



Estudio de la interacción de mareas en sistemas exoplanetarios observados: Estimación de las probabilidades de captura en resonancias espín-órbita

S.H. Luna^{1,2}, M.D. Melita¹ & H.D. Navone^{2,3}

¹ Instituto de Astronomía y Física del Espacio, CONICET-UBA, Argentina

² Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, UNR, Argentina

³ Instituto de Física de Rosario, CONICET-UNR, Argentina

Contacto / shluna@iafe.uba.ar

Resumen / En el presente trabajo se trata el problema de la determinación del estado de rotación más probable de los planetas HD 154088 b y HD 85512 b. Para ello, se hace uso del formalismo de Darwin-Kaula para la obtención de la expresión del torque de mareas, que corresponde a la deformación debida a la atracción gravitatoria por parte de sus respectivas estrellas anfitrionas, y del torque debido al término de deformación permanente (cuadrupolar) de cada planeta. Se incluye en dicho formalismo la descripción de la deformación del planeta mediante la reología de Andrade. Además, se exponen los dos métodos utilizados para calcular las probabilidades de captura en las resonancias espín-órbita 3 : 2, 2 : 1 y 5 : 2, a saber: el método de fuerza bruta y el método semianalítico. Se calcularon las probabilidades de captura con ambos métodos usando el valor nominal de la excentricidad. Debido a que la incerteza en la determinación de la excentricidad de cada planeta es muy significativa, se calcularon las probabilidades de captura en un rango de valores de la excentricidad que cubriera el intervalo de incerteza, haciendo uso sólo del método semianalítico.

Abstract / This article is mainly concerned with the problem of determining the most likely rotation state of exoplanets HD 154088 b and HD 85512 b. To achieve this objective, Darwin-Kaula formalism is used in order to obtain expressions for the tidal torque. The triaxially caused torque of each planet is also considered. The description of the deformation is based on the Andrade rheology. Two methods are described for the estimation of the probability capture in the spin-orbit resonances 3 : 2, 2 : 1 and 5 : 2; these are the brute force method and the semi-analytic method. Due to the uncertainty in the values of the eccentricity, only the semi-analytic method was used to compute the probability of capture as a function of the eccentricity, covering its uncertainty range.

Keywords / celestial mechanics — planets and satellites: physical evolution — dynamical evolution and stability — planet-star interactions — planets and satellites: terrestrial planets, individual: HD 154088 b — satellites: terrestrial planets, individual: HD 85512 b

Introducción

El problema a tratar es el clásico de los dos cuerpos pero considerando que uno de ellos es un cuerpo sólido y esférico capaz de deformarse al cual se lo denomina primario; el otro, llamado secundario, se lo considera aún como una masa puntual.

Considérese entonces un planeta de masa m_p y radio medio R —el primario— orbitando alrededor de su estrella anfitriona de masa m_s , considerada como el cuerpo secundario. Por simplicidad, se va a suponer que el plano de dicha órbita coincide con el plano del ecuador del planeta —esto es, inclinación nula ($i = 0$)— y, además, que el eje que corresponde al momento máximo de inercia del mismo (C) es paralelo al eje de rotación y perpendicular al plano de la órbita.

Una distribución perfectamente esférica de masa genera el mismo potencial que aquel generado por una masa puntual de la misma magnitud. Ahora bien, a escala

astronómica, la fuerza de atracción gravitatoria ejercida por la estrella anfitriona es capaz de deformar al planeta, generando las denominadas mareas terrestres. Esta deformación, sumada a la distribución inhomogénea de masa en el interior del planeta tiene como consecuencia la adición de un término no central al potencial antes mencionado. Si la deformación no es muy grande, dicho término se puede considerar como perturbativo. En términos matemáticos:

$$V = \frac{\mathcal{G}m_p}{r} + \mathcal{R}(r, \lambda, \phi), \quad (1)$$

donde (r, λ, ϕ) son las coordenadas esféricas del punto donde se mide el potencial, en un sistema de referencia solidario al planeta y, además, $|\mathcal{R}| \ll |V|$. El término \mathcal{R} , entonces, por lo indicado anteriormente, está dado por la suma de dos potenciales: el llamado potencial de MacCullagh (1844a,b), que está relacionado con la distribución no homogénea de masa, y el potencial de mareas, que resulta de considerar la aceleración impresa

por la estrella anfitriona sobre cada diferencial de masa del planeta. Por lo tanto, \mathcal{R} es el responsable de que aparezcan los dos torques que dominan la dinámica del problema considerado, es decir, la evolución rotacional del planeta cuyo estudio y aplicación, en términos de la evaluación de las probabilidades de captura en resonancias espín-órbita, es el objetivo de este trabajo.

Dada la inelasticidad de los materiales que conforman los planetas terrestres, el cambio de forma de los mismos no ocurre instantáneamente, sino con un cierto retraso que debe ser agregado a la expresión del potencial, tal como si se tratara de una fase temporal extra en una expansión de Fourier (Efroimsky, 2012).

Resulta útil, a los fines de este trabajo, expresar el potencial \mathcal{R} en función de los elementos orbitales y del ángulo de rotación θ del planeta haciendo uso de una transformación obtenida por Kaula (1961).

Torques y evolución rotacional

En virtud de las consideraciones de la sección anterior, la ecuación de movimiento a resolver es (Efroimsky & Williams, 2009):

$$\ddot{\theta} = -m_s \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta} = \frac{T_{\text{marea}} + T_{\text{triaxial}}}{C} \quad (2)$$

donde θ es el ángulo de rotación del planeta –medido desde una dirección de referencia–, T_{marea} y T_{triaxial} son las componentes paralelas al eje de rotación del torque de mareas y del triaxial, respectivamente. Estas están dadas por (Efroimsky, 2012; Makarov et al., 2012):

$$T_{\text{marea}} = \frac{3}{2} \mathcal{G} m_s^2 \frac{R^5}{a^6} \sum_{q=-1}^7 G_{20q}^2(e) \times k_2(\chi_{220q}) \text{sen } \epsilon_2(\chi_{220q}) \text{sgn}(\omega_{220q}) \quad (3)$$

$$T_{\text{triaxial}} = \frac{3}{2} (B - A) \frac{\mathcal{G} m_s}{a^3} \times \sum_{q=-1}^7 G_{20q}(e) \text{sen} [(2 + q)M - 2\theta], \quad (4)$$

donde \mathcal{G} es la constante de gravitación universal, a es el semieje mayor, e la excentricidad, $G_{lpq}(e)$ son los coeficientes de Hansen (Giacaglia, 1976); A y B son los momentos principales de inercia del planeta en el plano orbital y M es la anomalía media.

La expresión de los factores $k_2(\chi_{220q}) \text{sen } \epsilon_2(\chi_{220q})$ depende del modelo reológico elegido y son los que describen la disipación debida a la fricción interna del planeta causada por las fuerzas que generan las mareas en el mismo. Las frecuencias físicas de las tensiones que deforman el planeta, es decir, de las mareas, están dadas por:

$$\chi_{220q} = |\omega_{220q}| = |(2 + q)n - 2\dot{\theta}|, \quad (5)$$

donde n es el movimiento medio y $\dot{\theta}$ es la velocidad de rotación. En el caso de este trabajo, se usó el modelo de Andrade (Efroimsky, 2012; Makarov et al., 2012).

Resonancias y probabilidades de captura

Una de las consecuencias más interesantes de la teoría de mareas es la posibilidad de que el planeta estudiado resulte atrapado en alguna resonancia espín-órbita. Esto es, que el cociente entre $\dot{\theta}$ y n sea igual a un número racional. Dos ejemplos de ello son el caso de la Luna, que se encuentra en la resonancia 1 : 1 ($\dot{\theta} = n$) y Mercurio que se encuentra en la resonancia 3 : 2 (Pettengill & Dyce, 1965).

La captura en alguna resonancia se debe a que el torque de mareas y el triaxial se compensan mutuamente, dando como resultado la anulación de $\ddot{\theta}$ y por lo tanto $\dot{\theta}$ permanece constante, pero no en cualquier valor, sino en aquellos para los que se anula la frecuencia ω_{220q} correspondiente (Efroimsky, 2012), provocando, a su vez, la anulación del respectivo término del torque mareal, dado por la Ec. (3), siendo los demás términos prácticamente constantes. De esta forma, el torque triaxial, que oscila rápidamente, logra –en promedio– compensar el de mareas.

En este trabajo, se calculan las probabilidades de captura en una dada resonancia usando dos métodos:

- Fuerza bruta (Correia & Laskar, 2009) que consiste en realizar N integraciones de la ecuación de movimiento –Ec. (2)–, imponiendo como condiciones iniciales

$$\theta(0) = \frac{j\pi}{N} \quad ; \quad \dot{\theta}(0) = \left(1 + \frac{q'}{2}\right) + \varepsilon, \quad (6)$$

donde $j = 0, \dots, N-1$, q' es el valor que corresponde a la resonancia a estudiar y ε es un número positivo del orden de 10^{-2} . Luego, se cuenta la cantidad de veces que el planeta resultó capturado (N_c) y, en consecuencia, la probabilidad de captura (P_c) es

$$P_c = \frac{N_c}{N} \quad (7)$$

- Semianalítico (Goldreich & Peale, 1966): La probabilidad de captura se obtiene a partir del cociente entre los cambios en la energía antes y después de que ω_{220q} se anule por primera vez. La expresión matemática se omite por razones de brevedad, pero puede encontrarse detalladamente explicada en los artículos de Goldreich & Peale (1966) y Makarov et al. (2012).

Resultados

En este trabajo se analizaron los sistemas exoplanetarios HD 154088 y HD 85512 dado que son simples, esto es, sólo están compuestos por el planeta y su estrella anfitriona. En la Tabla 1 se muestran los valores de los parámetros utilizados.

En líneas generales, si se supone que los planetas considerados son terrestres, al principio de su historia sus velocidades de rotación eran mucho mayores que aquellas correspondientes a las resonancias consideradas (Miguel & Brunini, 2010). En tal caso, el torque de mareas hace disminuir dicha velocidad pasando por las resonancias (desde las más altas hasta las más bajas) hasta quedar capturado en alguna.

En las Tablas 2 y 3 se muestran los resultados obtenidos de la probabilidad de captura en las resonancias

Parámetro	Valor	
	HD 154088 b	HD 85512 b
$R [R_{\oplus}]$	1.63	1.4
$m_p [M_{\oplus}]$	6.13	3.5
$m_s [M_{\odot}]$	0.8	0.65
$a [UA]$	0.13	0.26
$e \pm \Delta e$	0.38 ± 0.15	0.11 ± 0.1
$(B - A)/C$	5×10^{-5}	5×10^{-5}
$\tau_M [años]$	50	50
$\mu [kg m^{-1} s^{-2}]$	0.8×10^{11}	0.8×10^{11}
α	0.2	0.2

Tabla 1: Parámetros utilizados en la integración de la ecuación de movimiento para el estudio de los planetas HD 154088 b y HD 85512 b.

Resonancia	Probabilidad	
	Semianalítica	Fuerza bruta
3:2	1.0	1.0
2:1	1.0	1.0
5:2	0.7	0.79

Tabla 2: Probabilidades de captura calculadas para el planeta HD 154088 b con los dos métodos descriptos.

3:2 ($q' = 1$), 2:1 ($q' = 2$) y 5:2 ($q' = 3$), estimados con los dos métodos antes descriptos.

En ambos casos, para el método de fuerza bruta, se tomó $N = 40$ y $\varepsilon = 0.01$.

Resonancia	Probabilidad	
	Semianalítica	Fuerza bruta
3:2	0.59	0.45
2:1	0.07	0.15
5:2	0.006	0.0

Tabla 3: Probabilidades de captura calculadas para el planeta HD 85512 b con los dos métodos descriptos.

Debido a la incerteza en la medición de las excentricidades, se decidió usar el método semianalítico para calcular las probabilidades de captura en las tres resonancias indicadas, barriendo el intervalo de dicha incerteza. Los resultados se muestran en las Figs. 1 y 2.

Conclusión

Como puede verse en las Tablas 2 y 3, los valores obtenidos de las probabilidades de captura no discrepan demasiado entre sí. El método semianalítico puede usarse para obtener una estimación rápida de dichas probabilidades. El método de fuerza bruta parece ser más riguroso, aunque resulta más costoso en cuanto a tiempos de cálculo se refiere.

Si se consideran los valores nominales de e , en virtud de las Tablas 2 y 3 resulta inevitable que el planeta HD 154088 b quede atrapado en la resonancia 2:1; en cambio, el estado de rotación más probable del planeta HD 85512 b es el correspondiente a la resonancia 3:2. Pero, si se consideran los intervalos de incerteza,

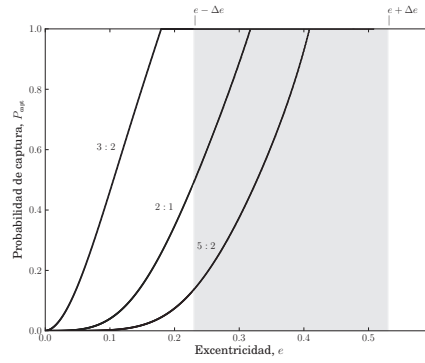


Figura 1: Gráficas de la probabilidad de captura en función de la excentricidad. Planeta HD 154088 b.

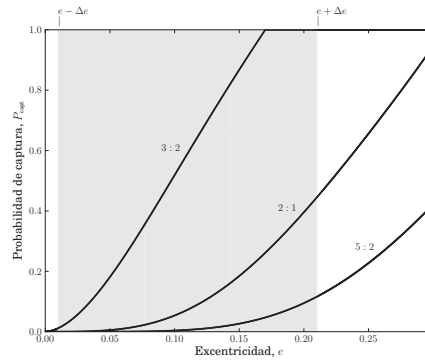


Figura 2: Gráficas de la probabilidad de captura en función de la excentricidad. Planeta HD 85512 b.

resulta que para ambos planetas el estado de rotación más probable es la captura en la resonancia 3:2, como puede apreciarse en las Figs. 1 y 2.

Referencias

- Correia A. C. M., Laskar J., 2009, *Icarus*, 201, 1
 Efroimsky M., 2012, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 112, 283
 Efroimsky M., Williams J. G., 2009, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 104, 257
 Giacaglia G. E. O., 1976, *Celest. Mech.*, 14, 515
 Goldreich P., Peale S., 1966, *AJ*, 71, 425
 Kaula W. M., 1961, *Geophysical Journal*, 5, 104
 MacCullagh J., 1844a, *Proc. Royal Irish Academy*, 2, 520
 MacCullagh J., 1844b, *Proc. Royal Irish Academy*, 2, 542
 Makarov V. V., Berghea C., Efroimsky M., 2012, *ApJ*, 761, 83
 Miguel Y., Brunini A., 2010, *MNRAS*, 406, 1935
 Pettengill G. H., Dyce R. B., 1965, *Nature*, 206, 1240