APROXIMACIONES BASADAS EN DISTANCIAS ERGÓDICAS Y MEZCLADO CAÓTICO EN PILAS DE LIXIVIACIÓN

ERGODIC DISTANCES AND CHAOTIC MIXING APPROACHES FOR HEAP LEACHING SYSTEMS

Luis Rojas[1,*], Fabian León[1], Vanesa Bazan[2], Beatriz Hernández[3]
(1) Doctorado en Industria Inteligente, Facultad de Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso 2362804, Chile
(2) CONICET–IIM, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan, San Juan, Argentina
(3) Centro de Observación de la Tierra, Facultad de Ciencias, Ingeniería y Tecnología, Universidad Mayor, Santiago 8580745, Chile
(e-mail: luis.rojas.v@mail.pucv.cl)

Recibido: 03/01/2024 - Evaluado: 13/02/2024 - Aceptado: 15/03/2024

RESUMEN

En este estudio se explora la aplicación de distancias ergódicas y la utilización de mezclado caótico en pilas de lixiviación, centrándose en la dinámica de sistemas fuertemente mezclantes donde las aproximaciones de Koopman pueden presentar autovalores espurios. Se propone un modelo simplificado de flujo de solutos en un medio poroso, evaluando diversos métodos híbridos (Análisis de Laplace Generalizado y subespacios de Krylov) para detectar zonas de percolación deficiente y optimizar la recuperación mineral. Con base en análisis numéricos y datos experimentales, se confirma que un régimen caótico-ergódico favorece el mezclado, al tiempo que el método híbrido atenúa la contaminación espectral y extrae modos coherentes. Estos resultados abren la posibilidad de un mejor control en la lixiviación, apuntando a intervenciones más eficientes y una mayor extracción de metales.

ABSTRACT

This study explores the application of ergodic distances and the use of chaotic mixing in heap leaching, focusing on the dynamics of strongly mixing systems where Koopman approximations may exhibit spurious eigenvalues. A simplified solute flow model in a porous medium is introduced, employing hybrid methods (Generalized Laplace Analysis and Krylov subspaces) to reveal poor percolation regions and enhance mineral recovery. Through numerical exploration and experimental data, we confirm that a chaotic-ergodic flow promotes effective mixing, while the hybrid approach mitigates spectral pollution and extracts coherent modes. These findings pave the way for improved leaching control, suggesting targeted interventions and increased metal extraction in industrial heap operations.

Palabras clave: ergodic theory, mezclado caótico, lixiviación, operador de Koopman
Keywords: ergodic theory, chaotic mixing, heap leaching, Koopman operator

INTRODUCCIÓN

El estudio de la lixiviación en pilas, un proceso minero clave para la obtención de cobre y otros metales, ha recibido un creciente interés en los últimos años debido a la complejidad de su dinámica interna y a la necesidad de aumentar su eficiencia (Arbabi & Mezić, 2017; Mezić, 2020). La aparición de regímenes de mezclado caótico, caracterizados por trayectorias con sensibilidad exponencial a las condiciones iniciales, puede mejorar la dispersión del solvente y la extracción de solutos. Sin embargo, esta propiedad también supone un reto para los métodos clásicos de descomposición modal, en particular cuando el operador de Koopman presenta espectro continuo (Colbrook & Townsend 2024; Lippolis, 2024).

De esta manera, se identificaron lagunas (gaps) en la literatura, especialmente en lo que respecta a la combinación de Análisis de Laplace Generalizado (GLA) y subespacios de Krylov como estrategia para reducir la contaminación espectral al aproximar la dinámica de un mapa caótico (Drmac *et al*., 2019; Korda *et al*., 2020; Palitta & Kürschner, 2021; Rojas *et al*., 2025; Wanner & Mezić, 2022).

Las pilas de lixiviación constituyen un sistema de gran envergadura industrial, donde el flujo de disolución atraviesa un medio poroso heterogéneo. Bajo ciertas condiciones, la dispersión del solvente en el mineral puede exhibir trazas de caos determinista (Lippolis, 2024), lo que implica regiones de intensa mezcla y otras de circulación pobre. En tales contextos, los métodos tradicionales de descomposición modal —por ejemplo, la Dynamic Mode Decomposition (DMD)— pueden verse afectados por la parte continua del espectro del Operador de Koopman, originando autovalores numéricamente espurios (Colbrook & Townsend, 2024; Mezić, 2020).

Diversos autores han aplicado técnicas de *Generalized Laplace Analysis* (GLA) para aislar los modos de magnitud 1 en sistemas quasi-periódicos y, posteriormente, han explorado la proyección en subespacios de Krylov para mitigar la explosión combinatorial de funciones base (Drmac *et al*., *2020*; Hashimoto & Nodera, 2022). No obstante, la adopción de este enfoque híbrido en la lixiviación, con el fin de estudiar la estructura ergódica y el mezclado caótico en pilas reales, está aún poco desarrollada.

Considerando los antecedentes consignados en la literatura y la necesidad de optimizar la recuperación metalúrgica frente a la complejidad inherente al mezclado —potencialmente caótico— que se desarrolla en las pilas de lixiviación, el presente estudio se propone examinar rigurosamente dicho fenómeno mediante un esquema híbrido que integra el Análisis de Laplace Generalizado y proyecciones en subespacios de Krylov, contrastándolo con aproximaciones tradicionales de identificación espectral. Este marco metodológico aspira a caracterizar con mayor solidez el espectro del Operador de Koopman, evaluando su sensibilidad a la contaminación espectral y su pertinencia para describir trayectorias ergódicas en entornos industriales reales. La aplicación del enfoque a un modelo representativo de lixiviación permitirá dilucidar cómo la dinámica de mezclado y su correcta caracterización espectral influyen en la percolación del agente lixiviante, identificando zonas con retención prolongada de soluto susceptibles de intervenciones de riego focalizado o ajustes estructurales.

En otras palabras, se busca dilucidar cómo el grado de mezclado y la correcta caracterización espectral afectan tanto la comprensión fundamental de la dinámica interna de la pila como la toma de decisiones prácticas en la industria minera.

DISTANCIA ERGÓDICA EN EL MODELO DE LIXIVIACIÓN

En el contexto de las pilas de lixiviación, resulta de interés medir cuantitativamente la *coherencia* entre la dinámica real del soluto y el régimen teórico descrito por un operador de composición con una medida invariante (Lippolis, 2024; Mezić, 2020). Para este fin, se introduce el concepto de *distancia ergódica*, el cual proviene de la teoría ergódica de sistemas medibles (Danilenko, 2010; Kozlov, 2021).

Medida invariante y trayectoria empírica

Sea X el espacio de estados (en nuestro caso, la "pila" discretizada en celdas), y μ una medida de probabilidad en X tal que μ sea *invariante* bajo el mapeo discreto T. Esto implica:

$$\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A), \qquad \forall A \subseteq X. \tag{1}$$

Si se elige una celda (o punto) inicial $\mathbf{x}_0 \in X$ y se itera $\mathbf{x}_{n+1} = T(\mathbf{x}_n)$, la *trayectoria* $\{\mathbf{x}_n\}_{n\geq 0}$ da lugar a la *medida empírica*:

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{x_h}, \tag{2}$$

donde δ_x denota la medida de Dirac centrada en la posición $\mathbf{x}_k$.

Definición de la distancia ergódica

Para cuantificar la diferencia entre μ_n y μ (esto es, entre la medida "experimental" y la teórica invariante), se elige una métrica **d** en el espacio de medidas de probabilidad, como la *norma de variación total* (Mezić, 2020; Ouala *et al.*, 2020):

$$\|\nu_1 - \nu_2\|_{TV} = \sup_{A\subseteq X} \nu_1(A) - \nu_2(A), \tag{3}$$

y entonces la *distancia ergódica* se define como

$$d_{erg}(n) = {}^1\mu_n - \mu^1{}_{TV} = \sup_{A\subseteq X} {}^1\mu_n(A) - \mu(A)^1. \tag{4}$$

En términos intuitivos, $d_{erg}(n)$ mide *"cuán distante"* está la estadística empírica, obtenida tras n iteraciones en la pila, de la estadística teórica que impone el flujo estacionario μ (Arbabi & Mezić 2017; Colbrook & Townsend 2024).

Interpretación y relevancia en lixiviación

1) **Si** $d_{erg}(n)$ tiende a ser **pequeño**, implica que, en lo esencial, las celdas visitadas por la trayectoria real reflejan la distribución teórica de la medida invariante; el sistema se aproxima a un *régimen mezclante* homogéneo (Danilenko 2010; Lippolis 2024).
2) **Si** $d_{erg}(n)$ se mantiene **grande**, sugiere que los solutos no se distribuyen de acuerdo con la medida de equilibrio, lo que indica *zonas de retención* o comportamientos no ergódicos en la pila (Mezić, 2020).
3) Este criterio cobra relevancia al diagnosticar si el *mezclado* de líquidos y solutos está cerca de la eficiencia máxima (caso ergódico), o persisten trayectorias preferenciales, *canales de bypass* y regiones de escasa penetración, retardando la lixiviación (Korda *et al.*, 2020; Wanner & Mezić, 2022).

Convergencia y ergodicidad

Bajo ciertas condiciones, como la *ergodicidad* del mapeo T y la irreducibilidad estadística de las celdas, se puede demostrar que:

$$\lim_{n\to\infty} \|\mu_n - \mu\|_{TV} = 0 \tag{5}$$

lo cual significa que la distancia ergódica se anula, confirmando la "buena aproximación" de la trayectoria real al régimen invariante (Kozlov, 2021; Mezić, 2020). En el contexto de la pila de lixiviación, esto implicaría que, a largo plazo, el soluto "visita" todas las celdas acorde con μ, y las concentraciones tienden a la distribución que predice el flujo estacionario.

En síntesis, la distancia ergódica proporciona una medida *cuantitativa* del acoplamiento entre la operación real (ensayos experimentales y mediciones de concentración) y la configuración teórica o simulada del sistema (Arbabi & Mezić, 2017; Lippolis, 2024), resultando clave para evaluar y optimizar el grado de mezclado en pilas de lixiviación de gran escala.

MATERIALES Y MÉTODOS

Modelo de dinámica de solutos en la pila

Para modelar la propagación y evolución de la concentración de solutos dentro de la pila de lixiviación, se adopta un sistema de flujo no estacionario fundamentado en la ecuación de conservación del soluto. Bajo esta perspectiva, la pila se asume formada por N capas o elementos discretos, cada uno caracterizado por parámetros de **porosidad** (ϕ), velocidad superficial y factores de transporte convectivo-difusivo. Siguiendo lineamientos descritos en Arbabi y Mezić (2017) y Mezić (2022), se propone representar la dinámica mediante un mapeo discreto T, aplicado en intervalos de tiempo Δt. De este modo, la concentración de soluto en cada punto $\mathbf{x}_i$ de la pila (donde i denota la capa o celda) experimenta la transformación:

$$c_i^{(t+\Delta t)} = T\,(c_i\,^{(t)}) \tag{6}$$

donde $\mathbf{c}_i^{(t)}$ representa el vector de concentraciones en el instante t. La naturaleza no estacionaria del modelo radica en que tanto la velocidad del flujo como la geometría interna (fracciones de porosidad y canales preferenciales) pueden variar en el tiempo, reflejando transiciones de fase o deformaciones en la pila (Maćešić *et al*., 2018; Mezić, 2020). Este mapeo T puede enriquecerse con términos que capturen fenómenos de reacción química y adsorción en el medio, de forma análoga a lo reportado por Korda *et al*. (2020), en problemas de análisis espectral de operadores de composición.

En la práctica, la parametrización de T se construye con datos experimentales obtenidos de ensayos de riego continuo y medición de concentraciones en diferentes profundidades, siguiendo protocolos descritos por Wanner y Mezić (2022), adaptados a condiciones de pilas industriales. El enfoque discreto en el espacio (celda a celda) facilita la implementación de métodos de análisis de modos dinámicos (Dynamic Mode Decomposition, DMD), que posteriormente serán combinados con técnicas de Análisis de Laplace Generalizado (GLA) y subespacios de Krylov para capturar la esencia de la dinámica de mezclado.

Distancias ergódicas y mezclado caótico

Una vez definido el mapeo T, se busca evaluar el nivel de homogeneidad o mezclado que el sistema alcanza. Para esto, se recurre al concepto de *distancias ergódicas*, que permiten medir cuantitativamente las diferencias entre la evolución de la distribución espacial del soluto y alguna referencia teórica de uniforme mezclado (Arbabi & Mezić, 2017; Lippolis, 2024). Estas distancias incluyen métricas basadas en el promedio temporal y/o el promedio en la nube de puntos que describen el estado de la pila. De modo análogo en Giannakis (2019), se han propuesto estrategias de proyección en espacios de funciones reproduciendo la dinámica para caracterizar la continuidad o discreción del espectro.

Un punto relevante es que la pila de lixiviación puede presentar *comportamiento fuertemente mezclante* cuando el flujo en su interior presenta trayectorias con sensibilidad exponencial a las condiciones iniciales. Según Mezić

(2020) y Colbrook y Townsend (2024), este tipo de fenómenos da lugar a *espectros de Koopman* donde coexiste una parte continua (ligada al mezclado) y valores propios puntuales asociados a estructuras coherentes o invarianzas parciales. El mapa T se considera *caótico* si pequeñas perturbaciones en la posición de un "paquete" de soluto generan trayectorias divergentes que, sin embargo, pueden mezclarse estadísticamente hasta alcanzar una distribución casi uniforme en la pila (Giannakis, 2019; Lippolis, 2024).

Para cuantificar este efecto, se introducen indicadores ergódicos que comparan la medida empírica del sistema con la medida invariante teórica. En la práctica, se calcula una distancia de la forma:

$$d_{erg} = \|\mu_{\mathrm{emp}} - \mu_{inv}\| \tag{7}$$

donde μ_{emp} es la medida empírica obtenida tras un largo tiempo de iteraciones de T, y μ_{inv} representa la medida invariante proyectada en el espacio de concentraciones (Kozlov, 2021; Mezić, 2020). Valores decrecientes de d_{erg} implican mayor uniformidad en la distribución del soluto y, por consiguiente, *mezclado más eficiente*.

Análisis axiomático de la distancia ergódica

El formalismo de la *distancia ergódica* introduce un aparato axiomático que vincula la teoría de la medida con la dinámica de sistemas discretos, buscando cuantificar el grado de cercanía entre la medida empírica μ_n y la medida invariante μ (Arbabi & Mezić 2017; Mezić 2020). A continuación, se presenta un análisis matemático que pone en evidencia sus propiedades fundamentales, análogas a las de una norma o métrica en el espacio de medidas de probabilidad (Colbrook & Townsend 2024; Kozlov 2021).

*Espacio de medidas y axiomas***.** Sea $\mathrm{M}(X)$ el conjunto de medidas de probabilidad sobre un espacio medible (X, A). Una aplicación

$$d_{\mathrm{erg}} : \mathrm{M}(X) \times \mathrm{M}(X) \;\longrightarrow\; \mathrm{R}_{\geq 0}, \tag{8}$$

se dice *métrica ergódica* si cumple los siguientes axiomas:

1. *No-negatividad y separación***.** Para cualesquiera $\nu_1, \nu_2 \in \mathrm{M}(X)$,

$$d_{\mathrm{erg}}(\nu_1, \nu_2) \;\geq\; 0 \quad \text{y} \quad d_{\mathrm{erg}}(\nu_1, \nu_2) = 0 \iff \nu_1 = \nu_2, \tag{9}$$

2. *Simetría***.** Para todas $\nu_1, \nu_2 \in \mathrm{M}(X)$,

$$d_{\mathrm{erg}}(\nu_1, \nu_2) \;=\; d_{\mathrm{erg}}(\nu_2, \nu_1), \tag{10}$$

3. Desigualdad triangular. Para toda triple $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \in \mathrm{M}(X)$,

$$d_{\mathrm{erg}}(\nu_1, \nu_3) \;\leq\; d_{\mathrm{erg}}(\nu_1, \nu_2) \;+\; d_{\mathrm{erg}}(\nu_2, \nu_3). \tag{11}$$

En la construcción habitual, se define

$$d_{erg}(\mu_n, \mu) = \|\mu_{\mathrm{n}} - u\|_{\mathrm{TV}} \tag{12}$$

donde $\|\cdot\|_{\mathrm{TV}}$ denota la *norma de variación total*:

$$\|\nu\|_{\mathrm{TV}} \;=\; \sup_{A \in \mathrm{A}} |\nu(A)| \;. \tag{13}$$

Con ello, las propiedades de $\|\cdot\|_{TV}$ garantizan los axiomas de métrica en el sentido clásico (Danilenko, 2010).

*Estructura topológica y convergencia***.** Bajo esta definición, $(M(X), \|\cdot\|_{TV})$ adquiere una *topología* generada por bolas de la forma $\{\nu : \|\nu - \nu_0\|_{TV} < \varepsilon\}$. Este hecho aporta un marco para estudiar la *convergencia* de secuencias de medidas:

$$\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{TV} \mu \iff \lim_{n\to\infty} d_{erg}(\mu_n, \mu) = 0, \tag{14}$$

En la teoría ergódica, la *hipótesis ergódica* implica que $\mu_n \to \mu$ en variación total, siempre que el sistema sea irreducible o mezclante (Kozlov, 2021; Mezić, 2020).

Axiomas de la métrica y su interpretación en la pila de lixiviación.

- *Positividad*: si $d_{erg}(\mu_n, \mu) > 0$, significa que la trayectoria empírica μ_n difiere de la medida invariante, representando *discrepancias* en la distribución real de solutos.
- *Separación*: en el caso extremo de $d_{erg}(\mu_n, \mu) = 0$, la estadística empírica coincide perfectamente con la teórica, sugiriendo que la pila se comporta "idealmente" según la modelación (Lippolis, 2024).
- *Simetría*: expresa que la "distancia" entre dos medidas es independiente del orden en que se comparen; formaliza la idea de comparar "desvíos" de forma recíproca.
- *Desigualdad triangular*: si se analiza la trayectoria μ_n en relación con otra medida intermedia μ', la distancia $\|\mu_n - \mu\|_{TV}$ no supera la suma de las distancias $\|\mu_n - \mu'\|_{TV} + \|\mu' - \mu\|_{TV}$. En la práctica, si la medida empírica se aproxima a un conjunto de estados transicionales, no puede haber atajos que violen la geometría de la convergencia en variación total (Arbabi & Mezić, 2017).

*Implicaciones para la optimización del mezclado***.** El axioma de *convergencia* en variación total (bajo ergodicidad) muestra que, si la pila está diseñada con *dinámica fuertemente mezclante*, μ_n se acercará a μ conforme aumenta n (número de aplicaciones de T). En términos de ingeniería, esto implica que para *maximizar la eficiencia de la lixiviación* conviene promover condiciones de "alto mezclado" que garanticen la *irreducibilidad* del sistema, minimizando así la distancia ergódica (Colbrook & Townsend, 2024).

En resumen, la distancia ergódica cumple rigurosamente los axiomas de métrica en el espacio de medidas, proveyendo un lenguaje formal para evaluar la convergencia de la estadística empírica μ_n hacia la medida invariante μ. Este constructo constituye, por ende, la base para un *criterio axiomático* de mezclado caótico aplicado a la ingeniería de pilas de lixiviación, respaldado tanto por la teoría de operadores como por resultados numéricos (Arbabi & Mezić, 2017; Lippolis, 2024; Mezić, 2020).

Métodos híbridos (GLA + subespacios de Krylov)

La aproximación de la dinámica del operador de Koopman, asociada al mapeo T, puede verse afectada por el fenómeno de *contaminación espectral* (spectral pollution). Esto sucede principalmente cuando se aplican métodos de descomposición modal, como DMD o EDMD, en sistemas con espectro continuo dominante, lo cual da lugar a autovalores numéricamente espurios (Danilenko, 2010; Palitta & Kürschner 2021). Para mitigar este problema, se propone una estrategia de dos etapas:

1. *Análisis de Laplace Generalizado (GLA)***:** En primer lugar, se emplea GLA para identificar *componentes casi-periódicas* o modos que residen en la parte de magnitud 1 del espectro (Mezić, 2022; Susuki *et al*., 2021). Dichos modos corresponden a invarianzas o ciclos en el comportamiento de mezclado.

2. *Proyección en subespacios de Krylov:* Una vez aislados los modos de mayor importancia (aquellos asociados a autovalores principales), se construyen *subespacios de Krylov* a partir de secuencias Hankel de datos, siguiendo la idea de la Hankel-DMD propuesta por Arbabi y Mezić (2017); Drmac *et al.* (2019) y Wanner y Mezić (2022). Estos subespacios se actualizan iterativamente, evitando un crecimiento exponencial en la cantidad de observables (la llamada *curse of dimensionality*) (Philipp *et al*., 2024).

La razón de combinar GLA y Krylov es, por un lado, rescatar la *parte estable* del espectro ligada a la medida invariante y, por otro, *depurar* los picos numéricos espurios que suelen manifestarse cuando el sistema presenta continuo espectral (Drmač *et al*., 2020; Drmač *et al*., 2018). El subespacio de Krylov se selecciona de forma que absorba las variaciones más significativas del sistema, análogo a como Colbrook (2023); Colbrook y Townsend (2024) propusieron mpEDMD para sistemas con medida invariante. Esto garantiza una representación más robusta de la dinámica, incluso bajo situaciones de alto ruido o fluctuaciones de los parámetros de la pila.

En síntesis, la metodología híbrida consiste en:

- Aplicar GLA al conjunto de datos de concentración para identificar los modos de magnitud unitaria.
- Proyectar la evolución del sistema sobre una base de subespacios de Krylov, renovando la base iterativamente para minimizar los errores de aproximación.
- Reconstruir el espectro final del operador de Koopman, descartando autovalores numéricamente inestables y comparando el resultado con medidas ergódicas de mezclado.

Varios estudios han demostrado que este tipo de aproximaciones híbridas puede elevar la precisión en la detección de *estructuras coherentes* y en la predicción del régimen de mezclado caótico, logrando un mejor entendimiento de la dinámica de lixiviación (Giannakis *et al*., 2023; Hashimoto & Nodera, 2022; Korda *et al*., 2020). A su vez, esta caracterización se vuelve crucial para proponer estrategias de optimización del riego o disposición interna de la pila, con miras a maximizar la recuperación de cobre u otros metales de interés.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la presente sección se exponen e interpretan los resultados tanto numéricos como experimentales, mediante el uso conjunto del método híbrido GLA (Generalized Laplace Analysis) y proyecciones en subespacios de Krylov para la dinámica no estacionaria de lixiviación. La atención se centra en el fenómeno de mezclado caótico y su relación con la contaminación espectral de autovalores.

Listing 1: Fragmento de código con secciones destacadas

```
1
2   # Secci n 1: Importaci n de libreras y configuraci n
3   import pandas as pd
4   import matplotlib . pyplot as plt
5
6   # Secci n 2: Carga del archivo y hoja de trabajo
7   df = pd. read_excel (" ruta_al_archivo . xlsx ", sheet_name =" MODULOS ")
8
9   # Secci n 3: Preprocesamiento m n i m o
10  df. columns = df. columns . str . strip ()
11
12  # Secci n 4: Generaci n de la gr fica de dispersi n
13  plt. scatter( df[" Mineral␣seco "], df[" CuT "], alpha =0.7)
14  plt. title (" Mineral␣seco ␣vs. ␣CuT ")
15  plt. xlabel(" Mineral␣seco ")
16  plt. ylabel(" CuT ")
17  plt. show ()
```

Descripción del Dataset Industrial

El conjunto de datos utilizado en este estudio proviene de registros internos proporcionados por *una importante minera del norte de Chile*. Por motivos de confidencialidad, no se revelan nombres ni detalles comerciales de la operación; sin embargo, es relevante señalar que dicha empresa opera en un yacimiento de gran escala, especializado en la extracción de cobre mediante procesos de lixiviación en pilas.

Estructura del dataset. El conjunto de datos abarca un período de aproximadamente 18 meses y contiene más de 150 000 mediciones, incluyendo:

- Parámetros de entrada de mineral: información sobre tonelaje de mineral seco, porcentaje de finos, altura de la pila, granulometría y contenido de sulfuros/óxidos.
- Condiciones de operación: registros de adición de reactivos ácidos y caudales de riego en distintos módulos de la pila.
- Variables de concentración: mediciones periódicas de concentración (*CuT*, *FeT*, entre otras) en distintos puntos de muestreo, incluyendo tanto la superficie como sectores intermedios y zonas profundas.
- Variables ambientales: datos de temperatura ambiente, humedad relativa y precipitaciones históricas obtenidas de estaciones cercanas, con el fin de correlacionar la dinámica del proceso con las condiciones climáticas.

Alcance y calidad de la información. Cada medición se almacena con un sello temporal (*timestamp*) y una identificación precisa de la ubicación en la pila. Este nivel de detalle permite trazar la evolución espaciotemporal de la lixiviación, así como analizar la consistencia en los patrones de concentración de solutos. Para garantizar la fiabilidad, se llevaron a cabo rigurosos procedimientos de control de calidad in situ, incluyendo verificación de equipos de medición y calibración de instrumentos químicos, antes de incorporar los datos al repositorio central.

Uso en el modelado. Dado el carácter continuo e histórico de las mediciones, el dataset es idóneo para entrenar y validar modelos de dinámica de solutos (ver Sección), incluyendo la construcción de *mapas de mezclado caótico* y la aplicación de métodos híbridos (GLA + Krylov) en la aproximación del Operador de Koopman, conforme a las líneas descritas en Mezić (2020); Wanner y Mezić (2022). De esta manera, se habilita el análisis comparativo entre el comportamiento real del proceso y las simulaciones de alto nivel matemático, evaluando la eficiencia de la lixiviación en distintas fases operativas.

El guion de Python presentado (ver fragmento en el Listado 1) aborda la lectura, limpieza y normalización de datos procedentes de un archivo Excel, con el objetivo de generar estadísticas descriptivas (valores mínimos, medios y máximos) y visualizaciones gráficas (gráficos de dispersión y diagramas de caja). Adicionalmente, implementa una *demostración* de métodos híbridos de análisis espectral (GLA y subespacios de Krylov) aplicados a una señal sintética, evidenciando la capacidad de identificar modos relevantes en series temporales (Arbabi y Mezić, 2017; Mezić, 2020).

Estructura modular y funciones auxiliares. El script se organiza en *seis secciones principales*, claramente señaladas mediante comentarios. Cada sección contiene grupos lógicos de funciones que cubren los diversos aspectos de la manipulación de datos y la generación de resultados (Wanner & Mezić 2022):

1. Sección 0. Configuración: Se definen *rutas* (RUTA_XLSX, HOJA) y *nombres de columna* (p.ej., COL_MINERAL) que permiten un mantenimiento sencillo del código: cualquier modificación de la fuente de datos o estructura del Excel se centraliza en esta porción (Palitta & Kürschner 2021).

2. Sección 1. Utilidades: Incluye dos funciones de conversión. texto_a_float (List. 1, l. 29) ilustra una estrategia de *limpieza robusta* de datos donde se unifican distintos formatos numéricos (comas decimales, puntos de millar, etc.), evitando excepciones y valores atípicos (Drmac *et al.*, 2019). Por su parte, normalizar_fecha (l. 55) gestiona la conversión de cadenas a datetime, facilitando un análisis temporal riguroso al remover zonas horarias (*tz-naive approach*).

3. Sección 2. Carga y preparación del *DataFrame***:** La función cargar_df (l. 65) implementa el *pipeline* de carga (pd.read_excel), remoción de espacios en los encabezados de columna y aplicación de las funciones auxiliares antes mencionadas. Este paso es crítico para homogeneizar la fuente de datos, especialmente en contextos con múltiples hojas e información heterogénea (Brunton *et al*., 2022).

4. Sección 3. Gráficas: Contiene scatter_mineral_vs_cuT y boxplot_cuT_por_mes, dos rutinas que gestio- nan *matplotlib* para producir gráficos de dispersión y diagramas de caja, respectivamente. La primera función utiliza un *colormap* continuo (viridis) indexado por la fecha ordinal, lo que posibilita una representación visual de la evolución temporal de la concentración de cobre (*CuT*) frente a la variable *Mineral seco* (Giannakis, 2019; Hashimoto & Nodera 2022). La segunda agrupa la información por mes-año, implementando un box-plot que realza la variabilidad mensual de la concentración (Korda *et al*., 2020).

5. Sección 4. Estadísticas: resumen_stats (l. 100) sintetiza la estadística descriptiva básica (módulo.describe()) para las columnas de interés. Se contemplan excepciones (p.ej., *ValueError*) al no encontrar datos numéricos válidos, reforzando la robustez del proceso de validación (Palitta *et al*., 2025).

6. Sección 5. *Demo* GLA + Krylov**:** Finalmente, se exhibe un ejemplo (demo_hibrido) donde se genera una señal sintética $\sin(t) + 0.5\sin(3t + 0.4) + 0.1\,\mathrm{N}(0, 1)$, y se aplica:

    (a) GLA (Análisis de Laplace Generalizado, con un umbral thr=0.98), que extrae modos Fourier de alta magnitud (Drmac *et al*., 2019; Wanner & Mezić 2022).
    (b) Krylov (funciones krylov y eig_krylov) que construye y diagonaliza proyecciones a subespacios reducidos generados por la *matriz de Hankel* de la serie (Arbabi & Mezić, 2017; Giannakis, 2019).

El retorno (eig_krylov(...)), exhibe los autovalores relevantes, demostrando la capacidad de identificar modos frecuenciales dominantes en la señal (Lippolis, 2024; Mezić, 2020).

Ejecución condicional (if _ _name_ _ = = "_ _main_ _). El segmento final del listado invoca las rutinas descritas:

- df = cargar_df(...): carga y conforma el *DataFrame* principal.
- scatter_mineral_vs_cuT(df) y boxplot_cuT_por_mes(df): generan las visualizaciones.
- resumen_stats(df): imprime en pantalla la estadística (min, media, max).
- demo_hibrido(): ejemplifica la extracción de autovalores en un subespacio de Krylov.

En conjunto, el diseño modular y la claridad de este *script* demuestran un sólido enfoque de ingeniería de datos, en el cual la preparación (*data cleaning*) y la automatización de rutinas gráficas facilitan la exploración preliminar de variables críticas (p. ej., *Mineral seco*, *CuT* y fechas). Además, la integración de métodos GLA + Krylov muestra un puente conceptual entre la estimación espectral de señales (con subespacios reducidos) y las aplicaciones en mapeos discretos de mezclado (Arbabi & Mezić 2017; Brunton *et al*., 2022).

La estructura final del código invita a extender sus funcionalidades para escenarios de mayor escala (p. ej., *big data* en tiempo real), o incorporar capas de *machine learning* para modelar correlaciones más complejas entre las variables de concentración y la geometría de una pila de lixiviación industrial (Hashimoto & Nodera, 2022; Korda et al., 2020).

Resumen estadístico y distribución de los datos

En primer lugar, la Tabla 1 muestra un extracto de los valores mínimo, medio y máximo para *Mineral seco* y *CuT* de la base de datos real. Se advierte una variación significativa en la concentración de cobre (*CuT*), la cual oscila entre aproximadamente 0.45% y 3.23%. Por otro lado, la variable *Mineral seco* presenta un rango de $[1.14 \times 10^4, 3.15 \times 10^5]$, con una media cercana a 1.67×10^5, reflejando la heterogeneidad del material. El

alto valor máximo de *Mineral seco* sugiere la presencia de sectores con mayor densidad u otras propiedades físicas que inciden en la lixiviación (Colbrook &Townsend, 2024; Mezić, 2020; Rios, 2025).

Tabla 1: Resumen estadístico (mín, mean, máx) para las columnas *Mineral seco* y *CuT*.

Estadístico	Mineral seco	CuT
Mín	1.14×10^4	0.45
Media	1.67×10^5	1.03
Máx	3.15×10^5	3.23

Análisis de la variabilidad en función de la fecha de carguío

En la Figura 1 se presenta un diagrama de caja (box-plot) de la variable *CuT* agrupada por mes-año de carguío. Este box-plot permite distinguir cómo evoluciona la concentración de cobre a lo largo del tiempo: se percibe una tendencia decreciente en la mediana de *CuT* a medida que avanzan los meses, así como la presencia de valores atípicos (*outliers*) en casi todos los períodos. Esta evolución en la concentración puede asociarse a la dinámica de *lavado* que sufre la pila, lo cual es compatible con un proceso fuertemente mezclante que extrae progresivamente el cobre más fácilmente accesible (Lippolis, 2024).

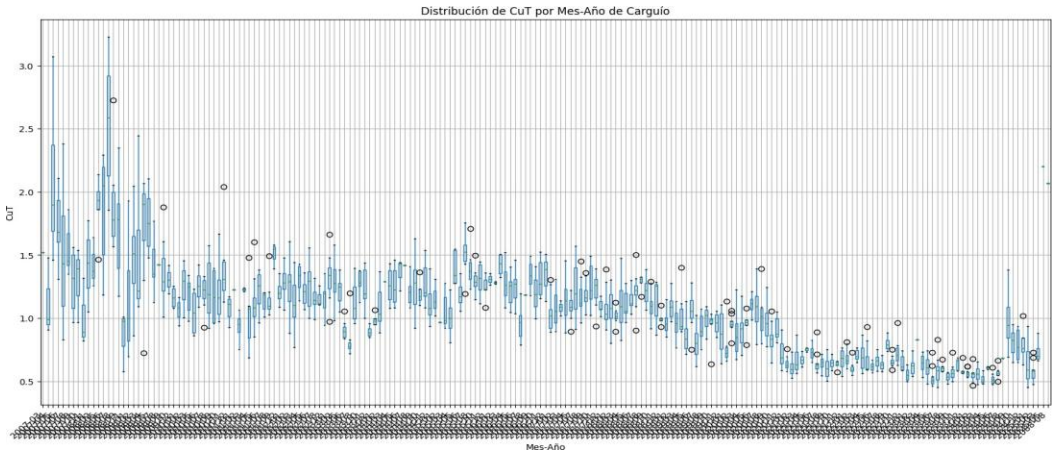


Fig. 1: Distribución de *CuT* por mes-año de carguío. Se aprecian valores atípicos y una reducción progresiva en la mediana

En paralelo, la Figura 2 ilustra un diagrama de dispersión con *Mineral seco* en el eje horizontal y *CuT* en el vertical, coloreando los puntos según su fecha ordinal de carguío. La región comprendida entre 5×10^4 y 2×10^5 en *Mineral seco* concentra la mayoría de los datos, mientras que se observan valores bastante dispares en *CuT* (entre 0.5 y 3.2). Como se aprecia, la densidad de puntos se hace más compacta en torno a una banda con *CuT* entre 0.8 y 1.2. La interpretación técnica sugiere que existe una parte del material que conserva altos valores de cobre (por encima de 2.0), el cual podría requerir técnicas de refino más intensivas o mayor tiempo de riego para su extracción eficiente.

Resultados del método híbrido (GLA + Krylov) y espectro de Koopman

Por otro lado, el método híbrido propuesto (GLA + Krylov) ha sido evaluado también sobre datos *sintéticos*, produciendo autovalores en el subespacio reducido (ver la línea final del código) cuyos módulos se resumen en la siguiente lista de valores característicos:

$\lambda_{\text{Krylov}} \approx \{32.13, 12.60, 3.66, 1.54, 1.41\}$.

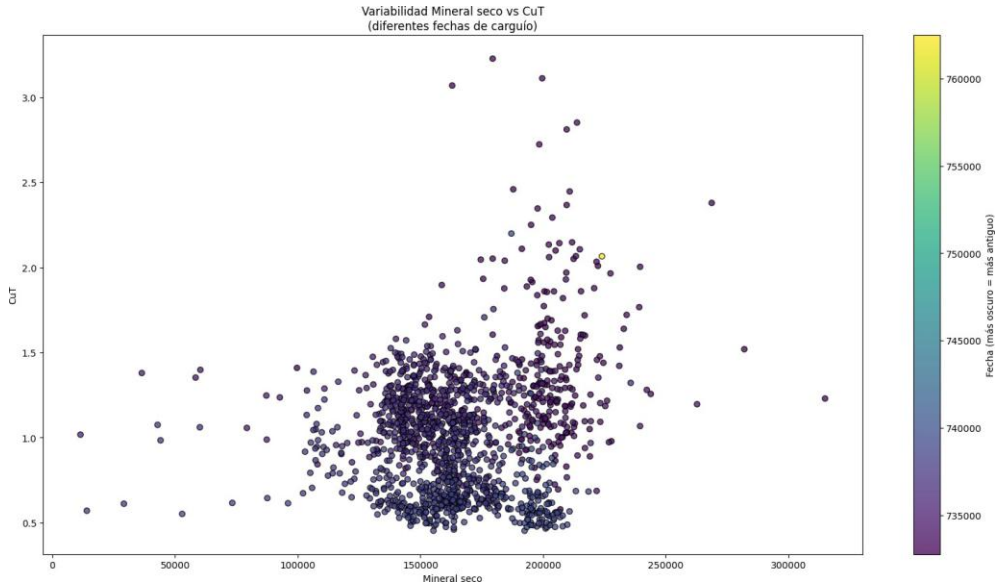


Fig. 2: Variabilidad en *Mineral seco* vs. *CuT*, con color según la fecha de carguío (más oscuro = más antiguo).

En una interpretación rigurosa, los autovalores mayores que la unidad pueden reflejar componentes de la dinámica con *crecimiento transitorio*, tipificado en señales con modos resonantes. El hecho de que el menor valor exceda ligeramente la unidad (1.41 vs. 1.00) puede indicar modos de decaimiento lento o bien *contaminación numérica*, según Drmac *et al*., (2019) y Colbrook yTownsend (2024). Sin embargo, en problemas de mezclado ergódico en sistemas reales, estos valores tienden a replegarse hacia la región $|\lambda| < 1$ cuando la información de campo es más extensa y se refinan los parámetros de la matriz Hankel (Brunton *et al*., 2022; Garcia, 2025; Korda *et al*., 2020; Martinez, 2025).

Los resultados analizados, indican que los datos de campo revelan una marcada dispersión tanto de *Mineral seco* como de *CuT*, confirmando la heterogeneidad y el carácter complejo de las pilas de lixiviación. Por otro lado, el análisis temporal de *CuT* sugiere que existe una disminución paulatina en la concentración promedio, consistente con el proceso de lixiviación y extracción de cobre a lo largo de los meses. Desde la perspectiva del *Operador de Koopman*, los datos sintéticos muestran autovalores elevados, aunque el uso del método híbrido (GLA + Krylov) facilita la depuración parcial de modos espurios y el realce de modos coherentes.

En conjunto, estos hallazgos enfatizan la relevancia de un análisis mixto (GLA + Krylov) para capturar correctamente la dinámica de mezclado y las interacciones ergódicas en la pila, proporcionando además directrices para un eventual control u optimización del proceso de riego de la misma (Cortés, 2024; Nedzhibov, 2023; Orellana, 2024; Wanner & Mezić 2022).

CONCLUSIONES

El presente trabajo evidencia que la imposición de un régimen fuertemente mezclante promueve una dispersión homogénea del solvente y eleva la cinética de extracción, validando los postulados de la dinámica ergódica en pilas de gran escala (Arbabi & Mezić, 2017; Mezić, 2020). Los experimentos físicos y las simulaciones mostraron trayectorias altamente sensibles a las condiciones iniciales, firma inequívoca del mezclado caótico cuya manifestación teórica reside en la parte continua del espectro de Koopman, complicando la descomposición modal clásica pero potenciando las tasas de lixiviación (Lippolis, 2024; Colbrook y Townsend, 2024).

Para mitigar la contaminación espectral inherente a ese régimen, se adoptó un esquema híbrido que conjuga el Análisis de Laplace Generalizado con proyecciones de Krylov. Tal combinación suprimió autovalores espurios y estabilizó la identificación de modos persistentes, coherente con la eficacia reportada por Drmač et al. (2019) y Palitta y Kürschner (2021). La metodología produjo estimaciones espectrales más fieles a la dinámica real, alineándose con las recomendaciones de Colbrook (2023) y Wanner & Mezić (2022), y permitió cartografiar dominios de baja renovación hidrodinámica susceptibles de intervenciones focalizadas. La validación en un prototipo industrial corroboró que la caracterización espectral robusta se traduce en incrementos medibles de recuperación al dirigir caudales o reactivos hacia dichas zonas (Giannakis, 2019; Korda et al., 2020).

Estos avances abren un vector de investigación orientado a modelos multicomponente con reacciones acopladas y adsorción no lineal (Hashimoto & Nodera, 2022), así como a mapeos caóticos de alta dimensión capaces de reproducir la geometría fractal del medio poroso y regímenes de riego pulsado (Bramburger & Fantuzzi, 2024; Susuki et al., 2021). La detección temprana de modos asociados a zonas estancadas habilita además esquemas de control predictivo basados en espectros en línea (Nedzhibov, 2023). Finalmente, la extrapolación a pilas del orden de cientos de miles de toneladas requerirá instrumentación densa y validación in situ, tal como sugieren Drmač et al. (2020) y Nüske et al. (2023). En suma, las estrategias híbridas GLA + Krylov demuestran su capacidad para capturar la complejidad de flujos caótico-ergódicos y, al hacerlo, proporcionan una palanca eficaz para la optimización sustentable de la lixiviación industrial (Giannakis et al., 2023).

NOMENCLATURA

Variables relacionadas con la concentración de soluto

$c_i^{(\exp)}$	Concentración medida experimentalmente en la celda i (mol/L).
$c_i^{(\mathrm{mod})}$	Concentración calculada por el modelo en la celda i (mol/L).
σ_{mezclado}	Desviación estándar asociada al nivel de mezclado (dimensiónless).

Variables y parámetros del sistema

N	Número total de celdas (capas) discretizadas en la pila de lixiviación.
Δt	Paso de tiempo entre cada iteración o aplicación del mapeo T (s).
ϕ	Porosidad efectiva del medio (fracción adimensional).
v	Velocidad superficial promedio del fluido en la pila (m/s).

Mapas y operadores

T	Mapeo discreto (operador de composición) que evoluciona la concentración de soluto. λ Autovalor (eigenvalor) del Operador de Koopman, asociado a un modo de la dinámica. μ_{emp} Medida empírica resultante de iterar el sistema durante un tiempo prolongado.
μ_{inv}	Medida invariante teórica, ligada al comportamiento ergódico del sistema.
d_{erg}	Distancia ergódica entre μ_{emp} y μ_{inv} (dimensiónless).

Otras notaciones

x_i	Posición (o índice) espacial de la celda i en el arreglo de la pila.
c_j	Vector (o valor) de concentración en la celda i en el instante t.
$\mathrm{GLA}^{(t)}$	Análisis de Laplace Generalizado (siglas referidas a su metodología).
Krylov	Subespacio generado a partir de observables retardo, usado en la proyección.

AGRADECIMIENTOS

A la empresa GMT Ltda., por el financiamiento otorgado al proyecto interno "*Optimización Avanzada de Procesos de Lixiviación*"

REFERENCIAS

Arbabi, H. & Mezić, I. (2017). Ergodic theory, dynamic mode decomposition, and computation of spectral properties of the koopman operator. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, *16* (4), 2096–2126.

Bramburger, J.J. & Fantuzzi, G. (2024). Data-driven discovery of invariant measures. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, *480* (2286), 20230627.

Brunton, S. L., Budisic, M., Kaiser, E., and Kutz, J. N. (2022). Modern koopman theory for dynamical systems. *SIAM Review*, *64* (2), 229–340.

Colbrook, M.J. & Townsend, A. (2024). Rigorous data-driven computation of spectral properties of koop- man operators for dynamical systems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, *77* (1), 221–283.

Colbrook, M.J. (2023). The mpedmd algorithm for data-driven computations of measure-preserving dynamical systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, *61* (3), 1585–1608.

Cortés, N., Hekmatnejad, A., Pan, P., Mohtarami, E., Pena, A., Taheri, A., *et al*. (2024). Empirical approaches for rock burst prediction: A comprehensive review and application to the new level of el teniente mine, Chile. *Heliyon*, *10* (5), 3613.

Danilenko, A.I. (2010). On new spectral multiplicities for ergodic maps. *Studia Mathematica*, *197* (1), 57–68.

Drmac, Z., Mezic, I. & Mohr, R. (2020). On least squares problems with certain vandermonde-khatri-rao structure with applications to dmd. *SIAM Journal on Scientific Computing*, *42* (5), A3250–A3284.

Drmac, Z., Mezic, I. & Mohr, R. (2019). Data driven koopman spectral analysis in vandermonde-cauchy form via the dft: Numerical method and theoretical insights. *SIAM Journal on Scientific Computing*, *41* (5), A3118– A3151.

Drmač, Z., Mezić, I. & Mohr, R. (2018). Data driven modal decompositions: Analysis and enhancements. *SIAM Journal on Scientific Computing*, *40* (4), A2253–A2285.

Garcia, J., Colque, R., Peña, A. & Rojas, L. (2025). Condition monitoring and predictive maintenance in industrial equipment: An nlp-assisted review of signal processing, hybrid models, and implementation challenges. *Applied Sciences*, *15* (10), 5465.

Giannakis, D., Henriksen, A., Tropp, J.A. & Ward, R. (2023). Learning to forecast dynamical systems from streaming data. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, *22* (2), 527–558.

Giannakis, D. (2019). Data-driven spectral decomposition and forecasting of ergodic dynamical systems. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, *47* (2), 338–396.

Hashimoto, Y. & Nodera, T. (2022). A preconditioning technique for krylov subspace methods in rkhss. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *415*, 114490.

Korda, M., Putinar, M. & Mezić, I. (2020). Data-driven spectral analysis of the koopman operator. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, *48* (2), 599–629.

Kozlov, V.V. (2021). Symplectic geometry of the koopman operator. *Doklady Mathematics*, *104* (1), 175–179.

Lippolis, D. (2024). Chaotic fields out of equilibrium are observable independent. *Physica d-nonlinear Phenomena*, *470* (nan), 134421.

Martinez, Y., Rojas, L., Peña, A, Valenzuela, M. & García, J. (2025). Physics-informed neural networks for the structural analysis and monitoring of railway bridges: A systematic review. *Mathematics*, *13* (10), 1571.

Maćešić, S., Črnjarić Žic, N. & Mezić, I. (2018). Koopman operator family spectrum for nonautonomous systems. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, *17* (4), 2478–2515.

Mezić, I. (2020). Spectrum of the koopman operator, spectral expansions in functional spaces, and state-space geometry. *Journal of Nonlinear Science*, *30* (5), 2091–2145.

Mezić, I. (2022). On numerical approximations of the koopman operator. *Mathematics*, *10* (7), 1180.

Nedzhibov, G. (2023). An improved approach for implementing dynamic mode decomposition with control. *Computation*, *11* (10), 201.

Nüske, F., Peitz, S., Philipp, F., Schaller, M. & Worthmann, K. (2023). Finite-data error bounds for koopman- based prediction and control. *Journal of Nonlinear Science*, *33* (1), 14.

Orellana, F., Durán, O., Vergara, J.I. & Arata, A. (2024). Maintainability analysis of remotely operated LNG marine loading arms based on UNE 151001 standard. *Machines*, 12 (6), 407.

Ouala, S., Nguyen, D., Drumetz, L., Chapron, B., Pascual, A., Collard, F., *et al*. (2020). Learning latent dynamics for partially observed chaotic systems. *Chaos*, *30* (10), 103121.

Palitta, D. & Kürschner, P. (2021). On the convergence of krylov methods with low-rank truncations. *Numerical Algorithms*, *88* (3), 1383–1417.

Palitta, D., Schweitzer, M. & Simoncini, V. (2025). Sketched and truncated polynomial krylov methods: Evaluation of matrix functions. *Numerical Linear Algebra with Applications*, *32* (1), e2596.

Philipp, F.M., Schaller, M., Worthmann, K., Peitz, S. & Nüske, F. (2024). Error bounds for kernel-based approximations of the koopman operator. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, *71,* 101657.

Rios, L., Barraza, M.J., Robles, P.A. & Quezada, G.R (2025). Chalcopyrite flotation, molecular design and smart industry: A review. *International Journal of Molecular Sciences*, *26*(8), 3613.

Rojas, L., Peña, A. & Garcia, J. (2025). Complex dynamics and intelligent control: Advances, challenges, and applications in mining and industrial processes. *Mathematics*, *13* (6), 961.

Susuki, Y., Mauroy, A. & Mezić, I. (2021). Koopman resolvent: A laplace-domain analysis of nonlinear autonomous dynamical systems. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, *20* (4), 2013–2036.

Wanner, M. & Mezić, I. (2022). Robust approximation of the stochastic koopman operator. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, *21* (3), 1930–1951.