5$ a orden cuadrático en las fluctuaciones para obtener las ecuaciones de movimiento y el espectro de la teoría. Para obtener los términos de interacción simplemente necesitamos incluir mayores órdenes en dicha expansión. Derivaremos explícitamente los vértices relevantes para nosotros en las siguientes secciones. Por ahora, nos concentramos en describir las reglas de selección para las interacciones efectivas en cinco dimensiones.

Estas reglas de selección provienen del hecho de que cada modo pertenece a una determinada representación del grupo de isometría de la esfera: $SO(6) \sim SU(4)$ ². De hecho, no son otra cosa que los coeficientes de Clebsh-Gordon asociados a la descomposición de los distintos productos tensoriales entre las distintas representaciones. En la notación de la tabla B.1, estos productos pueden expresarse de la siguiente manera para el caso de los modos escalares:

$$(0, k_1, 0) \otimes (0, k_2, 0) = \bigoplus_{i=0}^{k_2} \bigoplus_{j=0}^{k_2-i} (j, k_1 + k_2 - 2i - 2j, j), \quad k_2 \leq k_1, \quad (6.2)$$

y de manera similar para los productos del tipo $(0, k_1, 0) \otimes (1, k_2, 1)$. Físicamente, un coeficiente nulo implica, por ejemplo, que en un proceso de dispersión donde las dos partículas iniciales pertenecen a las dos representaciones que aparecen del lado izquierdo no puede generarse una tercer partícula que pertenezca a la representación correspondiente. Junto con los detalles de la reducción explícita de la acción original en diez dimensiones a la acción efectiva a cinco dimensiones, esto nos permite deducir qué tipo de soluciones pueden estar involucradas en el diagrama dominante del proceso de DIS holográfico cuando el número de colores N toma valores grandes pero finitos. En términos de las soluciones (B.8), los coeficientes que estamos describiendo están dados por integrales sobre S^5

²Recordamos que la dimensionalidad de algunas de las representaciones involucradas en este análisis pueden encontrarse en [18, 53].

de los productos de distintos armónicos esféricos:

$$a_{123} = a(k_1, k_2, k_3) = \int_{S^5} d\Omega_5 Y^{k_1} Y^{k_2} Y^{k_3}, \quad (6.3)$$

$$b_{123} = b(k_1, k_2, k_3) = \int_{S^5} d\Omega_5 Y_a^{k_3} D^a Y^{k_2} Y^{k_3}, \quad (6.4)$$

$$c_{123} = c(k_1, k_2, k_3) = \int_{S^5} d\Omega_5 D^a Y^{k_1} D^b Y^{k_2} Y_{(ab)}^{k_3}. \quad (6.5)$$

La primera de estas integrales aparece al considerar una interacción entre escalares s , t y ϕ , aunque también incluye la presencia de ciertos modos tensoriales. La segunda, en cambio, está asociada a vértices que involucran necesariamente dos modos escalares y uno vectorial. Ambas serán importantes para nosotros. Finalmente, también presentamos la expresión (6.5) por completitud, ya que es relevante para procesos que incluyan dos escalares. En general, este tipo de factores se incluyen directamente en las distintas constantes de acoplamiento efectivas.

Concluimos esta sección detallando las reglas de selección que serán relevantes para nosotros³:

1. Cuando dos escalares pertenecientes a las representaciones $(0, k_1, 0)$ y $(0, k_2, 0)$ participan en una interacción triple, los terceros modos en cuestión pueden ser

- partículas s , t , ϕ o h asociadas a representaciones $(0, k_3^{(1)}, 0)$ con $|k_1 - k_2| \leq k_3^{(1)} \leq k_1 + k_2$,
- modos vectoriales asociados a representaciones $(1, k_3^{(2)} - 1, 1)$ con $|k_1 - k_2| + 1 \leq k_3^{(2)} \leq k_1 + k_2 - 1$,
- escalares pertenecientes a $(2, k_3^{(3)} - 2, 2)$ con $|k_1 - k_2| + 2 \leq k_3^{(3)} \leq k_1 + k_2 - 2$,

donde los índices k_3 toman valores separados por dos unidades.

2. Cuando interactúan de manera similar una partícula escalar y una vectorial pertenecientes a las representaciones $(0, k_s, 0)$ y $(1, k_v, 1)$ respectivamente, los posibles estados salientes son

- partículas s , t , ϕ o h asociadas a representaciones $(0, k_3^{(1)}, 0)$ con $|k_1 - k_2| + 1 \leq k_3^{(1)} \leq k_1 + k_2 - 1$,
- modos vectoriales asociados a representaciones $(1, k_3^{(2)} - 1, 1)$ con $|k_1 - k_2| \leq k_3^{(2)} \leq k_1 + k_2$,
- escalares pertenecientes a $(2, k_3^{(3)} - 2, 2)$ con $|k_1 - k_2| + 1 \leq k_3^{(3)} \leq k_1 + k_2 - 1$,

donde los k_3 toman valores como en el caso anterior.

Es importante resaltar ciertas particularidades que se dan para los campos de masas nulas o cercanas a cero. Por un lado, recordemos que los enteros k que etiquetan a las partículas en las distintas torres de KK están acotados por debajo (en un sentido, esto se debe a las restricciones impuestas por la unitariedad de la teoría). De hecho, los casos no masivos en general corresponden a los valores mínimos, dados por $k = 1$ para vectores y $k = 0$ para escalares y tensores. Sin embargo, existe una excepción dada por el escalar $s_{k=2}$, cuya masa al cuadrado m_{KK}^2 resulta ser negativa. Si bien esto no estaría permitido en caso de estar trabajando en espacio plano, donde las masas son necesariamente reales y mayores o iguales a cero, la curvatura negativa de AdS permite trabajar con algunos campos de masa pequeña pero negativa sin generar contradicciones siempre y cuando se respete la cota de Breitenlohner-Freedman. Por otro lado, considerando el caso particular en el que un vector no masivo (asociados a la representación $(1, 0, 1)$) interactúa con un modo escalar

³ Notemos que estamos omitiendo algunos posibles estados salientes que no serán de interés en lo que sigue.

perteneciente a la representación $(0, k, 0)$ vemos que la segunda regla de selección implica que sólo podemos obtener como estado saliente escalar un modo con el mismo k del escalar entrante. Ahora bien, el modo vectorial que estamos considerando no es otra cosa que un vector de gauge A_m que representa por ejemplo a nuestro fotón holográfico en el caso no normalizable. Por lo tanto, esta regla expresa de manera exacta la conservación de la *carga* asociada a dicha simetría, es decir, del momento angular en la 5-esfera. En otras palabras, hemos demostrado lo que habíamos anticipado heurísticamente: este tipo de interacciones conservan las características del hadrón inicial: no hay ningún tipo de mezcla o *mixing* [2].

Vértices relevantes

En esta sección derivamos los vértices de interacción relevantes para el caso del DIS. Además de estos objetos, a la hora de calcular la amplitud necesitaremos también los propagadores en AdS_5 , que están derivados en detalle en el apéndice B.

Concentrémonos primero en la manera en que el hadrón incidente, representado por una perturbación del dilatón, puede interactuar con otros dos campos, fraccionándose. Trataremos en detalle el proceso $\phi \rightarrow s + \phi$, pero los demás casos pueden estudiarse de manera similar. Como tenemos dos modos de ϕ y uno del escalar s que proviene de una perturbación de la métrica en particular, la interacción $S_{s\phi\phi}$ proviene de la expansión del término cinético del dilatón en diez dimensiones

$$\int d^{10}x \sqrt{-G} G^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi, \quad (6.6)$$

Las perturbaciones relevantes están dadas en las ecuaciones (B.5) y (B.7). Sólomente necesitamos considerar fluctuaciones no nulas para los modos escalares y para los tensoriales $\tilde{h}_{(mn)}$, que por razones de consistencia no pueden apagarse completamente: como mínimo, deben tomar la forma [18]

$$\tilde{h}_{(mn)}^k = D_{(m} D_{n)} \left[\frac{2}{5(k+1)(k+3)} (\pi^k - 30b^k) \right], \quad (6.7)$$

con

$$\begin{aligned} b^k &\equiv t^k - s^k, \\ \pi^k &\equiv 10[(k+4)t^k + ks^k]. \end{aligned}$$

Tenemos entonces

$$\sqrt{-G} \approx \sqrt{-g} \left(1 + \frac{1}{2} h_M^M \right), \quad G^{MN} \approx g^{MN} - h^{MN}, \quad (6.8)$$

donde los índices se suben y bajan utilizando la métrica de fondo g . Insertando estas expresiones en (6.6) para el caso $t^k = 0$, integrando por partes y utilizando las ecuaciones de movimiento, vemos

⁴Un análisis de este tipo fue realizado en [18], donde los autores estudiaron en detalle el vértice $S_{t\phi\phi}$. Además, a lo largo de esta sección tomaremos $R = 1$ para no recargar la notación.

que

$$\begin{aligned}
S_{s\phi\phi} &= \frac{1}{2\kappa_5^2} \int_{\text{AdS}_5} dx^5 \sqrt{g_{\text{AdS}_5}} a_{123} \times \\
&\quad \left[\frac{2k_1^2}{k_1+1} s_1 D_m \phi_2 D^m \phi_3 - \frac{2}{k_1+1} D_m D_n s_1 D^m \phi_2 D^n \phi_3 \right] \\
&= \frac{1}{2\kappa_5^2} \int_{\text{AdS}_5} dx^5 \sqrt{g_{\text{AdS}_5}} a_{123} s_1 \phi_2 \phi_3 \times \\
&\quad \left[\frac{k_1^2}{k_1+1} (m_1^2 - m_2^2 - m_3^2) + \frac{1}{2(k_1+1)} ((m_2^2 - m_3^2)^2 - m_1^4) \right].
\end{aligned} \tag{6.9}$$

La notación ϕ_i refiere al modo con $k = k_i$ del campo ϕ , con la correspondiente masa de KK es $m_i^2 = m_\phi^2(k_i)$. El factor global N^2 que teníamos delante de la acción original fue absorbido en una redefinición de los campos elegida de manera que los términos cinéticos quedaran canónicamente normalizados, generando interacciones triples y cuádruples proporcionales a N^{-1} y N^{-2} , respectivamente. Escribiendo las masas en términos de los k_i y definiendo $\Sigma = \frac{1}{2}(k_1 + k_2 + k_3)$ and $\alpha_i = \Sigma - k_i$ obtenemos

$$S_{s\phi\phi} = \frac{1}{2\kappa_5^2} \int_{\text{AdS}_5} d^5x \sqrt{g_{\text{AdS}_5}} \lambda_{123} s_1 \phi_2 \phi_3, \tag{6.10}$$

donde la constante de acoplamiento efectiva resulta ser

$$\lambda_{123} = \frac{-8 \alpha_3 \alpha_2 (\alpha_1 + 2) (\Sigma + 2)}{k_1 + 1} a_{123}. \tag{6.11}$$

El signo de la misma será irrelevante para nosotros debido a que la amplitud final será proporcional a λ_{123}^2 . Sin embargo, notemos que λ_{123} se anula para $k_1 = |k_2 - k_3|$ (y también cuando $k_1 = k_2 + k_3 + 4$), lo que permite eliminar ciertos diagramas. De hecho, para el caso $k_1 = 2$ las reglas de selección descritas en la sección anterior solamente permiten índices $k_3 = k_2 - 2, k_2, k_2 + 2$ para el estado de salida, por lo que simplemente debemos quedarnos con el caso $k_3 = k_2$. No hay necesidad de considerar los términos de borde ya que todos los modos involucrados en este sub-proceso son normalizables, y se anulan para $z = 0$ y $z = z_0$. Finalmente, para realizar explícitamente las integrales utilizamos las soluciones del tipo (B.8). En primer lugar, la integración sobre las coordenadas x^0, \dots, x^3 solamente indica que el cuadri-momento asociado a las direcciones planas se conserva. En segundo lugar, como el determinante de la métrica es z^{-5} y todas las soluciones escalares son de la forma $z^2 J_{\Delta_i-2}(pz)$ obtenemos la siguiente integral en la dirección radial ⁵:

$$\int_0^{z_0} dz z J_{\Delta_1-2}(az) J_{\Delta_2-2}(bz) J_{\Delta_3-2}(cz), \tag{6.12}$$

donde a, b y c son lo que hemos denominado masas AdS. Estas integrales son difíciles de calcular analíticamente para valores generales de los parámetros (índices y masas). En este trabajo las analizaremos de dos maneras distintas. Por un lado, es sencillo convencerse de que la mayor contribución proviene del IR, es decir de la región $z \sim z_0$, lo que quiere decir que si el objetivo es obtener el resultado numérico y compararlo con nuestras expectativas iniciales y algún posible resultado experimental o proveniente de una simulación, las funciones de Bessel pueden aproximarse por

$$J_m(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \tag{6.13}$$

⁵Recordamos que la relación entre Δ y k para cada una de las perturbaciones puede observarse en la tabla B.1. Si bien esta dependencia es distinta en cada caso, todas las soluciones contienen una función de Bessel cuyo índice es $\Delta - 2$.

antes de realizar la integral. Por otro lado, podemos obtener cierta intuición sobre lo que sucede físicamente analizando el límite $z_0 \rightarrow \infty$, donde la integral fue calculada y diversas expresiones aproximadas fueron derivadas en la literatura. En este trabajo resulta conveniente realizar una aproximación basados en el análisis presentado [64]: a primer orden, el resultado es no-nulo únicamente cuando una de las masas AdS resulta ser la suma o la resta de las otras dos.

Ahora bien, dado que en nuestro diagrama dominante juegan un papel preponderante los escalares s , necesitamos saber cómo interactúan con los vectores de gauge A_m que genera la inserción de la corriente conservada en el borde. Este tipo de interacciones han sido estudiadas en la literatura, resultando ser útiles para el cálculo holográfico de funciones de correlación de n puntos de operadores quirales primarios [65-68]. El método utilizado en estos trabajos es un tanto distinto al que hemos descripto más arriba por cuestiones técnicas, y se basa en utilizar las ecuaciones de movimiento junto con la condición de auto-dualidad de \mathcal{F}_5 sin pasar directamente por la acción en 10d. Los autores calculan las correcciones cúbicas y cuárticas a dichas ecuaciones y obtienen a partir de ahí los términos de interacción más importantes. En este contexto, las integraciones por partes que realizamos anteriormente para simplificar los resultados se traducen exclusivamente en redefiniciones de campos. Aquí simplemente transcribimos el resultado que nos interesa en este trabajo, es decir, el que describe la manera en que interactúan dos escalares s y un campos de gauge A_μ [66]:

$$S_{ssA} = \frac{1}{2\kappa_5^2} \int_{\text{AdS}_5} d^5x \sqrt{-g} G_{123} A_1^m s_2 \partial_m s_3, \quad (6.14)$$

donde la constante de acoplamiento puede ser escrita en términos de k_1, k_2 y k_3 según

$$G_{123} = \frac{2^5(k_1 + 1)(\Sigma^2 - \frac{1}{4})(\Sigma + \frac{3}{2})(\alpha_1 - \frac{1}{2})}{(k_1 + 2)(k_2 + 1)(k_3 + 1)} b_{123}. \quad (6.15)$$

El caso importante para nosotros será el de $k_2 = k_3 = 2$. En este contexto, concluimos que dos modos s se acoplan a los modos vectoriales de manera similar a los dilatones. Esto era de esperarse: los bosones de gauge siempre se acoplan a las corrientes conservadas, y para los campos escalares estas tienen siempre la misma forma funcional. Evaluando el vértice en nuestras soluciones on-shell e integrando por partes, obtenemos nuevamente la conservación del momento en las direcciones planas, junto con una integral radial que ahora toma la forma

$$\int_0^{z_0} dz z^2 K_{\Delta_1-2}(az) J_{\Delta_2-2}(bz) J_{\Delta_3-2}(cz), \quad (6.16)$$

como sucede en el diagrama asociado al límite $N \rightarrow \infty$ que analizamos en detalle en el capítulo 3. Si bien el resultado analítico es, una vez más, difícil de obtener, en este caso la presencia de la función de Bessel modificada $K_\nu(x)$ simplifica la situación. Esta función se anula exponencialmente en el interior de AdS, por lo que integrar hasta $z \rightarrow \infty$ es en términos efectivos lo mismo que hacerlo únicamente hasta el *cutoff* en $z = z_0$.

El diagrama dominante

En las secciones anteriores hemos discutido algunos aspectos generales e importantes sobre el espectro y las interacciones presentes en la teoría de supergravedad IIB sobre un fondo $\text{AdS}_5 \times S^5$, aunque nos hemos concentrado a modo de ejemplo en las interacciones que involucran a nuestros estados externos junto con ciertos modos en particular: los escalares s . En esta sección justificaremos por qué estas interacciones son exactamente las que necesitamos para analizar el DIS holográfico a un *loop*.

El proceso que estamos considerando los estados inicial y final están compuestos por dos partículas: una perturbación normalizable del dilatón ϕ_Δ (para algún Δ fijo) y un modo no normalizable asociado a los vectores no masivos A_m que se propaga desde el borde hacia el interior de AdS. Como ya sabemos, el dilatón está asociado al hadrón escalar o *glueball*, mientras que el campo de gauge abeliano está relacionado con la inserción de la corriente y, en pocas palabras, representa al dual del fotón virtual. Como el modo no-normalizable está descrito en parte por la función de Bessel $K_1(qz)$, con q una escala de energías que debe ser alta en el contexto del DIS, su función de onda toma valores no despreciables únicamente cerca del borde, es decir, para valores pequeños de z . En el límite $N \rightarrow \infty$, la creación de partículas no está permitida pues todos los vértices están totalmente suprimidos, por lo que el hadrón dual incidente debe interactuar directamente con el campo de gauge. Esta es la situación que hemos descrito en los anteriores capítulos: cerca del borde solamente nos queda la cola de la función de onda de ϕ_Δ , por lo que la amplitud y las funciones de estructura vienen acompañadas por un factor de supresión $(\Lambda^2/q^2)^{\Delta-1}$, lo cual puede ser interpretado como la (baja) probabilidad de que el hadrón entero se achique hasta tener un tamaño del orden $1/q$. Presentamos los detalles de este cálculo realizado en el gauge axial (que es el que utilizamos a lo largo de todo este capítulo) en el apéndice B, pero para nuestra discusión actual la parte importante proviene del análisis del término de interacción

$$S_{A\phi\phi} = \int d^{10}x \sqrt{-G} A^m v^a \partial_m \phi \partial_a \phi, \quad (6.17)$$

que evaluado on-shell contiene una integral en z dada por

$$\int_0^{z_0} dz z^2 J_{\Delta-2}(Pz) J_{\Delta-2}(s^{1/2}z) K_1(qz) \approx 2^{\Delta-1} \Gamma(\Delta) \frac{q s^{\frac{\Delta}{2}-1}}{(s+q^2)^\Delta}, \quad (6.18)$$

donde s es una vez más la variable de Mandelstam asociada a la energía del CM. En el capítulo 3 hemos visto que podemos aproximar las funciones de onda hadrónicas para evaluar esta integral, obteniendo en la amplitud final el factor de supresión que acabamos de describir.

Ahora bien, notemos que el análisis que acabamos de repasar será válido en cualquier diagrama en el que un campo escalar interactúe con el A_m que viene desde el borde $z = 0$. Esto sucede porque el vértice de interacción con los bosones de gauge siempre toma la misma forma. Es más: en lo que respecta a la parte del cálculo asociada a este vértice, seguirá siéndolo para modos vectoriales, tensoriales o fermiónicos, con la salvedad de que es necesario reemplazar a la dimensión conforme Δ por el twist τ . Al considerar la primera corrección en la expansión en serie de potencias de $1/N^2$, debemos tener en cuenta diagramas como los de la figura 19 en los que alguno de los modos intermedios efectivamente llega a involucrarse con el fotón virtual dual. Como todas las soluciones tienen formas similares con potencias de z acompañadas por funciones de Bessel $J_\nu(x)$, siempre encontraremos integrales similares a (6.18) a la hora de calcular las correspondientes amplitudes⁶. Por lo tanto, hemos descubierto una manera de estimar la supresión en potencias de Λ^2/q^2 que encontraremos en cada uno de los diagramas, demostrando una relación directa con la dimensión conforme Δ (o el twist) del estado intermedio involucrado en la interacción con A_m . Aquí es donde la posibilidad de tomar el límite de q^2 grande se vuelve importante: permite clasificar los diferentes diagramas en términos de un *peso* asociado a las potencias de Λ^2/q^2 que aparecen al evaluarlos. Tendremos entonces una única contribución dominante, como era posible anticipar a partir del análisis de la expresión (2.73): podemos ver que el tercer término tiene la forma correcta, ya que

⁶Aproximar la función de onda *hadrónica* para valores pequeños del argumento de la función de Bessel podría no ser válido para los estados intermedios ya que debemos integrar sobre sus cuadri-momentos. Sin embargo, estos casos se ven suprimidos por potencias de $1/q$, por lo que en adelante simplemente asumimos la validez del análisis anterior para integrales como (6.18).

está suprimido por un factor $1/N^2$ y viene acompañado por una potencia de Λ^2/q^2 que no está directamente relacionada con la dimensión del hadrón inicial. Analizando un proceso en el cual el dilatón incidente se *fracciona* en dos partículas, una de las cuales interactúa en la región UV con la perturbación de la métrica asociada al A_m , encontramos una supresión relacionada exclusivamente a la naturaleza de este modo intermedio, más específicamente, a su dimensión Δ' .

Los argumentos acabamos de describir nos permiten obtener la siguiente conclusión: el o los diagramas dominantes serán los que tengan como estados intermedios a las partículas con los menores valores posibles del parámetro Δ' en la teoría. Esta conclusión es consistente con el análisis esbozado [2]. Este tipo de análisis resulta ser eficiente incluso en situaciones más generales, como veremos brevemente al final de este capítulo. Afortunadamente, para el caso de un único *loop* en el contexto de la supergravedad IIB y el modelo *hard-wall*, obtenemos un único diagrama dominante: la menor dimensión conforme es la del escalar s con $\Delta' = 2$ ⁷.

Notemos que en el caso asociado al límite estricto $N \rightarrow \infty$ sabemos que para el caso escalar obtenemos $F_1 = 0$ debido a que el fotón interactúa con el hadrón inicial como un todo. Al considerar el DIS con estados finales de más de una partícula, el proceso dual incluye *loops*, de manera que ya no necesariamente habrá restricciones sobre el comportamiento de F_1 .

Utilizando la información sobre los posibles vértices y reglas de selección deducidos en las secciones anteriores, concluimos entonces que el diagrama dominante es el que presentamos esquemáticamente en la figura 20.

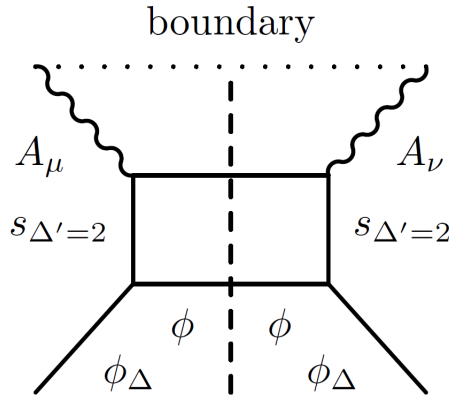


Figura 20: Diagrama de Witten correspondiente a la contribución dominante al FCS a un *loop*.

Cabe aclarar que si bien no lo hemos dicho explícitamente hasta ahora, consideramos que todas las soluciones normalizables tienen una carga definida \mathcal{Q}_i asociada a la simetría $U(1)$ correspondiente al DIS, y utilizamos la conservación de dicha carga en cada uno de los vértices. Esto implica que si el hadrón inicial tiene carga \mathcal{Q}_1 , los estados intermedios on-shell deberán tener cargas \mathcal{Q}_2 y \mathcal{Q}_3 , tales que $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_2 + \mathcal{Q}_3$.

Es necesario admitir que si bien todos los ingredientes que tenemos a disposición parecen apuntar al hecho de que el diagrama de la figura 20 describe el proceso físico relevante para el DIS escalar, no hemos podido obtener una prueba completa debido a la dificultad para tratar las integrales con tres funciones de Bessel en el integrando. Por otro lado, resaltamos que en cierta medida debería ser posible extender el análisis que hemos presentado a situaciones más generales en las que la geometría de fondo sea asintóticamente $\text{AdS}_5 \times S^5$ o incluso $\text{AdS}_5 \times C^5$ con C^5 alguna variedad compacta de Einstein de cinco dimensiones. El ingrediente clave sería siempre el mismo: encontrar el

⁷Este tipo de comportamientos dominantes también fue encontrado para distintos procesos en [3].

o los modos que la menor dimensión conforme o el menor twist posible en el espectro gravitatorio, y construir diagramas en los que el hadrón inicial genera una de estas partículas, que luego se encontrará cerca del borde con el fotón dual.

6.3. Cálculo de las funciones de estructura a un *loop*

Consideraciones generales y estructura tensorial

Habiendo identificado el proceso dominante, para extraer la contribución relevante al orden $1/N^2$ a las funciones de estructura sólo resta calcular la amplitud de scattering asociada. De hecho, nos interesa exclusivamente la parte imaginaria del tensor $T^{\mu\nu}$, que podemos calcular utilizando las reglas de Cutkosky. Concretamente, necesitamos calcular la amplitud del proceso que puede observarse a la izquierda del corte vertical de la figura 20, multiplicarla por su conjugado, y finalmente sumar sobre todos los posibles estados finales. A diferencia del diagrama nivel árbol relevante en el caso $N \rightarrow \infty$, ahora también hay un estado off-shell: el escalar s que se propaga a lo largo de las líneas verticales.

En la figura 21 presentamos una descripción más detallada del proceso y de los modos involucrados, y también definimos la nomenclatura que utilizaremos en lo que resta del cálculo. En adelante

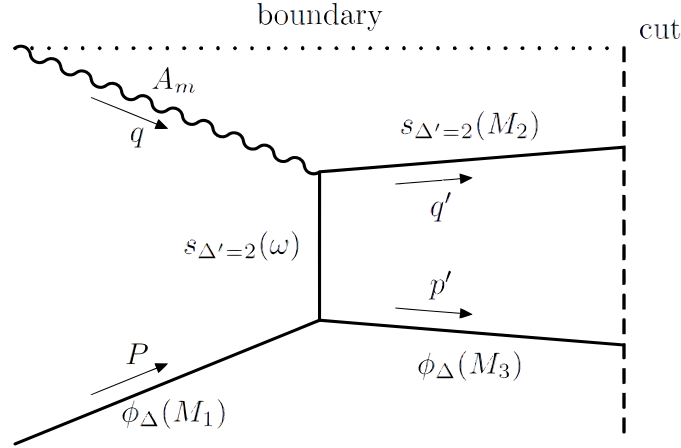


Figura 21: Algunos detalles del diagrama de Feynman correspondiente al lado izquierdo del corte. Incluimos el campo asociado a cada uno de los propagadores, junto con la nomenclatura para los correspondientes momentos, masas AdS y dimensiones Δ_i . Las soluciones asociadas a cada modo pueden encontrarse en el apéndice B.

utilizamos las definiciones $q'^0 = \sqrt{M_2^2 + |\vec{q}'|^2}$ y $p'^0 = \sqrt{M_3^2 + |\vec{p}'|^2}$, y trabajamos en el sistema CM, donde

$$P^0 = |\vec{P}| = |\vec{q}| = \frac{q}{2\sqrt{x(1-x)}}, \quad |\vec{q}'| = |\vec{p}'| \quad \text{and} \quad q^0 = \frac{(1-2x)q}{2\sqrt{x(1-x)}}. \quad (6.19)$$

Resulta conveniente definir los vectores

$$v_s^\mu = \frac{1}{q} \left(P^\mu + \frac{q^\mu}{2x} \right) \quad \text{and} \quad v_t^\mu = \frac{1}{q} \left(q'^\mu + \frac{q^\mu}{2y'} \right) \quad \text{with} \quad y' = \frac{-q^2}{2q' \cdot q}. \quad (6.20)$$

Podemos pensar a la variable auxiliar y' como equivalente al parámetro de Bjorken x pero para el proceso de scattering del escalar s scalar con el campo de gauge.

Del lado de la teoría de campos, queremos obtener la contribución dominante (a un *loop*) al tensor hadrónico $W^{\mu\nu}$ del DIS. Esto corresponde a considerar procesos con dos estados finales, que podemos denominar X_1 and X_2 , de manera que en términos del FCS ahora tenemos

$$\begin{aligned} \text{Im}(T_2^{\mu\nu}) &= \pi \sum_{X_1, X_2} \langle P, Q | \tilde{J}^\mu(q) | X_1, X_2 \rangle \langle X_1, X_2 | J^\nu(0) | P, Q \rangle \\ &= \pi \sum_{M_2, M_3} \int \frac{d^3 p'}{2E_{p'}(2\pi)^3} \frac{d^3 q'}{2E_{q'}(2\pi)^3} \langle P, Q | \tilde{J}^\mu(q) | X_1, X_2 \rangle \langle X_1, X_2 | J^\nu(0) | P, Q \rangle \\ &= 4\pi^3 \sum_{M_2, M_3} \int \frac{d^4 q'}{(2\pi)^4} \delta(M_2^2 - q'^2) \delta(M_3^2 - (P + q - q')^2) |\langle P, Q | J^\nu(0) | X_1, X_2 \rangle|^2, \end{aligned} \quad (6.21)$$

donde el subíndice de $T_2^{\mu\nu}$ indica que incluimos procesos con estados finales de dos partículas. Además, haciendo uso de la dualidad AdS/CFT podemos identificar al correlador

$$n_\mu \langle P, Q | \tilde{J}^\mu(q) | X_1, X_2 \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(P + q - p' - q') \langle P, Q | n \cdot J(0) | X_1, X_2 \rangle, \quad (6.22)$$

con lo que hemos estado llamando *amplitud del lado izquierdo del corte*. En consecuencia, el tensor hadrónico que obtenemos es el siguiente:

$$W_2^{\mu\nu} = \sum_{M_2, M_3} c^2 \int \frac{d^3 p'}{2E_{p'}(2\pi)^3} \frac{d^3 p'}{2E_{p'}(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(P + q - p' - q') v_t^\mu v_t^\nu |C_t|^2, \quad (6.23)$$

con una constante $c^2 \equiv c_1^2 c_2^2 c_3^2$ que incluye los cuadrados de las normalizaciones de todos los modos normalizables involucrados. El factor complejo C_t contiene toda la información proveniente de la inserción de las soluciones y evaluación de los vértices y el propagador, exceptuando las deltas de conservación de momento que surgen de la integración en las direcciones planas. Tomando en cuenta la forma de las soluciones y del propagador presentadas en el apéndice B, podemos escribir esquemáticamente

$$C_t(M_2, M_3, p', q') = \int dz dz' [V_{ssA}(z) \times V_{s\phi\phi}(z') \times G(z, z')] . \quad (6.24)$$

En esta expresión omitimos las integrales asociadas a las direcciones angulares, cuyas características fueron en detalle en las secciones anteriores.

El siguiente paso consiste en considerar la forma explícita del factor $v_t^\mu v_t^\nu$, consecuencia directa del hecho de que el diagrama en cuestión incluye un intercambio en el canal t , y utilizarla para separar las contribuciones a cada una de las funciones de estructura. En efecto, a partir de la descomposición genérica del $W^{\mu\nu}$ sabemos que

$$\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) W^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} W^{\mu\nu} = 3F_1 + 2xv_s^2 F_2, \quad (6.25)$$

$$(v_s)_\mu (v_s)_\nu W^{\mu\nu} = P_\mu P_\nu W^{\mu\nu} = v_s^2 F_1 + 2xv_s^4 F_2. \quad (6.26)$$

Deducimos entonces las identidades

$$F_1(x, q^2) = \sum_{M_2, M_3} c^2 \int \frac{d^3 p'}{2E_{p'}(2\pi)^3} \frac{d^3 p'}{2E_{p'}(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(P + q - p' - q') |C_t|^2 \\ \times 2q^2 [v_t^2 + 4x^2(v_s \cdot v_t)^2], \quad (6.27)$$

$$F_2(x, q^2) = \sum_{M_2, M_3} c^2 \int \frac{d^3 p'}{2E_{p'}(2\pi)^3} \frac{d^3 p'}{2E_{p'}(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(P + q - p' - q') |C_t|^2 \\ \times 4xq^2 [v_t^2 + 12x^2(v_s \cdot v_t)^2]. \quad (6.28)$$

Como veremos al final de este capítulo, esta descomposición sigue siendo válida en situaciones más generales. Además, incluso antes de calcular $|C_t|^2$ podemos ver que los primeros primeros términos que contribuyen a estas funciones de estructura cumplen de manera exacta por la relación de Callan-Gross $F_2 = 2xF_1$, mientras que la presencia del tercer término indica que la misma no se satisface en general y genera una contribución no nula a la denominada función de estructura longitudinal $F_L \equiv F_2 - 2xF_1$.

Algunos detalles del cálculo

A continuación presentamos algunos elementos importantes en el cálculo de C_t , junto con una idea intuitiva de las aproximaciones que utilizamos para obtener las expresiones finales de las funciones de estructura (6.27) y (6.28).

La amplitud se divide en distintos bloques. Discutimos en primer lugar los que aparecen para ambas funciones de estructura: las integrales sobre los momentos, la suma sobre los estados intermedios y las contribuciones de ambos vértices a C_t . En segundo lugar analizaremos los factores adimensionales que distinguen a las F_i , expresados en términos de los invariantes cinemáticos. Cabe resaltar que todos las apariciones del radio R de AdS se compensan puesto que las expresiones finales no pueden depender del mismo, por lo que simplemente elegimos omitirlo de ahora en adelante.

- Tenemos una integral sobre las componentes espaciales de los momentos \vec{p}' y \vec{q}' , combinada con una delta de conservación de energía y momento. En el sistema CM y utilizando coordenadas esféricas todas las integrales excepto una pueden calcularse trivialmente. Escribimos la restante como una integral en θ , el ángulo entre \vec{q} and \vec{q}' :

$$\int \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3 2E_{q'}} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E_{p'}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P + q - p' - q') (\dots) = \frac{|\vec{p}'|}{8\pi q} \sqrt{\frac{x}{1-x}} \int d\theta \sin \theta (\dots)$$

donde $|\vec{p}'|$ es una solución de

$$q \sqrt{\frac{1-x}{x}} = \sqrt{|\vec{p}'|^2 + M_2^2} + \sqrt{|\vec{p}'|^2 + M_3^2}. \quad (6.29)$$

- También debemos incluir un factor c^2 asociado a las normalizaciones de los estados on-shell involucrados. Es sencillo calcular esta constante en término de las respectivas masas AdS pues sabemos en cada caso

$$c_\Delta^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{z_0 |J_{\Delta-1}(kz_0)|} \right)^2 \sim \frac{kz_0}{z_0^2} = k\Lambda, \quad (6.30)$$

a menos de factores numéricos.

- Finalmente, tenemos una sumatoria sobre las masas AdS de los estados salientes, M_2 y M_3 . Estas masas no pueden tomar cualquier valor: están restringidas por la condición de conservación (6.29). Por lo tanto, tenemos

$$\sum_{M_2 M_3} \equiv \sum_{M_2=0}^{q\sqrt{\frac{1-x}{x}}} \sum_{M_3=0}^{q\sqrt{\frac{1-x}{x}}-M_2} . \quad (6.31)$$

La información de los vértices y del propagador, incluidas las constantes de acoplamiento efectivas λ_{123} and G_{123} , se encuentran dentro de lo que hemos denominado C_t . En lo que sigue juntamos estas constantes y algunos otros factores numéricos en una constante genérica B adimensional e independiente de x y de q^2 e irrelevante para nuestro análisis. Inicialmente, C_t viene dado por

$$C_t = q \int d\omega \frac{\omega}{\omega^2 + (P - p')^2} S_{ssA}^{(z)}(M_2, q, \omega) S_{s\phi\phi}^{(z')}(M_1, M_3, \omega), \quad (6.32)$$

con $S_{ssA}^{(z)}$ y $S_{s\phi\phi}^{(z')}$ las integrales radiales correspondientes a cada uno de los vértices en las variables z y z' , respectivamente. En consecuencia, tenemos:

- Una integral en (o sumatoria) en la variable ω asociada al modo intermedio del escalar s , junto con el propagador

$$\frac{\omega}{\omega^2 + (P - p')^2} = \frac{\omega}{\omega^2 - M_1^2 - M_3^2 + \frac{q}{\sqrt{x(1-x)}} \left(\sqrt{|\vec{p}'|^2 + M_3^2} - |\vec{p}'| \cos \theta \right)}. \quad (6.33)$$

- Una integral relacionada con la interacción entre tres modos escalares, dos dilatones y un escalar s (vértice IR), dada por

$$S_{s\phi\phi}^{(z')} = \int_0^{z_0} dz' z'^2 J_{\Delta-2}(M_1 z') J_0(\omega z') J_{\Delta''-2}(M_3 z'), \quad (6.34)$$

donde Δ etiqueta a la función de Bessel correspondiente al dilatón incidente, mientras que Δ'' está asociada al estado de masa M_3 . Como dijimos anteriormente, la contribución dominante proviene de la región $z \sim z_0 \gg 1$. Estudiando las expresiones asintóticas de las funciones de Bessel en esta región, vemos que el comportamiento de esta integral es el siguiente:

$$S_{s\phi\phi}^{(z')} \sim \frac{1}{\sqrt{M_1 M_3}} [\delta(\omega - |M_1 - M_3|) \pm \delta(\omega - (M_1 + M_3))], \quad (6.35)$$

donde la dependencia en Δ y Δ'' únicamente define los signos \pm . Esta aproximación resultará útil a la hora de realizar la integral en ω .

- Una integral asociada al vértice UV, en el que el escalar s intermedio interactúa con el modo no-normalizable definido por el campo de gauge A_μ . En el gauge axial, la integral en z toma la forma

$$S_{ssA}^{(z)} = \int_0^{z_0} dz z^2 K_1(qz) J_0(\omega z) J_0(M_2 z), \quad (6.36)$$

Hemos analizado este tipo de integrales en la sección anterior, y en este caso en particular el resultado que obtenemos es

$$S_{ssA}^{(z)} = \frac{2q}{(M_2^2 + q^2)^2}. \quad (6.37)$$

Notemos que esto introduce un factor $\sim q^{-3}$ tanto para $M_2 \ll 1$ como cuando $M_2 \sim q$.

Todos los factores que acabamos de describir aparecen en la definición de C_t , y por ende deben ser elevados al cuadrado a la hora de calcular $|C_t|^2$ antes de realizar la integral angular.

Finalmente, tenemos los factores adimensionales que permiten distinguir a cada una de las funciones de estructura. Estos factores son de la forma

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_L \end{pmatrix} = \frac{1}{N^2} \sum_{M_1 M_2} c^2 \frac{q|\vec{p}'|}{8\pi} \sqrt{\frac{x}{1-x}} \int d\theta \sin \theta \begin{pmatrix} v_t^2 + 4x^2(v_s \cdot v_t)^2 \\ 2x[v_t^2 + 12x^2(v_s \cdot v_t)^2] \\ 16x^3(v_s \cdot v_t)^2 \end{pmatrix} |C_t|^2. \quad (6.38)$$

Vemos que el pre-factor $1/N^2$ contiene toda la dependencia en el número de colores. Las expresiones entre paréntesis pueden describirse en términos de M_2 , M_3 y θ según,

$$\begin{aligned} & \frac{|\vec{p}'|^2}{q^2} [1 - \cos^2 \theta], \quad \frac{1}{(1-x)q^2} \left[\left(q'^0 + (2x-1)|\vec{p}'| \cos \theta \right)^2 \right], \\ & \text{y} \quad \frac{1}{(1-x)q^2} \left[2x(1-x)|\vec{p}'|^2 (1 - \cos^2 \theta) + \left(q'^0 + (2x-1)|\vec{p}'| \cos \theta \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (6.39)$$

para F_1 , F_L y F_2 , respectivamente.

Expresiones finales para las funciones de estructura

Para obtener funciones de estructura todavía debemos analizar la integral en θ . El integrando viene dado por el producto entre $|C_t|^2$ (que depende del ángulo a través de $(P-p')^2$ en el denominador del propagador) y la combinación de v_t^2 y $(v_s \cdot v_t)^2$ asociada a cada función en particular.

Por empezar nos concentramos en la función de estructura longitudinal F_L , que podemos escribir como

$$\begin{aligned} F_L &= \frac{1}{N^2} B^2 \sum_{M_2, M_3} A^3 M_1 M_2 M_3 \int d\theta \sin(\theta) \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{x}{1-x}} |\vec{p}'| q^3 \left[\frac{\left(q'^0 + (2x-1)|\vec{p}'| \cos(\theta) \right)^2}{(1-x)q^2} \right] \\ &\times \left(\int d\omega \frac{\omega}{\omega^2 + (P-p')^2 - i\epsilon} S_{s\phi\phi}^{(z')}(\omega, M_1, M_3) S_{ssA}^{(z)}(\omega, q, M_2) \right)^2. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Usando (6.35), obtenemos

$$\begin{aligned} F_L &= \frac{1}{N^2} B^2 \sum_{M_2, M_3} A^3 M_2 \int d\theta \sin(\theta) \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{x}{1-x}} |\vec{p}'| q^3 \left[\frac{\left(q'^0 + (2x-1)|\vec{p}'| \cos(\theta) \right)^2}{(1-x)q^2} \right] \times \\ &\left(\int d\omega \frac{\omega}{\omega^2 + (P-p')^2 - i\epsilon} [\delta(\omega - |M_1 - M_3|) \pm \delta(\omega - (M_1 + M_3))] S_{Ass}^{(z)}(\omega, q, M_2) \right)^2. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Consideremos el régimen en el que $M_3 \ll q$ $|\vec{p}'| \sim q$, que es el que genera la contribución dominante [63]. La condición $M_1 \ll q$ implica la separación de escalas, $\omega = |M_1 \pm M_3| \ll q$, lo que permite resolver de manera aproximada la integral $S_{ssA}^{(z)}(|M_1 \pm M_3|, q, M_2)$ a partir de (6.37). Luego, expandimos el denominador para valores pequeños de $M_3 \ll |\vec{p}'|$ ⁸. Expandiendo p^0 y p'^0 , vemos que

$$p'^0 = \sqrt{|\vec{p}'|^2 + M_3^2} \approx |\vec{p}'| + \frac{M_3^2}{2|\vec{p}'|} - \frac{M_3^4}{8|\vec{p}'|^3}, \quad (6.42)$$

$$p^0 = \sqrt{|\vec{p}|^2 + M_1^2} \approx |\vec{p}| + \frac{M_1^2}{2|\vec{p}|} - \frac{M_1^4}{8|\vec{p}|^3}. \quad (6.43)$$

Por ende, el denominador toma la forma aproximada

$$(M_1 \pm M_3)^2 + (P - p')^2 \approx 2|\vec{p}||\vec{p}'|(1 - \cos(\theta)) + \frac{|\vec{p}|}{|\vec{p}'|} \left(M_3 \pm M_1 \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} \right)^2 + \mathcal{O}(M_1^4). \quad (6.44)$$

En este contexto, la contribución principal a la integral angular proviene del caso $\omega = |M_1 - M_3|$, en la región cercana a $\theta = 0$, pues el denominador se anula en $M_3 = \alpha M_1$ (con $\alpha = |\vec{p}'|/|\vec{p}|$).⁹ Notemos que el término en que nos concentramos tiene una interpretación física muy simple: para $M_3 < M_1$ y $M_3 + \omega = M_1$, podemos pensar que le hadrón incidente se fracciona en dos partículas intermedias, cada una de las cuales se lleva una fracción de la masa AdS inicial. Además, a partir de $M_3 \ll |\vec{p}'|$ podemos simplificar el factor adimensional en F_L hasta obtener

$$\left[\frac{(q'^0 + (2x - 1)|\vec{p}'| \cos \theta)^2}{(1 - x)q^2} \right] \approx \frac{1}{x} \left[1 + \sqrt{\frac{x}{1 - x}} \frac{|\vec{p}'|}{q} ((2x - 1) \cos \theta - 1) \right]^2. \quad (6.45)$$

Por lo tanto, en el régimen más relevante y bajo las aproximaciones que acabamos de describir obtenemos la siguiente expresión para F_L

$$F_L = \frac{1}{N^2} B^2 \sum_{M_2, M_3} \frac{\Lambda^3 M_2 q^5}{(M_2^2 + q^2)^2} \frac{|\vec{p}'|}{2\pi} \frac{(M_1 - M_3)^2}{\sqrt{x(1 - x)}} \times \int_0^\pi \frac{d\theta \sin(\theta) \left[1 + \sqrt{\frac{x}{1 - x}} \frac{|\vec{p}'|}{q} ((2x - 1) \cos \theta - 1) \right]^2}{\left[2|\vec{p}||\vec{p}'|(1 - \cos \theta) + \frac{|\vec{p}|}{|\vec{p}'|} (M_3 - M_1 \alpha)^2 \right]^2}. \quad (6.46)$$

La integral en θ ahora puede realizarse explícitamente, y a primer orden en $1/q^2$ el resultado es

$$\int_0^\pi d\theta \frac{\sin(\theta) \left[1 + \sqrt{\frac{x}{1 - x}} \frac{|\vec{p}'|}{q} ((2x - 1) \cos \theta - 1) \right]^2}{\left[2|\vec{p}||\vec{p}'|(1 - \cos \theta) + \frac{|\vec{p}|}{|\vec{p}'|} (M_3 - M_1 \alpha)^2 \right]^2} = \frac{\left(1 - 2\sqrt{x(1 - x)} \frac{|\vec{p}'|}{q} \right)^2}{2|\vec{p}|^2 (M_3 - M_1 \alpha)^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\log q}{q^4}\right), \quad (6.47)$$

de manera que

$$F_L = \frac{1}{N^2} \sum_{M_2} \frac{\Lambda^3 M_2 q^5}{(M_2^2 + q^2)^4} \frac{|\vec{p}'|}{2\pi} \frac{\left(1 - 2\sqrt{x(1 - x)} \frac{|\vec{p}'|}{q} \right)^2}{2|\vec{p}|^2 \sqrt{x(1 - x)}} \sum_{M_3} \frac{(M_1 - M_3)^2}{(M_3 - M_1 \alpha)^2}. \quad (6.48)$$

⁸Esta condición impone una restricción sobre el valor máximo que puede tomar M_2 .

⁹El lector podría preocuparse por una posible divergencia, pero la misma está regulada por Λ , el cutoff IR.

Ahora bien, la sumatoria en los posibles valores de M_3 tiene sus contribuciones más importantes en los valores cercanos a αM_1 . Sin embargo, debemos recordar que M_3 sólo puede tomar valores discretos debido a la presencia del cutoff Λ . En otras palabras, podemos aproximar

$$\sum_{M_3} \frac{(M_1 - M_3)^2}{(M_3 - M_1 \alpha)^2} \approx \frac{M_1^2 (\alpha - 1)^2}{\Lambda^2}. \quad (6.49)$$

Notemos que este término depende implícitamente de M_2 a través de α . Esto es porque podemos escribir a $|\vec{p}'|$ como función de M_2 y q según

$$|\vec{p}'| \approx \frac{q}{2} \sqrt{\frac{1-x}{x}} - \frac{M_2^2}{2q} \sqrt{\frac{x}{1-x}}. \quad (6.50)$$

Finalmente, notamos que en el régimen relevante $M_2 \gg q$, de manera que en podemos aproximar la sumatoria por una integral. Esta aproximación es análoga la que utilizamos para M_X en el capítulo 3 [2]. El límite superior de la integral viene dado por alguna fracción $0 < c < 1$ de la energía del CM $q\sqrt{\frac{1-x}{x}}$, cuyo valor preciso será irrelevante. Luego de integrar obtenemos entonces nuestra expresión final:

$$F_L = \frac{1}{N^2} B^2 c^2 (2 - c^2) \frac{M_1^2}{4\pi q^2} x^3 (x - 1)^2, \quad (6.51)$$

donde B es la constante adimensional que contiene los acoplamientos efectivos λ_{123} y G_{123} .

En cuando a las otras funciones de estructura, y comenzando por F_1 , podemos decir que las integrales en z , z' y ω puede realizarse de manera similar al caso de F_L . La principal diferencia aparece en el factor adimensional que produce una integral angular diferente. Sin entrar en detalles, simplemente diremos que un análisis de las potencias de q permite concluir que el resultado que obtendríamos para la función de estructura F_1 es de subdominante en comparación con el de (6.51). Por lo tanto, a primer orden tenemos $F_1 \approx 0$ y $F_2 \approx F_L$.

Análisis

En el contexto del DIS en general se toma el límite en el que $q^2 \gg \Lambda^2$. Por otro lado, la dualidad AdS/CFT permite estudiar de manera precisa los procesos de teoría de campos en el límite planar, aunque también permite investigar de manera perturbativa las primeras correcciones en una expansión en potencias de $1/N^2$, que en el interior de AdS corresponden a los distintos diagramas que incluyen *loops*. El objetivo principal de este capítulo consistió, por un lado, en calcular la primera corrección no planar a las funciones de estructura obtenidas por métodos holográficos, y por el otro, en analizar en un ejemplo detallado la compatibilidad entre estos dos límites. Nuestros resultados indican que estos límites no conmutan. En efecto, tomando primero el límite $N \rightarrow \infty$ nos encontramos en la situación descrita en el capítulo 1, donde el proceso dominante es tal que la amplitud se ve suprimida por un factor $(\Lambda^2/q^2)^{\Delta-1}$, con Δ la dimensión asociada al hadrón inicial. En cambio, tomando primero el límite $q^2 \gg \Lambda^2$ la creación de partículas debe permitirse, y el diagrama dominante que obtenemos, que tiene dos estados intermedios en vez de uno, produce una amplitud proporcional a (Λ^2/q^2) (y a $1/N^2$). En esta dependencia final en q no hay rastros del parámetro Δ : todo depende de la menor dimensión conforme disponible en la teoría, en este caso $\Delta' = 2$.

La expresión final (6.51) que hemos obtenido para la función de estructura longitudinal constituye en este capítulo nuestro resultado más relevante (junto con la conclusión de que $F_1 \approx 0$). Bajo ciertas aproximaciones la validez de ciertas aproximaciones, hemos encontrado la forma en la

que F_L depende de las dos variables relevantes: q^2 y el parámetro de Bjorken x , al orden $1/N^2$. En primer lugar, resulta satisfactorio que la dependencia en x y q^2 de la función que hemos encontrado sea independiente de c . Ahora bien, la dependencia en q resulta ser totalmente consistente con las estimaciones presentadas por Polchinski y Strassler en [2]. Estas estimaciones estaban basadas en el análisis de la expresión (2.73) para los momentos de las funciones F_i . Podemos decir que hemos podido reproducir la totalidad de la física contenida en (2.73) asociada al régimen de acoplamiento fuerte a partir de la dualidad AdS/CFT. En otras palabras, hemos obtenido toda la información presente en los dos últimos términos a partir del tratamiento holográfico del DIS. En lo que respecta al tercer término, asociado a la primera corrección no planar, la física relevante tiene que ver con el fraccionamiento del hadrón inicial y la generación del escalar s descriptas en las secciones anteriores. Por otro lado, hemos demostrado que $F_L \propto x^3(1-x)^2$, un resultado alentador a la hora de pensar en comparaciones con la fenomenología [7]. Hablaremos más sobre esto en la parte III de esta tesis. Por ahora, basta con decir que la dependencia en x es tal que F_L se anula en $x = 0$ y $x = 1$, y tiene nuevamente la forma de una campana invertida. El máximo está situado aproximadamente en $x \approx 0,6$.

6.4. Comentarios sobre los diagramas con más *loops*

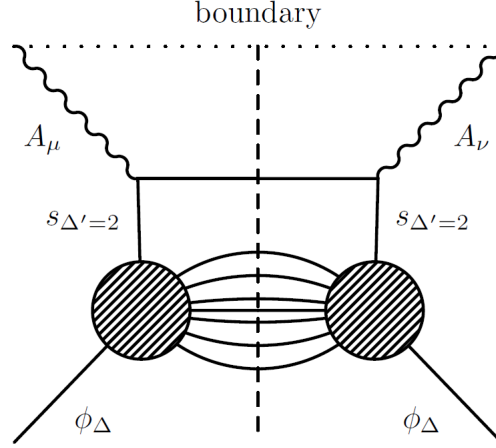
En esta última sección estudiamos brevemente la situación en la que permitimos estados intermedios de n partículas en el proceso del FCS, con $n \geq 2$. Para esto, estudiamos los diagramas de Witten con estados intermedios de más de dos partículas, en otras palabras, diagramas con más de un *loop*. Veremos que tanto la estructura tensorial (y la descomposición de la amplitud de scattering en términos de las funciones de estructura) y la dependencia final en Λ^2/q^2 serán idénticas al caso que estudiamos en detalle en las secciones anteriores. Más aún, presentaremos algunos argumentos para justificar la siguiente conjetura: en el régimen en que la aproximación de supergravedad es lo suficientemente precisa, todas las contribuciones de todos órdenes de la expansión en *loops* (con un número n de *loops* no nulo) al DIS están suprimidas por el mismo factor Λ^2/q^2 que el caso $n = 1$.

Basados en el análisis que realizamos en este capítulo, podemos anticipar que los diagramas dominantes serán siempre tales que en algún vértice intermedio se genera un escalar s cuya dimensión $\Delta' = 2$ es la mínima disponible en toda la teoría. Este es el modo que luego deberá acercarse al borde e interactuar con el bosón de gauge. En términos de los momentos y las masas sobre las que tenemos que integrar, la región más importante será tal que volveremos a encontrar una separación clara entre una región UV, que solamente incluye esta interacción, y una región IR, que contiene todos los detalles del fraccionamiento del hadrón. Debido a la condición de conservación de las masas AdS que otorga la forma aproximada que utilizamos de la integral de tres funciones de Bessel $J_\nu(x)$, todas las masas de los estados que aparecen en la región IR serán pequeñas en comparación con la escala q , mientras que el vértice UV será exactamente de la misma forma que en el caso de un único *loop*. En la figura 22 presentamos una representación esquemática del tipo de diagramas que estamos analizando. En términos más concretos, podemos partir de la descomposición genérica del tensor hadrónico (que escribimos aquí una vez más para facilitar la lectura)

$$W^{\mu\nu} = F_1(x, q^2) \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + F_2(x, q^2) 2x v_s^\mu v_s^\nu, \quad (6.52)$$

junto con la solución del modo no-normalizables del campo de gauge

$$A_\mu(x, z) = e^{iq \cdot x} \left[c_\mu q z K_1(qz) + \frac{n \cdot q}{q^2} q_\mu \right], \quad c_\mu = n_\mu - \frac{n \cdot q}{q^2} q_\mu, \quad A^\mu = z^2 \eta^{\mu\nu} A_\nu. \quad (6.53)$$

Figura 22: Diagramas de Witten más relevantes para una cantidad general de *loops*.

Esta solución no es exactamente la misma que la que usamos en el capítulo 1, pues en este caso estamos trabajando una vez más en el gauge axial $A_z = 0$. A la hora de analizar la estructura tensorial resultante en términos del DIS, la interacción más importante es la del vértice cercano al borde: $S_{A\phi\phi}$ en el caso sin *loops*, o bien S_{ssA} en todos los demás. Usando las soluciones de los moods escalares, obtenemos ¹⁰

$$\begin{aligned}
 S_{A\phi\phi}|_{on-shell} &= \int d^{10}x \sqrt{-g} G^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi \\
 &= \int d^{10}x \sqrt{-g} A^m v^a (\partial_a \phi_1 \partial_m \phi_2^* - \partial_a \phi_1 \partial_m \phi_2^*) \\
 &= i\mathcal{Q} \int d^4y dz d\Omega_5 \sqrt{g_\Omega} z^{-5} A^\mu (\phi_1 \partial_\mu \phi_2^* - \phi_1 \partial_\mu \phi_2^*) \\
 &= i\mathcal{Q} \delta^{(4)}(q + p_1 - p_2) \int dz d\Omega_5 \sqrt{g_\Omega} z^{-3} \phi_1 \phi_2^* \eta^{\mu\nu} A_\mu (p_{1\nu} + p_{2\nu}) , \quad (6.54)
 \end{aligned}$$

donde ϕ_1 es el escalar incidente y ϕ_2 es el estado saliente, o sea uno de los estados intermedios. Hemos definido a los correspondientes momentos como p_1 y p_2 , mientras que g_{S^5} representa el determinante de la métrica de la 5-esfera y la condición de conservación de la carga indica que $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_2 \equiv \mathcal{Q}$. Insertando la solución del A_μ vemos que la integral se separa en dos contribuciones: uno que contiene a la función de Bessel $K_1(qz)$, para el cual la región dominante es la cercana al borde de AdS, y otro proporcional al término de A_μ que es independiente de z . Este segundo término se anula por las razones expuestas en el apéndice B, de manera que sea cómo sea el diagrama en el IR, la estructura tensorial está dada por el cuadrado de

$$\eta^{\mu\nu} c_\mu (p_{1\nu} + p_{2\nu}) = \eta^{\mu\nu} \left(n_\mu - \frac{n \cdot q}{q^2} q_\mu \right) (p_{1\nu} + p_{2\nu}) . \quad (6.55)$$

Si nos quedamos a nivel árbol, tenemos

$$c_\mu (p_1^\mu + p_2^\mu) = c_\mu (P^\mu + (P + q)^\mu) = 2q(n \cdot v_s) , \quad (6.56)$$

¹⁰ Aquí escribimos todo en términos del campo ϕ , pero en los casos con *loops* simplemente hay que reemplazarlo por el escalar s .

y como $q_\mu v_s^\mu = 0$, obtenemos $F_1 = 0$ y $F_2 \neq 0$. Sin embargo, para un diagrama con un *loop* sabemos que

$$p_1^\mu + p_2^\mu = (q')^\mu + (P - p')^\mu = (2q' - q)^\mu. \quad (6.57)$$

Por ende,

$$\eta^{\mu\nu} \left(n_\mu - \frac{n \cdot q}{q^2} q_\mu \right) (p_{1\nu} + p_{2\nu}) = 2n \cdot \left(q' + \frac{q}{2y'} \right) \equiv 2q(n \cdot v_t). \quad (6.58)$$

Esta estructura indica que la descomposición más general es de la forma

$$F_1 \sim 2q^2 [v_t^2 + 4x^2(v_s \cdot v_t)^2], \quad (6.59)$$

$$F_2 \sim 4xq^2 [v_t^2 + 12x^2(v_s \cdot v_t)^2]. \quad (6.60)$$

Está claro que estas últimas expresiones deben ser completadas con todos los factores escalares que son necesarios para calcular las funciones de estructura propiamente dichas.

Ahora bien, es sencillo convencerse de que el análisis que acabamos de realizar para el caso de n *loops* con $n = 1$ sigue siendo válido para $n > 1$ como los de la figura 22. La única diferencia radica en que en el caso general tenemos $p_2 = P - p'_1 - \dots - p'_{n-1}$, que debido a la conservación del momento sigue siendo igual a $q' - q$. Los momentos p'_i no son otra cosa que los cuadri-momentos de los estados intermedios de la región IR que ponemos on-shell a la hora de calcular la parte imaginaria de la amplitud, mientras que q' es el momento correspondiente al estado saliente del vértice UV. Por lo tanto, siempre obtendremos una descomposición tensorial y una estructura similar a la del caso $n = 1$. Notemos además que si θ es el ángulo definido por los vectores \vec{q} y \vec{q}' , siempre tenemos $F_1(\theta \rightarrow 0) = 0$.

Dado que la estructura tensorial y el vértice UV son idénticos, conjeturamos que la forma en que las funciones de estructura dependen de q será la misma, al menos a primer orden en la expansión en potencias de Λ^2/q^2 . Si esta propuesta resultara cierta, tendría una consecuencia directa muy interesante: todas las correcciones $1/N^{2n}$ con $n > 1$ serían subdominantes en comparación con la contribución del diagrama $n = 1$. Esto querría decir que sea cual sea la manera en que decidamos tomar los límites $N \rightarrow \infty$ y $q^2 \rightarrow \infty$, los únicos diagramas relevantes serían los que estudiamos en el capítulo 1 y en el actual. En otras palabras, en acoplamiento fuerte y para valores grandes de N (pero finitos) sólo sería necesario considerar estados finales de una y de dos partículas.

Parte III

Aplicaciones y fenomenología

Capítulo 7

Blancos mesónicos

Habiendo estudiado en detalle la descripción holográfica del proceso de DIS en el caso más simple, dedicamos la parte III al estudio de modelos un tanto más realistas. En este primer capítulo presentamos las aplicaciones de las técnicas desarrolladas en los capítulos anteriores a los blancos mesónicos, identificados con los modos de cuerdas abiertas en los modelos con Dp -branas de sabor. Como anticipamos en el capítulo 1, nos concentraremos en el análisis del modelo D3D7 donde las modificaciones con respecto a la parte II se ven simplificadas. Sin embargo, es importante tener en mente que los resultados que obtenemos son de carácter universal: resultan válidos en una variedad de modelos de branas con distintas características.

En primer lugar, calculamos las funciones de estructura asociadas a los mesones escalares y vectoriales tanto en el régimen de x grande, donde vale la aproximación supergravedad, como también en el régimen de x pequeño, donde es necesario incluir los efectos de los modos excitados de las supercuerdas. Luego, analizamos las consecuencias fenomenológicas de las expresiones obtenidas, concentrándonos en la sección eficaz diferencial del DIS. Finalmente, estudiamos las contribuciones de las correcciones al DIS provenientes de los diagramas con *loops* en AdS para el caso de los blancos mesónicos. Los resultados originales de esta tesis asociados a estos cálculos fueron presentados en [6, 7, 9].

7.1. DIS holográfico para mesones

En el modelo D3D7, las excitaciones duales a los mesones escalares corresponden a los campos que describen las fluctuaciones de las D7-branas en las direcciones transversales, definidos en (1.31). Presentaremos el análisis en términos del campo φ , pero los resultados serán los mismos para los modos de χ . Asimismo, las fluctuaciones en las direcciones longitudinales definidas en términos de campos de gauge B_α sobre la brana representan la versión dual de los mesones vectoriales. Por otro lado, es importante notar que a diferencia del capítulo 1 insertamos las D7-branas en la geometría confinante del modelo *hard-wall*. De la misma manera que en el caso de AdS_5 , esto impondrá una condición sobre los valores que pueden tomar los momentos en las direcciones planas. A los fines prácticos podemos identificar las dos escalas IR presentes en el problema según $L \sim \Lambda R^2$.

Régimen de supegravedad

Mesones escalares

Para empezar, notamos que las características cinemáticas del proceso son en todo sentido análogas a las que fueron expuestas en el caso de los glueballs de espín nulo. En efecto, el FCS

holográfico es completamente análogo: la única diferencia conceptual importante proviene del hecho de que la simetría $U(1)$ a la que está asociada el bosón de gauge ahora debe ser parte del grupo de simetrías de la S^3 que se factoriza asintóticamente en la geometría (1.30) de la D7-brana. Por ende, los argumentos basados en el análisis de la energía del CM y su relación con la escala de la cuerda α'^{-1} indican también en el contexto del DIS mesónico que la aproximación de supergravedad es lo suficientemente precisa para valores no muy pequeños del parámetro de Bjorken. Podemos decir que en todos los casos (al menos en el límite $N \rightarrow \infty$) estudiaremos procesos similares al de la figura 13. La única diferencia estará dada por la geometría de fondo y las soluciones de los mesones externos e intermedios.

Expandiendo el Lagrangiano DBI de (1.27) obtenemos la expresión (1.34) al orden cuadrático, de donde se deduce la ecuación de movimiento (1.35). Las soluciones exactas a esta ecuación están dadas en [29], y toman la forma de potencias de ρ y $(\rho^2 + L^2)$ multiplicadas por funciones hipergeométricas. Sin embargo, sabemos que la interacción relevante sucede en las cercanías del borde y tiene una escala característica $r_{\text{int}} \approx qR^2 \approx \rho_{\text{int}}$ de manera que $\rho_{\text{int}} \gg L$. En esta región, las soluciones asociadas a los modos normalizables de los mesones escalares son similares a las del dilatón: la única diferencia radica en la potencia de $z = R^2/r \approx R^2/\rho$ que acompaña a la función de Bessel. Teniendo en cuenta la diferencia energética entre el modo intermedio φ_X y los externos $\varphi_{\text{in/out}}$, tenemos entonces

$$\varphi_i \sim c_i e^{iP \cdot x} \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\Delta-1} Y_\Delta(\Omega), \quad \varphi_X \sim c_X e^{i(P+q) \cdot x} z J_{\Delta-2}(Pz) Y_\Delta(\Omega). \quad (7.1)$$

Los armónicos esféricos escalares ahora están definidos sobre S^3 y satisfacen una relación de autovalores similar a (3.29), mientras que las normalizaciones se definen de manera análoga al caso del dilatón. Estos modos transforman en la representación $(l/2, l/2)$ de $SO(4) \sim SU(2) \times SU(2)$, donde el índice $l \geq 0$ viene dado en términos de la dimensión según $\Delta(l) = l + 3$.

El vértice de interacción puede obtenerse de diferentes maneras. Una posibilidad consiste en insertar la perturbación de la métrica $g_{mi} \sim A_m K_i$ (con un vector de Killing en S^3) en la acción cuadrática. También podríamos estudiar la derivada de Lie de los modos mesónicos, o simplemente derivar la corriente conservada asociada a la simetría $U(1)$ correspondiente. En todos los casos el resultado es el siguiente:

$$L_{A\varphi\varphi} = i\mathcal{Q}\mu_7(\pi\alpha')^2\sqrt{-g}\frac{z^2}{R^2}A^m(\varphi_i\partial_m\varphi_X^* - \varphi_X^*\partial_m\varphi_i). \quad (7.2)$$

Para tener un carga no nula necesariamente debemos considerar los modos con $l \geq 1$. Como vemos, la situación es muy similar a la del DIS para blancos tipo *glueball*. Los siguientes pasos son análogos, y las expresiones que obtenemos para las funciones de estructura son nuevamente de la forma

$$F_1(x, q^2) = 0, \quad F_2(x, q^2) = 2\pi\text{Cte} \times \mathcal{Q}^2 \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\Delta-1} x^{\Delta+1} (1-x)^{\Delta-2}. \quad (7.3)$$

Obtenemos nuevamente $F_1 = 0$: si bien el blanco es ahora mesónico, sigue siendo escalar. Los factores que incluían a la tensión de la brana μ_7 han desaparecido debido a una rescritura en términos de las cantidades asociadas a la teoría de campos N y λ , de manera que los resultados son en todo sentido análogos a los del capítulo 3.

Mesones vectoriales

Las ecuaciones de movimiento de los campos de gauge sobre la brana también se deducen del Lagrangiano cuadrático, que presenta el término de Einstein-Maxwell usual sumado a una contri-

bución proveniente del término de WZ en la acción original. Como dijimos al introducir el modelo D3D7, los modos que identificamos como mesones vectoriales holográficos son las denominadas soluciones del tipo II (1.39). En la región cercana a r_{int} y en cuanto a su dependencia con respecto a las coordenadas de AdS los correspondientes modos normalizables son análogos a los del campo de gauge A_m del AdS₅ puro (calculados por ejemplo en el gauge axial), y se diferencian de los modos escalares principalmente debido a la presencia de un vector de polarización ζ transversal a su cuadri-momento:

$$(B_i)_\mu \sim c_i \zeta_\mu e^{iP \cdot x} \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\Delta-1} Y_\Delta(\Omega), \quad (B_i)_\rho = 0 \quad (7.4)$$

$$(B_X)_\mu \sim c_X (\zeta_X)_\mu e^{i(P+q) \cdot x} J_{\Delta-2}(\sqrt{s}z) Y_\Delta(\Omega), \quad (B_X)_\rho = 0. \quad (7.5)$$

La polarización está normalizada a partir de los momentos, por ejemplo con $\zeta^2 = P^2$.

En el caso de los mesones vectoriales utilizamos los métodos descritos más arriba para calcular el término de interacción con el *fotón* dual A_m . La estructura de la corriente que obtenemos es un tanto distinta:

$$j^m = -i \mathcal{Q} \mu_7 \frac{(2\pi\alpha')^2}{2} [G^{mn} B_{X,n}^* - G_X^{mn*} B_n] \quad , \quad G = dB. \quad (7.6)$$

Siguiendo el procedimiento descrito en detalle en el capítulo 3, obtenemos el siguiente resultado para la función de un punto de la corriente insertada en el borde:

$$\langle P+q | J^\mu(0) | P \rangle f_\Delta(x, q^2) N^\mu, \quad (7.7)$$

donde $f_\Delta(x, q^2)$ depende del parámetro de Bjorken y de la virtualidad q del fotón de manera similar al caso escalar, y la estructura tensorial (ignorando como antes los términos proporcionales a q^μ) está dada por

$$N^\mu \equiv 2(\zeta \cdot \zeta_X) P^\mu + (\zeta_X \cdot q) \zeta^\mu - (\zeta \cdot q) \zeta_X^\mu. \quad (7.8)$$

A la hora de calcular $\text{Im} T^{\mu\nu}$ el teorema óptico indica que es necesario sumar sobre todos los posibles estados intermedios. En este caso, dicha suma incluye la necesidad de considerar las diferentes polarizaciones (helicidades) que puede tener el modo vectorial intermedio B_X , y puede realizarse en base a la identidad

$$\sum \zeta_X^\mu \zeta_X^{\nu*} = M_X^2 \eta^{\mu\nu} + P_X^\mu P_X^\nu = s \eta^{\mu\nu} + (P+q)^\mu (P+q)^\nu. \quad (7.9)$$

Finalmente, necesitamos comparar el resultado con la estructura general presentada en (2.19), que podemos rescribir de una manera más clara en términos del vector de espín del hadrón entrante

$$S^\mu \equiv \frac{i}{P^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \zeta_\nu \zeta_\rho^* P_\sigma. \quad (7.10)$$

De esta manera, se obtienen las expresiones para las ocho funciones de estructura (que preservan paridad) de los mesones vectoriales polarizados en el régimen de supergravedad, que podemos describir en base a un factor global común

$$A(x, q^2) = \text{Cte} \times \mathcal{Q}^2 \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\tau-1} x^{\tau+1} (1-x)^{\tau-2}, \quad (7.11)$$

y diversos resultados originales que constituyen nuevas relaciones del tipo Callan-Gross [4]:

$$F_2 = 2F_1 \quad , \quad b_2 = 2b_1 \quad , \quad b_1 = 3F_1 \quad , \quad b_2 = 3F_2 \quad , \quad b_4 = -2b_3 \quad , \quad g_1 \approx 0. \quad (7.12)$$

A continuación detallamos los aspectos más relevantes de estos resultados:

- Las expresiones presentadas en (7.11) y (7.12) constituyen los primeros resultados para las ocho funciones de estructura que pueden aparecer en el DIS con blancos mesónicos vectoriales obtenidas por métodos analíticos en el régimen de acoplamiento fuerte (y con $N \rightarrow \infty$).
- La principal propiedad del caso vectorial en comparación con el escalar proviene del reemplazo $\Delta \rightarrow \tau$, donde $\tau = \Delta - 1$ es el twist para espín 1. Esta observación es consistente con el análisis de (2.73) y se repetirá para el caso fermiónico. Teniendo en cuenta este reemplazo, la forma general de las dependencias en q^2 puede entenderse de la misma manera que en el capítulo 3.
- Encontramos nuevas relaciones de Callan-Gross (CG), entre las cuales se destaca la de caracter universal: $F_2 = 2F_1$. Este resultado es análogo a la relación de CG original $F_2 = 2xF_1$, que es válida exactamente en el modelo de partones. En este caso, la unidad que encontramos en reemplazo del parámetro de Bjorken x referido a la fracción de momento que lleva el partón involucrado en la interacción puede entenderse como consecuencia de que el fotón interactúa con el hadrón inicial como un todo. Se trata de un comportamiento que no podía ser observado en el caso escalar por razones de simetría.
- También destacamos la presencia de la relación $b_2 = 2b_1$, analizada en [38] de manera similar a la del ítem anterior, y que en el modelo de partones también incluiría un factor x adicional.
- El hecho de que se satisfaga la condición $g_1(x) \leq F_1(x)$ constituye un chequeo de consistencia de consistencia de nuestros resultados [36].

En el trabajos [5] mis colaboradores han mostrado explícitamente que el análisis y los resultados que acabamos de considerar son análogos a los que se obtienen a partir de los modelos D4D6 $\overline{D6}$ [31] y D4D8 $\overline{D8}$ [30]. Esto se repetirá para los demás regímenes, incluso cuando resulta necesario partir directamente desde la teoría de cuerdas. Basados en estos ejemplos, podemos decir que existe una posibilidad concreta de que estemos describiendo un comportamiento universal, válido al menos para las teorías de campos que cuentan con duales gravitatorios. Además, en dichos trabajos se analizan también algunos aspectos de los modelos no abelianos y de las correcciones $1/N$ y N_f/N .

Régimen de teoría de cuerdas

En esta sección calcularemos las funciones de estructura de los mesones escalares y vectoriales en el régimen $\exp(-\sqrt{\lambda}) \ll x \ll \lambda^{-1/2}$. Para esto, utilizaremos métodos análogos a los del capítulo 4, de manera que enfatizaremos las dificultades propias del caso mesónico pero evitaremos entrar en detalles sobre los que hayamos ahondado anteriormente.

Nuevamente, podemos extrapolar el análisis cinemático realizado en el caso del *glueball*. En el régimen que estamos considerando, la energía del CM $\tilde{s}^{1/2}$ del proceso dual está relacionada de tal manera con la de la teoría de campos $s^{1/2}$ (con $s \approx q^2/x$) se vuelve muy grande. La contribución principal a la amplitud del DIS estará dada por un proceso conceptualmente cercano al intercambio de un gravitón en el canal t ¹. Para ser más precisos, no se trata de un proceso que pueda describirse enteramente con las herramientas de la supergravedad pues la energía del CM toma valores comparables con la escala de masa de los estados excitados de cuerdas, es decir, α'^{-1} . En consecuencia, se vuelve necesario tener en cuenta la contribución de la totalidad de los modos de

¹Vale la pena resaltar que debido a la presencia del vector de polarización en el caso vectorial, el diagrama del gravitón incluye también contribuciones a las funciones de onda antisimétricas (no así a las que no preservan paridad).

cuerdas que forman una *torre de estados* sobre el gravitón propiamente dicho. En terminos efectivos, presenciamos la formación de un gravitón *reggeizado*. Finalmente, recordamos que en este régimen en particular el proceso en su totalidad puede considerarse como una única interacción local con cuatro estados externos (de la que sólo nos interesa la parte imaginaria), gracias a lo cual podemos realizar nuevamente nuestra *aproximación local*.

En este contexto, resulta sencillo anticipar la estructura tensorial de los Lagrangianos efectivos asociados a los blancos mesónicos. Simplemente necesitamos realizar las perturbaciones relevantes en la acción DBI de forma tal de aislar la manera en que los distintos modos se acoplan con las perturbaciones de la métrica, recuperando una vez más los respectivos tensores de energía momento $T_\varphi^{\alpha\beta}$ y $T_B^{\alpha\beta}$.

Como ha sucedido en el régimen de supergravedad, el caso de los mesones escalares resulta ser completamente análogo al del dilatón aunque restringido a la geometría de la D7-brana: nuevamente la contribución más relevante es de la forma

$$L_{\text{eff}} \propto F_{mn}^* F^{pn} \partial^m \varphi^* \partial_p \varphi. \quad (7.13)$$

En el caso vectorial obtenemos en cambio

$$L_{\text{eff}} \propto F_{mn}^* F^{pn} G_{nq}^* G^{mq}. \quad (7.14)$$

En este régimen, solamente necesitamos las expresiones asintóticas asociadas a las soluciones $\varphi_{\text{in/out}}$ y $B_{\text{in/out}}$.

Para transformar estas estructuras en los verdaderos vértices efectivos deberíamos incluir de alguna manera un prefactor proveniente de teoría de cuerdas que tenga en cuenta la posibilidad de intercambiar modos excitados. Sin embargo, en este caso la interpretación desde primeros principios resulta menos directa: los campos cuyas fluctuaciones describen a los mesones holográficos corresponden a los modos livianos de las cuerdas que viven sobre la D7-brana, es decir que se trata de cuerdas abiertas. El desafío principal de nuestro trabajo [6] tuvo que ver con deducir los Lagrangianos efectivos asociados a los mesones escalares y vectoriales de manera tal que respeten las estructuras (7.13) y (7.14), incluyendo los prefactores correctos directamente desde el análisis de teoría de cuerdas.

Amplitudes mixtas en teoría de cuerdas

Dejemos de lado por un momento el proceso dual al DIS (FCS) que nos interesa y concentrémonos en construir la amplitud completa desde teoría de cuerdas. Los estados externos están dados por dos modos de cuerdas cerradas asociados al gravitón (que luego dan lugar al A_m) y dos modos de cuerdas abiertas que representan los mesones. Se trata, entonces, de una amplitud de las denominadas mixtas. En este apartado repasamos los elementos necesarios a la hora de calcular este tipo de amplitudes. Notemos que la localidad aproximada del proceso permite utilizar los cálculos de cuerdas en espacio plano como en el caso de los *glueballs*.

En el ámbito de la teoría de cuerdas, para calcular una amplitud como la que necesitamos debemos realizar una integral de camino en la CFT de la hoja de mundo con las inserciones correspondientes a los operadores de vértice asociados a los estados externos. En este caso, la presencia de las cuerdas abiertas indica que la topología relevante es la de un disco. Cabe resaltar que en [69] el autor analizó en detalle la posibilidad de expresar este tipo de amplitudes en términos de amplitudes puras de cuerdas abiertas a partir de las relaciones de KLT. Utilizaremos parte de sus resultados en un momento. La superficie asociada a nuestro proceso a nivel árbol puede mapearse mediante una transformación conforme al disco unitario, que en coordenadas complejas z, \bar{z} podemos

definir como $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} | |z| \leq 1\}$. Utilizando una transformación de Möbius $z \rightarrow i(1+z)(1-z)^{-1}$ podemos mapear una vez más este disco al semi-plano superior $\mathbf{H}_+ = \{z \in \mathbf{C} | \text{Im}(z) \geq 0\}$. Las inserciones asociadas a las cuerdas abiertas deberán estar ubicadas en el borde, mientras que las de las cuerdas cerradas estarán en el interior. Las expresiones para estos operadores son las siguientes:

$$V_o^{(-1)}(x, \epsilon_\mu, p) = g_o e^{-\phi} \epsilon_\mu \psi^\mu e^{ip \cdot X}(x), \quad (7.15)$$

$$V_o^{(0)}(x, \epsilon_\mu, p) = g_o (2\alpha')^{-1/2} \epsilon_\mu (i\partial_x X^\mu + 2\alpha' p \cdot \psi \psi^\mu) e^{ip \cdot X}(x), \quad (7.16)$$

para los modos de cuerdas abiertas, y

$$V_c^{(-1,-1)}(z, \bar{z}; h_{\mu\nu}, q) = g_c e^{-\tilde{\phi}(\bar{z})} e^{-\phi(z)} h_{\mu\nu} \tilde{\psi}^\mu(\bar{z}) \psi^\nu(z) e^{iq \cdot X(\bar{z}, z)}, \quad (7.17)$$

$$V_c^{(0,0)}(z, \bar{z}; h_{\mu\nu}, p) = -g_c \frac{2}{\alpha'} h_{\mu\nu} \left(i\bar{\partial} X^\mu + \frac{\alpha'}{2} q \cdot \tilde{\psi} \tilde{\psi}^\mu(\bar{z}) \right) \left(i\partial X^\nu + \frac{\alpha'}{2} q \cdot \psi \psi^\nu(z) \right) \times e^{iq \cdot X(\bar{z}, z)}, \quad (7.18)$$

para los modos de cuerdas abiertas. En la notación que estamos utilizando, X^μ y ψ^μ son los campos bosónicos y fermiónicos de la teoría en la hoja de mundo, respectivamente, mientras que ϕ y $\tilde{\phi}$ son los campos fantasmas². Los acoplamientos están dado por g_o y g_c , con $g_c = g_o^2$. Cabe resaltar que cada vez que escribimos V para un operador de vértice estamos tomando implícitamente el orden normal. Con estas definiciones, la amplitud viene dada por

$$\mathcal{A}_{string}(h_1, h_4, \epsilon_2, \epsilon_3) = \int_{\partial\mathbf{H}_+} dx \int_{\partial\mathbf{H}_+} dy \int_{z \in \mathbf{H}_+} dz d\bar{z} \int_{w \in \mathbf{H}_+} dw d\bar{w} \langle c(z) \tilde{c}(\bar{z}) \times V_c^{(0,0)}(z, \bar{z}; h_{1\mu\nu}, k_1) V_c^{(-1,-1)}(w, \bar{w}; h_{4\mu\nu}, p_4) (c(x) - c(y)) V_o^{(0)}(x, \epsilon_{2\mu}, k_2) V_o^{(0)}(y, \epsilon_{3\mu}, k_3) \rangle, \quad (7.19)$$

donde c y \tilde{c} también son campos fantasmas. Tenemos dos parámetros reales asociados a las inserciones en el borde, y dos parámetros complejos relacionados con las inserciones de cuerdas cerradas. La simetría $SL(2, R)$ permite fijar tres de estos parámetros (reales), con lo que tenemos tres integrales por realizar. Una posibilidad consiste en tomar $x \rightarrow -\infty$, $y = 1$ y $Re(w) = 0$ (i.e. $\bar{w} = -w$). En cuanto al valor de expectación involucrado en (7.19), podemos decir que está dado por una integral sobre las configuraciones de los campos que agrupamos en $\Phi \equiv \{X, \psi, \tilde{\psi}, \phi, \tilde{\phi}, c, \tilde{c}\}$, y que podemos escribir esquemáticamente según

$$\langle f[X, \psi, \tilde{\psi}, \phi, \tilde{\phi}, c, \tilde{c}] \rangle \equiv \int D\Phi e^{iS[\Phi]} f[\Phi]. \quad (7.20)$$

Como la acción $S[\Phi]$ es separable cada integral puede hacerse por separado, dando lugar a la aparición de los propagadores [69-71]

$$\begin{aligned} \langle X^\mu(z) X^\nu(w) \rangle &= -2\alpha' \eta^{\mu\nu} \ln(z - w), \\ \langle X^\mu(z) \tilde{X}^\nu(\bar{w}) \rangle &= -2\alpha' D^{\mu\nu} \ln(z - \bar{w}), \\ \langle \psi^\mu(z) \psi^\nu(w) \rangle &= \eta^{\mu\nu} (z - w)^{-1}, \\ \langle \psi^\mu(z) \tilde{\psi}^\nu(\bar{w}) \rangle &= D^{\mu\nu} (z - \bar{w})^{-1}, \\ \langle \phi(z) \phi(w) \rangle &= -\ln(z - w), \\ \langle \phi(z) \tilde{\phi}(\bar{w}) \rangle &= -\ln(z - \bar{w}), \\ \langle c(w_1) c(w_2) c(z) \rangle &= C_{ghost}(w_1 - w_2)(w_1 - z)(w_2 - z), \\ \langle c(w_1) c(w_2) \tilde{c}(\bar{z}) \rangle &= C_{ghost}(w_1 - w_2)(w_1 - \bar{z})(w_2 - \bar{z}), \end{aligned}$$

²En estas expresiones utilizamos para los índices la notación de [69].

donde $D^{\mu\nu}$ es una matriz diagonal cuyos elementos son simplemente 1 en las direcciones paralelas a la D-brana y -1 en las transversales. Teniendo todos estos ingredientes podemos calcular el valor de expectación en (7.19), que incluye las contracciones de Wick de 16 términos en total. La cuenta es un tanto extensa, pero en el caso de los mesones escalares solamente sobrevive un término, principalmente debido al hecho de que las polarizaciones correspondientes solamente son no nulas en las direcciones transversales y perpendiculares a varios de los momentos involucrados. Un resultado inicial en este contexto fue obtenido por Fotopoulos y Tseytlin [71] cerca del régimen de supergravedad, en el que los autores mostraron que las integrales complejas pueden calcularse explícitamente cerca de las singularidades (que aparecen cuando dos inserciones se acercan). El resultado exacto fue obtenido en [69], y puede separarse en dos contribuciones según

$$\mathcal{A}_4^{2o2c,scalar} = \mathcal{P}_1^{2o2c,scalar} \mathcal{K}_1^{2o2c,scalar} + \mathcal{P}_2^{2o2c,scalar} \mathcal{K}_2^{2o2c,scalar}, \quad (7.21)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1^{2o2c,scalar} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 (1+ix)^{u-1} (1-ix)^{u-1} \times \\ &\int_{\mathbb{C}} d^2 z (1-z)^s (1-\bar{z})^s (z+ix)^{\frac{t}{2}-1} (z-ix)^{\frac{t}{2}-1} (\bar{z}+ix)^{\frac{t}{2}-1} (\bar{z}-ix)^{\frac{t}{2}-1}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Esto quiere decir que la estructura factorizada $\mathcal{A} \sim \mathcal{G} \times \mathcal{K}$ reaparece, aunque solamente término a término. Como el primero es el que sobrevive en el límite $\alpha' \rightarrow 0$, el factor cinemático $\mathcal{K}_1^{2o2c,scalar}$ es independiente de α' y puede obtenerse a partir de los diagramas de Feynman de supergravedad [71] de la misma manera que en el caso de las cuerdas cerradas de la parte II. Por ende, esta contribución es la única que nos interesa. En la figura 23 presentamos de manera esquemática la identificación entre la manera en que vemos los procesos en el límite de bajas energías y los diferentes límites en los que podemos pensar la forma de la hoja de mundo cerca de las singularidades.

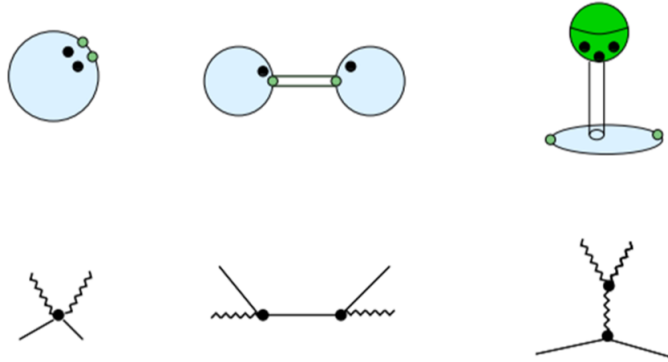


Figura 23: Las dos interpretaciones de los procesos a bajas energías: como diagramas de Feynman de supergravedad y como límites de la integral sobre la hoja de mundo [71].

La estructura tensorial de (7.13) asociada al intercambio del gravitón emerge a partir de $\mathcal{K}_1^{2o2c,scalar}$ en el límite de $\tilde{t} \rightarrow 0$ y \tilde{s} grande. Por otro lado, vemos que el prefactor necesario para calcular la acción efectiva completa en el caso de los mesones escalares se deduce formalmente al tomar los mismos límites en (7.22). Sin entrar en detalles, es fácil convencerse de que el prefactor que obtenemos es *exactamente* el mismo que en el caso de las cuerdas cerradas, al menos en este límite. En efecto, sabemos que estamos interesados en un proceso emparentado con el intercambio gravitatorio, identificado con un modo de cuerdas cerradas. Por lo tanto, es de esperarse que

encontremos las singularidades del prefactor sean las mismas. Gráficamente, esto quiere decir que estamos analizando una región cinemática en donde dominan los diagramas de la derecha de la figura 23, donde se ve claramente que el *propagador* es un *cilindro* puesto que se intercambian modos de cuerda cerrada. En lo que respecta este *propagador del Pomerón*, el proceso es idéntico al que tiene cuatro cuerdas cerradas como modos externos. Esta intuición puede formalizarse a directamente a partir del OPE de los operadores de vértice utilizando las técnicas de [13].

En el caso de los mesones vectoriales, una análisis similar eligiendo polarizaciones no nulas en las direcciones de la D-brana lleva a una amplitud expresada como una suma de ocho términos:

$$\mathcal{A}_4^{2o2c,vector} = \mathcal{P}_1^{2o2c,vector} \mathcal{K}_1^{2o2c,vector} + \mathcal{P}_2^{2o2c,vector} \mathcal{K}_2^{2o2c,vector} + \dots \quad (7.23)$$

Sin embargo, el razonamiento es el mismo: la parte cinemática del término relevante en el límite $\alpha' \rightarrow 0$ puede calcularse a partir de los diagramas de supergravedad, y toma la forma (7.14) en el régimen que nos interesa. Nuevamente, el prefactor de teoría de cuerdas toma en este régimen la misma forma que en los casos escalares.

Funciones de estructura mesónicas en el régimen *local*

Para calcular las funciones de estructura mesónicas en el régimen que estamos estudiando solamente resta tomar la parte imaginaria de las amplitudes que describimos en la sección anterior y comparar los resultados con la descomposición tensorial general de los tensores hadrónicos para blancos escalares y vectoriales.

Para los mesones escalares φ obtenemos expresiones para F_1 y F_2 análogas en todo sentido a las de los glueballs, es decir,

$$F_1(x, q^2) = \text{Cte} \times \frac{1}{x^2} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\Delta-1} \frac{1}{4\pi\sqrt{\lambda}} I_{1,2\Delta+3}, \quad F_2(x, q^2) = 2x \left(\frac{2\Delta+3}{\Delta+2} \right) F_1, \quad (7.24)$$

recuperando una vez más la x correspondiente en la relación de Callan-Gross.

Para los mesones vectoriales obtenemos nuevamente la dependencia en x y q^2 de la totalidad de las funciones de estructura de los blancos vectoriales. Los resultados pueden resumirse de la siguiente manera

- Las funciones universales se comportan exactamente como en (7.24).
- Las relaciones $b_1 = 3F_1$ y $b_2 = 3F_2$ que encontramos en el régimen de supergravedad siguen siendo válidas.
- En este régimen encontramos además que $b_3 = -2b_4 = -2b_2/3$.
- También sigue siendo cierto que g_1 es subdominante con respecto a las demás funciones de estructura. Como veremos en el capítulo 8, es probable que en ciertos modelos esta conclusión se modifique si consideramos la contribución del intercambio de un modo de espín $j \approx 1$, generando una contribución $g_1 \sim 1/x$.
- La función g_2 es positiva y crece como x^{-2} en este régimen.
- En todos los casos, la dependencia con (Λ^2/q^2) es la misma que en todos los cálculos que realizamos fuera del régimen en el que x toma valores exponencialmente pequeños.

Nuevamente, los resultados en los demás modelos son análogos a los que obtuvimos en el caso D3D7. En términos generales, esperamos que el análisis del capítulo 5 asociado a los valores exponencialmente pequeños de x pueda extenderse al caso de los mesones de manera sencilla y en todos los modelos en cuestión.

7.2. Secciones eficaces y momentos

En esta sección analizamos algunas consecuencias fenomenológicas de los resultados que obtuvimos para el DIS mesónico utilizando las técnicas holográficas.

Hemos sido capaces de calcular las contribuciones dominantes [7] tanto en el régimen de supergravedad, que podemos identificar de manera aproximada con el rango $0,1-0,2 < x < 1$, como en el régimen en el que es necesario utilizar amplitudes de teoría de cuerdas, que describe aproximadamente la región $x < 0,1$. Teniendo estos resultados, estamos en posición de, por primera vez, calcular la sección eficaz diferencial del proceso de DIS en todo el rango físico ³. Analizaremos nuestros resultados en base a la descripción general presentada en el capítulo 2 para el DIS con blancos escalares.

Rango 1: $1/\sqrt{\lambda} \ll x < 1$

En un primer momento nos concentraremos en los mesones vectoriales puesto que constituyen nuestros resultados más novedosos. Además, aquí sí distinguiremos explícitamente los resultados obtenidos para cada uno de los tres modelos considerados. Si bien los resultados son cualitativamente los mismos en todos los casos, estamos interesados en ver si alguno de estos modelos provee un mejor acuerdo con los datos a nivel cuantitativo. Las diversas relaciones de Callan-Gross que hemos descubierto permiten escribir todas las funciones en términos de un factor global $F(x, q^2)$ y de la función $F_1(x, q^2) = F(x, q^2)(1 - x)$

$$F(x, q^2) = \text{Cte} \left(\frac{A^2}{q^2} \right)^\gamma x^{\gamma+2(n+1)} (1-x)^{\gamma-1}, \quad (7.25)$$

que depende explícitamente del modelo y escribimos en términos del exponente

$$\gamma^2 = \frac{A^2 + \ell(\ell + p - 5)}{B^2}, \quad A = \frac{1 - 2\alpha - \beta(p - 3)/2 - p + 4}{2}, \quad B = \frac{\alpha - \beta - 2}{2}, \quad n = \frac{2 + \beta}{4B}$$

relacionado con la forma de la métrica asintótica en cada caso (ver tabla 7.1), dada por

$$ds^2 = \left(\frac{r}{R} \right)^\alpha \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \left(\frac{r}{R} \right)^\beta [dr^2 + r^2 d\Omega_{p-4}^2]. \quad (7.26)$$

Reemplazando en las expresiones generales para las secciones diferenciales obtenemos

³Debemos tener en mente que, en realidad, existe un último rango asociado a valores realmente muy pequeños de x para los cuales el comportamiento descrito por la ecuación (7.24) deja de ser válido debido a la ruptura de la aproximación local, y la expresión para las funciones de estructura debe modificarse. Sin embargo, esta región paramétrica será de menor importancia a la hora de comparar con los datos disponibles.

Modelo / Parámetro	p	α	β
D3D7	7	2	-2
D4D8 $\overline{\text{D8}}$	8	3/2	-3/2
D4D6 $\overline{\text{D6}}$	6	3/2	-3/2

Tabla 7.1: Parámetros α y β para cada uno de los modelos de branas de sabor.

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{dx dy d\phi} &= \frac{MEe^4}{4\pi^2 q^4} \left\{ \langle qq \rangle [xy^2 + 2(1-y)] F_1 + 2xy^2 g_2 \left[\frac{(s_h \cdot s_l)}{(P \cdot q)} - \frac{(q \cdot s_h)(P \cdot s_l)}{(P \cdot q)^2} \right] \right\} \\
&= \frac{MEe^4}{4\pi^2 q^4} F_1 \left\{ \langle qq \rangle [xy^2 + 2(1-y)] + \frac{9}{2} y^2 \left[\frac{(s_h \cdot s_l)}{(P \cdot q)} - \frac{(q \cdot s_h)(P \cdot s_l)}{(P \cdot q)^2} \right] \right\} \\
&= \frac{MEe^4}{4\pi^2 q^4} F(x, q^2)(1-x) \times \\
&\quad \left\{ \langle qq \rangle [xy^2 + 2(1-y)] + \frac{9}{2} y^2 \left[\frac{(s_h \cdot s_l)}{(P \cdot q)} - \frac{(q \cdot s_h)(P \cdot s_l)}{(P \cdot q)^2} \right] \right\}. \tag{7.27}
\end{aligned}$$

Si el leptón de momento k está polarizado longitudinalmente de manera tal que $s_l = H_l k$, con $H_l = \pm 1$ para helicidad positiva (negativa), lo que constituye la situación más relevante en términos experimentales, podemos describir esta expresión de la siguiente manera:

$$\frac{d\sigma}{dx dy d\phi} = \frac{MEe^4}{4\pi^2 q^4} F(x, q^2)(1-x) \left\{ \langle qq \rangle [xy^2 + 2(1-y)] - \frac{9H_l}{2ME} s_h^\mu (y k_\mu - q_\mu) \right\}. \tag{7.28}$$

Analizando cada una de las posibles polarizaciones hadrónicas encontramos los siguientes comportamientos:

- Blanco no-polarizado: $\langle qq \rangle_{unpol} = 1$, $s_h = 0$.

$$\left. \frac{d\sigma}{dx dy d\phi} \right|_{unpol} = \frac{MEe^4 A^{SF}(x)}{48\pi^2 q^4 x^3} (1-x) [xy^2 + 2(1-y)]. \tag{7.29}$$

- Blanco longitudinalmente polarizado: $\langle qq \rangle_{LP} = 0$, $s_h = (0, H_h M \hat{z})$ (and using $\cos \theta \approx 1$).

$$\left. \frac{d\sigma}{dx dy d\phi} \right|_{LP} = 0. \tag{7.30}$$

- Blanco transversalmente polarizado: $\langle qq \rangle_{TP} = 3/2$, $s_h = (0, H_h M \hat{x})$

$$\left. \frac{d\sigma}{dx dy d\phi} \right|_{TP} = \frac{MEe^4 A^{SF}(x)}{48\pi^2 q^4 x^3} (1-x) \left\{ \frac{3}{2} [xy^2 + 2(1-y)] - \frac{9H_l H_h M}{2|q|} (1-y) \cos \phi \right\} \tag{7.31}$$

Notar que el factor $M/|q| = \sqrt{-P^2/q^2}$ indica que la parte dependiente del espín es subdominante.

Modelo	D3D7	D4D8 $\overline{D8}$	D4D6 $\overline{D6}$
δ	$\frac{2\Delta+3}{\Delta+2}$	$\frac{4(4\Delta+3)}{8\Delta+9}$	$\frac{16(\Delta+1)}{8\Delta+11}$

Tabla 7.2: Parámetro δ en cada uno de los modelos de branas.

Finalmente, para las amplitudes de helicidad vemos que en este régimen

$$\begin{aligned}
A_{++,++} &\simeq 0 + O(t), \\
A_{+,0,+} &\simeq 3F_1, \\
A_{+,0,+} &\simeq \sqrt{-t} \left[\frac{9F_1}{2} + \frac{a_3}{2} + \frac{a_4}{4} \right] = \sqrt{-t} 6F_1, \\
A_{+,-,+} &\simeq 0 + O(t), \\
A_{+,-,0} &\simeq \sqrt{-t} \left[\frac{9F_1}{2} - \frac{a_3}{2} - \frac{a_4}{4} \right] = \sqrt{-t} 3F_1, \\
A_{+,-,-} &\simeq 0, \\
A_{0+,0+} &\simeq \frac{4b_3}{3x}, \\
A_{00,00} &\simeq 3\left(\frac{1}{x} - 1\right)F_1 - \frac{8b_3}{3x}.
\end{aligned} \tag{7.32}$$

Rango 2: $e^{-\sqrt{\lambda}} \ll x \ll 1/\sqrt{\lambda}$

Los resultados relevantes para esta sección también pueden expresarse de manera simple. Excepto g_1 que se anula a primer orden, todas las funciones crecen como x^{-1} o x^{-2} en el límite $x \rightarrow 0$. Las relaciones de tipo Callan-Gross son análogas en todos los modelos: la única diferencia radica en la *modificación* las que relacionan F_1 con F_2 y b_1 con b_2 , respectivamente. Están dadas por $F_2 = 2xF_1 \times \delta(\Delta)$ y una ecuación equivalente para las b_i , donde hemos introducido una constante numérica δ cuya relación con la dimensión conforme Δ asociada al hadrón incidente depende del modelo en cuestión. La dependencia explícita se muestra en la tabla 7.2.

Reemplazando una vez más en las expresiones generales, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{dx dy d\phi} &= \frac{MEe^4}{4\pi^2 q^4} \left\{ \langle qq \rangle [xy^2 + 2x(1-y)\delta] F_1 + 2xy^2 g_2 \left[\frac{(s_h \cdot s_l)}{(p \cdot q)} - \frac{(q \cdot s_h)(p \cdot s_l)}{(p \cdot q)^2} \right] \right\} \\
&= \frac{MEe^4}{4\pi^2 q^4} F_1 \left\{ \langle qq \rangle [xy^2 + 2x(1-y)\delta] + 3xy^2 \delta \left[\frac{(s_h \cdot s_l)}{(p \cdot q)} - \frac{(q \cdot s_h)(p \cdot s_l)}{(p \cdot q)^2} \right] \right\} \\
&\sim \frac{MEe^4}{48\pi^2 q^4} \frac{1}{x} \left\{ \langle qq \rangle [y^2 + 2(1-y)\delta] + 3y^2 \delta \left[\frac{(s_h \cdot s_l)}{(p \cdot q)} - \frac{(q \cdot s_h)(p \cdot s_l)}{(p \cdot q)^2} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{7.33}$$

En el caso de polarización longitudinal para el leptón, la sección eficaz diferencial resulta ser

$$\frac{d\sigma}{dx dy d\phi} \sim \frac{MEe^4}{48\pi^2 q^4} \frac{1}{x} \left\{ \langle qq \rangle [y^2 + 2(1-y)\delta] - \frac{3\delta}{ME} H_l s_h^\mu (y k_\mu - q_\mu) \right\}. \tag{7.34}$$

De manera que para las diferentes polarizaciones hadrónicas tenemos los siguientes resultados:

- Blanco no polarizado: $\langle qq \rangle_{unpol} = 1$, $s_h = 0$. En este caso se anula el término dependiente del espín, por lo que

$$\frac{d\sigma}{dx dy d\phi} \Big|_{unpol} \sim \frac{MEe^4}{48\pi^2 q^4} \frac{1}{x} [y^2 + 2(1-y)\delta]. \tag{7.35}$$

- Blanco longitudinalmente polarizado: $\langle qq \rangle_{LP} = 0$, $s_h = (0, H_h M \hat{z})$

$$\left. \frac{d\sigma}{dx dy d\phi} \right|_{LP} = 0. \quad (7.36)$$

- Blanco transversalmente polarizado: $\langle qq \rangle_{TP} = 3/2$, $s_h = M H_h \hat{x}$

$$\left. \frac{d\sigma}{dx dy d\phi} \right|_{TP} \sim \frac{M E e^4}{48 \pi^2 q^4} \frac{1}{x} \left\{ \frac{3}{2} [y^2 + 2(1-y)\delta] - 3\delta(1-y) \frac{M}{|q|} H_l H_h \cos \phi \right\}, \quad (7.37)$$

donde el segundo término es nuevamente subdominante.

Concluimos con las expresiones de las amplitudes de helicidad en este régimen:

$$\begin{aligned} A_{++,++} &\simeq 0 & , & \quad A_{+0,+0} \simeq 3F_1, \\ A_{+0,0+} &\simeq 0 & , & \quad A_{+-,+-} \simeq 0, \\ A_{+-,00} &= O(\sqrt{-t}) \approx 0 & , & \quad A_{+,-,+} = 0, \\ A_{0+,0+} &= 2(\delta - 1)F_1 > 0 & , & \quad A_{00,00} = 3(\delta - 1)F_1 > 0. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Notamos que en este régimen el factor $a_3 = -b_3 + b_2/3$ se transforma en $a_3 = b_2$ a primer orden. Esto es interesante: indica que la función de estructura b_2 caracteriza la amplitud asociada al *doblo salto de helicidad*.

Análisis

En esta sección discutimos los resultados que hemos obtenidos para los mesones escalares y vectoriales y los comparamos con los datos experimentales y las simulaciones disponibles.

Funciones de estructura y sección eficaz diferencial

Comenzamos analizando los resultados para los mesones vectoriales. Las figuras 24, 25 y 26 muestran la forma funcional de las funciones de estructura F_1 , F_2 , b_1 y b_2 para blancos de espín 1 polarizados en función del parámetro de Bjorken, y en el contexto de los modelos de branas D3D7, D4D8 $\overline{D8}$ y D4D6 $\overline{D6}$. En cada caso nos concentramos en los modos más livianos, dados por $\ell = 1, 2, 3$. Los valores que utilizamos en estos gráficos para la constante de normalización están indicados en la siguiente sección, y han sido elegidos en base a los ajustes realizados para los momentos $M_j(F_i)$, definidos en (2.72). Los datos utilizados para realizar estos ajustes, que discutiremos más abajo, provienen de simulaciones (*lattice QCD*).

Observamos que todas las funciones de estructura encontradas presentan un comportamiento similar. En la región de x chico, las diferencias entre los modelos y entre las distintas partículas no son importantes. En la región de x grande todas las funciones toman la forma de campanas invertidas con máximos situados alrededor de $x \simeq 0,6$. Sin embargo, la altura y ubicación exactas del máximo depende del valor de ℓ . La altura máxima de las funciones en esta región se hace cada vez menor al aumentar el valor de ℓ . Este comportamiento es más pronunciado en los modelos D4D8 $\overline{D8}$ y D4D6 $\overline{D6}$.

Podemos comparar estos gráficos con los que se encuentran disponibles en la literatura. Las curvas que encontramos para $F_{1,2}$ tienen una forma similar a la de [72], aunque en dicho trabajo los máximos ocurren alrededor de $x \simeq 0,8$. Los autores analizan la relación $F_2/(2F_1)$, obteniendo un valor aproximadamente constante y cercano a 1. Lo mismo sucede en nuestro caso. Sin embargo,

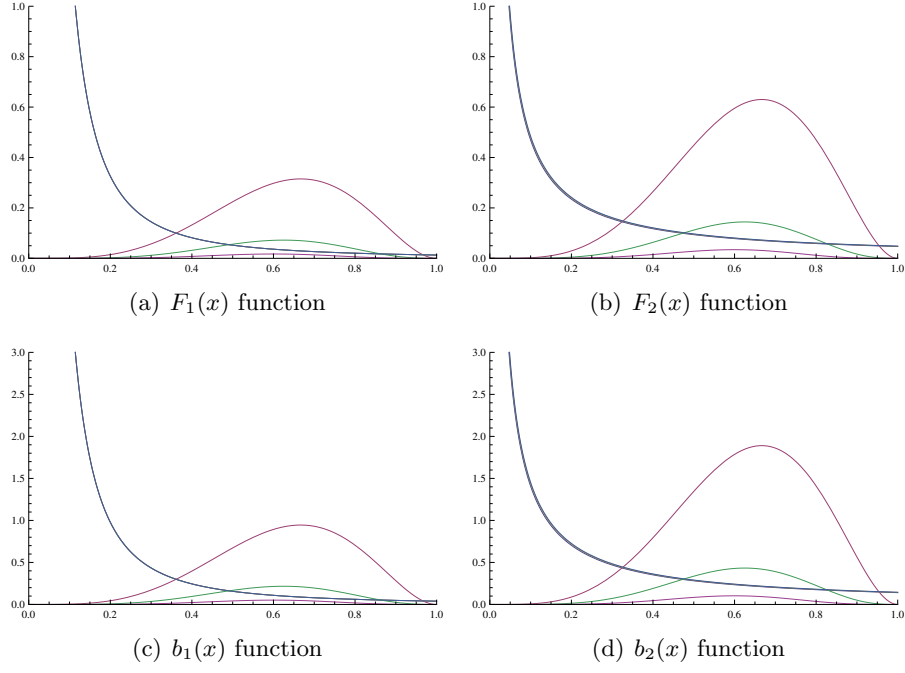


Figura 24: Las funciones de estructura F_1 , F_2 , b_1 y b_2 en términos del parámetro de Bjorken x para los mesones vectoriales con $\ell = 1, 2$ y 3 en el modelo D3D7. Presentamos los resultados tanto del régimen de x pequeño como del de x grande.

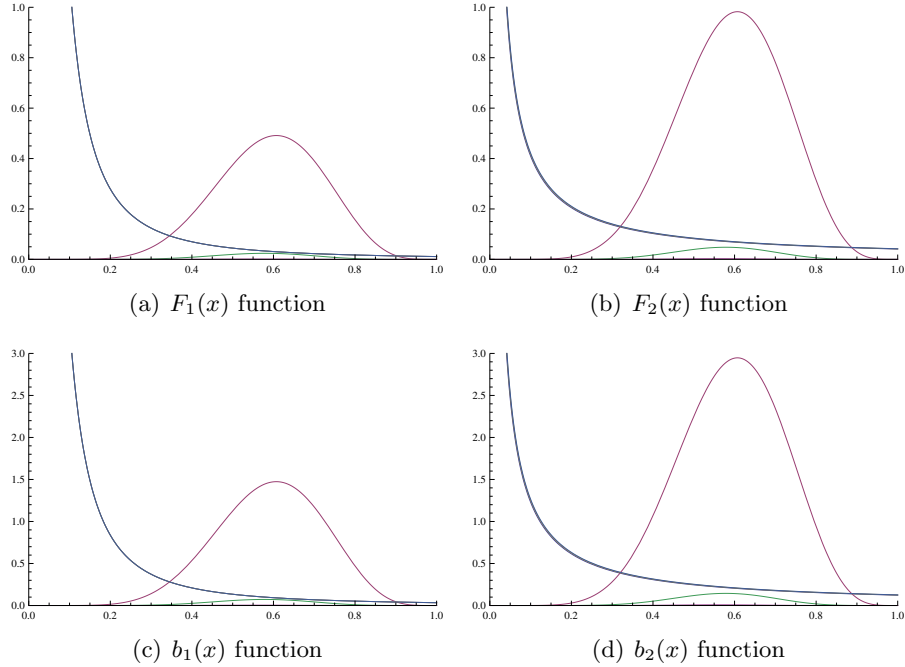


Figura 25: Las funciones de estructura F_1 , F_2 , b_1 y b_2 en términos del parámetro de Bjorken x para los mesones vectoriales con $\ell = 1, 2$ y 3 en el modelo D4D8D8. Presentamos los resultados tanto del régimen de x pequeño como del de x grande.

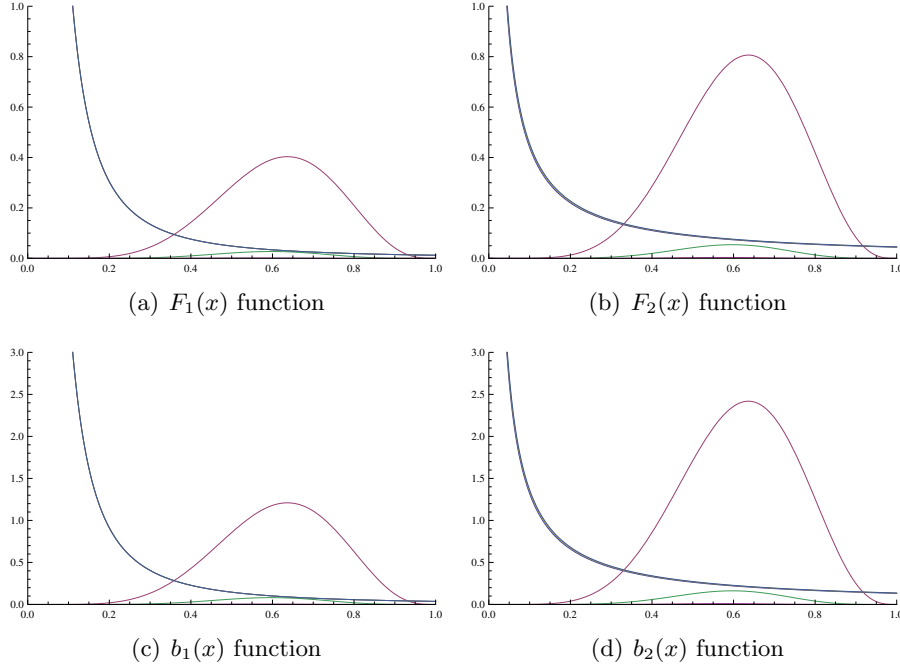


Figura 26: Las funciones de estructura F_1 , F_2 , b_1 y b_2 en términos del parámetro de Bjorken x para los mesones vectoriales con $\ell = 1, 2$ y 3 en el modelo D4D6D6. Presentamos los resultados tanto del régimen de x pequeño como del de x grande.

cabe resaltar que en [72] solamente se presentan cálculos válidos bajo la aproximación de supergravedad. Como hemos visto, estos métodos sólo describen una parte del problema. En efecto, no hay ningún factor x en la entre F_2 y F_1 . Como hemos visto, este factor x se recupera al considerar las contribuciones de los modos excitados de cuerdas.

En cuanto a las secciones eficaces diferenciales, nuevamente la mejor manera de visualizar nuestro resultado hace uso de la separación de regímenes que ocurre de manera natural según los valores que toma x . Presentamos las secciones eficaces diferenciales para el caso de los mesones vectoriales no polarizados como curvas de nivel en el plano (x, y) , primero en la región de x grande y luego en la región de x chico en las figuras 27 y 28, respectivamente, diferenciando además los resultados generados por cada uno de los modelos de branas.

Las áreas más oscuras corresponden a valores menores para la sección eficaz diferencial. En el primer caso, observamos que ésta última toma sus máximos valores cerca de $x \approx 0,5$. Además, las curvas de nivel son más angostas para el modelo de Sakai-Sugimoto.

Comparación con *lattice QCD*

Los momentos están definidos en (2.72) en base a integrales de las funciones de estructura multiplicadas por alguna potencia del parámetro de Bjorken a lo largo de todo el rango físico $0 \leq x \leq 1$. Estos objetos no habían sido calculados anteriormente en este régimen por métodos analíticos debido a la necesidad de conocer las funciones de estructura en todo (o casi todo) el intervalo de integración. Encontramos en estos objetos una herramienta esencial para comparar nuestros resultados con la fenomenología conocida para el DIS con blancos mesónicos. En efecto, los resultados experimentales para las funciones de estructura son muy limitados en el caso de los mesones. La comparación se hace muy complicada, en particular para valores muy pequeños del

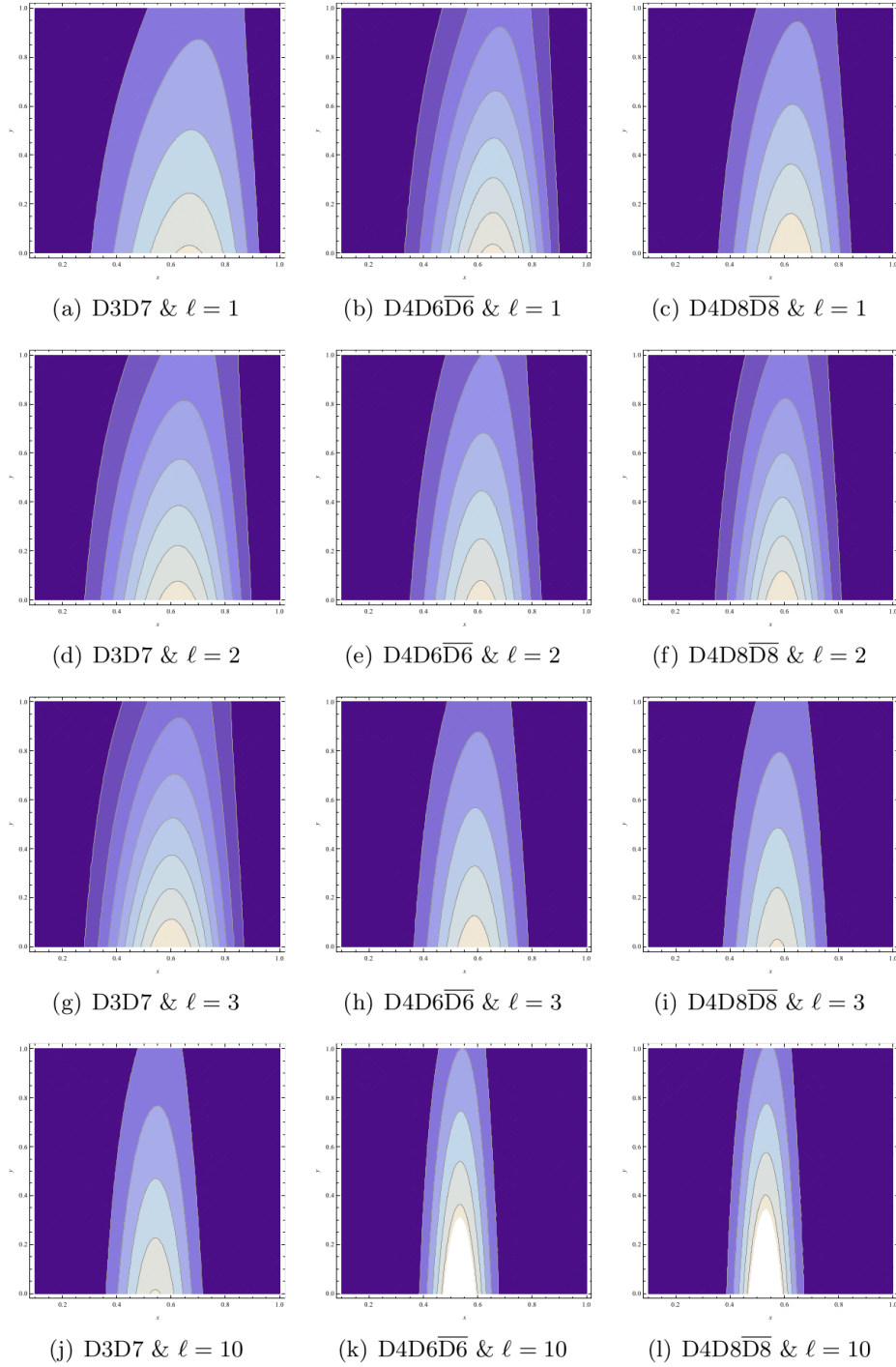


Figura 27: Mapas de líneas de contorno para las secciones eficaces diferenciales del DIS con mesones vectoriales no polarizados como blancos en el régimen $1/\sqrt{\lambda} \ll x < 1$ y para los tres modelos de branas que consideramos. El eje horizontal corresponde al parámetro de Bjorken en el rango $[0, 1]$, mientras que el eje vertical describe la variable $y \in [0, 1]$. Zonas más oscuras corresponden a valores menores para la sección eficaz.

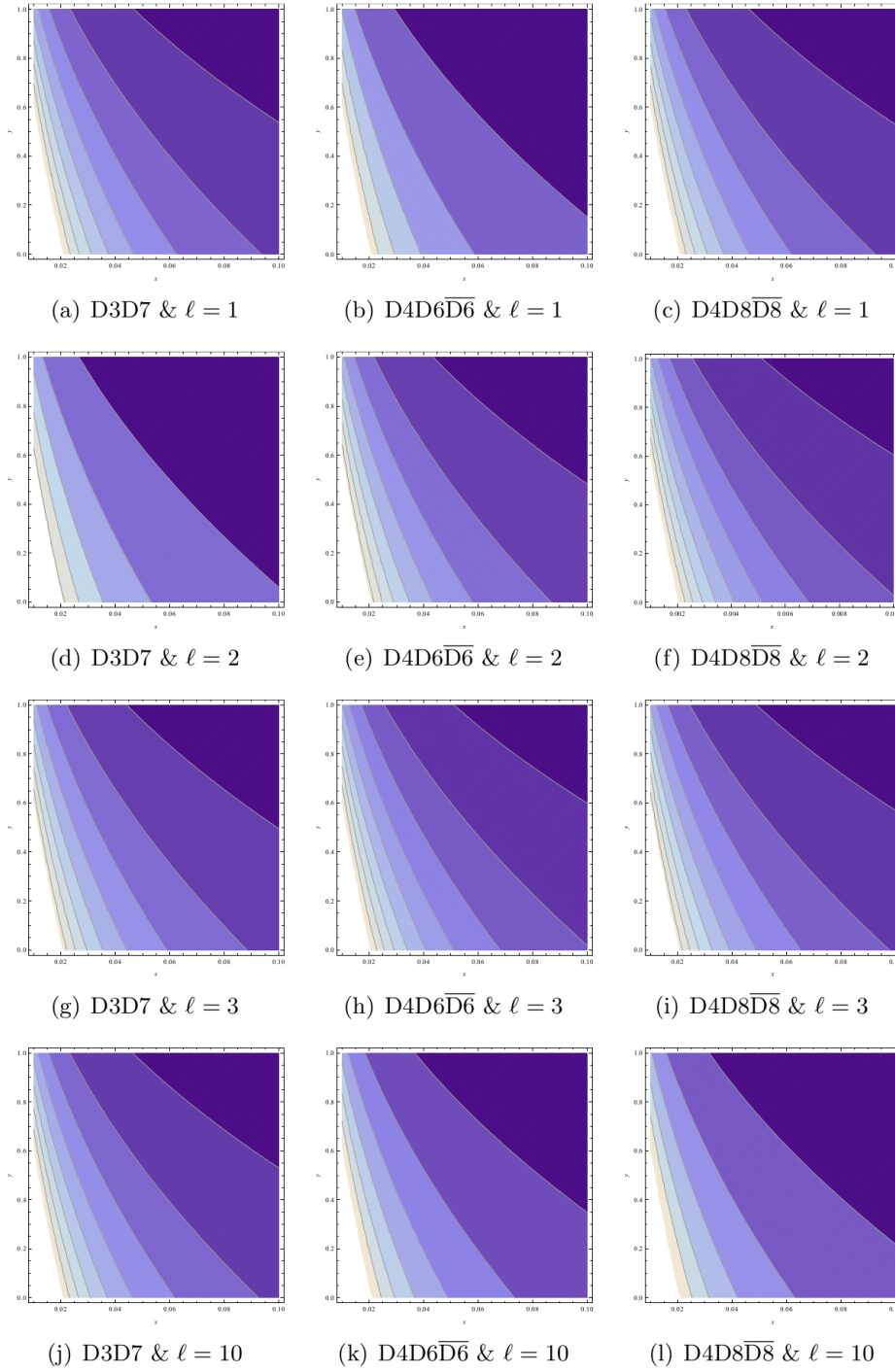


Figura 28: Mapas de líneas de contorno para las secciones eficaces diferenciales del DIS con mesones vectoriales no polarizados como blancos en el régimen $1/\sqrt{\lambda} \ll x < 1$ y para los tres modelos de branas que consideramos. El eje horizontal corresponde al parámetro de Bjorken en el rango $[0,01, 0,1]$, mientras que el eje horizontal describe la variable $y \in [0, 1]$. Zonas más oscuras corresponden a valores menores para la sección eficaz.

parámetro de Bjorken. En el caso más liviano de los mesones escalares, asociado a los piones, han habido estudios importantes como por ejemplo los de [73-76]. Sin embargo, todas estos trabajos concentran sus investigaciones en las funciones de valencia asociadas a experimentos de Drell-Yan, cuyos datos están restringidos a la región paramétrica $x \geq 0,2$. Notar que en nuestros cálculos el pión corresponde al modo $\ell = 1$, ya que se trata del modo pseudo-escalar más liviano⁴. En principio, estos resultados podrían compararse con los nuestros en la región de supergravedad. El problema es que al hacerlo estaríamos despreciando el crecimiento en la región $x \rightarrow 0$, que ha sido destacado anteriormente por ejemplo en [77], donde el autor propone un modelo en las que las funciones de distribución partónicas (a partir de las cuales se construyen las de estructura, por ejemplo en el modelo de partones) tienen dos términos, uno de los cuales está asociado al *mar de partones* con fracciones de momento pequeñas y resulta divergente para $x \rightarrow 0$. Este tipo de divergencias aproximadas han aparecido también en la contribución piónica a la función de estructura b_1 del deuterón [78]. Es importante tener en cuenta que ambos comportamientos son importantes a la hora de analizar los momentos.

En consecuencia, resulta interesante realizar un estudio cuantitativo para determinar si nuestras funciones pueden generar valores fenomenológicamente aceptables para los momentos. Simulaciones realizadas en el marco de *lattice QCD* permiten comparar con los primeros momentos asociados a las funciones universales $F_{1,2}$ de los mesones escalares y vectoriales más livianos: el pión y el mesón ρ . En un primer momento, presentamos la comparación entre nuestros resultados y las simulaciones presentadas en [79, 80] (referimos al lector interesado en los detalles de la simulación al trabajo original y a algunos comentarios realizados en [7]). Tratándose del caso escalar, nos restringimos a los momentos de F_2 debido a que en el límite estrictamente planar tenemos $F_1 = 0$ por razones de simetría. Para calcular nuestros momentos integramos los resultados para F_2 entre $x = 0,0001$ y $x = 0,1$, y entre $x = 0,1$ to $x = 1$ según la región paramétrica relevante⁵. Las funciones que obtuvimos tienen un único factor multiplicativo global (que depende por ejemplo de q^2 , Λ y λ) que utilizamos como parámetro libre para realizar el ajuste con los datos para los momentos $M_i(F_2)$ with $i = 1, 2, 3$ de [79]. Estos valores están presentados en la tabla 7.3 junto con nuestros resultados. Las constantes asociadas al mejor ajuste están dadas explícitamente en [7]. Encontramos discrepancias con respecto a las simulaciones de hasta 10 % en el caso del pión. Es importante tener en cuenta que en el contexto de la expansión $1/N$ este tipo de discrepancias suelen ser del orden del 30 %, de manera que los valores que obtuvimos están dentro del rango que hubieramos esperado. A modo de ejemplo, recordamos que este tipo de comparaciones entre resultados obtenidos a partir de la dualidad AdS/CFT (en particular los modelos *bottom-up* de AdS/QCD) con los datos experimentales asociados con masas y tasas de decaimiento mesónicas han arrojado resultados con un error del orden del 5 % [81, 82], mientras que para los cálculos más complicados como los que describen el decaimiento de los kaones (asociados al cálculo de funciones de correlación de cuatro puntos como en el caso del DIS) las discrepancias son cercanas al 30 % [83, 84].

Es posible entender un tanto más intuitivamente el tipo de comparaciones que estamos realizando en base a las contribuciones a los momentos asociados a cada una de las regiones paramétricas. En efecto, como dijimos más arriba resulta tentador asociar la región de x chico con el concepto de *mar de quarks*, relacionado con los partones que transportan una fracción del momento total del hadrón sumamente pequeña. En este contexto también podemos identificar las contribuciones provenientes de valores de x mayores a 0,1-0,2 con las distribuciones de los *quarks de valencia*, que son los que transportan una fracción considerable del momento total. En la tabla I de [85] se indica

⁴Las propiedades con respecto a transformaciones de paridad se analizan a partir de los armónicos esféricos.

⁵Si bien estos límites fueron seleccionados *ad-hoc*, verificamos explícitamente que el análisis de los resultados finales sea independiente de los mismos.

Modelo / Momento	$M_1(F_2)$	$M_2(F_2)$	$M_3(F_2)$
Lattice QCD	0.27	0.13	0.074
D3D7	0.2708	0.1161	0.0803
Error porcentual	-0.3	10.7	-8.5
D4D8 $\overline{\text{D8}}$	0.2705	0.1221	0.0779
Error porcentual	-0.2	6.1	-5.2
D4D6 $\overline{\text{D6}}$	0.2706	0.1191	0.0791
Error porcentual	-0.2	8.4	-6.9

Tabla 7.3: Comparación entre nuestros resultados y los obtenidos a partir de simulaciones de *lattice QCD* en [80] para los primeros momentos de la F_2 del pión (para ser precisos, los valores presentados en esta tabla y en la siguiente constituyen el promedio de los resultados presentados en las referencias correspondientes. Además, omitimos los errores en estos últimos resultados.

que tanto en los resultados provenientes de los experimentos como en los que han sido obtenidos a partir de simulaciones la contribución del primer tipo de quarks es importante solamente para el primero de los momentos, mientras que para el segundo y el tercero la totalidad del valor final proviene casi exclusivamente del segundo tipo de quarks. Este comportamiento es exactamente análogo al de las funciones de estructura que hemos obtenido y a la separación natural que surge entre ambas regiones paramétricas según el valor del parámetro de Bjorken x (asociado a la energía del CM). En la tabla 7.4 presentamos de manera análoga los resultados obtenidos para los ajustes asociados a los momentos de la función F_1 en el caso del mesón vectorial ρ . Todas las discrepancias encontradas son menores al 18,5 % para las funciones relacionadas con el mejor ajuste posible. Podemos visualizar los resultados obtenidos en los distintos ajustes a partir de las figuras 29 y 30.

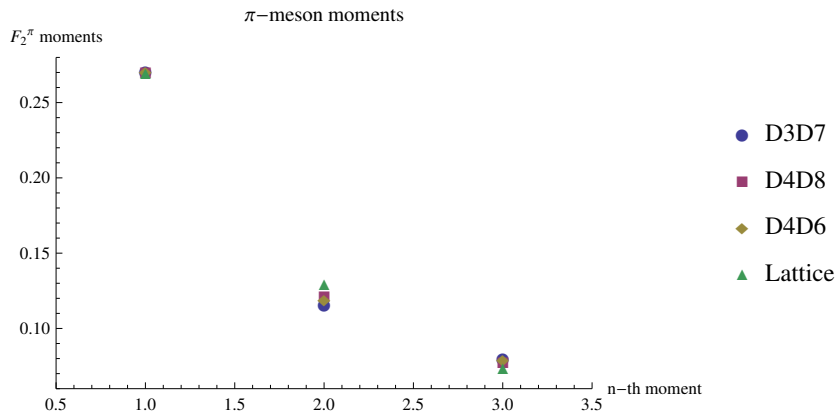


Figura 29: Los tres primeros momentos de la función de estructura F_2 en el caso del mesón escalar π para los valores obtenidos a partir de los ajustes. Presentamos nuestros resultados en comparación con los de [79], obtenidos en el ámbito de *lattice QCD*. En todos los casos omitimos los errores.

Si bien no presentamos en detalles los valores obtenidos para los parámetros de ajuste (ver [7]), es interesante resaltar que la constante asociada a la región de x chico es en todos los casos

Modelo / Momento	$M_2(F_1)$	$M_3(F_1)$	$M_4(F_1)$
Lattice QCD	0.1743	0.074	0.035
D3D7	0.1753	0.060	0.039
Error porcentual	-0.6	18.5	-12.8
D4D8 $\overline{\text{D8}}$	0.1752	0.062	0.040
Error porcentual	-0.5	16.4	-11.8
D4D6 $\overline{\text{D6}}$	0.1754	0.060	0.040
Error porcentual	-0.6	18.8	-13.0

Tabla 7.4: Comparación entre nuestros resultados y los obtenidos a partir de simulaciones de *lattice QCD* en [79] para los primeros momentos de la F_1 del mesón ρ . Omitimos los errores en estos últimos resultados.

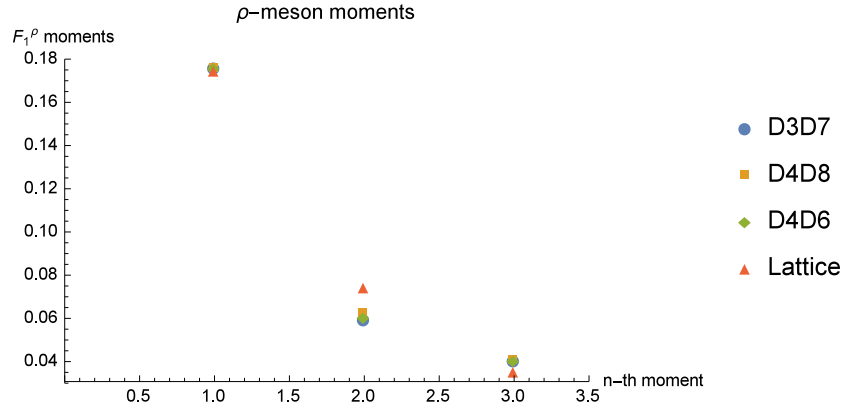


Figura 30: Los tres primeros momentos de la función de estructura F_1 en el caso del mesón vectorial ρ para los valores obtenidos a partir de los ajustes. Presentamos nuestros resultados en comparación con los de [79], obtenidos en el ámbito de *lattice QCD*. En todos los casos omitimos los errores.

algunos órdenes de magnitud menor en comparación con la de la región de x grande. Este fenómeno es totalmente coherente con nuestros resultados: si bien la dependencia en Λ^2/q^2 es la misma en ambos regímenes, para la primera siempre obtuvimos un factor $\lambda^{-1/2}$ extra. En el régimen en el que los cálculos holográficos son válidos, este factor necesariamente es pequeño.

Otro comentario interesante proviene de la comparación entre nuestros resultados analíticos y los modelos fenomenológicos propuestos en la literatura para las distribuciones de valencia en el caso del pión. En [85, 86] fueron propuestas diversas formas funcionales que permiten reproducir los datos disponibles, y si bien existen algunas diferencias entre ellos, existe un punto en común: en todos los modelos las funciones de distribución se comportan como $(1-x)^2$ en la región $x \rightarrow 1$. Es más, en [87] los autores muestran en base a los datos que las distribuciones de quarks de valencia necesariamente deben comportarse como $(\sim (1-x)^{2 \pm 0.1})$. Este comportamiento es el que encontramos en los resultados obtenidos a partir del modelo D3D7.

Es importante enfatizar el hecho de que si bien hemos intentado presentar un análisis cuantitativo de nuestros resultados holográficos, este tipo de estudios deben interpretarse con cierto cuidado. Entre otras cosas, esto se debe a que las teorías que podemos describir precisamente a

partir de los modelos de gravitatorios (o de cuerdas) duales en el marco de la correspondencia AdS/CFT no son idénticos a QCD, incluso en el límite planar. Se trata de modelos interesantes debido a que comparten ciertas de sus características (parte del espectro mesónico, el fenómeno de confinamiento de color, la ruptura de la simetría quiral y otras propiedades, según el caso). Aún así, el nivel de acuerdo que hemos obtenido a partir de nuestros resultados y de un ajuste numérico muy simple resulta interesante, y de hecho no es totalmente inesperado puesto que han existido ejemplos previos en los que los resultados han sido similares o incluso mejores. Por ejemplo, el nivel de acuerdo entre los resultados de las simulaciones [88] para el parámetro de transporte de η/s del plasma en teorías de Yang-Mills y los resultados obtenidos en [89, 90] a partir de la dualidad AdS/CFT es impactante⁶. Está claro que estos cálculos son válidos en el régimen de $N \gg \lambda \gg 1$, pero si uno insiste en usar los valores realistas $N = 3$ y $\lambda \approx 15$ se obtiene el resultado que acabamos de mencionar.

7.3. Correcciones $1/N$

En esta sección presentamos algunos detalles de cálculo de la contribución a un *loop* a las funciones de estructura de los mesones escalares en el régimen de supergravedad utilizando las técnicas descritas en el capítulo 6. Luego, analizamos la manera en que estos resultados complementan algunos de los aspectos fenomenológicos discutidos en la sección anterior a partir de la contribución dominante en el límite $N \rightarrow \infty$. Una vez más, nos concentraremos en describir lo que sucede en el modelo D3D7.

Interacciones mesónicas

Lo primero que necesitamos es extender la expansión del Lagrangiano DBI a ordenes cúbico y cuártico en las perturbaciones para incluir las interacciones entre los mesones holográficos y demás modos de cuerdas abiertas sobre la D7-brana. Para esto, parametrizamos el pullback de la métrica según $P[G]_{ab} = P[G]_{ab}^{(0)} + h_{ab} + X_{ab}$ y utilizamos la expansión (1.32) para la matriz original $M_{ab} = P[G]_{ab}^{(0)}$ y la perturbación $m_{ab} = h_{ab} + X_{ab} + \tilde{F}_{ab}$. En estas expresiones, $h_{ab} = \sum_i h_{ab}^{(i)}$, con $i = 1, \dots, 4$ describe orden a orden las perturbaciones de la métrica inducida proporcionales a $\delta_a^M \delta_b^N$, mientras que $X_{ab} = \sum_i X_{ab}^{(i)}$ está asociada con las fluctuaciones en las direcciones transversales (en términos de φ y χ). Finalmente, los modos vectoriales están contenidos en $\tilde{F}_{ab} = 2\pi\alpha' F_{ab}$. En términos de estas variables, las interacciones están descritas por los siguientes Lagrangianos efectivos.

Lagrangiano efectivo a tercer orden

Teniendo en cuenta que tanto $X^{(1)}$ como la traza de $h^{(1)}$ se anulan, los únicos términos no nulos están dados por

$$L_3 = -\mu_7 \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} (X^{(3)} - h^{(1)} \cdot X^{(2)}) + \frac{1}{2} h^{(1)} \cdot \tilde{F} \cdot \tilde{F} \right]. \quad (7.39)$$

Podemos reescribir a L_3 en términos de las perturbaciones:

⁶ Aquí η es la viscosidad de corte del plasma y s es la densidad de entropía.

$$L_3 = -\mu_7(2\pi\alpha')^3\sqrt{-g} \left[\frac{R^4 L}{(\rho^2 + L^2)^3} \phi(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi) \eta^{\mu\nu} + \frac{L}{\rho^2 + L^2} \phi(F_{aI} F^{aI} - F_{a\mu} F^{a\mu}) \right]. \quad (7.40)$$

Interacciones mixtas

Más allá de las interacciones entre cuerdas abiertas, necesitamos incluir los acoplamientos de los distintos modos con los gravitones (que para ciertas polarizaciones incluyen al *fotón* dual del DIS). Llamaremos H_{ab} a los gravitones que se propagan sobre la brana, de manera tal que estas perturbaciones también deben ser incluida en el $\delta P[G]^H$. Asimismo, nos quedaremos con los vértices que cuentan únicamente con uno de estos modos. En este contexto, obtenemos

$$L_{3(H)} = -\mu_7\sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}H^{(3)} - \frac{1}{2}H^{(2)} \cdot h^{(1)} - \frac{1}{2}H^{(1)} \cdot h^{(2)} + \frac{1}{2}H^{(1)} \cdot h^{(1)} \cdot h^{(1)} + \frac{1}{4}H^{(1)}X^{(2)} - \frac{1}{2}H^{(1)} \cdot X^{(2)} + \frac{1}{2}H^{(1)} \cdot \tilde{F} \cdot \tilde{F} - \frac{1}{8}H^{(1)}(\tilde{F} \cdot \tilde{F}) \right]. \quad (7.41)$$

Utilizando el *Ansatz* asociado al DIS $H_{mi} \sim A_m K_i$, $L_{3(H)}$ se transforma en

$$L_{3(H)} = -\mu_7\sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2}H^{(1)} \cdot X^{(2)} + \frac{1}{2}H^{(1)} \cdot \tilde{F} \cdot \tilde{F} \right]. \quad (7.42)$$

Estos términos incluyen en particular los acoplamientos del gravitón con los mesones escalares y vectoriales que utilizamos en la sección anterior en el régimen de teoría de cuerdas.

Diagrama dominante

En el caso de los mesones escalares es posible clasificar los posibles diagramas a un *loop* a partir de un análisis basado en una expansión en potencias de (Λ^2/q^2) muy similar al que realizamos en el caso del glueball. La diferencia principal radica en el espectro bosónico de las fluctuaciones de la brana, presentado en la tabla 7.5. Además, es importante tener en cuenta que al normalizar canónicamente los distintos modos observamos que los vértices cúbicos de cuerdas abiertas son proporcionales a $1/N$ en vez de $1/N^2$, reflejando el hecho de que los mesones *quarks* están en la representación fundamental de $SU(N)$. En cambio, las interacciones que incluyen una cuerda cerrada como puede ser un gravitón generan contribuciones proporcionales a $1/N^2$, de manera que están suprimidos en mayor medida.

En concreto, el proceso dominante para valores grandes de q es análogo al que estudiamos en capítulo 6. En este caso, el proceso de fraccionamiento del hadrón inicial se da sobre la hoja de mundo de la brana y enteramente en términos de modos de cuerdas abiertas. El papel del escalar s como modo asociado a la posibilidad de minimizar la potencia del factor de supresión en la amplitud final es asumido por un escalar un tanto particular, denominado ϕ_l^- . En efecto, para $l = 1$ este modo tiene $\Delta = 2$ como sucedía para el escalar s . En conclusión, el diagrama que analizaremos es el que está descripto en la figura 31.

En las siguientes sub-secciones analizamos con cierto detalle las características de los vértices UV e IR involucrados en este proceso. Recordamos que este último está asociado al fraccionamiento inicial del hadrón, mientras que le anterior describe la interacción con el campo de gauge producido por la inserción de la corriente del FCS en el borde de AdS . Como puede verse, en términos del DIS este proceso se corresponde con un diagrama con un estado final de dos partículas.

Campo	Espín en 5D	Compuesto por	$\Delta(l)$	$SU(2) \times SU(2)$
φ, χ	scalars	ϕ, χ	$l + 3, l \geq 0$	$(\frac{l}{2}, \frac{l}{2})$
B_μ	vector	B_μ^{II}	$l + 3, l \geq 0$	$(\frac{l}{2}, \frac{l}{2})$
ϕ_I^-	scalar	B_i^I	$l + 1, l \geq 1$	$(\frac{l+1}{2}, \frac{l-1}{2})$
ϕ_I^+	scalar	B_i^I	$l + 5, l \geq 1$	$(\frac{l-1}{2}, \frac{l+1}{2})$
ϕ_{III}	scalar	$B_{i,z}^{III}$	$l + 3, l \geq 1$	$(\frac{l}{2}, \frac{l}{2})$

Tabla 7.5: Características principales del espectro bosónico sobre la D7-brana. El índice entero l indica la representación de $SO(4) \sim SU(2) \times SU(2)$ del modo correspondiente y define su masa de KK.

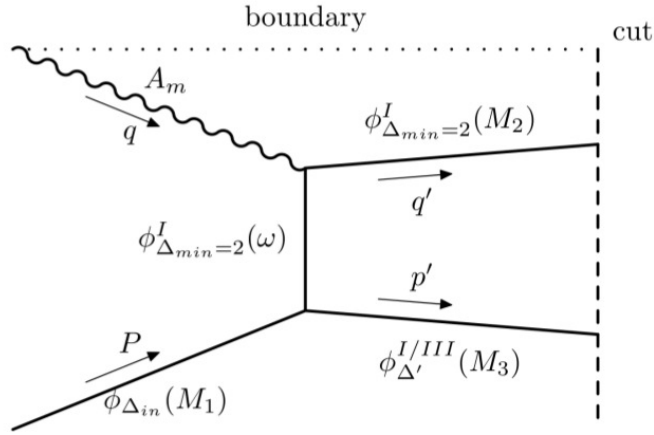


Figura 31: Diagrama de Witten correspondiente al (lado izquierdo del) proceso dominante a un *loop* en el caso de los mesones escalares.

Vértice UV

El vértice que aparece en la parte superior del diagrama de la figura 31 está asociado a la interacción entre el modo intermedio ϕ_I^- y el campo de gauge A_m . Dado que en el language de 8d el ϕ_I corresponde en realidad a un modo vectorial, la forma explícita del vértice está contenido en el segundo término de la eq. (7.42). Es fácil ver que, una vez más, en la interacción con A_m no hay ninguna mezcla con otros modos, sino que simplemente tenemos una interacción con la corriente conservada tipo $S_{A\phi_I\phi_I} \sim \int A_m J_{\phi_I}^m$. Notemos que el incluso el modo más liviano, que es el que nos interesa, tiene carga no nula pues corresponde a $l = 1$. Por lo tanto, la interacción toma la forma

$$S_{A\phi_I\phi_I} = -\frac{\mu_7}{N} (2\pi\alpha')^2 \int d^4x \, d\rho \, d\Omega_3 \, \sqrt{-g} \, \frac{1}{2} H^{(1)} \cdot F^I \cdot F^{*I}, \quad (7.43)$$

con el gravitón polarizado de la manera usual en el contexto del DIS y

$$F_{\mu\nu}^I = 0, \quad F_{\mu z}^I = 0, \quad F_{\mu i}^I = \partial_\mu B_i^I, \quad F_{zi}^I = \partial_z B_i^I. \quad (7.44)$$

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned}
H^{(1)} \cdot F^I \cdot F^{*I} &= g^{bc} g^{de} g^{af} h_{ab} F_{cd}^I F_{ef}^{*I} \\
&= A^\mu v^i g^{de} F_{\mu d}^I F_{ei}^{*I} + A^\mu v^i g^{de} F_{id}^I F_{e\mu}^{*I} \\
&= A^\mu v^i \partial_\mu B_I^j (\partial_j B_i^I - \partial_i B_j^I) + A^\mu v^i \partial_\mu B_I^{*j} (\partial_j B_i^I - \partial_i B_j^I) \\
&= - (A^\mu \partial_\mu B^j v^i \partial_i B_j^* + A^\mu \partial_I B^{*j} v^i \partial_i B_j) .
\end{aligned} \tag{7.45}$$

La evaluación on-shell del vértice requiere insertar las soluciones correspondientes a cada modo y realizar las integrales en las direcciones espacio-temporales. Como siempre, la integral en las direcciones planas x^μ simplemente indica que el cuadri-momento se conserva, y las integrales angulares pueden simplificarse considerando autoestados de carga. Rescribiendo todo en términos de $z = \frac{R^2}{\rho}$, vemos que

$$\begin{aligned}
S_{A\phi_I\phi_I} &= i \mathcal{Q} \frac{\mu_7}{N} 2 (\pi\alpha')^2 \int d^4x \, dz \, d\Omega_3 \sqrt{-g} A^m(z) \times \\
&\quad (B^{Ii}(z, \Omega) \partial_m B_i^{*I}(z, \Omega) - B_i^{*I}(z, \Omega) \partial_m B^{Ii}(z, \Omega)) .
\end{aligned} \tag{7.46}$$

Recordemos que los modos tipo I_\pm son ortogonales entre sí. En consecuencia, en términos de z y de las funciones de Bessel el resultado que obtenemos para la contribución del vértice UV es exactamente el mismo que en el caso del glueball. La forma final es la siguiente:

$$S_{A\phi_I\phi_I} = i \mathcal{Q} \frac{\mu_7}{N} 2 (\pi\alpha')^2 \int d^4x \, dz \sqrt{-g} A^m(z) (\phi_I(z, \Omega) \partial_m \phi_I^*(z) - \phi_I^*(z) \partial_m \phi_I(z)) , \tag{7.47}$$

donde $\phi^I = \sqrt{\Lambda\omega} e^{i(P-p_\omega)\cdot x} z^2 J_{\Delta_\omega-2}(\omega z)$ y $\phi^{I*} = \sqrt{\Lambda M_3} e^{-iq'\cdot x} z^2 J_{\Delta_\omega-2}(M_3 z)$.

Vértice IR

Las particularidades de los modos tipo I hacen que el fraccionamiento del hadrón sea un tanto distinto que en el caso de las cuerdas cerradas. El vértice relevante tiene que acoplar uno de estos modos con el mesón escalar inicial φ , por lo que sólo puede provenir del segundo término de la ecuación (7.39). En adelante trabajaremos suponiendo que L es pequeño pero no nulo⁷, de manera que

$$L_{\phi FF} = \frac{\mu_7}{N^{3/2}} (2\pi\alpha')^3 \sqrt{-g} \frac{L}{\rho^2} \phi (F_{IJ} F^{IJ} - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) .$$

Uno de los modos vectoriales es del tipo I, por lo que en particular tiene $F_{\mu\nu}^I = 0$. Por lo tanto, sólo sobreviven los acoplamientos proporcionales a $F_{IJ} F^{IJ}$, de modo que el estado saliente (cuya masa AdS denominamos nuevamente M_3) no puede ser del tipo II. En esta sección consideramos

⁷Notamos que en el caso conforme, i.e. $L = 0$, este vértice no está presente. Aquí analizamos una situación en la que la desviación con respecto al caso conforme es nula con el objetivo de poder aproximar las funciones hipergeométricas que aparecen en las soluciones por funciones de Bessel. En términos efectivos podemos decir que estamos extendiendo la región en la que podemos aproximar la geometría por una de la forma $\text{AdS}_5 \times S^3$.

la posibilidad de que también se trate de un modo tipo I⁸, en cuyo caso obtenemos

$$S_{\phi\phi_I\phi_I}^{I\pm} = -\frac{\mu_7}{N^{3/2}}(2\pi\alpha')^3 2L C \int d^4x e^{i(p_1+p_\omega-p_3)x} \left(\int_0^{\frac{1}{\Lambda}} dz z^2 J_{\Delta_{\text{in}}-2}(M_1 z) J_0(\omega z) J_{\Delta_3-2}(M_3 z) I_1 \right. \\ \left. + \int_0^{\frac{1}{\Lambda}} dz J_{\Delta_{\text{in}}-2}(M_1 z) \partial_z(z^2 J_0(\omega z)) \partial_z(z^2 J_{\Delta_3-2}(M_3 z)) I_2 \right), \quad (7.48)$$

donde Δ_{in} y Δ_3 corresponden a las dimensiones de los modos on-shell entrantes y salientes, respectivamente, y C contiene las constantes de normalización de las distintas soluciones. Además, las integrales angulares denominadas I_1 e I_2 están dadas por

$$I_1 = \int d\Omega_3 \left(\nabla_i \vec{Y}^{l_3} \cdot \nabla^i \vec{Y}^{l_1} Y^{l_{\text{in}}} - \nabla_i Y_j^{l_3} \cdot \nabla^j Y^{1,i} Y^{l_{\text{in}}} \right), \quad I_2 = \int d\Omega_3 \vec{Y}^{l_3} \cdot \vec{Y}^{l_1} Y^{l_{\text{in}}}. \quad (7.49)$$

Utilizando la identidad

$$\pm(l+1)\epsilon_{ilm} Y_i^{l,\pm} = \epsilon_{ilm} \epsilon_{ijk} \nabla_j Y_k^{l,\pm} = \nabla_l Y_m^{l,\pm} - \nabla_m Y_l^{l,\pm}, \quad (7.50)$$

podemos expresar una de las dos en términos de la otra según

$$I_1 = \int d\Omega_3 Y^{l_{\text{in}}} \nabla^i Y^{l'',\pm,j} \left(\nabla_i Y_j^{1,-} - \nabla_j Y_i^{1,-} \right) = \mp 2(l''+1) I_2. \quad (7.51)$$

Esta integral puede realizarse explícitamente. El único aspecto relevante del resultado radica en que restringe los posibles valores que puede tomar el índice l_3 del modo saliente (la proyección m_3 está fija por la conservación de la carga). Al sumar sobre los estados intermedios será necesario sumar sobre estos valores.

Funciones de estructura

En lo que respecta al cálculo de las funciones de estructura, los pasos a seguir son los mismos que hemos descrito en detalle en el capítulo 6, e involucran el mismo tipo de aproximaciones. Nuevamente obtenemos una función F_1 subdominante, mientras que el resultado final para la función de estructura longitudinal está dado por la siguiente expresión:

$$F_L(x, q^2) = \text{Cte} \times \frac{1}{N} \frac{M_1^2}{q^2} x^3 (1-x)^4 (1+2x(2+5x)). \quad (7.52)$$

Este resultado provee la contribución dominante para un valor genérico de x . Sin embargo, es importante resaltar que al acercarnos a $x \rightarrow 1$ esto dejará de ser cierto. En este régimen cercano a la dispersión elástica aparecen otras contribuciones suprimidas por potencias de L pero que decaen solamente como $(1-x)^2$. Recuperar este comportamiento es importante por las razones fenomenológicas descritas anteriormente.

⁸La otra posibilidad tiene que ver con que el modo saliente sea del tipo III. Analizamos esta variante en el apéndice B de [9], y donde encontramos que la contribución final es en todo punto análoga a la que obtendremos aquí. Como nos interesa únicamente la dependencia funcional de las funciones de estructura con respecto a x y q^2 , simplemente habrá que sumar esta contribución, por lo que no hace falta considerarla en detalle aquí.

7.3.1. Consecuencias fenomenológicas

Antes de enfocarnos en las comparaciones con la fenomenología es importante recordar la interpretación del resultado que acabamos de obtener en (7.52). En primer lugar, hemos obtenido la misma supresión en (Λ^2/q^2) que en el proceso a un *loop* correspondiente al glueball. En ese caso este comportamiento era esperable a partir del análisis realizado del lado de la teoría de campos en base al OPE de las dos corrientes (2.73): la potencia estaba asociada a la menor dimensión conforme de la teoría $\Delta_{\min} = 2$ (en realidad, el *twist* mínimo de los operadores cargados). La interpretación dual estaba clara, pues tenía que ver con el fraccionamiento del hadrón inicial, prohibido en el límite $N \rightarrow \infty$, y la posterior propagación de un modo liviano del escalar s . Lo más intuitivo es pensar en esta contribución como una corrección al resultado a nivel árbol, aunque luego vimos que cuando

$$q^2 > \Lambda^2 N^{2/(\tau_Q - \tau_{\min})}, \quad (7.53)$$

la supresión en $1/N^2$ para valores grandes pero finitos de N se vuelve comparable con la que induce el factor $(\Lambda^2/q^2)^{\Delta_{in}-1}$ presente en el diagrama original. Por lo tanto, para valores mayores de q la amplitud a un *loop* no constituye una corrección sino la principal contribución al proceso de DIS. La interpretación es la misma en el caso mesónico. En particular, el valor de Δ_{\min} se mantiene en el ámbito de los modos de cuerdas abiertas, razón por la cual obtenemos en (7.52) el mismo comportamiento en lo que respecta a la dependencia en q^2 . La principal diferencia en comparación con el caso sin *loops* radica en que debido a que estamos considerando materia en la representación fundamental del grupo de gauge, por lo que obtenemos un factor relativo $1/N$ en lugar de $1/N^2$. Nuevamente observamos la no conmutatividad entre los límites de q^2 grande y $N \rightarrow \infty$. En el análisis a continuación desarrollaremos la comparación con la fenomenología suponiendo que estamos en el régimen en el que (7.52) representa la contribución dominante. En cuanto a la dependencia en x de nuestro resultado para F_L , el comportamiento que obtenemos no depende explícitamente del índice l_{in} , excepto en la constante de normalización. Como en el caso del glueball esto representa una diferencia esencial con respecto al resultado del caso planar.

Hemos visto que el mesón escalar más liviano corresponde al caso del pión. En lo que sigue estudiamos como se modifican los ajustes que realizamos en la sección 7.1, principalmente comparando con los resultados de las simulaciones para el momento de la función de estructura F_2 . Notemos que, según hemos obtenido, en este régimen tenemos $F_1 \approx 0$, de manera que $F_2 \approx F_L$. Por otro lado, el hecho de que estemos analizando los primeros momentos indica que es importante considerar la contribución proveniente de régimen de teoría de cuerdas, que a valores pequeños de x . No hemos calculado la corrección a un *loop* en este régimen, pero supondremos que el comportamiento en términos de x es el mismo que en la contribución a nivel árbol, es decir, que tenemos $F_L \approx F_2 \sim x^{-1}$. El argumento es el siguiente: hemos hecho incapié en que, al menos en lo que tiene que ver con el parámetro de Bjorken, la modificación esencial introducida en (7.52) con respecto al resultado anterior está dado por el hecho de que, como función de x , la función de estructura longitudinal ya no depende del Δ_{in} asociado al hadrón inicial. Pues bien, esto ya era el caso para el régimen de $x \ll \lambda^{-1/2}$. Por lo tanto, esperamos que en este régimen la introducción de la primera corrección en la expansión $1/N$ no genere una modificación sustancial en el comportamiento de las $F_i(x)$. Notemos que esta corrección podría ser considerada a partir del segundo orden en la aproximación eikonal. Si bien aún no hemos realizado este cálculo, constituye uno de nuestros pasos a seguir. Igualmente, cabe resaltar que en este sentido nuestro interés es principalmente teórico: para los momentos $M_n(F_2)$ con $n \geq 2$ la contribución de esta región paramétrica se vuelve cada vez más irrelevante.

Presentamos en la figura 32 una comparación entre los gráficos de las funciones de estructura F_2 que hemos obtenido en el régimen planar (la curva más clara) y considerando los procesos a un

loop en el límite de $q^2 \gg \Lambda^2$ (la curva más oscura). Para realizar estos gráficos las escalas fueron seleccionadas a partir de los respectivos ajustes.

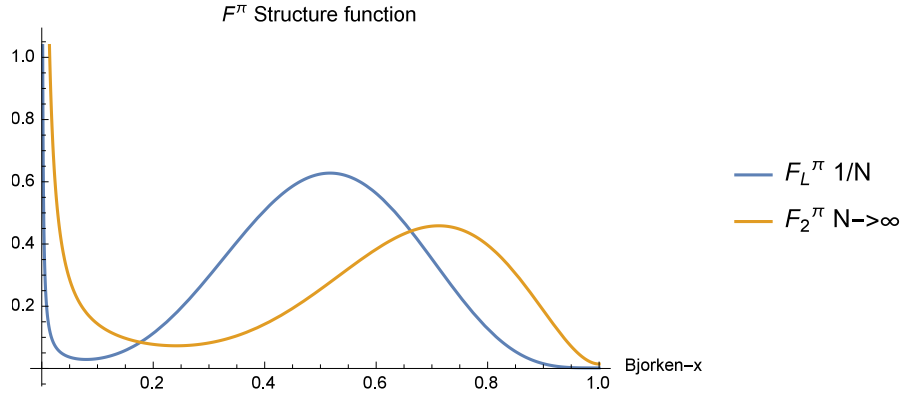


Figura 32: Los dos resultados obtenidos para la F_2 del pión como función del parámetro de Bjorken x a partir del modelo D3D7.

Podemos resaltar dos aspectos interesantes a partir de esta figura. En primer lugar, y como veremos a continuación, la importancia de la región de teoría de cuerdas se vuelve menor en el caso correspondiente a estados salientes de dos partículas. En segundo lugar, vemos que el pico de la campana invertida correspondiente al régimen de supergravedad se desplaza hacia la izquierda hacia valores cercanos a $x \approx 0,5$. Los (pocos) resultados experimentales asociados al caso del pión y de los mesones en general indican que este desplazamiento es una mejora: de hecho, el pico se estima en muchos casos inclusive un tanto más a la izquierda. Esta observación anticipa lo que discutiremos en los párrafos siguientes: los ajustes se verán mejorados. Nuevamente elegimos realizar un ajuste para los tres primeros momentos de la función de estructura F_2 del pión. La comparación entre los momentos obtenidos a partir de este ajuste y los del caso planar están presentados en la figura 33.

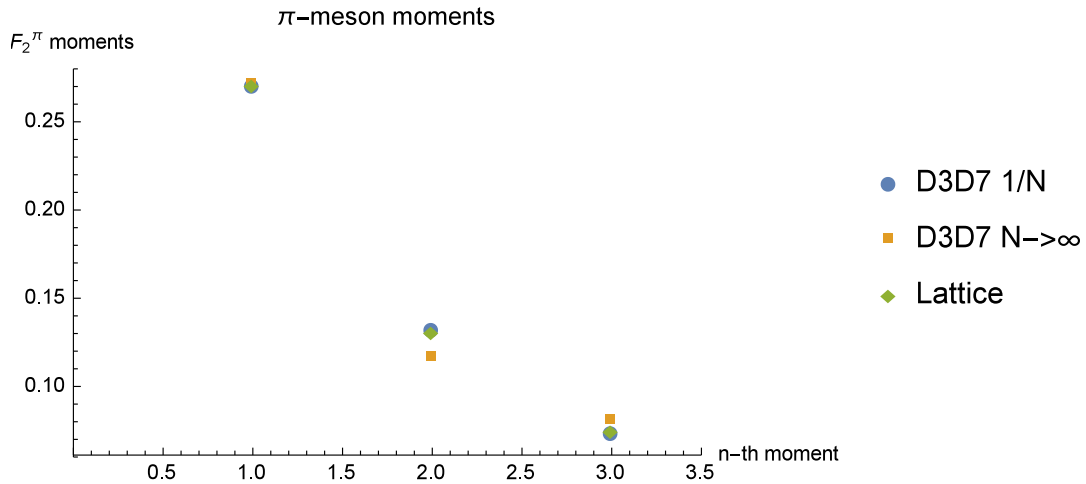


Figura 33: Los primeros tres momentos asociados a la función de estructura piónica F_2 a partir de nuestros dos ajustes y en comparación con los datos de [80].

Además, los resultados exactos pueden observarse en la tabla 7.6. Como vemos, el resultado nuevo permite describir bastante más satisfactoriamente los datos de *lattice QCD*: las discrepancias relativas tienen un máximo de solamente 1,27 %. Otro punto interesante es que la relación entre el

Modelo / Momento	$M_1(F_2)$	$M_2(F_2)$	$M_3(F_2)$
Lattice QCD	0.27	0.13	0.074
D3D7 ($1/N$)	0.2699	0.1326	0.0731
Error porcentual	0.04	-1.27	1.27
D3D7 ($N \rightarrow \infty$)	0.2708	0.1161	0.0803
Error porcentual	-0.3	10.8	-8.5

Tabla 7.6: Los resultados que se obtienen a partir de ajustar las funciones de estructura asociadas al diagrama no planar de la figura 31 con los datos provenientes de [80].

segundo y el tercer momento $M_3[F_2]/M_2[F_2]$, para la que antes obteníamos aproximadamente 0,69, en este caso pasa a ser similar a 0,55. Sin entrar en detalles, vale la pena decir que este último resultado es mucho más cercano al valor señalado por los fenomenólogos⁹.

Para concluir, destacamos la posibilidad de incluir momentos de orden mayor en nuestro análisis¹⁰. En la figura 34 presentamos la comparación entre la extrapolación de los resultados que obtuvimos a partir de los ajuste descritos anteriormente a los momentos $M_n(F_2)$ con $n \leq 10$, comparándolos con los resultados de [91]. Para esto utilizamos únicamente la contribución proveniente de la región $x > 0,1$, lo que origina las discrepancias que aparecen en los primeros dos momentos.

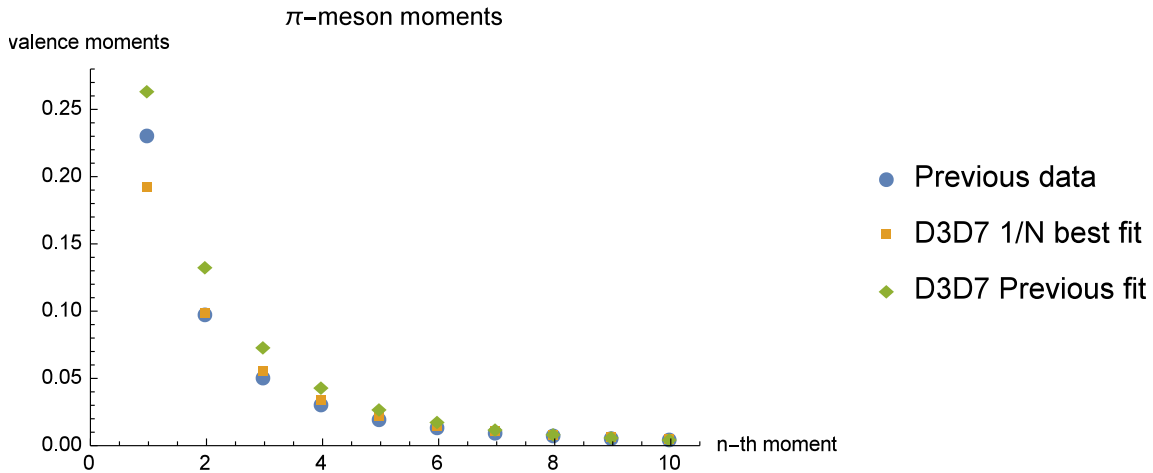


Figura 34: Extrapolación a los momentos de F_2 de orden superior para el caso del pión en comparación con los datos de [91].

⁹Agradecemos a Andreas Schafer por esta observación.

¹⁰Los resultados con los que comparamos en este caso provienen nuevamente de las simulaciones [91]. Sin embargo, no utilizamos estos datos para los ajustes pues los errores señalados en el trabajo original son demasiado grandes como para utilizarlos de manera cuantitativa.

Capítulo 8

Blancos fermiónicos

En este último capítulo del cuerpo de la tesis extendemos la descripción holográfica del DIS para incluir los blancos de espín $1/2$ polarizados. Desde la perspectiva gravitatoria, volvemos al modelo del hard-wall original. Los hadrones duales estarán descriptos en términos de los modos normalizables del dilatino Ψ . Es importante tener en cuenta que este tipo de blancos no describen precisamente a los bariones. En efecto, la masa de estos últimos es proporcional al número de colores, por lo que en el límite $N \rightarrow \infty$ se trata de objetos extremadamente pesados, y por lo tanto no dinámicos. La manera precisa de describirlos dentro de la teoría de cuerdas puede pensarse a partir de estados de D-branas, es decir, objetos no perturbativos. Sin embargo, ciertos aspectos fenomenológicos de considerable importancia pueden ser estudiados simplemente considerando blancos de espín $1/2$ como los que analizamos en este capítulo¹.

En un principio nos concentramos en la extensión de los métodos descriptos en los capítulos 3, 4 y 5 al caso de espín $1/2$. Luego, analizamos las consecuencias fenomenológicas que se obtienen a partir de estas extensiones. En gran medida, el análisis que presentamos aquí describe los resultados nuevos presentados en [11].

8.1. DIS holográfico en el caso de hadrones de espín-1/2

Podemos comenzar describiendo las soluciones que utilizaremos a lo largo de todo el capítulo [2, 53, 92]. Como sabemos, en la región conforme la geometría es del tipo $\text{AdS}_5 \times S^5$. Desde el punto de vista diez-dimensional, las soluciones del dilatino Ψ pueden separarse según el producto

$$\Psi(x^M) = \psi(x^\mu, z) \otimes \eta(\Omega), \quad (8.1)$$

donde ψ y η representan espinores en AdS_5 y en la esfera, respectivamente. Teniendo en cuenta que Ψ satisface la ecuación de Dirac no masiva en 10d, y descomponiendo las matrices $\Gamma^M = e_{\hat{M}}^M \Gamma^{\hat{M}}$ según

$$\Gamma^m \equiv \gamma^m \otimes \mathbb{1}_4 \otimes \sigma^1, \quad \Gamma^a \equiv \mathbb{1}_4 \otimes \tau^a \otimes (-\sigma^2). \quad (8.2)$$

En estas expresiones, σ^1 y σ^2 son matrices de Pauli, y las matrices γ^m y τ^a son las correspondientes matrices de Dirac en AdS_5 y S^5 . Esto quiere decir que se satisfacen las siguientes relaciones:

$$\{\Gamma_{\hat{M}}, \Gamma_{\hat{N}}\} = 2\eta_{\hat{M}\hat{N}}, \quad \{\gamma_{\hat{m}}, \gamma_{\hat{n}}\} = 2\eta_{\hat{m}\hat{n}}, \quad \{\tau_{\hat{a}}, \tau_{\hat{b}}\} = 2\delta_{\hat{a}\hat{b}}. \quad (8.3)$$

¹Notemos que los dilatinos en particular no son otra cosa que los compañeros supersimétricos de los dilatones estudiados en la parte II.

Además, podemos definir la matriz de quiralidad $\Gamma_{11} \equiv \Gamma^0 \dots \Gamma^9$, ante la cual tenemos $\Gamma_{11}\Psi = -\Psi$. Utilizando estas propiedades, concluimos que la ecuación que deben satisfacer los distintos modos de KK en AdS tienen la forma²

$$(-\not{D} + m) \psi_\Delta = 0, \quad m(\Delta) \equiv \frac{1}{R}(\Delta - 2). \quad (8.4)$$

En la última de las expresiones hemos utilizado la definición del *twist* $\tau = \Delta - 1/2$. Trabajando en el espacio de momentos para las direcciones planas, las soluciones de (8.4) toman la forma

$$\psi = e^{ik \cdot x} \frac{c_\psi k^{1/2}}{\Lambda^2 R^{9/2}} \left(\frac{z}{z_0} \right)^{5/2} [J_{\tau-2}(kz)P_+ + J_{\tau-1}(kz)P_-] u(k), \quad (8.5)$$

donde $u(k)$ satisface la ecuación de Dirac de masa k en cuatro dimensiones planas, $P_\pm = (1/2)(1 \pm \gamma^5)$ son los correspondientes proyectores de quiralidad y c_ψ es una constante de normalización que puede calcularse de manera similar a la del dilatón. Además, cabe recordar que las distintas polarizaciones cumplen las identidades (2.4) y pueden distinguirse en base al vector de espín s^μ definido en (2.3). En el caso del hadrón inicial sabemos que en la zona cercana al borde podemos aproximar las funciones de Bessel por su comportamiento asintótico para argumentos chicos, obteniendo

$$\psi_i \approx e^{iP \cdot x} \frac{c'_\psi}{\Lambda^{3/2} R^{9/2}} \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\tau+1/2} \left[P_+ + \frac{k}{2(\tau-1)\Lambda} \frac{z}{z_0} P_- \right] u_i(P). \quad (8.6)$$

Notamos que el segundo término es subdominante con respecto al primero. Sin embargo, más adelante será interesante tener en cuenta la presencia de ambos términos.

Régimen de supergravedad

En el caso $\lambda^{1/2} \ll x < 1$ el proceso dominante nuevamente está dado por el canal s , con un diagrama de Feynman similar a 13 (reemplazando $\phi \rightarrow \psi$). La interacción relevante vuelve a ser del tipo $A_m J_\psi^m$, de manera que

$$S_{A\Psi\Psi} = -\mathcal{Q} \int d^{10}x \sqrt{-g} A_m \bar{\Psi} \Gamma^m \Psi. \quad (8.7)$$

Los métodos a utilizar son análogos a los del capítulo 3. Evaluando esta expresión on-shell a partir de la inserción de las expresiones (8.6) y (8.5) para los hadrones inicial e intermedio, respectivamente, obtenemos la función de un punto de la corriente, que luego insertamos en (3.28). Luego debemos realizar la suma sobre los estados intermedios, que más allá de las masas esta vez también incluye una suma sobre los distintos valores que puede tomar su polarización. Por lo tanto, utilizando (2.3) y (2.4), y comparando con (2.17) obtenemos las funciones de estructura para un blanco de espín 1/2 polarizado:

$$2F_1 = F_2 = F_3 = 2g_1 = g_3 = g_4 = g_5 = \text{Cte} \times \mathcal{Q}^2 \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\tau-1} x^{\tau+1} (1-x)^{\tau-2}, \quad (8.8)$$

junto con la función restante

$$g_2 = \frac{1}{\tau-1} \left(\frac{\tau+1}{2x} - \tau \right) \times F_2. \quad (8.9)$$

²Estamos trabajando con $\eta = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$, por lo que las matrices γ tienen un factor $(-i)$ extra con respecto a la definición usual.

Una vez más, la constante adimensional global simplemente contiene los factores de normalización de las soluciones junto con algunos factores numéricos (dependientes de τ).

Podemos analizar estos resultados de la siguiente manera:

- Así como en el caso de los mesones vectoriales, vemos que los resultados para las funciones $F_{1,2}$ de los blancos de espín 1/2 son análogos a los del caso escalar reemplazando $\Delta \rightarrow \tau$.
- Observamos nuevamente la presencia del factor de supresión de todos los resultados descriptos en esta tesis en el régimen $x \gg \lambda^{-1/2}$, asociado a la cola de la función de onda del hadrón que está cerca del borde de AdS, donde se da la interacción.
- Encontramos resultados no nulos para las funciones de estructura $g_{1,2}$. Esto era de esperarse ya que hemos considerado un blanco de espín 1/2 polarizado. El comportamiento de g_1 es similar a los de las F_i . De hecho, el resultado satura la desigualdad $F_1 \geq g_1$ impuesta por la positividad de la sección eficaz. Sin embargo, el de g_2 es un tanto distinto: debido al prefactor extra que observamos en (8.9) esta función de estructura puede tomar valores negativos para ciertos valores de x . En la figura 35 ejemplificamos este comportamiento para algunos valores de τ

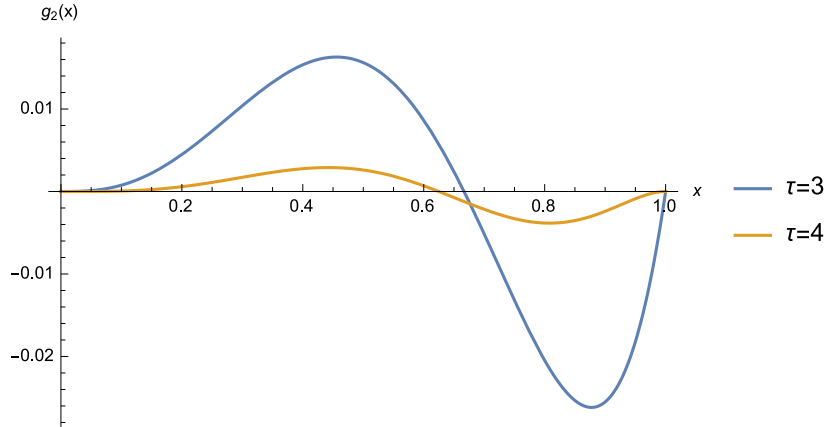


Figura 35: Comportamiento de g_2 en función de x para blancos de espín 1/2 y en el régimen de supergravedad. Graficamos la función sin el factor multiplicativo global $\text{Cte} \times Q^2 \left(\frac{\Delta^2}{q^2} \right)^{\tau-1}$.

- Finalmente, notamos la aparición de resultados no nulos (y similares a los anteriores) para las funciones de estructura F_3, g_3, g_4 y g_5 . Estas funciones están asociadas a los términos que violan paridad en el tensor hadrónico. En el marco del DIS electromagnético en QCD, deberían ser idénticamente nulas. Sin embargo, estamos en presencia de una situación en la que se evidencian las diferencias entre nuestra teoría de campos y la cromodinámica cuántica. A diferencia de QCD, $\mathcal{N} = 4$ SYM es una teoría quiral: los campos fermiónicos no son espinores de Dirac, sino de Weyl. Esto se ve reflejado en la asimetría entre los términos que contienen a $P_+ u_i(P)$ y a $P_- u_i(P)$ en las soluciones (8.5) y (8.6). Es la presencia de los términos subdominantes la que genera estos resultados no nulos. Veremos que alguna de estas funciones de estructura volverán a aparecer en los otros regímenes energéticos, aunque esto se dará por razones conceptualmente diferentes.

Régimen de teoría de cuerdas

En esta sección utilizaremos los métodos desarrollados en el capítulo 4 para obtener las funciones de estructura en el régimen de $\exp(-\lambda^{1/2}) \ll x \ll \lambda^{-1/2}$ para un blanco de espín 1/2. Como vimos anteriormente, se trata de un régimen en el que es necesario tomar en cuenta las contribuciones al intercambio de modos masivos de las supercuerdas, y para el que en términos efectivos podemos pensar que el proceso del DIS dual resulta ser local. Como hicimos en el caso del dilatón, primero describiremos esta interacción de manera heurística y luego explicaremos cómo estudiarla desde primeros principios.

Trataremos de manera conjunta las contribuciones simétricas y antisimétricas. El intercambio del gravitón representa la contribución dominante debido al escaleo de las amplitudes con la energía del CM $\tilde{s}^{1/2}$. Sin embargo, este proceso sólo contribuye a la parte simétrica del tensor hadrónico. Para obtener las funciones antisimétricas en este régimen necesitamos considerar además el intercambio de un modo vectorial. Los procesos asociados a cada uno de estos casos están presentados en la figura 36. Ya hemos utilizado en el capítulo 4 los propagadores, tensores

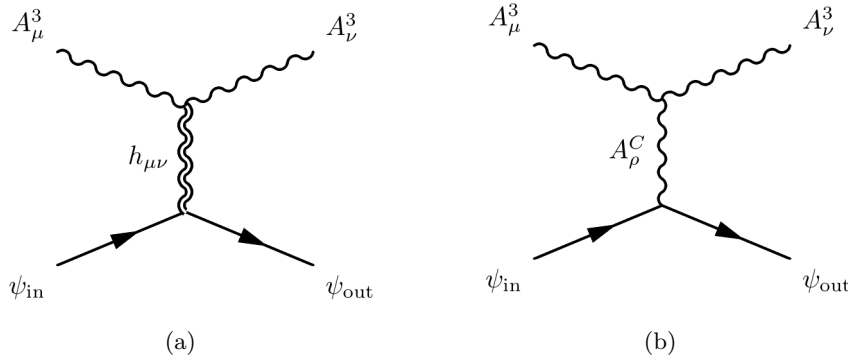


Figura 36: Representación holográfica del proceso dual al FCS en el caso fermiónico. Siempre en el canal t , (a) está asociado a la parte simétrica y (b) a la antisimétrica del tensor hadrónico $W^{\mu\nu}$.

de energía momento y corrientes asociadas al gravitón y a los campos de gauge. Para el caso del dilatino, necesitamos las siguientes definiciones:

$$T_{mn}^\psi = i \bar{\psi} \gamma_{(m} \partial_{n)} \psi, \quad J_{n,D}^\psi = -\mathcal{Q}_D \bar{\psi} \gamma_n \psi, \quad (8.10)$$

que se desprenden del término cinético en la acción y de (8.7). Con esto, sólo tenemos que *juntar* los vértices y reemplazar el denominador del propagador por el prefactor de las interacciones de cuerdas, que sigue siendo el mismo que usamos anteriormente. En consecuencia, obtenemos las siguientes acciones efectivas:

$$S_{\text{eff}}^{(S)} = 2\kappa_5^2 \text{Im} [\tilde{s}^2 \mathcal{G}(\alpha', \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u})] C \int d^5x \sqrt{g_{\text{AdS}_5}} F_{mp} F_n{}^p \bar{\psi} \gamma^{(m} \partial^{n)} \psi \quad (8.11)$$

para la parte simétrica, y

$$S_{\text{eff}}^{(A)} = -i \frac{1}{6} \mathcal{Q}^C d_{ABC} \text{Im} [\mathcal{G} \tilde{s}^2] \tilde{C} \int d^5x \varepsilon^{mnpq} \partial_m A_n^A \partial_o A_p^{*B} \bar{\psi} \gamma_q \psi \quad (8.12)$$

en el caso antisimétrico.

Estas acciones efectivas pueden obtenerse directamente desde los límites relevantes de las amplitudes de teorías de cuerdas. En el primer caso los estados asociados a los bosones de gauge son del

tipo NS-NS, mientras que los estados externos fermiónicos corresponden a modos NS-R y R-NS. La amplitud de cuerdas cerradas que debemos considerar está dada por $\mathcal{A}(h, h, \bar{\Psi}, \Psi)$. Esta amplitud puede escribirse como

$$\mathcal{A}(1, 2, \tilde{3}, \tilde{4}) = 4 i \kappa_{10}^2 \mathcal{G}(\alpha', \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}) K_{\text{op}}(1, 2, 3, 4) \otimes K_{\text{op}}(\tilde{3}, 1, 2, \tilde{4}), \quad (8.13)$$

donde los K_{op} son los factores cinemáticos que definen las amplitudes de cuerdas abiertas. Si los modos son todos bosónicos tenemos (4.20), mientras que al incluir los modos fermiónicos obtenemos [57]

$$K_{\text{op}}(\tilde{3}, 1, 2, \tilde{4}) = \xi_1^{M'} \xi_2^{N'} \bar{\lambda}_3^\alpha \lambda_4^\beta [\tilde{s} (k_{M'}^2 (\Gamma_{N'})_{\alpha\beta} - k_{N'}^1 (\Gamma_{M'})_{\alpha\beta} - \eta_{M'N'} (\Gamma^P)_{\alpha\beta} k_P^2) + \dots]. \quad (8.14)$$

En esta expresión, los índices espinoriales son α, β, \dots , y además hemos omitido términos irrelevantes en el régimen $\tilde{s} \gg \tilde{t}$. Por otro lado, podemos escribir la polarización del dilatino en términos de las de los modos de cuerda abierta según:

$$(\Gamma^M)_{\beta}^{\alpha} \Psi_i^{\beta} \equiv \lambda_i^{\alpha} \otimes \xi_i^M. \quad (8.15)$$

Reemplazando las expresiones de los factores cinemáticos en (8.13), obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(1, 2, \tilde{3}, \tilde{4}) = 4 i \kappa_{10}^2 \mathcal{G} \tilde{s}^2 \bar{\Psi}_3 [\tilde{u}(h_1 \cdot h_2) \not{k}_1 + \tilde{s}(h_1 \cdot h_2) \not{k}_2 \\ + 2 \tilde{u}(k_2 \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot \Gamma) + 2 \tilde{s}(k_1 \cdot h_2 \cdot h_1 \cdot \Gamma)] \Psi_4, \end{aligned} \quad (8.16)$$

de donde concluimos que podemos escribir un Lagrangiano efectivo con la siguiente estructura:

$$- i \kappa^2 (\partial_P h_{MN}) (\partial_Q h^{MN}) \bar{\Psi} \Gamma^{(P} \partial^{Q)} \Psi, \quad (8.17)$$

de manera tal que reemplazando $h_{MN} \rightarrow A_m K_a$ recuperamos (8.11).

En cuanto a las contribuciones antisimétricas, la idea es la misma que en el caso del dilatón: en el caso de los bosones de gauge también debemos considerar estados entrantes del tipo R-R, asociados con los modos de la \mathcal{F}_5 , por lo que nos concentramos en $\mathcal{A}(\mathcal{F}_5, \mathcal{F}_5, \bar{\Psi}, \Psi)$. Esta amplitud se factoriza según

$$\mathcal{A}(\tilde{1}, \tilde{2}, 3, 4) = -i \kappa^2 \mathcal{G}(\alpha', \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}) K_{\text{op}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) \otimes K_{\text{op}}(\tilde{3}, 1, 2, \tilde{4}), \quad (8.18)$$

donde los números en *italica* indican los modos de R-R. El único factor cinemático que aún no hemos utilizado es simplemente

$$K_{\text{op}}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) = \frac{\tilde{s}}{2} \bar{\lambda}_1 \Gamma^M \lambda_2 \bar{\lambda}_3 \Gamma_M \lambda_4. \quad (8.19)$$

Utilizando las polarizaciones definidas en (4.63) y (8.15), vemos que la amplitud toma la siguiente forma:

$$\mathcal{A}(\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}) = -i \kappa^2 \mathcal{G}(\alpha', \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}) \tilde{s}^2 \frac{16}{15} (\mathcal{F}_3)_{MM2 \dots M_5} (\mathcal{F}_4)_N^{M_1 \dots M_5} \bar{\Psi}_1 \gamma^{(N} k_2^{M)} \Psi_2. \quad (8.20)$$

Una vez más, vemos que las identificaciones (4.58) permiten recuperar el Lagrangiano efectivo que habíamos propuesto en (8.12) en base a la descripción heurística del proceso.

El término de Pauli

Es interesante destacar una diferencia importante en el caso que estamos analizando con respecto al del blanco escalar: cuando el hadrón está representado holográficamente por un dilatino, existe otro término de interacción que permite acoplarlo con el modo vectorial que se propaga en el canal t en el contexto del proceso que contribuye a las funciones antisimétricas. Este término se conoce como interacción de Pauli, y podemos escribirlo esquemáticamente como

$$S_P = \beta^A \int d^5x \sqrt{-g_{AdS}} F_{mn}^A \bar{\psi} [\gamma^m, \gamma^n] \psi. \quad (8.21)$$

para ciertas constantes β^A . Este vértice está presente de manera genérica en cualquier compactificación de KK, y puede ocupar el rol que hasta ahora ha venido cumpliendo el acoplamiento tipo corriente $A_m J^m$ en la descripción holográfica del DIS. La principal diferencia radica en que, en principio, esta interacción está presente incluso para hadrones con carga \mathcal{Q} nula. Es por esto que en [93] los autores utilizan el término de Pauli para representar de manera holográfica el DIS con un *neutrón* como blanco en el régimen en el que es válida la aproximación de supergravedad.

En el régimen de teoría de cuerdas, (8.21) también pueden aparecer en el vértice inferior del diagrama asociado al intercambio del bosón de gauge *reggeizado* en el canal t . Siguiendo los pasos del capítulo 4 y de la sección podemos construir nuevamente un Lagrangiano efectivo, asociado a este nuevo proceso que también es necesario tener en cuenta. La aparición de este proceso novedoso puede entenderse a partir del análisis de las amplitudes de teorías de cuerdas: a diferencia del caso escalar, en el caso fermiónico también debemos considerar la amplitud $\mathcal{A}(h, \mathcal{F}_5, \bar{\Psi}, \Psi)$. En efecto, y como ya hemos visto, la amplitud de tres puntos $\mathcal{A}(h, \mathcal{F}_5, \mathcal{F}_5)$ está asociada a la interacción de CS. En el contexto del DIS dilatónico, el hadrón dual solamente podía interactuar un campo de gauge via $\mathcal{A}(h, \phi, \phi)$, de modo que nos vimos obligados a considerar a las fluctuaciones externas como asociadas con los modos de R-R proponemos una situación en la que uno de las perturbaciones \mathcal{F}_5 corresponde al modo que se propaga hacia el interior. Sin embargo, en el caso del dilatino la amplitud

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}_5, \bar{\Psi}, \Psi) \propto \mathcal{F}_{M_1 \dots M_5} \bar{\Psi} \Gamma^{M_1 \dots M_5} \Psi, \quad (8.22)$$

resulta ser no nula y da origen a la interacción (8.21) (como puede verse a través de (4.63)).

A partir del proceso asociado al término de Pauli podemos obtener una nueva contribución a las funciones de estructura antisimétricas. En este caso la amplitud resultante será también independiente de la carga. No analizaremos el cálculo en particular, pero es sencillo convencerse de que el resultado es similar del Lagrangiano (8.12). Más aún, la contribución a las funciones de estructura es exactamente de la misma forma: solamente difiere en una constante multiplicativa global. En esta tesis solamente analizaremos la dependencia final en términos de x y q^2 , por lo que no entraremos en detalles con respecto a esta contribución.

Funciones de estructura

Utilizando una vez más las soluciones de A_m y $\Psi_{\text{in/out}}$ y descomponiendo al tensor hadrónico de espín-1/2 en términos de las funciones de estructura en este régimen encontramos los resultados

$$F_1(x, q^2) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\tau-1} \frac{\rho \pi^2 |c'_\psi|^2}{4\pi \sqrt{\lambda}} I_{1, 2\tau+3}, \quad F_2(x, q^2) = 2x \left(\frac{2\tau+3}{\tau+2} \right) F_1, \quad (8.23)$$

para las funciones universales, junto con

$$F_3(x, q^2) = \frac{1}{x} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\tau-1} \frac{\mathcal{Q} |c'_\psi|^2 \pi^2}{3\sqrt{4\pi\lambda}} \mathcal{I}_\tau, \quad (8.24)$$

donde las integrales $I_{n,j}$ e \mathcal{I}_n están definidas en las ecuaciones (4.36) y (4.79), respectivamente. Por otro lado, obtenemos

$$g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = g_5 = 0. \quad (8.25)$$

Podemos analizar estos resultados de la siguiente manera:

- En primer lugar podemos decir que la forma en que las funciones $F_{1,2,3}$ dependen de x y de q^2 es análoga a las que hemos obtenido en este régimen para los distintos blancos. En este caso, las potencias dependen de $\tau = \Delta - 1/2$.
- En la parte simétrica, vemos que se anulan las funciones de estructura $g_{3,4,5}$, asociados a hadrones polarizados pero sobre todo a procesos que no sean invariantes ante paridad. En el régimen de supergravedad habíamos obtenido contribuciones no nulas debido a la forma específica de las soluciones fermiónicas, que cerca del borde tienden a ser quirales. Sin embargo, estos efectos resultan ser subdominantes para valores pequeños de x . Es importante notar que, a primera vista, no parecería ser el caso. En efecto, si bien algunos de los P_μ del tensor hadrónico final aparecen a partir de las derivadas de los estados externos, otros provienen de las expresiones

$$\bar{\psi}_{\text{out}} \gamma_\mu \psi_{\text{in}} \propto \bar{u}_{\text{out}} P_- \gamma_\mu P_+ u_{\text{in}} = \bar{u}_{\text{out}} \gamma_\mu P_+ u_{\text{in}} = -i (P_\mu + S_\mu). \quad (8.26)$$

Por lo tanto, podría pensarse que si obtuvimos una F_2 no nula, como esta función corresponde a una estructura $P_\mu P_\nu$ también deberíamos haber obtenido por ejemplo una contribución para g_3 , que está asociada a la estructura $P_{(\mu} S_{\nu)}$. La ausencia de estas contribuciones es sencilla de entender desde el punto de vista de la teoría de campos. El proceso de intercambio del gravitón asociado a las contribuciones simétricas en este régimen está asociado al término $J^\mu J^\nu \sim T^{\mu\nu}$ en el OPE de las corrientes, donde $T^{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento de la teoría. En términos del valor de expectación que define al tensor hadrónico del FCS tenemos

$$\langle P, S | \tilde{J}^\mu(q) J^{\nu u}(0) | P, S \rangle \propto f(P, S, q) \langle P, S | T^{\mu\nu}(0) | P, S \rangle \quad (8.27)$$

donde $|P, S\rangle$ es el estado asociado al hadrón polarizado inicial, y $f(P, q)$ es alguna función escalar que en este caso no interesa. Como vimos en la introducción, el lado derecho sólo puede depender del vector de espín linealmente. Ahora bien, como $T^{\mu\nu}$ es un tensor conservado resulta imposible que del lado derecho aparezcan términos proporcionales a $P^\mu S^\nu$ o $(S \cdot q) P^\mu P^\nu$. Por lo tanto, todas las g_i deben ser nulas, al menos a primer orden. Desde el punto de vista holográfico esta conclusión no es tan fácil de obtener. Para demostrar que $g_{3,4,5} = 0$ es necesario *deshacer* la aproximación (8.6) que consideramos para los estados $\psi_{\text{in/out}}$ y considerar su forma completa, que está dada en (8.5) e incluye un segundo término subdominante en las cercanías del borde. El valor de expectación $\langle P, S | T^{\mu\nu}(k) | P, S \rangle$ corresponde a la interacción $S_{h\bar{\psi}\psi}$, y en el límite $k \rightarrow 0$ puede verse explícitamente que la correspondiente acción de interacción se anula on-shell. En conclusión, podemos decir que la universalidad del proceso de intercambio de un gravitón es tal que se pierden completamente de vista las particularidades del modelo y del blanco: sin importar los detalles de la teoría de campos ni la polarización del blanco, sólo se generan las contribuciones típicas a las funciones de estructura universales F_1 y F_2 .

- En el caso de las funciones antisimétricas, el razonamiento es similar. El proceso relevante está asociado a un término del OPE de la forma $JJ \sim J$, más precisamente

$$\langle P, S | \tilde{J}_3^\mu(q) J_3^\nu(0) | P, S \rangle \propto d_{33C} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q_\rho \langle P, S | J_\sigma^C(0) | P, S \rangle \sim \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q_\rho (a P_\sigma + b S_\sigma), \quad (8.28)$$

para ciertas constantes a y b . Si la corriente está conservada, necesariamente tenemos $b = 0$. Esta es la razón por la que en el modelo hard-wall hemos obtenido $g_{1,2} = 0$ [45].

Sin embargo, existe una diferencia crucial entre los sectores simétricos y antisimétricos. En efecto, existen modelos un tanto más sofisticados que el hard-wall en los que en el UV la teoría es nuevamente similar a $\mathcal{N} = 4$ SYM, mientras que en el IR alguna de las simetrías R asociadas a las corrientes J_A^μ están espontáneamente rotas. Un ejemplo puede encontrarse en [94]. Los detalles de la ruptura de simetría no son importantes ya que en todos los casos la consecuencia es la misma: en estos modelos obtendremos un $b \neq 0$ en (8.28). En particular, si el UV es el mismo que el que venimos trabajando la identidad (8.27) los resultados para la parte antisimétrica se modifican ven modificados de manera tal que encontramos

$$g_1(x, q^2) = \frac{1}{2} F_3(x, q^2) \sim \text{Cte} \times \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{\Lambda^2}{q^2} \right)^{\tau-1} \frac{1}{x}, \quad g_2 = 0. \quad (8.29)$$

Vemos que la función de estructura resulta ser no nula. Es más: satisface la misma relación del tipo Callan-Gross $2g_1 = F_3$ que en el caso $x \gg \lambda^{-1/2}$. Como veremos más adelante, este resultado tiene consecuencias fenomenológicas muy interesantes. Por otro lado, la función g_2 sigue siendo nula, como sucede por ejemplo en el modelo de partones [36].

Régimen del Pomerón

Antes de estudiar los aspectos fenomenológicos del caso fermiónico nos referimos a la manera en que se corrigen los resultados que acabamos de obtener en el régimen en el que el parámetro de Bjorken x toma valores exponencialmente pequeños.

En el capítulo 5 hemos visto que en esta región paramétrica la energía del sistema CM del proceso es tan grande que no podemos simplemente despreciar el factor $(\alpha' \tilde{s})^{\alpha' \tilde{t}/2}$ que aparece en la parte imaginaria del prefactor \mathcal{G} de teoría de cuerdas (ver (4.14)). En consecuencia, el carácter de operador diferencial de \tilde{t} indica que ya no podemos utilizar nuestra aproximación local. Sin embargo, los métodos que utilizamos en dicho capítulo para tener en cuenta la presencia de este factor no son completamente independientes del hadrón en cuestión. Por lo tanto, las modificaciones que sufren las funciones de estructura del blanco de espín-1/2 son en todo punto análogas a las del caso escalar.

En una primera aproximación, podemos decir que la modificación principal corresponde a una corrección $\mathcal{O}(\lambda^{-1/2})$ en las potencias con las que las respectivas funciones divergen en el límite $x \rightarrow 0$. Dada la naturaleza de los correspondientes procesos, las modificaciones son distintas para las funciones de la parte simétrica y de la parte antisimétrica del tensor hadrónico, y están dadas por

$$F_1 \sim \left(\frac{1}{x} \right)^{2-\frac{2}{\sqrt{\lambda}}}, \quad F_1 \sim \left(\frac{1}{x} \right)^{1-\frac{2}{\sqrt{\lambda}}}, \quad 2g_1 = F_3 \sim \left(\frac{1}{x} \right)^{1-\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}}, \quad (8.30)$$

respectivamente.

En realidad, la presencia de los kernels presentados en las ecuaciones (5.29), (5.40), (5.49) y (5.54) también modifica la dependencia de las funciones con respecto a la virtualidad del fotón externo, q^2 . En particular, recordamos que se produce un proceso difusivo en la dirección radial. Las expresiones integrales exactas para F_1 y F_2 son nuevamente de la forma (5.61) y (5.62), mientras que para g_1 y F_3 obtenemos expresiones análogas a (5.65). En todos los casos, los factores de impacto asociados a los bosones de gauge siguen siendo los mismos (ver (5.63) y (5.66)). Lógicamente debemos modificar el factor asociado al blanco hadrónico, reemplazando el P_ϕ de (5.64) por

$$P_\psi(z') = z^{-3}|f_+(z')|^2 \sim (z'\Lambda)^{2\tau-2}, \quad (8.31)$$

donde la función $f_+(z)$ está definida en base a la solución según $\psi_{\text{in}}(x, z) = e^{iP \cdot x} [f_+(z)P_+ + f_-(z)P_-] u_{\text{in}}(P)$.

Cabe aclarar que para g_1 no es técnicamente correcto utilizar los kernels que derivamos para los modelos conformes y hard-wall. En efecto, hemos dicho en la sección anterior que en ambos se tiene precisamente $g_1 = 0$. Sin embargo, todo lo que diremos en referencia a g_1 a partir de ahora será pensando en un modelo como los que acabamos de describir, en los que la región IR se ve modificada de manera tal de generar una g_1 no nula. Supondremos, entonces, que los desarrollos presentados en el capítulo 5 para F_3 a partir del kernel del modelo hard-wall pueden aplicarse aproximadamente de la misma manera a esta nueva función de estructura que aparece en el caso fermiónico.

8.2. Comparación con los datos experimentales

Pomerón *vs* BFKL

En la introducción hemos visto que las funciones de estructura del DIS describen las distribuciones partónicas en el interior de los hadrones, incluyendo quarks, anti-quarks y gluones. Se cree que la contribución gluónica se vuelve cada vez más importante a medida que el parámetro de Bjorken toma valores cada vez más pequeños. En consecuencia, en este régimen podemos analizar el problema despreciando la fenomenología asociada a los quarks, al menos en una primera aproximación. En otras palabras, tomamos $N \gg N_f$, con N_f el número de sabores. Si bien en el régimen de acoplamiento fuerte pierde sentido pensar en una descripción partónica de los grados de libertad, extrapolando este razonamiento vemos que en este régimen resulta natural considerar la aplicación de la correspondencia AdS/CFT.

Por otro lado, en el capítulo 5 mostramos que existe una similitud evidente entre las expresiones para las amplitudes generadas a partir de los métodos BFKL [43] y las de la descripción holográfica en el régimen del Pomerón. En efecto, el kernel BFKL y el del Pomerón proveen una descripción unificada del DIS que permite interpolar entre las regiones de acoplamiento débil y fuerte. En el primer caso, las técnicas utilizadas son perturbativas, mientras que en el segundo utilizamos la dualidad AdS/CFT para incluir los efectos no perturbativos en términos de la perspectiva holográfica.

Estos argumentos inducen a pensar que en el régimen paramétrico asociado al Pomerón podría tener sentido realizar una comparación entre los resultados que hemos obtenido en esta tesis y la fenomenología disponible.

Cabe aclarar que los experimentos de DIS con blancos bariónicos de espín-1/2 (principalmente en el caso del protón) han sido muchísimo más numerosos que, por ejemplo, en el caso mesónico. Si bien ya hemos dicho que la descripción holográfica que hemos utilizado no puede aplicarse directamente al caso bariónico debido al límite planar, podemos tener la esperanza de que la descripción dual en términos del dilatino sea suficiente para capturar al menos algunos aspectos universales del DIS en estos casos.

Sector universal

En esta sección describimos la comparación con los datos experimentales realizada en [61]. El trabajo está basado en el análisis de la función de estructura F_2 . Esta función fue medida en el caso protónico por las colaboraciones H1 y ZEUS en la dispersión no polarizada $e^\pm p$ producido en HERA, y las publicaciones [95-97] contienen los datos con los que compararemos los resultados de la sección anterior. Estos datos describen en detalle el rango definido por $10^{-6} \leq x \leq 10^{-2}$ y $0,1(\text{GeV}/c)^2 \leq q^2 \leq 400(\text{GeV}/c)^2$.

Las expresiones integrales (5.61), (5.62) y (5.65) (que utilizaremos en realidad para g_1) son difíciles de resolver analíticamente. Es por esto que, en un primer intento en la dirección fenomenológica, los autores de [61] propusieron aproximar los factores de impacto asociados al fotón virtual y al hadrón de la siguiente manera:

$$P_\psi(z') \approx \frac{1}{M} \delta(z' - 1/M), \quad P_A(z) \approx \frac{1}{q} \delta(z - 1/q), \quad (8.32)$$

lo que en términos efectivos indica que estamos obviando todos los detalles de las funciones de onda, quedándonos simplemente con las escalas alrededor de las que están centradas³. Estas escalas son M para el hadrón (que es aproximadamente del mismo orden que Λ) y q para el fotón. De esta manera, las deltas de Dirac en (8.32) permiten realizar las integrales en z y z' . Si bien esta aproximación puede parecer demasiado forzada, veremos que las expresiones que se obtienen parecen capturar gran parte de la información relevante del proceso.

En un primer lugar nos concentramos en el proceso dominante a nivel árbol. Comenzamos utilizando las aproximaciones (8.32) para evaluar (5.62) en el caso del dilatino. De esta manera, obtenemos la siguiente expresión aproximada para la F_2 generada por el intercambio de un (único) Pomerón:

$$F_2(x, q^2) \approx \frac{g_0^2}{32\pi^{5/2}} \frac{\rho^{3/2}}{\sqrt{\tau}} \frac{q}{M} e^{(1-\rho)\tau} \left[e^{-\frac{1}{\rho\tau} \log^2(q/M)} + F(q, M, \tau) e^{-\frac{1}{\rho\tau} \log^2(qMz_0^2)} \right] \quad (8.33)$$

con la función F definida en (5.41), $z_0 = \Lambda^{-1}$ y⁴

$$\rho \equiv 2/\sqrt{\lambda}, \quad \tau \equiv \log \alpha' \tilde{s} \approx \log(\alpha' z z' s) \approx \log \left(\frac{\rho}{2} \frac{q}{M} \frac{1}{x} \right). \quad (8.34)$$

La expresión (8.33) es correcta en el contexto del modelo hard-wall. En el caso conforme sólo debemos considerar el primer término entre corchetes. La estrategia para la comparación es similar a la que utilizamos en el caso de los mesones: consiste en considerar (8.33) en términos de ciertos parámetros considerados como libres, y utilizar los datos experimentales para ajustar dichos parámetros. En este caso, los parámetros libres son la constante multiplicativa g_0 , la escala de masa del hadrón M , el acoplamiento ρ y la escala de confinamiento z_0 (que sólo está presente para el modelo conforme).

En el caso conforme los resultados del ajuste (realizado a partir de 160 datos) son,

$$\rho = 0,7740 \pm 0,0103, \quad M = 0,5575 \pm 0,0432 \text{ GeV}, \quad \chi_{\text{d.o.f}}^2 = 0,75, \quad (8.35)$$

³De hecho, en el trabajo original [61] el análisis de los blancos fermiónicos no había sido desarrollado. Los autores simplemente utilizaron la descripción del caso escalar.

⁴Notar que aquí usamos una definición de τ un tanto distinta de la del capítulo 5 para facilitar la comparación con [61]. Además, seguimos utilizando convenciones en las que $R = 1$.

mientras que para el modelo confinante (con un ajuste realizado a partir de casi 250 datos dada la inclusión de puntos con menor q^2) los autores obtienen

$$\rho = 0,7792 \pm 0,0034, \quad M = 0,4333 \pm 0,0243 \text{ GeV}, \quad z_0 = 4,96 \pm 0,14 \text{ GeV}^{-1}, \quad \chi_{\text{d.o.f}}^2 = 1,07. \quad (8.36)$$

Por otro lado, para los dos ajustes la constante global es tal que $g_0^2 \approx 100$.

Es importante resaltar que en ambos casos los valores que se obtienen para los parámetros del ajuste son fenomenológicamente aceptables. En primer lugar, el valor de ρ indica que tenemos un λ cercano a la transición entre acoplamiento débil y fuerte. En segundo lugar, la ubicación del hard-wall genera una escala de confinamiento del mismo orden que Λ_{QCD} . En tercer y último lugar, considerando el valor de z_0 fijo la masa hadrónica que obtenemos también está dentro del rango apropiado.

Asimismo, la diferencia entre ambos ajustes está asociada a los datos con los valores de q^2 más pequeños. En efecto, cuando q^2 es muy grande no hay mayor diferencia entre ambos modelos ya que los efectos del confinamiento son despreciables, lo que genera que el segundo término en (8.33) sea prácticamente despreciable en comparación con el primero. Sin embargo, por debajo de este régimen la presencia del hard-wall cobra una importancia considerable, de manera que los datos son descriptos mucho más precisamente por el modelo confinante.

Para terminar, diremos que los autores de [61] también consideraron la posibilidad de incluir las contribuciones de todos los diagramas tipo escalera de la figura 17 resumados en la fórmula de la aproximación Eikonal. Los efectos asociados a la inclusión de las contribuciones no lineales comienzan a ser importantes alrededor de $\chi \sim 1$, donde χ es la fase eikonal, lo que para los datos de HERA ocurre aproximadamente en la región $q^2 < 1(\text{GeV}/c)^2$. Sin entrar en detalles, diremos que el ajuste correspondiente incluso mejora los resultados de (8.36). Presentamos en la figura 37 la comparación entre los ajustes asociados a ambos modelos junto con los datos experimentales [61].

Ajustes y predicciones para g_1

En esta sección presentamos los resultados obtenidos en nuestra publicación [11], basados en utilizar los métodos que acabamos de describir para comparar la descripción holográfica de la función de estructura g_1 del protón (polarizado) con los datos experimentales disponibles. En primer lugar, vemos que a reemplazando (8.32) esta vez en (5.65) obtenemos la siguiente expresión para g_1 :

$$g_1(x, q^2) = \mathcal{C} \frac{\rho^{-1/2}}{\sqrt{\tau}} e^{\tau(1-\rho/4)} \left[e^{\left(-\frac{1}{\rho\tau} \log^2(q/M)\right)} + F(q, M, \tau) e^{\left(-\frac{1}{\rho\tau} \log^2(qMz_0^2)\right)} \right] \quad (8.37)$$

En esta fórmula tenemos nuevamente cuatro parámetros: \mathcal{C} , ρ , M y z_0 . Sin embargo, si pensamos tener un modelo coherente que permita describir a F_2 y a g_1 al mismo tiempo no podemos tomarlos a todos como libres: tanto ρ como M y z_0 ya están determinados por los ajustes anteriores. El único parámetro independiente que tenemos para ajustar en este contexto es la constante global \mathcal{C} .

Esta restricción es realmente útil, ya que debido a las dificultades experimentales la cantidad de datos disponibles para g_1 en la región de x chico y q cuanto menos mayor a M es bastante más reducida que en el caso de F_2 . Las mediciones realizadas fueron publicadas por la colaboración SMC [98] y, más recientemente, por la colaboración COMPASS [99, 100]. Como hicimos en el caso de los mesones, utilizaremos primero los datos más antiguos y luego analizaremos cómo cambian los resultados al considerar las mediciones más recientes. Dado el rango de validez de los cálculos de teoría de cuerdas, utilizaremos solamente los datos pertenecientes a la región relevante. Por lo tanto, en el primer caso tenemos 19 mediciones con las que podemos realizar un ajuste de (8.37). De esta manera, obtenemos $\mathcal{C} = 0,0195 \pm 0,0024$ para el modelo conforme y $\mathcal{C} = 0,0191 \pm 0,0023$

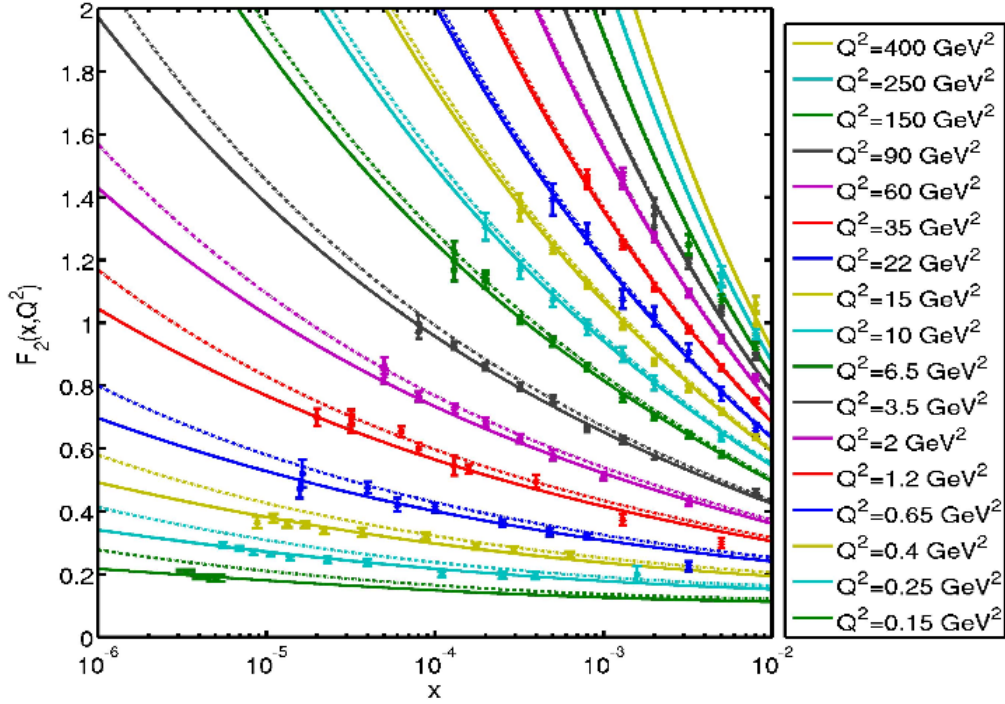


Figura 37: Ajustes y datos experimentales para la función de estructura F_2 del protón, presentada en función de x y para distintos valores de q^2 . Las curvas punteadas están asociadas al ajuste basado en el intercambio de un único Pomerón en el modelo hard-wall, mientras que las curvas continuas corresponden al caso de la eikonal [61]. Los datos experimentales están extraídos de [95-97].

en el caso del *hard-wall*. Ambos ajustes tienen un $\chi^2_{d.o.f.} = 0,27$, lo que indica que el ajuste no es muy bueno. En la figura 38 presentamos los datos experimentales [99]⁵ junto con nuestros ajustes. Observamos que, como era de esperarse, el ajuste es mucho mejor en la región $x < 0,01$ que para los demás datos. Aún si los ajustes no son de todo satisfactorios, es interesante notar que en el rango mencionado los valores que obtenemos utilizando los parámetros definidos por el ajuste de F_2 para caracterizar la dependencia funcional no trivial de la función de estructura $g_1(x, q^2)$ y simplemente ajustando una constante multiplicativa global son similares a los datos experimentales.

Ahora bien, resulta muy interesante analizar qué sucede para los datos de la colaboración COMPASS, que constituyen una caracterización mucho más precisa de la g_1 protónica [106] para el régimen con $q^2 < 1$ (GeV/c)² y $4 \times 10^{-5} < x < 4 \times 10^{-2}$. Esta región parece bastante más apropiado para comparar con nuestros resultados ya que el formalismo del Pomerón describe procesos con valores muy pequeños de x . Sin embargo, debemos tener en cuenta que también hemos tomado a q como un parámetro mucho mayor a la escala Λ . Por lo tanto, decidimos utilizar únicamente los datos para los que $q^2 > M^2$, tomando como referencia los valores de $M \sim 0,2-0,3$ (GeV/c)² señalados por los ajustes para F_2 en (8.35) y (8.36). Realizamos entonces un ajuste con los quince puntos que cumplen esta restricción. obteniendo los siguientes resultados:

$$\text{modelo conforme} : \quad C = 0,011 \pm 0,002, \quad \chi^2_{d.o.f.} = 1,140 \quad (8.38)$$

$$\text{modelo hard - wall} : \quad C = 0,012 \pm 0,002, \quad \chi^2_{d.o.f.} = 1,074. \quad (8.39)$$

⁵ Por completitud incluimos también con valores del parámetro de Bjorken hasta $x = 0,035$ publicados por las colaboraciones SMC [98], EMC [101], HERMES [102], SLAC E143 [103], E155[104] y CLAS [105].

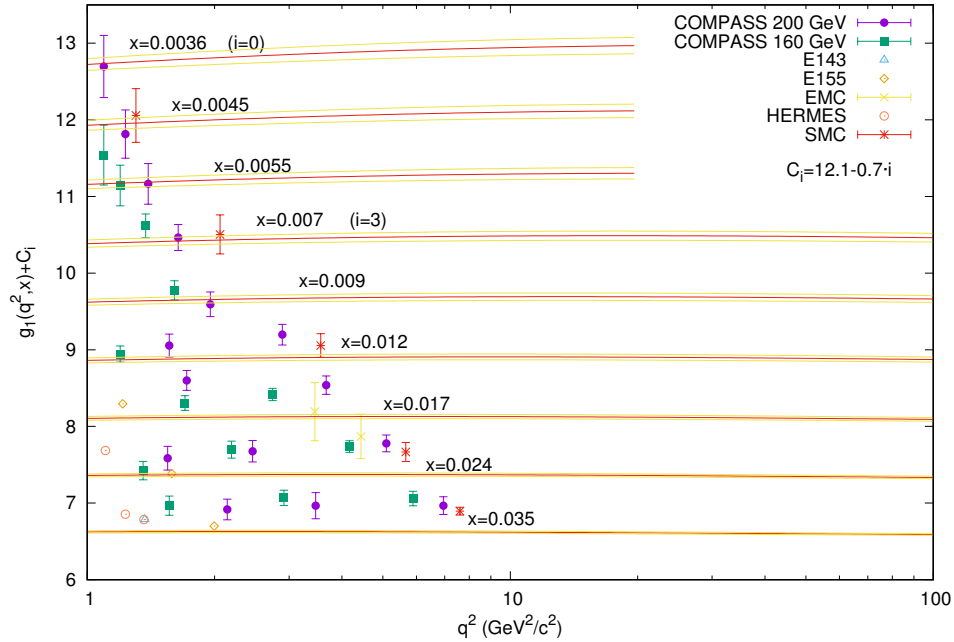


Figura 38: Las curvas coloradas están asociadas a nuestros ajustes para g_1 en función de q^2 y para distintos valores de x . Mostramos también los datos de [99] y los trabajos citados por los autores. Por otro lado, las curvas amarillas caracterizan los errores del parámetro \mathcal{C} . Notamos que para permitir una visión más clara le sumamos una constante $C_i = 12,1 - 0,7i$ a la función g_1 para cada valor de x tanto a los datos como a nuestros resultados.

Como puede verse, en este caso nuestros modelos ajustan los datos de manera casi perfecta. Además, el valor de \mathcal{C} no se ve modificado de manera significativa en comparación con los ajustes anteriores, siendo en todos los casos $\mathcal{C} \simeq 0,01$. Este resultado constituye una predicción de nuestro modelo. Por otro lado, nuevamente vemos que el modelo confinante es más apropiado ya que ajusta mejor los datos con los menores valores de q^2 , para los que las escalas q y M se vuelven comparables. Como un comentario aparte, diremos que sorprendentemente la inclusión de la totalidad de los datos de [106] arroja un resultado razonablemente bueno para el ajuste en el caso del modelo conforme. No sucede lo mismo en el contexto del modelo confinante. Suponemos que esta peculiaridad se debe a los mayores errores asociados a los puntos con los valores más pequeños de q^2 y x . La figura 39 permite visualizar tanto los datos experimentales como nuestras predicciones para la función g_1 asociada a estos nuevos ajustes.

A modo de conclusión, podemos realizar algunos comentarios con respecto a los regímenes de validez de nuestros comparaciones fenomenológicas. El primer conjunto de datos, descrito en la figura 38, corresponde a valores mayores de x y a un rango relativamente grande de valores de q^2 . Por otro lado, los datos más recientes pueden observarse en la figura 39 y están asociados a valores mucho menores del parámetro de Bjorken, aunque los q^2 correspondientes son también pequeños. En ambos casos la cantidad de puntos disponibles es mucho menor al caso de F_2 analizado en [61]. La situación ideal para analizar nuestro modelo consistiría en disponer de puntos con valores muy pequeños de x y valores de q^2 bastante más grandes. Desafortunadamente, este tipo de datos aún no se encuentra disponible. Esperamos que nuestro tratamiento pueda ser realizado de manera mucho más precisa en el futuro cercano. Igualmente, concluimos que los resultados que obtuvimos son alentadores, ya que permiten describir de manera aceptable (y mucho más que aceptable en un rango reducido de datos) la fenomenología del DIS protónica. Además, esta descripción se da de

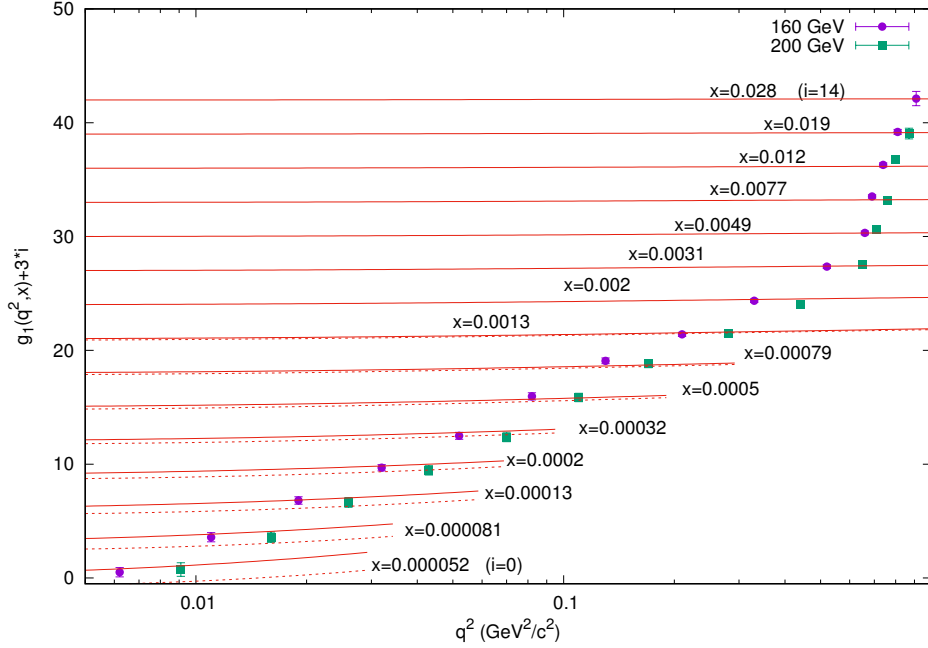


Figura 39: Nuestros ajustes más precisos para la descripción de g_1 en comparación con los datos de [106]. Las curvas continuas corresponden al ajuste conforme, mientras que las líneas punteadas están asociadas al caso hard-wall, que con $\mathcal{C} = 0,0120 \pm 0,0020$ y $\chi^2_{d.o.f.} = 1,074$ constituye el resultado más importante de esta sección. En este caso, sumamos una constante $3i$ a cada uno de los datos y curvas según el valor de x .

manera coherente con la que analizamos en la sección anterior para F_2 .

Finalmente, utilizando los resultados que acabamos de obtener podemos predecir el comportamiento de g_1 en función de x en el régimen de x chico y para distintos valores de q^2 (ver figura 40).

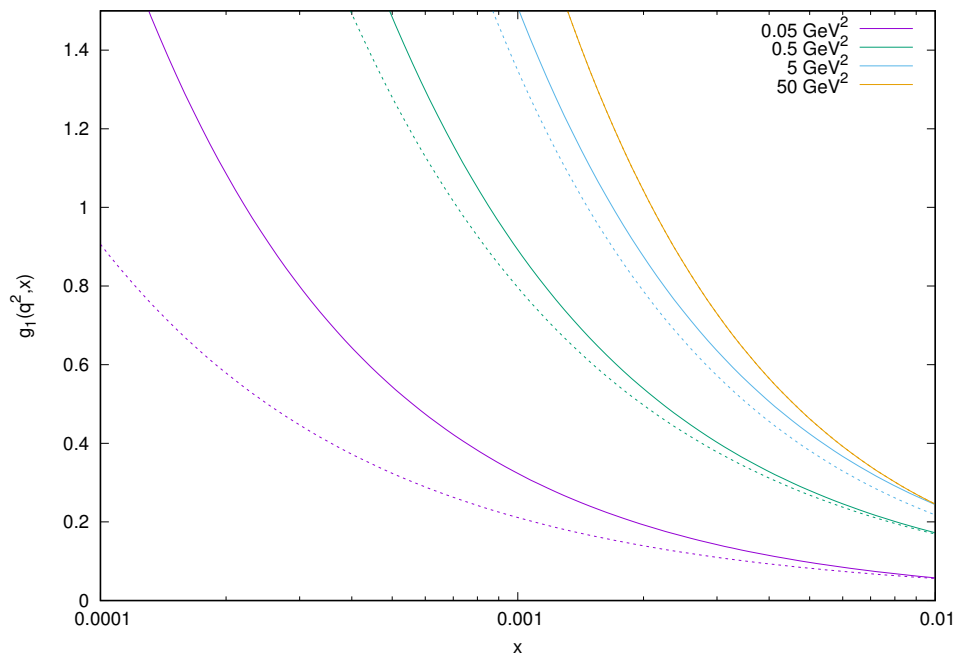


Figura 40: Nuestras predicciones para la dependencia de g_1 con respecto al parámetro de Bjorken x para distintos valores de q^2 . Las líneas continuas corresponden al modelo conforme, mientras que las líneas punteadas corresponden al caso confinante.

Conclusiones y trabajo a futuro

La teoría cuántica de campos representa sin dudas uno de los formalismos más exitosos en la historia de la física de altas energías. Los observables básicos asociados a los experimentos realizados en los aceleradores de partículas están dados por las secciones eficaces de dispersión. El estudio perturbativo de las mismas en combinación con el proceso de renormalización han originado predicciones directas que han sido confirmadas por los experimentos con un nivel de precisión sin precedentes. Sin embargo, el conocimiento que se tiene de las teorías de campos fuera del régimen perturbativo sigue siendo limitado. En efecto, cuando un sistema se vuelve fuertemente acoplado la mayor parte de las técnicas disponibles dejan de ser válidas.

Este problema está lejos de ser de índole exclusivamente teórica: la cromodinámica cuántica, teoría que describe las interacciones que se dan en los núcleos de los átomos que forman la materia que nos rodea y de la que estamos hechos, resulta ser fuertemente interactuante a bajas energías. En este régimen, los quarks y gluones no son los grados de libertad apropiados debido su confinamiento. En cambio, emergen las partículas efectivas que denominamos hadrones: los bariones, como los protones y los neutrones, y los mesones, como el pión y el mesón ρ , entre muchos otros.

Uno de los desafíos más importantes en la física teórica consiste en desarrollar técnicas que se puedan utilizar cuando las expansiones perturbativas fallan. En este sentido, vale la pena mencionar la importancia de las técnicas conocidas bajo los nombres de localización e integrabilidad, que en ciertos casos permiten obtener resultados exactos. Ahora bien, en gran medida, la intuición disponible para la física de los sistemas fuertemente acoplados proviene del concepto de *dualidad*, que ha sido importante tanto para las teorías de campos como para las teorías de cuerdas. En diversas situaciones, las dualidades permite redefinir el problema original en términos de las variables asociadas a un sistema dual débilmente acoplado. En particular, la correspondencia AdS/CFT constituye una herramienta esencial ya que permite expresar los observables de una gran cantidad de teorías de gauge en términos de las teorías de supercuerdas y supergravedad que representan sus correspondientes duales holográficos. En particular, en el régimen en que la cantidad de colores es infinita y el acoplamiento de 't Hooft es no perturbativo la física de la teoría gravitatoria dual es clásica y son despreciables las correcciones de cuerdas. El caso más estudiado es el de $\mathcal{N} = 4$ SYM, dual a las supercuerdas del tipo IIB en $\text{AdS}_5 \times S^5$, y a lo largo de esta tesis hemos considerado principalmente una deformación conocida como modelo *hard-wall*. Si bien está claro que este modelo no es el dual holográfico de QCD (ni siquiera considerando su límite $N \rightarrow \infty$), ambas teorías comparten varios aspectos fenomenológicos. En particular, ambas teorías son confinantes a bajas energías⁶. Por lo tanto, la comparación entre los cálculos realizados a partir de la teoría de cuerdas y los resultados experimentales resulta ser sumamente interesante.

En esta tesis hemos analizado en detalle la descripción holográfica del proceso de DIS. Tomando como punto de partida el modelo original propuesto por Polchinski y Strassler en [2], donde los

⁶En realidad, aquí estamos abusando del lenguaje: el modelo *hard-wall* es una simplificación que da los mismos resultados que diversos modelos para los que esta afirmación sí es válida.

autores consideraron blancos escalares (duales a *glueballs*) en el límite estrictamente planar, hemos extendido el formalismo original con el objetivo de poder describir modelos realistas.

En primer lugar, consideramos el DIS con blancos mesónicos formados por modos en la representación fundamental del grupo de gauge. Estos procesos pueden analizarse en términos de modelos holográficos basados en la inclusión de D-branas de prueba que representan los grados de libertad de sabor. Estudiamos la amplitud de dispersión del proceso dual en un espacio con geometría AdS en el límite planar y en todo el régimen físico del parámetro de Bjorken, incluyendo la región de x pequeño en la que es necesario incluir las contribuciones de los modos masivos de la teoría de cuerdas. En este régimen, presentamos las acciones efectivas correspondientes en base a un razonamiento heurístico y también desde primeros principios, es decir, a partir de las amplitudes de dispersión de las cuerdas. Para esto, fue necesario utilizar amplitudes mixtas con estados externos de cuerdas abiertas y cerradas. De esta manera, obtuvimos las funciones de estructura asociadas a los mesones escalares, pseudoescalares y vectoriales para blancos total o parcialmente polarizados. Calculamos también las secciones eficaces diferenciales del DIS y los momentos asociados a las funciones de estructura universales. Encontramos resultados análogos en los distintos modelos de D-branas analizados, lo que sugiere que se trata de fenómenos universales, válidos para cualquier teoría de campos con grados de libertad mesónicos y con un dual holográfico. Asimismo, realizamos una comparación con los resultados obtenidos a partir de las simulaciones de *lattice QCD*, obteniendo en todos los casos desviaciones menores al 20 % para los mejores ajustes.

En segundo lugar, estudiamos las primeras correcciones no planares al DIS en el régimen de supergravedad. Calculamos las correcciones dominantes a la función de estructura longitudinal en la expansión en potencias de Λ^2/q^2 tanto para los *glueballs* del modelo original como para los mesones escalares en el modelo D3D7. Demostramos que límites de $N \rightarrow \infty$ y $q^2 \rightarrow \infty$ no conmutan. En ambos casos, existe un régimen en el que esta *corrección* en realidad representa la principal contribución al DIS. Utilizamos estos resultados para comparar nuevamente con los datos asociados mesón escalar más liviano, el pión, mostrando que los ajustes realizados anteriormente se veían mejorados, obteniendo errores menores al 1,3 % en comparación con *lattice QCD*. Cabe resaltar que, en principio, en el régimen en el que la aproximación de supergravedad deja de ser válida las correcciones cuánticas pueden incluirse a partir del formalismo eikonal.

En tercer y último lugar, retornamos al modelo original para incluir las contribuciones a las funciones de estructura asociadas a la parte antisimétrica del tensor hadrónico y estudiar en detalle la fenomenología de los blancos fermiónicos. Utilizando nuevamente amplitudes de teoría de cuerdas, esta vez incluyendo estados entrantes/salientes asociados a modos de R-R y de NS-R, mostramos que el proceso relevante está dado por el intercambio de un bosón de gauge *reggeizado* en el canal t . El término de Chern-Simons de la acción efectiva de la teoría gravitatoria en cinco dimensiones juega un papel preponderante en este contexto. Finalmente, adaptamos el formalismo del Pomerón al estudio de este proceso en el régimen en el que $x \sim \exp(-\lambda^{1/2})$, donde la energía en el sistema centro de masa se vuelve muy alta, rompiendo la aproximación local y generando un proceso de difusión en la dirección radial. En este régimen se obtiene para la amplitud de dispersión una expresión formalmente similar a la que produce el formalismo BFKL en un contexto perturbativo. Bajo ciertas aproximaciones, esto permite tomar cuatro parámetros como libres para realizar un ajuste con los resultados experimentales asociados al DIS protónico similar al de [61]. En este contexto, obtuvimos una descripción muy satisfactoria de los datos relacionados con la función de estructura polarizada $g_1(x, q^2)$ consistente con los resultados presentados en [61] para $F_2(x, q^2)$.

Los cálculos realizados y resultados obtenidos en esta tesis abren el camino a diversos proyectos a futuro, algunos de los cuales describimos brevemente a continuación:

- Sería interesante utilizar las técnicas desarrolladas para el estudio de correcciones no planares

en el régimen de supergravedad en el caso de los blancos escalares para analizar el caso de los mesones vectoriales. En particular, en el caso del mesón ρ resultaría de suma importancia mostrar que los resultados de los ajustes también mejoran al incluir este tipo de correcciones.

- En un plano más teórico, sería importante poder conectar las correcciones cuánticas en el régimen de x pequeño con las amplitudes de teoría de cuerdas asociadas a topologías con *genus* $g > 0$. Sin embargo, para esto es necesario tener en cuenta la geometría curva y la presencia de flujos de R-R en la solución clásica.
- Los resultados obtenidos para los protones en la región del Pomerón demuestran que existe un régimen en el que la universalidad de los procesos gravitatorios permite tratar incluso el caso bariónico. Es necesario ver hasta qué punto pueden extrapolarse este tipo de comparaciones. Por otro lado, un tratamiento teórico para los bariones requiere considerar los vértices bariónicos, asociados a estados con D-branas en la teoría dual.
- Finalmente, sería interesante aplicar las técnicas holográficas a la descripción de otros procesos de dispersión para los que se disponga de una cantidad considerable de datos experimentales. En este contexto vale la pena destacar el proceso de Drell-Yan.

Para concluir, podemos decir que uno de los objetivos principales de esta línea de investigación consiste en poder identificar las continuidades y rupturas entre los regímenes de acoplamiento fuerte y débil, tanto en el régimen planar como incluyendo las correcciones en potencias de $1/N$. Sería de gran importancia tener una descripción de los procesos hadrónicos que permita interpolar entre ambos regímenes. Un primer paso en este sentido está dado en el contexto de Pomerón, en el que por ejemplo el espín efectivo de la partícula intercambiada en el canal t , denominado j_0 , toma valores de la forma $1 + \mathcal{O}(\lambda)$ y $2 - \mathcal{O}(\lambda^{-1/2})$ en acoplamiento débil y fuerte, respectivamente, y donde hemos presentado en el texto la forma explícita de las primeras correcciones en ambos casos. Para esto, es necesario extender la descripción holográfica a valores más generales de la constante de 't Hooft λ .

Apéndice A

Convenciones generales

A lo largo de esta tesis trabajamos con espacios con distinta dimensionalidad y geometrías variables, sobre los que estarán definidas diversas teorías cuánticas de campos, modelos de (super)gravedad y teorías de (super)cuerdas. En este breve apéndice presentamos las convenciones que utilizamos a lo largo del texto.

- Trabajamos siempre con la signatura $(-, +, \dots, +)$. Esto es válido para los espacios Mink_4 , AdS_5 y $\text{AdS}_5 \times S^5$, que tienen cuatro, cinco y diez dimensiones espacio-temporales, respectivamente. La única excepción viene dada por la métrica de S^5 , que obviamente es euclídea.
- Los índices $\mu, \nu, \dots = 0, \dots, 3$ corresponden al espacio de Minkowski de cuatro dimensiones asociado al borde conforme de AdS_5 .
- Los índices $M, N, \dots = 0, \dots, 9$ corresponden a las diez coordenadas de la teoría dual: la supergravedad de tipo IIB.
- Los índices $m, n, \dots = 0, \dots, 4$ corresponden a las coordenadas del espacio AdS_5 .
- Los índices $a, b, \dots = 1, \dots, 5$ corresponden a las coordenadas de la 5-esfera interna. Igualmente, en algunas ocasiones utilizamos estas $a, b, \dots = 1, \dots, N^2 - 1$ para referirnos a los índices de color de la teoría de gauge.
- Los índices $A, B, \dots = 1, \dots, 15$ corresponden a los generadores del álgebra de Lie del grupo de simetría R de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM. Utilizando el cambio de base apropiado estos generadores pueden identificarse con los del grupo de isometrías de la cinco-esfera, dado por $SO(6)$.
- Los índices α, β, \dots caracterizan genéricamente las componentes espinoriales (en cualquier dimensión).
- En la convención descrita en el primer punto, los fermiones satisfacen ecuaciones de Dirac cuya forma genérica puede escribirse como $-\not{D}\psi = m\psi$. En este contexto, y utilizando los índices que definiremos, llamamos γ^μ , Γ^M , γ^m y τ^a a las diferentes matrices de Dirac involucradas. En contadas ocasiones utilizaremos σ_i o $\sigma_\mu = (1, \vec{\sigma})$ para referirnos a las matrices de Pauli en su forma usual.
- En las acciones gravitatorias, tomaremos una normalización del tipo

$$S = \frac{1}{2\kappa_d^2} \int d^d x \sqrt{-g_d} [R_d(g_d) + \dots],$$

donde κ_d es la constante de Einstein en la dimensión apropiada, g_d es la métrica correspondiente y R_d el escalar de Ricci construido a partir de la misma. Los puntos suspensivos incluyen a los distintos campos de la correspondiente teoría de supergravedad, generalmente definida en AdS_d . Si llamamos genéricamente Φ a estos campos, definimos a sus perturbaciones ϕ según $\Phi = \Phi_0 + \sqrt{2\kappa_d} \phi$. De esta manera, los términos cinéticos de las perturbaciones quedan canónicamente normalizados.

Apéndice B

Algunos detalles sobre la dualidad de Maldacena

La teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM

En esta sección repasamos algunas de las características fundamentales de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM. Para esto, nos basamos en principalmente en [18]¹.

El modelo en el que estamos interesados constituye la teoría cuántica de campos maximalmente supersimétrica en cuatro dimensiones. Se trata de una teoría de Yang-Mills con grupo de gauge $SU(N)$ cuyo contenido de campos está dado por

- Los bosones de gauge A_μ .
- Cuatro fermiones de Weyl izquierdos λ_p , con $p = 1, \dots, 4$ en la representación fundamental del grupo $SU(4)$ asociado a la simetría R , que pueden juntarse en un único espinor de Majorana-Weyl de 16 componentes Ψ .
- Seis escalares reales $X_{pq} = -X_{qp}$ pertenecientes a la representación adjunta de $SU(4)$, que también podemos llamar X_i con $i = 1, \dots, 6$.

Todos los campos están en la representación adjunta del grupo de gauge. La acción de la teoría es la siguiente:

$$S_{\mathcal{N}=4} = \frac{1}{2g_{\text{YM}}^2} \int d^4x \text{Tr} \left[-\frac{1}{2} (F_{\mu\nu})^2 + (D_\mu X_i)^2 + i \bar{\Psi} \Gamma^\mu D_\mu \Psi \right. \\ \left. - \sum_{i < j} [X_i, X_j]^2 - \bar{\Psi} \Gamma^i [X_i, \Psi] \right], \quad (\text{B.1})$$

con $D_\mu \equiv \partial_\mu - iA_\mu$, $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$ y hemos repartido las matrices Γ según² $\Gamma^M = (\Gamma^\mu, \Gamma^i)$. La aparición de la notación usual para teorías en diez dimensiones no es casual: la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM en cuatro dimensiones puede pensarse como la reducción dimensional del modelo $\mathcal{N} = 1$ SYM en diez dimensiones.

¹Elegimos seguir las convenciones que utilizan los autores [49]. En particular, notamos que la signatura elegida para la métrica es la opuesta a la que utilizamos en el cuerpo de la tesis.

²Estrictamente hablando, estas matrices son tienen 16×16 componentes, pues se trata del sector de quiralidad izquierda de las Γ^M de 32×32 que definimos más arriba.

La acción (B.1) es clásicamente invariante de escala. Esta simetría se mantiene a nivel cuántico. El grupo de Lie de simetrías se conoce bajo el nombre de $PSU(2, 2|4)$, y contiene al grupo de Lorentz, al de las simetrías conformes y al de las supersimetrías.

El potencial escalar de la teoría indica que cualquier solución clásica debe satisfacer $[X_i, X_j] \neq 0$ $\forall i, j$. Tenemos entonces dos fases posibles:

- La fase superconforme, caracterizada por $\langle X_i \rangle = 0 \ \forall i$.
- La fase de Coulomb, donde alguno o varios de los escalares adquieren un valor de expectación no nulo, rompiendo espontáneamente parte de las simetrías.

Cabe destacar que en esta tesis utilizaremos modelos en los que esta teoría describe la física solamente en el UV. Igualmente, en el caso simplificado del modelo *hard-wall* la información sobre las simetrías y el espectro será de gran utilidad incluso para energías no tan altas.

Supercuerdas y supergravedad IIB en $AdS_5 \times S^5$

En esta sección repasamos algunas de las características principales de la supergravedad y de las supercuerdas del tipo IIB en diez dimensiones, teniendo en mente que nos interesan principalmente sus formulaciones en un fondo $AdS_5 \times S^5$.

Comenzemos por el caso gravitatorio, que describe la fenomenología de bajas energías de las cuerdas fundamentales. En principio, la teoría IIB en diez dimensiones tiene $\mathcal{N} = 2$ supersimetrías y un espectro (no masivo) formado por

- La métrica G_{MN} .
- Un escalar complejo formado por el dilatón Φ y el axión a .
- Dos 2-formas B_{MN} y A_{MN} , constituidas por modos de NS-NS y de R-R, respectivamente. Las curvaturas correspondientes suelen llamarse H_3 y F_3 .
- Una 4-forma A_4 de R-R, cuya curvatura \mathcal{F}_5 debe ser auto dual.
- Dos gravitinos Ψ_M^I de Majorana-Weyl, con $I = 1, 2$.
- Dos dilatinos Ψ^I de Majorana-Weyl.

Se trata de una teoría quirral. La parte bosónica de la acción en el Einstein *frame* es la siguiente:

$$S_{\text{IIB}} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} \left[R(G) - \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{1}{12} e^{-\Phi} H_3^2 - \frac{1}{2} e^{2\Phi} (\partial_\mu a)^2 \right. \\ \left. - \frac{1}{12} e^\Phi \tilde{F}_3^2 - \frac{1}{240} \tilde{F}_5^2 \right] + \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int A_4 \wedge F_3 \wedge H_3, \quad (\text{B.2})$$

con $\tilde{F}_3 \equiv F_3 - a H_3$ y $\tilde{F}_5 \equiv \mathcal{F}_5 + A_2 \wedge H_3$. Esta acción debe estar suplementada por la condición de autodualidad de \mathcal{F}_5 .

La solución que nos interesa tiene una geometría $AdS_5 \times S^5$. Además el campo escalar es constante y la \mathcal{F}_5 es proporcional a la suma de las formas de volumen de AdS y de la esfera³. El resto de los campos tienen valores de expectación nulos.

³Hemos indicado la métrica y algunos otros detalles en el capítulo 1, ecuaciones (1.7) y (1.8).

Los modos que acabamos de describir constituyen únicamente el sector no masivo del espectro de las cuerdas fundamentales. La física de las mismas puede definirse en base a una teoría conforme sobre las dos dimensiones de la hoja de mundo. El único parámetro libre de la teoría es la longitud fundamental l_s , y en el límite $\alpha' = l_s^2 \rightarrow 0$ recuperamos a la teoría de supergravedad como descripción efectiva. En particular, las ecuaciones de movimiento asociadas a (B.2) pueden reinterpretarse como las funciones beta del modelo sigma no lineal. Existen, además, cantidad infinita de modos con masas proporcionales a $1/\alpha'$ y espines crecientes. La evolución de los espines es lineal, siguiendo trayectorias similares a las de la teoría de Regge. Por otro lado, el valor de expectación del dilatón define el parámetro de expansión de las amplitudes en términos de los distintos tipos de variedades riemannianas (euclídeas) de dos dimensiones, dándole una mayor importancia a las que tienen un número menor de *manijas*.

Espectro y diccionario holográfico

En esta sección estudiamos el espectro que se obtiene para la teoría gravitatoria en el contexto de la solución $\text{AdS}_5 \times S^5$. En primer lugar, obtener este espectro es importante para entender cómo funciona en detalle la dualidad AdS/CFT en este ejemplo concreto, estableciendo el denominado *diccionario holográfico*. En segundo lugar, también resulta esencial para el objetivo principal de esta tesis: estudiar el proceso de Deep Inelastic Scattering desde el punto de vista dual.

A la hora de estudiar el espectro de la supergravedad IIB en $\text{AdS}_5 \times S^5$ resulta práctico partir del punto de vista diez-dimensional y pensar en la teoría efectiva que se obtiene en cinco dimensiones luego de compactificar en la 5-esfera. El estudio completo fue realizado en detalle en [53] mucho antes de la publicación de la conjetura de Maldacena. Aquí simplemente repasamos algunos detalles de los procedimientos involucrados. Concentrémonos en los campos bosónicos de la teoría: la métrica $G_{MN} = g_{MN} + h_{MN}$ ⁴, un campo escalar complejo ϕ y la 4-forma de Ramond-Ramond (RR) A_4 . En este caso, $\mathcal{F}_5 = dA_4$ es el único campo que tiene un perfil no trivial en el background, además de la métrica, dado que

$$\mathcal{F}_{5,mnopq} = \frac{1}{R} \epsilon_{mnopq}, \quad \mathcal{F}_{5,abcde} = \frac{1}{R} \epsilon_{abcde}, \quad (\text{B.3})$$

con ϵ representa al pseudo-tensor de Levi-Civita. Queremos estudiar las fluctuaciones de estos campos, para lo cual necesitamos obtener las ecuaciones de movimiento al orden cuadrático. Estas fluctuaciones pueden expandirse en armónicos esféricos sobre la esfera S^5 siguiendo el método usual de las compactificaciones de Kaluza-Klein, generando diversas torres de modos escalares, vectoriales y tensoriales desde el punto de vista de AdS_5 ⁵. Denotaremos a los distintos armónicos esféricos como $Y^l(\Omega)$, $Y_a^l(\Omega)$, $Y_{(a,b)}^l(\Omega)$, $Y_{[a,b]}^l(\Omega)$, respectivamente, donde el uso de paréntesis en los sub-índices indica que se encuentran simetrizados y con la traza removida, mientras que el uso de corchetes indica que se encuentran antisimetrizados. Todos estos armónicos son autofunciones del laplaciano angular en la esfera ∇^2 de manera tal que

$$\nabla^2 Y^l(\Omega) = -\frac{1}{R^2} k(k+4) Y^l(\Omega), \quad (\text{B.4})$$

para algún entero k . En contraposición a ∇^2 , utilizaremos el símbolo \square para indicar el laplaciano

⁴El significado de los distintos tipos de índices que utilizamos aquí y a lo largo de este trabajo se encuentran detallados en el apéndice A.

⁵Una descripción detallada de estos objetos puede encontrarse, por ejemplo, en el apéndice B de [65].

en AdS_5 . Comenzando con el caso de la métrica, separamos las distintas componentes según

$$\begin{aligned} G_{mn} &= g_{mn}^{(\text{AdS})} + \tilde{h}_{mn}, & \tilde{h}_{mn} &= h_{mn} - \frac{1}{3} g_{mn}^{(\text{AdS})} h_a^a, \\ G_{ma} &= h_{ma}, & G_{ab} &= g_{ab}^{S^5} + h_{ab}, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

y fijando condiciones de gauge tipo De Donder

$$D^a h_{(ab)} = 0, \quad D^a h_{am} = 0, \quad (\text{B.6})$$

obtenemos

$$\begin{aligned} h_{mn}(y, \Omega) &= \sum_l H_{mn}^l(y) Y^l(\Omega), & h_{ma}(y, \Omega) &= \sum_l A_m^l(y) Y_a^l(\Omega), \\ h_{(ab)}(y, \Omega) &= \sum_l \phi^l(y) Y_{(ab)}^l(\Omega), & h_a^a(y, \Omega) &= \sum_l \pi^l(y) Y^l(\Omega), \end{aligned}$$

donde y indica de manera genérica la dependencia en las coordenadas en AdS_5 , mientras que Ω representa la dependencia angular asociada a las coordenadas esféricas. Para las fluctuaciones de los demás campos se obtienen expresiones similares. Por ejemplo, las componentes vectoriales de las fluctuaciones de A_4 toman la forma

$$a_{mabc}(y, \Omega) = \sum_l a_m^l(y) \epsilon_{abc}{}^{de} D_d Y_e^l(\Omega). \quad (\text{B.7})$$

Si bien estas expansiones simplifican considerablemente la forma de las ecuaciones de movimiento linealizadas, aún son necesarios algunos pasos para poder desacoplarlas: los modos que las diagonalizan resultan ser, en algunos casos, combinaciones lineales de las fluctuaciones originales. Al final del día, encontramos una serie de torres de partículas de KK, cada una con su respectiva fórmula de masa m_{KK} . En particular, los modos del escalar complejo, la métrica y de la 4-forma se combinan entre sí dando lugar a tres torres de partículas escalares, dos vectoriales y una tensorial. Las principales propiedades y números cuánticos de dichas partículas pueden observarse en la tabla B.1⁶. Notemos que el primer modo (no masivo) en la torre asociada a $h_{(mn)}$ corresponde al gravitón en AdS_5 .

Veremos en detalle más adelante cómo se obtienen las soluciones clásicas asociadas a cada uno de estos modos, pero por ahora alcanza con decir que todos los modos (bosónicos) normalizables tienen una forma similar: las perturbaciones definidas por un cuadri-momento p^μ toman la forma genérica

$$\Phi_{m_1 \dots} \sim \epsilon_{m_1 \dots} e^{ip \cdot x} z^\alpha J_{\Delta(k)-2}(pz) Y^{l(k)}(\Omega) \quad (\text{B.8})$$

para alguna potencia entera α y algún tensor de polarización $\epsilon_{m_1 \dots}$. Las funciones $J_\nu(x)$ no son otra cosa que funciones de Bessel de primera especie.

Convenciones para los vectores de Killing en la esfera

En esta sección describimos de manera detallada la relación entre los vectores de Killing de la esfera S^5 y los generadores de $SU(4)$. Las expresiones que obtenemos son importantes en el contexto de las contribuciones antisimétricas al DIS en el régimen de $x \ll \lambda^{-1/2}$.

⁶En esta tabla simplemente presentamos la información de algunos de los modos relevantes para este trabajo. Un conjunto más completo de datos puede encontrarse en las referencias [18, 53].

Campo	espín	Compuesto por	$m_{KK}^2(k)$	$\Delta(k)$	\mathcal{O}_{QFT}	$SU(4)_R$
ϕ	(0,0)	ϕ	$k(k+4), k \geq 0$	$k+4$	$\text{Tr}(F^2 X^k)$	$(0, k, 0)$
s	(0,0)	h^a_a, a_{abcd}	$k(k-4), k \geq 2$	k	$\text{Tr}(X^k)$	$(0, k, 0)$
t	(0,0)	h^a_a, a_{abcd}	$(k+4)(k+8), k \geq 0$	$k+8$	$\text{Tr}(F^2 \tilde{F}^2 X^k)$	$(0, k, 0)$
Ω	(0,0)	$h_{(ab)}$	$k(k+4), k \geq 2$	$k+4$	$\text{Tr}(\lambda \lambda \bar{\lambda} \bar{\lambda} X^k)$	$(2, k-2, 2)$
A_m	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	h_{ma}, a_{mabc}	$(k-1)(k+1), k \geq 1$	$k+3$	$\text{Tr}(\lambda \bar{\lambda} X^k)$	$(1, k-1, 1)$
B_m	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	h_{ma}, a_{mabc}	$(k+3)(k+5), k \geq 1$	$k+7$	$\text{Tr}(F \tilde{F} \lambda \bar{\lambda} X^k)$	$(1, k-1, 1)$
$h_{(mn)}$	(1,1)	$h_{(mn)}$	$k(k+4), k \geq 0$	$k+4$	$\text{Tr}(F \tilde{F} X^k)$	$(0, k, 0)$

Tabla B.1: Algunas características de las fluctuaciones de los campos de la supergravedad IIB en un fondo $\text{AdS}_5 \times S^5$ relevantes para este trabajo. El entero k indica la representación irreducible del grupo $SO(6) \sim SU(4)_R$ y define la correspondiente masa de KK. También se indica el operador de la CFT asociado a cada uno de los modos en cuestión, junto con la relación entre k y la dimensión de escaleo Δ .

El álgebra de Lie de $SU(4)$ está dada por el conjunto de las matrices de 4×4 hermíticas y de traza nula. La base canónica está dada $\{T_A; A = 1, \dots, 15\}$, donde por ejemplo

$$T_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{15} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.9})$$

son los tres generadores diagonales. Las matrices T^A satisfacen la relación una relación de ortonormalidad y las relaciones de conmutación

$$\text{Tr}(T_A T_B) = \frac{1}{2} \delta_{AB}, \quad [T_A, T_B] = i f_{ABC} T_C, \quad (\text{B.10})$$

donde son las constantes de estructura están representadas por el tensor completamente anti-simétrico f_{ABC} . En los casos $SU(n \geq 3)$ también resulta útil tener en cuenta al símbolo totalmente simétrico d_{ABC} , que aparece en las relaciones de anti-conmutación. En términos de los generadores, estos objetos están definidos según

$$f_{ABC} = -2i \text{Tr}(T_A [T_B, T_C]), \quad d_{ABC} = 2 \text{Tr}(T_A \{T_B, T_C\}). \quad (\text{B.11})$$

$SU(4)_R$ es el grupo asociado a la simetría R de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM, donde el símbolo d_{ABC} aparece por ejemplo en los términos anómalos de las funciones de correlación tres corrientes J_R^A (ver en el capítulo 5). En términos de la dualidad AdS/CFT, esto se traduce en su presencia en el término de Chern-Simons de la teoría gravitatoria [15, 51, 52]. En cuanto a la descripción holográfica del DIS, hemos visto la corriente electromagnética generalmente se simula *gaugeando* un subgrupo $U(1) \subset SU(4)$, asociado al generador T_3 [44, 45]. Por lo tanto, son de interés las componentes d_{33C} . Las únicas que resultan ser distintas de cero son $d_{338} = 1/\sqrt{3}$ y $d_{33,15} = 1/\sqrt{6}$.

Por otro lado, en la geometría dual la simetría R se ve realizada a través del grupo de isometrías de la cinco-esfera, $SO(6)$, que es isomorfo a $SU(4)$. En este contexto, en general se maneja una

base distinta definida por los quince vectores de Killing $K_{[ij]}$, con $i, j = 1, \dots, 6$. La notación refiere a las coordenadas x^i de un \mathbb{R}^6 en el que podemos embeber a la S^5 , en términos de las cuales los estos vectores pueden escribirse como

$$K_{[ij]} = x^i \partial_j - x^j \partial_i, \quad i, j = 1, \dots, 6, \quad (\text{B.12})$$

El mapa explícito entre estos vectores y las matrices T diagonales es el siguiente

$$\begin{aligned} T_3 \leftrightarrow K_3 &= 2i (K_{[14]} + K_{[26]}) , \quad T_8 \leftrightarrow K_8 = \frac{i}{2\sqrt{3}} (K_{[14]} - K_{[26]} + 2K_{[35]}) , \\ T_{15} \leftrightarrow K_{15} &= \frac{i}{\sqrt{6}} (-K_{[14]} + K_{[26]} + K_{[35]}) . \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Los vectores K_{ij} están normalizados según

$$\int_{S^5} d^5 \Omega \sqrt{g_{S^5}} K_A^a K_B^b g_{ab}(S^5) = -\frac{\pi^3 R^7}{6} \delta_{AB} . \quad (\text{B.14})$$

A partir de los mismos podemos definir un nuevo símbolo simétrico $\tilde{d}_{[ii'][jj'] [kk']} \equiv \varepsilon_{ii' jj' kk'}$ que toma valores ± 1 o 0 . En particular, se satisface la identidad

$$\varepsilon_{ii' jj' kk'} = \frac{3}{4\pi^3 R^6} \int_{S^5} d^5 \Omega \varepsilon^{abcde} K_a^{[ii']} \partial_b K_c^{[jj']} \partial_d K_e^{[kk']} , \quad (\text{B.15})$$

que permite deducir el término de CS en la acción de la supergravedad (a menos de por las contribuciones que provienen de diagramas a un *loop*) [54]. En la base $\{K_A\}$ esta identidad toma la forma de una expresión integral que define a d_{ABC} en términos del pseudo-tensor de Levi-Civita y los vectores de Killing:

$$d_{ABC} = \frac{3i}{2\pi^3 R^6} \int_{S^5} d^5 \Omega \varepsilon^{abcde} K_a^A \partial_b K_c^B \partial_d K_e^C . \quad (\text{B.16})$$

Por completitud, escribimos una última identidad que será de utilidad en el capítulo 5, dada por

$$\varepsilon^{abcde} \partial_a K_b^A \partial_c K_d^B = \frac{4i}{R} d_{ABC} K_C^e . \quad (\text{B.17})$$

Los distintos modos en AdS_5

En esta sección repasamos brevemente la forma de las soluciones de los distintos modos bosónicos en AdS_5 y sus derivaciones. En el caso no masivo nos basamos en la descripción de [107].

Una vez expandidos los distintos campos de la supergravedad, las fluctuaciones sobre el fondo $\text{AdS}_5 \times S^5$ pueden expandirse en armónicos esféricos de la cinco-esfera S^5 . En el caso bosónico, generamos de esta manera distintas torres de Kaluza-Klein de modos escalares, vectoriales y tensoriales en AdS_5 . Como es usual, las correspondientes masas de KK (que aquí llamaremos genéricamente m) vienen dadas por diferentes expresiones a partir los autovalores con respecto al laplaciano angular. Por otro lado, es útil pasar al espacio de momentos en las direcciones planas de AdS .

Comencemos con los modos escalares. Como siempre, satisfacen una ecuación de Klein-Gordon masiva

$$(\square - m^2)\phi(x, z) = 0 \Rightarrow [z^2 \partial_z^2 - 3z \partial_z + (z^2 p^2 - R^2 m^2)] \phi^{(p)}(z) = 0 , \quad (\text{B.18})$$

con $p^2 = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$. En el caso no masivo esta ecuación es equivalente las soluciones son de la forma

$$\begin{aligned}\phi^{(p)}(z) &\sim z^2 J_2(pz) \text{ normalizable,} \\ \phi^{(p)}(z) &\sim z^2 Y_2(pz) \text{ no normalizable,}\end{aligned}\tag{B.19}$$

donde $p \equiv \sqrt{-p^2}$, J e Y son funciones de Bessel de primera y segunda especie, respectivamente. Dado que los únicos modos no normalizables que aparecen en el contexto del DIS son los del fotón dual, que describimos en detalle en el lenguaje de [2] en el cuerpo de la tesis y repasamos en el apéndice C en el lenguaje que estamos utilizando aquí, en lo que resta de este apéndice nos centramos en los modos normalizables. Cuando $m^2 \neq 0$ tenemos

$$\phi^{(p)}(z) \sim z^2 J_{\sqrt{4+R^2 m^2}}(pz) .\tag{B.20}$$

En general, para las fluctuaciones escalares la dimensión de escaleo $\Delta \geq 2$ del operador asociado en la QFT del borde está relacionada con la masa según $m^2 = R^{-2} \Delta(\Delta - 4)$. Por lo tanto, el índice de las funciones de Bessel no es otra cosa que $\sqrt{4 + R^2 m^2} = \Delta - 2$. Por otro lado, los propagadores asociados a estos modos están dados por

$$\begin{aligned}G(x, z; x', z') &= \frac{1}{\text{Vol}(S^5) R^3} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} G^{(p)}(z, z') e^{ip \cdot (x - x')} \\ &= -\frac{i}{\pi^3 R^8} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{dM^2}{2} \frac{z^2 J_{\Delta-2}(Mz) z'^2 J_{\Delta-2}(Mz') e^{ip \cdot (x - x')}}{p^2 + M^2 - i\epsilon} .\end{aligned}\tag{B.21}$$

Es sencillo ver que (B.21) satisface la identidad

$$\square G(x, z; x', z') = \frac{i}{\sqrt{-g_{\text{AdS}_5}}} \delta^4(x - x') \delta(z - z') ,\tag{B.22}$$

usando

$$\int dz z J_\nu(Mz) J_\nu(M'z) = \frac{1}{M} \delta(M - M') .\tag{B.23}$$

Cabe destacar que en el modelo *hard-wall* tenemos un *cutoff* z_0 en la dirección radial del AdS, donde necesitamos imponer condiciones de contorno para nuestros modos normalizables. Eligiendo condiciones de Dirichlet, esto implica que los p sólo pueden tomar valores tales que los productos $p z_0$ sean un cero de la correspondiente función de Bessel.

En cuanto a las fluctuaciones vectoriales, que denotaremos genéricamente A_m , es necesario resolver las ecuaciones de Einstein-Maxwell fijando alguna condición de gauge. Elegimos el gauge axial, en el que $A_z = 0$. Obtenemos entonces

$$[z^2 \partial_z^2 - z \partial_z + (z^2 p^2 - R^2 m^2)] A_\mu^{(p)} = 0 \text{ y } \eta^{\mu\nu} p_\mu A_\nu^{(p)} = 0 ,\tag{B.24}$$

donde la segunda ecuación sólo es válida en el caso normalizable. Las soluciones masivas de este sistema de ecuaciones son

$$A_\mu^{(p)}(z) \sim \epsilon_\mu z J_{\sqrt{1+R^2 m^2}}(pz) \text{ con } p \cdot \epsilon = 0 .\tag{B.25}$$

En este caso, $m^2 = R^{-2}(\Delta - 1)(\Delta - 3)$ por lo que el índice de la función de Bessel es nuevamente $\sqrt{1 + R^2 m^2} = \Delta - 2$. Por lo tanto, al menos en las direcciones planas la única con el caso escalar está en la potencia de z (más allá de la presencia del vector de polarización).

Finalmente, consideramos las fluctuaciones tensoriales $h_{\mu\nu}$. Sólomente hay una torre de KK de este tipo, en cuya base se encuentra el gravitón en AdS_5 . Elegimos nuevamente el gauge axial, que en este caso impone $h_{\mu z} = 0$ y selecciona una vez más los modos con polarización transversal. Las ecuaciones de movimiento son

$$\left[z^2 \partial_z^2 + z \partial_z + (z^2 p^2 - 4 - R^2 m^2) \right] h_{\mu\nu}^{(p)} = 0 \quad \text{y} \quad \eta^{\mu\nu} p_\mu h_{\mu\sigma}^{(p)} = 0, \quad (\text{B.26})$$

de manera que nos quedamos sólomente con las fluctuaciones simétricas y de traza nula. De esta manera, las soluciones son las siguientes:

$$h_{\mu\nu}^{(p)}(z) \sim E_{\mu\nu} J_{\sqrt{4+R^2 m^2}}(pz) \quad \text{con} \quad \eta^{\nu\sigma} p_\nu E_{\sigma\mu} = \eta^{\nu\sigma} p_\nu E_{\mu\sigma} = 0, \quad \eta^{\mu\nu} E_{\mu\nu} = 0, \quad E_{\mu\nu} = E_{\nu\mu}, \quad (\text{B.27})$$

Una vez más, la potencia de z es distinta mientras que los índices de las funciones de Bessel son de la forma $\Delta - 2$.

Las normalizaciones canónicas de los modos escalares en el modelo hard-wall están discutidas en el apéndice de [3] y repasadas en detalle en el capítulo 3. En tanto, las normalizaciones de los modos vectoriales y tensoriales se definen de manera análoga.

Apéndice C

DIS holográfico en el gauge axial

En esta sección analizamos el proceso dual al DIS en el régimen donde es válida la aproximación de supergravedad y en el gauge axial.

Por empezar, imponemos desde el principio $A_z = 0$. Proponiendo una solución del tipo $A_\mu = c_\mu e^{ik \cdot x} f(z)$ en las ecuaciones de Einstein-Maxwell en AdS_5 e imponiendo las condiciones de contorno relevantes asociadas a que en el contexto del DIS A_m representa una perturbación inducida por la inserción de la corriente en el borde de AdS , de manera que nos interesa el modo no normalizable, obtenemos la solución presentada en 3.10 Recordemos que en el gauge de Lorentz se obtiene $c_\mu = n_\mu$ (y $A_z \neq 0$ cuando $n \cdot q \neq 0$). Ahora bien, a partir de la corriente asociada al dilatón el término de interacción se escribe como

$$\begin{aligned} S_{A\phi\phi} &= i\mathcal{Q} \int d^{10}x \sqrt{-g} A^m J_m = i\mathcal{Q} \int d^{10}x \sqrt{-g} A^\mu J_\mu \\ &= i\mathcal{Q} \int d^{10}x \sqrt{-g} \phi_I \phi_X^* A^\mu (2P_\mu + q_\mu) , \end{aligned}$$

donde identificamos un término asociado a la parte de la solución proporcional a una función de Bessel y otro proveniente de la parte constante de A_μ . La primera de estas contribuciones genera un integrando idéntico al que obtuvimos trabajando en el gauge de Lorentz, dado por $z^\Delta J_{\Delta-2}(s^{1/2}z) K_1(qz)$. Dado que

$$c^\mu (2P_\mu + q_\mu) = \left(n_\mu - \frac{(q \cdot n)}{q^2} q_\mu \right) (2P^\mu + q^\mu) = 2n \cdot \left(P + \frac{q}{2x} \right) , \quad (\text{C.1})$$

vemos que este término origina en su totalidad la amplitud final presentada en [2]. Esto quiere decir que la segunda contribución debería anularse. En efecto, esto es lo que sucede. Para verlo, notamos que debido a la ausencia de la función de Bessel en el segundo término de (3.10) el A_μ involucrado en esta contribución no decae lo suficientemente rápido en el interior de AdS como para permitirnos utilizar la forma asintótica de las soluciones escalares asociadas a los estados entrantes. En concreto, la integral en z toma la forma

$$\begin{aligned} &\int_0^{z_0} dz z J_{\Delta-2}(s^{1/2}z) J_{\Delta-2}(Pz) = \\ &\frac{z_0}{s - P^2} \left[s J_{\Delta-3}(s^{1/2}z_0) J_{\Delta-2}(Pz_0) - P J_{\Delta-2}(s^{1/2}z_0) J_{\Delta-3}(Pz_0) \right] . \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Sabemos que $J_{\Delta-2}(Pz) =$ debe anularse en z_0 por la condición de normalización. Esto demuestra que la contribución extra que aparece trabajando en el gauge axial efectivamente se anula.

Bibliografía

- [1] Juan Martin Maldacena. «The Large N limit of superconformal field theories and supergravity». En: *Int. J. Theor. Phys.* 38 (1999). [Adv. Theor. Math. Phys.2,231(1998)], págs. 1113-1133. DOI: 10.1023/A:1026654312961, 10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a1. arXiv: hep-th/9711200 [hep-th].
- [2] Joseph Polchinski y Matthew J. Strassler. «Deep inelastic scattering and gauge / string duality». En: *JHEP* 05 (2003), pág. 012. DOI: 10.1088/1126-6708/2003/05/012. arXiv: hep-th/0209211 [hep-th].
- [3] Joseph Polchinski y Matthew J. Strassler. «Hard scattering and gauge / string duality». En: *Phys. Rev. Lett.* 88 (2002), pág. 031601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.031601. arXiv: hep-th/0109174 [hep-th].
- [4] Ezequiel Koile, Sebastian Macaluso y Martin Schvellinger. «Deep Inelastic Scattering from Holographic Spin-One Hadrons». En: *JHEP* 02 (2012), pág. 103. DOI: 10.1007/JHEP02(2012)103. arXiv: 1112.1459 [hep-th].
- [5] Ezequiel Koile, Sebastian Macaluso y Martin Schvellinger. «Deep inelastic scattering structure functions of holographic spin-1 hadrons with $N_f \geq 1$ ». En: *JHEP* 01 (2014), pág. 166. DOI: 10.1007/JHEP01(2014)166. arXiv: 1311.2601 [hep-th].
- [6] Ezequiel Koile, Nicolas Kovensky y Martin Schvellinger. «Hadron structure functions at small x from string theory». En: *JHEP* 05 (2015), pág. 001. DOI: 10.1007/JHEP05(2015)001. arXiv: 1412.6509 [hep-th].
- [7] Ezequiel Koile, Nicolas Kovensky y Martin Schvellinger. «Deep inelastic scattering cross sections from the gauge/string duality». En: *JHEP* 12 (2015), pág. 009. DOI: 10.1007/JHEP12(2015)009. arXiv: 1507.07942 [hep-th].
- [8] David Jorin, Nicolas Kovensky y Martin Schvellinger. «Towards $1/N$ corrections to deep inelastic scattering from the gauge/gravity duality». En: *JHEP* 04 (2016), pág. 113. DOI: 10.1007/JHEP04(2016)113. arXiv: 1601.01627 [hep-th].
- [9] David Jorin, Nicolas Kovensky y Martin Schvellinger. «Deep inelastic scattering off scalar mesons in the $1/N$ expansion from the D3D7-brane system». En: *JHEP* 12 (2016), pág. 003. DOI: 10.1007/JHEP12(2016)003. arXiv: 1609.01202 [hep-th].
- [10] Nicolas Kovensky, Gustavo Michalski y Martin Schvellinger. «DIS off glueballs from string theory: the role of the chiral anomaly and the Chern-Simons term». En: *JHEP* 04 (2018), pág. 118. DOI: 10.1007/JHEP04(2018)118. arXiv: 1711.06171 [hep-th].
- [11] Nicolas Kovensky, Gustavo Michalski y Martin Schvellinger. «Deep inelastic scattering from polarized spin-1/2 hadrons at low x from string theory». En: *JHEP* 10 (2018), pág. 084. DOI: 10.1007/JHEP10(2018)084. arXiv: 1807.11540 [hep-th].

- [12] Nicolas Kovensky, Gustavo Michalski y Martin Schvellinger. « $1/N$ corrections to F_1 and F_2 structure functions of vector mesons from holography». En: (2018). arXiv: 1809.10515 [hep-th].
- [13] Richard C. Brower y col. «The Pomeron and gauge/string duality». En: *JHEP* 12 (2007), pág. 005. DOI: 10.1088/1126-6708/2007/12/005. arXiv: hep-th/0603115 [hep-th].
- [14] S. S. Gubser, Igor R. Klebanov y Alexander M. Polyakov. «Gauge theory correlators from noncritical string theory». En: *Phys. Lett.* B428 (1998), págs. 105-114. DOI: 10.1016/S0370-2693(98)00377-3. arXiv: hep-th/9802109 [hep-th].
- [15] Edward Witten. «Anti-de Sitter space and holography». En: *Adv. Theor. Math. Phys.* 2 (1998), págs. 253-291. DOI: 10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a2. arXiv: hep-th/9802150 [hep-th].
- [16] Ofer Aharony y col. «Large N field theories, string theory and gravity». En: *Phys. Rept.* 323 (2000), págs. 183-386. DOI: 10.1016/S0370-1573(99)00083-6. arXiv: hep-th/9905111 [hep-th].
- [17] A. Zaffaroni. «Introduction to the AdS-CFT correspondence». En: *Class. Quant. Grav.* 17 (2000), págs. 3571-3597. DOI: 10.1088/0264-9381/17/17/306.
- [18] Eric D'Hoker y Daniel Z. Freedman. «Supersymmetric gauge theories and the AdS / CFT correspondence». En: *Strings, Branes and Extra Dimensions: TASI 2001: Proceedings*. 2002, págs. 3-158. arXiv: hep-th/0201253 [hep-th].
- [19] Joao Penedones. «High Energy Scattering in the AdS/CFT Correspondence». Tesis doct. Porto U., 2007. arXiv: 0712.0802 [hep-th]. URL: <https://inspirehep.net/record/769688/files/arXiv:0712.0802.pdf>.
- [20] Joao Penedones. «TASI lectures on AdS/CFT». En: *Proceedings, Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: New Frontiers in Fields and Strings (TASI 2015): Boulder, CO, USA, June 1-26, 2015*. 2017, págs. 75-136. DOI: 10.1142/9789813149441_0002. arXiv: 1608.04948 [hep-th]. URL: <https://inspirehep.net/record/1481834/files/arXiv:1608.04948.pdf>.
- [21] Gerard 't Hooft. «A Planar Diagram Theory for Strong Interactions». En: *Nucl. Phys.* B72 (1974). [337(1973)], pág. 461. DOI: 10.1016/0550-3213(74)90154-0.
- [22] Keisuke Okamura. «Aspects of Integrability in AdS/CFT Duality». Tesis doct. Tokyo U., 2007. arXiv: 0803.3999 [hep-th]. URL: <https://inspirehep.net/record/782157/files/arXiv:0803.3999.pdf>.
- [23] Peter Breitenlohner y Daniel Z. Freedman. «Positive Energy in anti-De Sitter Backgrounds and Gauged Extended Supergravity». En: *Phys. Lett.* 115B (1982), págs. 197-201. DOI: 10.1016/0370-2693(82)90643-8.
- [24] Joseph Polchinski y Matthew J. Strassler. «The String dual of a confining four-dimensional gauge theory». En: (2000). arXiv: hep-th/0003136 [hep-th].
- [25] Joseph Polchinski. «Introduction to Gauge/Gravity Duality». En: *Proceedings, Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics (TASI 2010). String Theory and Its Applications: From meV to the Planck Scale: Boulder, Colorado, USA, June 1-25, 2010*. 2010, págs. 3-46. DOI: 10.1142/9789814350525_0001. arXiv: 1010.6134 [hep-th]. URL: <https://inspirehep.net/record/875017/files/arXiv:1010.6134.pdf>.
- [26] Edward Witten. «Baryons in the $1/n$ Expansion». En: *Nucl. Phys.* B160 (1979), págs. 57-115. DOI: 10.1016/0550-3213(79)90232-3.

- [27] Igor R. Klebanov y Matthew J. Strassler. «Supergravity and a confining gauge theory: Duality cascades and chi SB resolution of naked singularities». En: *JHEP* 08 (2000), pág. 052. DOI: 10.1088/1126-6708/2000/08/052. arXiv: hep-th/0007191 [hep-th].
- [28] Juan Martin Maldacena y Carlos Nunez. «Towards the large N limit of pure N=1 superYang-Mills». En: *Phys. Rev. Lett.* 86 (2001), págs. 588-591. DOI: 10.1103/PhysRevLett.86.588. arXiv: hep-th/0008001 [hep-th].
- [29] Martin Kruczenski y col. «Meson spectroscopy in AdS / CFT with flavor». En: *JHEP* 07 (2003), pág. 049. DOI: 10.1088/1126-6708/2003/07/049. arXiv: hep-th/0304032 [hep-th].
- [30] Tadakatsu Sakai y Shigeki Sugimoto. «Low energy hadron physics in holographic QCD». En: *Prog. Theor. Phys.* 113 (2005), págs. 843-882. DOI: 10.1143/PTP.113.843. arXiv: hep-th/0412141 [hep-th].
- [31] Martin Kruczenski y col. «Towards a holographic dual of large N(c) QCD». En: *JHEP* 05 (2004), pág. 041. DOI: 10.1088/1126-6708/2004/05/041. arXiv: hep-th/0311270 [hep-th].
- [32] Peter Ouyang. «Holomorphic D7 branes and flavored N=1 gauge theories». En: *Nucl. Phys.* B699 (2004), págs. 207-225. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2004.08.015. arXiv: hep-th/0311084 [hep-th].
- [33] Stanislav Kuperstein. «Meson spectroscopy from holomorphic probes on the warped deformed conifold». En: *JHEP* 03 (2005), pág. 014. DOI: 10.1088/1126-6708/2005/03/014. arXiv: hep-th/0411097 [hep-th].
- [34] Stanislav Kuperstein y Jacob Sonnenschein. «Analytic nonsupersymmetric background dual of a confining gauge theory and the corresponding plane wave theory of hadrons». En: *JHEP* 02 (2004), pág. 015. DOI: 10.1088/1126-6708/2004/02/015. arXiv: hep-th/0309011 [hep-th].
- [35] Carlos Nunez, Angel Paredes y Alfonso V. Ramallo. «Flavoring the gravity dual of N=1 Yang-Mills with probes». En: *JHEP* 12 (2003), pág. 024. DOI: 10.1088/1126-6708/2003/12/024. arXiv: hep-th/0311201 [hep-th].
- [36] Aneesh V. Manohar. «An Introduction to spin dependent deep inelastic scattering». En: *Lake Louise Winter Institute: Symmetry and Spin in the Standard Model Lake Louise, Alberta, Canada, February 23-29, 1992*. 1992, págs. 1-46. arXiv: hep-ph/9204208 [hep-ph].
- [37] Jian-Hua Gao y Bo-Wen Xiao. «Polarized Deep Inelastic and Elastic Scattering From Gauge/String Duality». En: *Phys. Rev.* D80 (2009), pág. 015025. DOI: 10.1103/PhysRevD.80.015025. arXiv: 0904.2870 [hep-ph].
- [38] Pervez Hoodbhoy, R. L. Jaffe y Aneesh Manohar. «Novel Effects in Deep Inelastic Scattering from Spin 1 Hadrons». En: *Nucl. Phys.* B312 (1989), págs. 571-588. DOI: 10.1016/0550-3213(89)90572-5.
- [39] Jeffrey R. Forshaw y D. A. Ross. «Quantum chromodynamics and the pomeron». En: *Cambridge Lect. Notes Phys.* 9 (1997), págs. 1-248.
- [40] Victor S. Fadin, E. A. Kuraev y L. N. Lipatov. «On the Pomanchuk Singularity in Asymptotically Free Theories». En: *Phys. Lett.* 60B (1975), págs. 50-52. DOI: 10.1016/0370-2693(75)90524-9.

- [41] E. A. Kuraev, L. N. Lipatov y Victor S. Fadin. «The Pommeranchuk Singularity in Nonabelian Gauge Theories». En: *Sov. Phys. JETP* 45 (1977). [Zh. Eksp. Teor. Fiz.72,377(1977)], págs. 199-204.
- [42] I. I. Balitsky y L. N. Lipatov. «The Pommeranchuk Singularity in Quantum Chromodynamics». En: *Sov. J. Nucl. Phys.* 28 (1978). [Yad. Fiz.28,1597(1978)], págs. 822-829.
- [43] L. N. Lipatov. «Small x physics in perturbative QCD». En: *Phys. Rept.* 286 (1997), págs. 131-198. DOI: 10.1016/S0370-1573(96)00045-2. arXiv: hep-ph/9610276 [hep-ph].
- [44] Simon Caron-Huot y col. «Photon and dilepton production in supersymmetric Yang-Mills plasma». En: *JHEP* 12 (2006), pág. 015. DOI: 10.1088/1126-6708/2006/12/015. arXiv: hep-th/0607237 [hep-th].
- [45] Yoshitaka Hatta, Takahiro Ueda y Bo-Wen Xiao. «Polarized DIS in N=4 SYM: Where is spin at strong coupling?» En: *JHEP* 08 (2009), pág. 007. DOI: 10.1088/1126-6708/2009/08/007. arXiv: 0905.2493 [hep-ph].
- [46] Andreas Karch y col. «Linear confinement and AdS/QCD». En: *Phys. Rev. D* 74 (2006), pág. 015005. DOI: 10.1103/PhysRevD.74.015005. arXiv: hep-ph/0602229 [hep-ph].
- [47] Michael B. Green, J. H. Schwarz y Edward Witten. *SUPERSTRING THEORY. VOL. 1: INTRODUCTION*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. 1988. ISBN: 9780521357524. URL: <http://www.cambridge.org/us/academic/subjects/physics/theoretical-physics-and-mathematical-physics/superstring-theory-volume-1>.
- [48] H. Kawai, D. C. Lewellen y S. H. H. Tye. «A Relation Between Tree Amplitudes of Closed and Open Strings». En: *Nucl. Phys.* B269 (1986), págs. 1-23. DOI: 10.1016/0550-3213(86)90362-7.
- [49] Eric D'Hoker y col. «Graviton and gauge boson propagators in AdS(d+1)». En: *Nucl. Phys.* B562 (1999), págs. 330-352. DOI: 10.1016/S0550-3213(99)00524-6. arXiv: hep-th/9902042 [hep-th].
- [50] J. Bartels y col. «Regge limit of R-current correlators in AdS Supergravity». En: *Nucl. Phys.* B830 (2010), págs. 153-178. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2009.12.023. arXiv: 0908.2301 [hep-th].
- [51] Daniel Z. Freedman y col. «Correlation functions in the CFT(d) / AdS(d+1) correspondence». En: *Nucl. Phys.* B546 (1999), págs. 96-118. DOI: 10.1016/S0550-3213(99)00053-X. arXiv: hep-th/9804058 [hep-th].
- [52] Adel Bilal y Chong-Sun Chu. «A Note on the chiral anomaly in the AdS / CFT correspondence and 1 / N**2 correction». En: *Nucl. Phys.* B562 (1999), págs. 181-190. DOI: 10.1016/S0550-3213(99)00553-2. arXiv: hep-th/9907106 [hep-th].
- [53] H. J. Kim, L. J. Romans y P. van Nieuwenhuizen. «The Mass Spectrum of Chiral N=2 D=10 Supergravity on S**5». En: *Phys. Rev. D* 32 (1985), pág. 389. DOI: 10.1103/PhysRevD.32.389.
- [54] Arnaud Baguet, Olaf Hohm y Henning Samtleben. «Consistent Type IIB Reductions to Maximal 5D Supergravity». En: *Phys. Rev. D* 92.6 (2015), pág. 065004. DOI: 10.1103/PhysRevD.92.065004. arXiv: 1506.01385 [hep-th].
- [55] Hamid R. Bakhtiarizadeh y Mohammad R. Garousi. «Sphere-level Ramond-Ramond couplings in Ramond-Neveu-Schwarz formalism». En: *Nucl. Phys.* B884 (2014), págs. 408-437. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2014.05.002. arXiv: 1312.4703 [hep-th].

- [56] Mohammad R. Garousi y Robert C. Myers. «Superstring scattering from D-branes». En: *Nucl. Phys.* B475 (1996), págs. 193-224. DOI: 10.1016/0550-3213(96)00316-1. arXiv: hep-th/9603194 [hep-th].
- [57] Katrin Becker y col. «Some tree-level string amplitudes in the NSR formalism». En: *JHEP* 12 (2015), pág. 010. DOI: 10.1007/JHEP12(2015)010. arXiv: 1507.02172 [hep-th].
- [58] Steven B. Giddings. «The gravitational S-matrix: Erice lectures». En: *Subnucl. Ser.* 48 (2013), págs. 93-147. DOI: 10.1142/9789814522489_0005. arXiv: 1105.2036 [hep-th].
- [59] Richard C. Brower, Matthew J. Strassler y Chung-I Tan. «On The Pomeron at Large 't Hooft Coupling». En: *JHEP* 03 (2009), pág. 092. DOI: 10.1088/1126-6708/2009/03/092. arXiv: 0710.4378 [hep-th].
- [60] Y. Hatta, E. Iancu y A. H. Mueller. «Deep inelastic scattering at strong coupling from gauge/string duality: The Saturation line». En: *JHEP* 01 (2008), pág. 026. DOI: 10.1088/1126-6708/2008/01/026. arXiv: 0710.2148 [hep-th].
- [61] Richard C. Brower y col. «String-Gauge Dual Description of Deep Inelastic Scattering at Small- x ». En: *JHEP* 11 (2010), pág. 051. DOI: 10.1007/JHEP11(2010)051. arXiv: 1007.2259 [hep-ph].
- [62] Lorenzo Corralba y col. «Eikonal Approximation in AdS/CFT: From Shock Waves to Four-Point Functions». En: *JHEP* 08 (2007), pág. 019. DOI: 10.1088/1126-6708/2007/08/019. arXiv: hep-th/0611122 [hep-th].
- [63] Jian-Hua Gao y Zong-Gang Mou. «Structure functions in deep inelastic scattering from gauge/string duality beyond single-hadron final states». En: *Phys. Rev.* D90 (2014), pág. 075018. DOI: 10.1103/PhysRevD.90.075018. arXiv: 1406.7576 [hep-ph].
- [64] Sunil Auluck. «On the Integral of the Product of Three Bessel Functions over an Infinite Domain». En: 14 (ene. de 2012).
- [65] Sangmin Lee y col. «Three point functions of chiral operators in $D = 4$, $N=4$ SYM at large N ». En: *Adv. Theor. Math. Phys.* 2 (1998), págs. 697-718. DOI: 10.4310/ATMP.1998.v2.n4.a1. arXiv: hep-th/9806074 [hep-th].
- [66] Sangmin Lee. «AdS(5) / CFT(4) four point functions of chiral primary operators: Cubic vertices». En: *Nucl. Phys.* B563 (1999), págs. 349-360. DOI: 10.1016/S0550-3213(99)00614-8. arXiv: hep-th/9907108 [hep-th].
- [67] G. E. Arutyunov y S. A. Frolov. «Quadratic action for Type IIB supergravity on AdS(5) x S⁵». En: *JHEP* 08 (1999), pág. 024. DOI: 10.1088/1126-6708/1999/08/024. arXiv: hep-th/9811106 [hep-th].
- [68] G. Arutyunov y S. Frolov. «Scalar quartic couplings in type IIB supergravity on AdS(5) x S⁵». En: *Nucl. Phys.* B579 (2000), págs. 117-176. DOI: 10.1016/S0550-3213(00)00210-8. arXiv: hep-th/9912210 [hep-th].
- [69] S. Stieberger. «Open & Closed vs. Pure Open String Disk Amplitudes». En: (2009). arXiv: 0907.2211 [hep-th].
- [70] A. Hashimoto e Igor R. Klebanov. «Decay of excited D-branes». En: *Phys. Lett.* B381 (1996), págs. 437-445. DOI: 10.1016/0370-2693(96)00621-1. arXiv: hep-th/9604065 [hep-th].
- [71] A. Fotopoulos y Arkady A. Tseytlin. «On gravitational couplings in D-brane action». En: *JHEP* 12 (2002), pág. 001. DOI: 10.1088/1126-6708/2002/12/001. arXiv: hep-th/0211101 [hep-th].

- [72] C. A. Ballon Bayona y col. «Deep inelastic scattering for vector mesons in holographic D4-D8 model». En: *JHEP* 10 (2010), pág. 055. DOI: 10.1007/JHEP10(2010)055. arXiv: 1007.2448 [hep-th].
- [73] K. Wijesooriya, P. E. Reimer y R. J. Holt. «The pion parton distribution function in the valence region». En: *Phys. Rev. C* 72 (2005), pág. 065203. DOI: 10.1103/PhysRevC.72.065203. arXiv: nucl-ex/0509012 [nucl-ex].
- [74] Roy J. Holt y Craig D. Roberts. «Distribution Functions of the Nucleon and Pion in the Valence Region». En: *Rev. Mod. Phys.* 82 (2010), págs. 2991-3044. DOI: 10.1103/RevModPhys.82.2991. arXiv: 1002.4666 [nucl-th].
- [75] P. E. Reimer, R. J. Holt y K. Wijesooriya. «The partonic structure of the pion at large-x». En: *AIP Conf. Proc.* 1369 (2011), págs. 153-158. DOI: 10.1063/1.3631531.
- [76] Lei Chang y Anthony W. Thomas. «Pion Valence-quark Parton Distribution Function». En: *Phys. Lett. B* 749 (2015), págs. 547-550. DOI: 10.1016/j.physletb.2015.08.036. arXiv: 1410.8250 [nucl-th].
- [77] Guido Altarelli, S. Petrarca y F. Rapuano. «The Pion structure function in a constituent model». En: *Phys. Lett. B* 373 (1996), págs. 200-206. DOI: 10.1016/0370-2693(96)00131-1. arXiv: hep-ph/9510346 [hep-ph].
- [78] Gerald A. Miller. «Pionic and Hidden-Color, Six-Quark Contributions to the Deuteron b1 Structure Function». En: *Phys. Rev. C* 89.4 (2014), pág. 045203. DOI: 10.1103/PhysRevC.89.045203. arXiv: 1311.4561 [nucl-th].
- [79] C. Best y col. «Pion and rho structure functions from lattice QCD». En: *Phys. Rev. D* 56 (1997), págs. 2743-2754. DOI: 10.1103/PhysRevD.56.2743. arXiv: hep-lat/9703014 [hep-lat].
- [80] Lei Chang y col. «Basic features of the pion valence-quark distribution function». En: *Phys. Lett. B* 737 (2014), págs. 23-29. DOI: 10.1016/j.physletb.2014.08.009. arXiv: 1406.5450 [nucl-th].
- [81] Joshua Erlich y col. «QCD and a holographic model of hadrons». En: *Phys. Rev. Lett.* 95 (2005), pág. 261602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.261602. arXiv: hep-ph/0501128 [hep-ph].
- [82] Leandro Da Rold y Alex Pomarol. «Chiral symmetry breaking from five dimensional spaces». En: *Nucl. Phys. B* 721 (2005), págs. 79-97. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2005.05.009. arXiv: hep-ph/0501218 [hep-ph].
- [83] Thomas Hambye y col. «Four-point functions and Kaon decays in a minimal AdS/QCD model». En: *Phys. Rev. D* 76 (2007), pág. 125017. DOI: 10.1103/PhysRevD.76.125017. arXiv: hep-ph/0612010 [hep-ph].
- [84] Thomas Hambye y col. «On the Delta I = 1/2 rule in holographic QCD». En: *Phys. Rev. D* 74 (2006), pág. 026003. DOI: 10.1103/PhysRevD.74.026003. arXiv: hep-ph/0512089 [hep-ph].
- [85] William Detmold, W. Melnitchouk y Anthony William Thomas. «Parton distribution functions in the pion from lattice QCD». En: *Phys. Rev. D* 68 (2003), pág. 034025. DOI: 10.1103/PhysRevD.68.034025. arXiv: hep-lat/0303015 [hep-lat].
- [86] Matthias Aicher, Andreas Schafer y Werner Vogelsang. «Threshold-Resummed Cross Section for the Drell-Yan Process in Pion-Nucleon Collisions at COMPASS». En: *Phys. Rev. D* 83 (2011), pág. 114023. DOI: 10.1103/PhysRevD.83.114023. arXiv: 1104.3512 [hep-ph].

- [87] Matthias Aicher, Andreas Schafer y Werner Vogelsang. «Soft-gluon resummation and the valence parton distribution function of the pion». En: *Phys. Rev. Lett.* 105 (2010), pág. 252003. DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.252003. arXiv: 1009.2481 [hep-ph].
- [88] Harvey B. Meyer. «A Calculation of the shear viscosity in SU(3) gluodynamics». En: *Phys. Rev.* D76 (2007), pág. 101701. DOI: 10.1103/PhysRevD.76.101701. arXiv: 0704.1801 [hep-lat].
- [89] P. Kovtun, Dan T. Son y Andrei O. Starinets. «Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics». En: *Phys. Rev. Lett.* 94 (2005), pág. 111601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.111601. arXiv: hep-th/0405231 [hep-th].
- [90] Robert C. Myers, Miguel F. Paulos y Aninda Sinha. «Quantum corrections to eta/s». En: *Phys. Rev.* D79 (2009), pág. 041901. DOI: 10.1103/PhysRevD.79.041901. arXiv: 0806.2156 [hep-th].
- [91] Seung-il Nam. «Parton-distribution functions for the pion and kaon in the gauge-invariant nonlocal chiral-quark model». En: *Phys. Rev.* D86 (2012), pág. 074005. DOI: 10.1103/PhysRevD.86.074005. arXiv: 1205.4156 [hep-ph].
- [92] Jian-Hua Gao y Bo-Wen Xiao. «Nonforward Compton scattering in AdS/CFT correspondence». En: *Phys. Rev.* D81 (2010), pág. 035008. DOI: 10.1103/PhysRevD.81.035008. arXiv: 0912.4333 [hep-ph].
- [93] Jian-Hua Gao y Zong-Gang Mou. «Polarized Deep Inelastic Scattering Off the Neutron From Gauge/String Duality». En: *Phys. Rev.* D81 (2010), pág. 096006. DOI: 10.1103/PhysRevD.81.096006. arXiv: 1003.3066 [hep-ph].
- [94] J. Babington y col. «Chiral symmetry breaking and pions in nonsupersymmetric gauge / gravity duals». En: *Phys. Rev.* D69 (2004), pág. 066007. DOI: 10.1103/PhysRevD.69.066007. arXiv: hep-th/0306018 [hep-th].
- [95] J. Breitweg y col. «ZEUS results on the measurement and phenomenology of F(2) at low x and low Q²». En: *Eur. Phys. J.* C7 (1999), págs. 609-630. DOI: 10.1007/s100529901084. arXiv: hep-ex/9809005 [hep-ex].
- [96] S. Chekanov y col. «Measurement of the neutral current cross-section and F(2) structure function for deep inelastic e + p scattering at HERA». En: *Eur. Phys. J.* C21 (2001), págs. 443-471. DOI: 10.1007/s100520100749. arXiv: hep-ex/0105090 [hep-ex].
- [97] F. D. Aaron y col. «Combined Measurement and QCD Analysis of the Inclusive e+- p Scattering Cross Sections at HERA». En: *JHEP* 01 (2010), pág. 109. DOI: 10.1007/JHEP01(2010)109. arXiv: 0911.0884 [hep-ex].
- [98] B. Adeva y col. «Spin asymmetries A(1) and structure functions g₁ of the proton and the deuteron from polarized high-energy muon scattering». En: *Phys. Rev.* D58 (1998), pág. 112001. DOI: 10.1103/PhysRevD.58.112001.
- [99] C. Adolph y col. «The spin structure function g₁^P of the proton and a test of the Bjorken sum rule». En: *Phys. Lett.* B753 (2016), págs. 18-28. DOI: 10.1016/j.physletb.2015.11.064. arXiv: 1503.08935 [hep-ex].
- [100] M. G. Alekseev y col. «The Spin-dependent Structure Function of the Proton g₁^P and a Test of the Bjorken Sum Rule». En: *Phys. Lett.* B690 (2010), págs. 466-472. DOI: 10.1016/j.physletb.2010.05.069. arXiv: 1001.4654 [hep-ex].

- [101] J. Ashman y col. «A Measurement of the Spin Asymmetry and Determination of the Structure Function $g(1)$ in Deep Inelastic Muon-Proton Scattering». En: *Phys. Lett.* B206 (1988). [340(1987)], pág. 364. DOI: 10.1016/0370-2693(88)91523-7.
- [102] A. Airapetian y col. «Precise determination of the spin structure function $g(1)$ of the proton, deuteron and neutron». En: *Phys. Rev.* D75 (2007), pág. 012007. DOI: 10.1103/PhysRevD.75.012007. arXiv: hep-ex/0609039 [hep-ex].
- [103] K. Abe y col. «Measurements of the proton and deuteron spin structure functions $g(1)$ and $g(2)$ ». En: *Phys. Rev.* D58 (1998), pág. 112003. DOI: 10.1103/PhysRevD.58.112003. arXiv: hep-ph/9802357 [hep-ph].
- [104] P. L. Anthony y col. «Measurements of the Q^2 dependence of the proton and neutron spin structure functions $g(1)^p$ and $g(1)^n$ ». En: *Phys. Lett.* B493 (2000), págs. 19-28. DOI: 10.1016/S0370-2693(00)01014-5. arXiv: hep-ph/0007248 [hep-ph].
- [105] Y. Prok y col. «Precision measurements of g_1 of the proton and the deuteron with 6 GeV electrons». En: *Phys. Rev.* C90.2 (2014), pág. 025212. DOI: 10.1103/PhysRevC.90.025212. arXiv: 1404.6231 [nucl-ex].
- [106] M. Aghasyan y col. «Longitudinal double-spin asymmetry A_1^P and spin-dependent structure function g_1^P of the proton at small values of x and Q^2 ». En: *Phys. Lett.* B781 (2018), págs. 464-472. DOI: 10.1016/j.physletb.2018.03.044. arXiv: 1710.01014 [hep-ex].
- [107] Suvrat Raju. «Recursion Relations for AdS/CFT Correlators». En: *Phys. Rev.* D83 (2011), pág. 126002. DOI: 10.1103/PhysRevD.83.126002. arXiv: 1102.4724 [hep-th].