ASADES

Avances en Energías Renovables y Medio Ambiente
Vol. 16, 2012. Impreso en la Argentina. ISSN 0329-5184

DETERMINACIÓN DE UN COEFICIENTE TÉRMICO DESCONOCIDO A TRAVÉS DE UNA SOBRE-CONDICIÓN CONVECTIVA EN EL BORDE FIJO.

D.A. Tarzia[1]
Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Empresariales, Universidad Austral
y Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)
Paraguay 1950, C.P. S2000FZF – Rosario, Argentina.
Tel. 0341-5223093 – Fax 0341-5223001 e-mail: DTarzia@austral.edu.ar

RESUMEN: Se usa el modelo de región pastosa de Solomon-Wilson-Alexiades (Letters Heat Mass Transfer, 9 (1982), 319-324) y el método dado en Tarzia (Int. J. Heat Mass Transfer, 26 (1983), 1151-1157; Int. Comm. Heat Mass Transfer, 14 (1987), 219-228) para la determinación de un coeficiente térmico desconocido de un material semi-infinito a través de un proceso de cambio de fase con una sobre-condición convectiva en el borde fijo. Se encuentran fórmulas para los seis coeficientes desconocidos y la condición necesaria y suficiente para la existencia de la solución.

Palabras clave: cambio de fase, fusión, condición convectiva, determinación de coeficientes térmicos desconocidos y Problema de Lamé-Clapeyron-Stefan.

INTRODUCCIÓN

Se considera un material semi-infinito que se encuentra inicialmente en la fase sólida a la temperatura de fusión 0 C (sin pérdida de generalidad). En el tiempo $t = 0$ un flujo de calor entrante se impone en el borde fijo $x = 0$ y la fusión comienza, en la cual tres regiones distintas pueden ser distinguidas (por una descripción completa puede verse en (Solomon et al., 1982)):

H1) sólida a temperatura 0 C, ocupando la región $x > r(t),\ t > 0$;

H2) líquida a temperatura $T(x,t) > 0$, ocupando la región $0 < x < s(t),\ t > 0 \quad (\text{con } s(t) < r(t))$;

H3) región pastosa (mushy region) a temperatura $T(x,t) = 0$, ocupando la región $s(t) \le x \le r(t),\ t > 0$. Se considera que la región pastosa es isotérmica sobre la cual se realizan dos hipótesis sobre su estructura:

H3i) el material contiene una fracción fija $\varepsilon\ell\ (\text{con } 0 < \varepsilon < 1)$ del calor latente total ℓ , que se traduce en la siguiente condición sobre la frontera libre $x = s(t)$ dada por:

$$-kT_x(s(t),t) = \rho\ell[(1-\varepsilon)\dot{s}(t) + \varepsilon\dot{r}(t)], \quad t > 0 \ ; \tag{1}$$

H3ii) su ancho es inversamente proporcional al gradiente de temperatura, es decir:

$$-T_x(s(t),t)(r(t) - s(t)) = \gamma > 0, \quad t > 0\ (\text{con } \gamma > 0) \ . \tag{2}$$

Con el nombre de coeficiente térmico se denotarán uno de los seis coeficientes térmicos elegidos entre $k, c, \rho, \ell, \varepsilon, \gamma$. Se supone que uno de los seis coeficientes térmicos de la fase líquida del dado material semi-infinito es desconocido.

Los problemas de cambio de fase son de una gran importancia en ciencia y tecnología (Alexiades y Solomon, 1993; Carslaw y Jaeger, 1959; Crank, 1984; Gupta, 2003; Lunardini, 1991). Una colección de soluciones explícitas a numerosos problemas de frontera libre con procesos de transferencia de calor y/o difusión de masa se han presentado recientemente en (Tarzia, 2011).

Siguiendo la metodología utilizada en (Tarzia, 1982; 1983; 1987) se determinará un coeficiente térmico desconocido de un material semi-infinito a través de un proceso de cambio de fase con una sobre-condición convectiva en el borde fijo $x = 0$. Se encuentran fórmulas explícitas para los seis coeficientes térmicos desconocidos, la interfase y la temperatura de la fase líquida, como asimismo la condición necesaria y suficiente para la existencia de la correspondiente solución. La determinación experimental-numérica de coeficientes térmicos sin zona pastosa ha sido presentada en (Arderius et al., 1996).

DETERMINACIÓN DE LA TEMPERATURA, INTERFACE Y UN COEFICIENTE TÉRMICO DESCONOCIDO

El problema consiste en la determinación de un coeficiente térmico a través de un proceso de cambio de fase (fusión) con una sobre-condición sobre el borde fijo, es decir: encontrar las fronteras libres $x = s(t)$ y $x = r(t)$, la temperatura $T = T(x,t)$ y un coeficiente térmico desconocido entre $\{k, c, \rho, \ell, \gamma, \varepsilon\}$ de manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$\rho c T_t - k T_{xx} = 0\,, \quad 0 < x < s(t)\,, \quad t > 0 \; (\alpha = k/\rho c) \tag{3}$$

$$T\big(s(t),t\big) = 0\,, \quad t > 0 \tag{4}$$

$$-kT_x(s(t),t) = \rho\ell[(1-\varepsilon)\dot{s}(t) + \varepsilon\dot{r}(t)], \quad t > 0 \tag{5}$$

$$-T_x(s(t),t)(r(t)-s(t)) = \gamma, \quad t > 0 \tag{6}$$

$$s(0) = r(0) = 0 \tag{7}$$

$$kT_x(0,t) = -\frac{q_0}{\sqrt{t}}, \quad t > 0 \quad (q_0 > 0)\,. \tag{8}$$

$$kT_x(0,t) = -\frac{h_0}{\sqrt{t}}\big(T(0,t) - B\big), \quad t > 0 \quad (\text{with } h_0 > 0, B > 0)\,. \tag{9}$$

La condiciones (8) y (9) representan el flujo de calor entrante y la condición convectiva respectivamente sobre el borde fijo $x = 0$. Tanto el flujo de calor como el coeficiente de transferencia de calor son inversamente proporcional a la raíz cuadrada del tiempo (Tarzia, 1981; Zubair y Chaudhry, 1994).

Se determinará la solución del problema dividido en seis casos diferentes, a saber:

Caso #	Coeficiente desconocido
1	ℓ
2	γ
3	ε
4	k
5	ρ
6	c

Tabla 1: Los seis casos de determinación de coeficientes térmicos desconocidos.

Con el objetivo de determinar la solución del problema se definen las ecuaciones (10) y (11) auxiliares dadas por:

$$g(x)\left[x + \frac{\varepsilon\gamma\sqrt{\pi}}{2q_0\left(\frac{1}{h_0} + \frac{B}{q_0}\right)} erf(x)\right] = \frac{cq_0}{\ell\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{h_0} + \frac{B}{q_0}\right), \quad x > 0 \tag{10}$$

$$g(x) + \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{1}{h_0} + \frac{B}{q_0}}\left[\frac{\varepsilon\gamma}{2q_0}e^{2x^2} - \frac{q_0}{k\rho\ell}\right] erf(x) = 0, \quad x > 0 \tag{11}$$

donde la función real g está definida por $g(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$.

La solución de los seis casos de coeficientes térmicos desconocidos se determinan según el resultado siguiente:

Propiedad. Si h_0 y q_0 son dos coeficientes positivos que se determinan experimentalmente entonces la solución de la determinación de los seis coeficientes térmicos desconocidos está dada por:

$$T(x,t)=\frac{q_0\sqrt{\pi\alpha}}{k}erf(\xi)\left[1-\frac{erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)}{erf(\xi)}\right], \quad 0<x<s(t),\ t>0\ , \tag{12}$$

$$s(t)=2\xi\sqrt{\alpha t}, \quad t>0\ , \tag{13}$$

$$r(t)=2\mu\sqrt{\alpha t}, \quad t>0\ , \tag{14}$$

$$\mu=\xi+\frac{\gamma k}{2q_0\sqrt{\alpha}}\mathrm{e}^{\xi^2}\ . \tag{15}$$

Además, el coeficiente ξ , que caracteriza la interfase $x=s(t)$, y los coeficientes térmicos desconocidos correspondientes a los seis casos vienen expresados por las fórmulas que se resumen en la siguiente Tabla 2:

Caso #	Fórmulas para los coeficientes desconocidos	Parámetro ξ como la única solución de la ecuación	Restricciones sobre los datos
1	$\ell=\frac{q_0}{\rho\sqrt{\alpha}}\frac{\mathrm{e}^{-\xi^2}}{\xi+\frac{\varepsilon\gamma k}{2q_0\sqrt{\alpha}}}$	$\xi=erf^{-1}\left(\frac{k}{\sqrt{\pi\alpha}}\left(\frac{1}{h_0}+\frac{B}{q_0}\right)\right)$	$\frac{k}{\sqrt{\pi\alpha}}\left(\frac{1}{h_0}+\frac{B}{q_0}\right)<1$
2	$\gamma=\frac{2q_0\sqrt{\alpha}}{\varepsilon k}\mathrm{e}^{-\xi^2}\left[\frac{q_0}{\rho\ell\sqrt{\alpha}}\mathrm{e}^{-\xi^2}-\xi\right]$	$\xi=erf^{-1}\left(\frac{k}{\sqrt{\pi\alpha}}\left(\frac{1}{h_0}+\frac{B}{q_0}\right)\right)$	$\frac{k}{\sqrt{\pi\alpha}}\left(\frac{1}{h_0}+\frac{B}{q_0}\right)<1$ $\ell<\frac{q_0}{\rho\sqrt{\alpha}}\frac{1}{g\left(erf^{-1}\left(\frac{k}{\sqrt{\pi\alpha}}\left(\frac{1}{h_0}+\frac{B}{q_0}\right)\right)\right)}$
3	$\varepsilon=\frac{2q_0\sqrt{\alpha}}{\gamma k}\mathrm{e}^{-2\xi^2}\left[\frac{q_0}{\rho\ell\sqrt{\alpha}}\mathrm{e}^{-\xi^2}-g(\xi)\right]$	$\xi=erf^{-1}\left(\frac{k}{\sqrt{\pi\alpha}}\left(\frac{1}{h_0}+\frac{B}{q_0}\right)\right)$	$\frac{k}{\sqrt{\pi\alpha}}\left(\frac{1}{h_0}+\frac{B}{q_0}\right)<1$ $\frac{1}{g(\xi)+\frac{\gamma k}{2q_0\sqrt{\alpha}}e^{2\xi^2}}<\frac{\rho\sqrt{\alpha}}{q_0}\ell<\frac{1}{g(\xi)}$
4	$k=\frac{\pi}{\rho c\left(\frac{1}{h_0}+\frac{B}{q_0}\right)^2}erf^2(\xi)$	Ec. (10)	------------------
5	$\rho=\frac{\pi}{kc\left(\frac{1}{h_0}+\frac{B}{q_0}\right)^2}erf^2(\xi)$	Ec. (10)	------------------
6	$c=\frac{\pi}{\rho k\left(\frac{1}{h_0}+\frac{B}{q_0}\right)^2}erf^2(\xi)$	Ec. (11)	$\frac{\varepsilon\gamma\ell\rho k}{2q_0^2}>1$

Tabla 2 Resumen de la determinación de un coeficiente térmico desconocido a través de un problema de cambio de fase de Lamé-Clapeyron-Stefan con una sobre-condición sobre el borde fijo (6 casos)

Prueba. Teniendo en cuenta que $erf\left(x/2\sqrt{\alpha t}\right)$ es solución de la ecuación del calor (3) (Carslaw y Jaeger, 1959) se propone como solución del problema a la siguiente expresión:

$$T(x,t)=C_1+C_2\ erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right), \quad 0<x<s(t),\ t>0\ , \tag{16}$$

con los coeficientes C_1 y C_2 a determinar. De la condición (8) se deduce la expresión del coeficiente:

$$C_2 = -\frac{q_0\sqrt{\alpha\pi}}{k}\,, \tag{16}$$

y de la condición (4) se deducen la expresión (13) para la frontera libre $s(t)$, con el coeficiente ξ a determinar, y la expresión del coeficiente:

$$C_1 = \frac{q_0\sqrt{\alpha\pi}}{k}\,erf(\xi)\,. \tag{17}$$

Teniendo en cuenta los coeficientes (16) y (17) se deduce la expresión (12) para la temperatura de la fase líquida. Por otro lado, de la condición (9) y teniendo en cuenta la temperatura (12) se deduce la ecuación:

$$\frac{q_0\sqrt{\alpha\pi}}{k}\,erf(\xi) = \frac{q_0}{h_0} + B\,, \tag{18}$$

De la condición (6) se deduce la expresión (15) para μ y por ende la expresión (15) para la interfase $r(t)$.

De la condición (5) y teniendo en cuenta (15) se deduce la ecuación:

$$\frac{q_0}{\rho\ell\sqrt{\alpha}} = e^{\xi^2}\left(\xi + \frac{k\varepsilon\gamma}{2q_0\sqrt{\alpha}}\,e^{\xi^2}\right), \tag{19}$$

Resumiendo, el coeficiente ξ y el coeficiente térmico desconocido deben satisfacer el sistema de dos ecuaciones no lineales con dos incógnitas (18) y (19). La solución de dicho sistema para los seis diferentes casos se resume en la Tabla 2.

CONCLUSIONES

Se determinó un coeficiente térmico desconocido de un material semi-infinito a través de un proceso de cambio de fase con una zona pastosa y una sobre-condición en el borde fijo $x = 0$. Se encontraron fórmulas explícitas para los seis coeficientes térmicos desconocidos, las interfases de la zona pastosa y la temperatura de la fase líquida, como asimismo la condición necesaria y suficiente sobre los datos para la existencia de la correspondiente solución

NOMENCLATURA

$B > 0$: temperatura externa en el borde fijo $x = 0$,
$c > 0$: calor específico,
$h_0 > 0$: coeficiente que caracteriza la transferencia de calor en el borde fijo $x = 0$.
$k > 0$: conductividad térmica,
$\ell > 0$: calor latente por unidad de masa,
$q_0 > 0$: coeficiente que caracteriza el flujo de calor en el borde fijo $x = 0$,
$r = r(t)\ (> s(t))$: interfase sólida-zona pastosa,
$s = s(t) > 0$: interfase líquida-zona pastosa,
T : temperatura de la fase líquida,
x : variable espacial,

Letras griegas:
$\alpha = \dfrac{k}{\rho c}$: conductividad térmica,
$\gamma > 0$: uno de los dos coeficientes que caracterizan la zona pastosza,
$\varepsilon \in (0,1)$: uno de los dos coeficientes que caracterizan la zona pastosa,
$\mu\ (> \xi)$: coeficiente que caracteriza la interfase $r(t)$,
ρ : densidad de masa,
$\xi > 0$: coeficiente que caracteriza la interfase $s(t)$.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente subsidiado por los proyectos PIP No. 0460 de CONICET – UA y ANPCyT PICTO Austral 2008 No. 173.

REFERENCIAS

Alexiades V. y Solomon A.D. (1993). Mathematical modeling of melting and freezing processes. Hemisphere Publ. Corporation, Washington.

Arderius J.C., Lara M.y Tarzia D.A. (1996). Experimental-numerical determination of thermal coefficient through a phase-change process. International Communications in Heat and Mass Transfer 23, 745-754.

Carslaw H.S. y Jaeger J.C. (1959). Conduction of heat in solids. Oxford University Press, London.

Crank J. (1984). Free and moving boundary problems. Clarendon Press, Oxford.

Gupta S.C. (2003). The classical Stefan problem. Basic concepts, modelling and analysis. Elsevier, Amsterdam.

Lunardini V.J. (1991). Heat transfer with freezing and thawing. Elsevier, Amsterdam.

Solomon A.D., Wilson D.G. y Alexiades V. (1982). A mushy zone model with an exact solution. Letters in Heat and Mass Transfer 9, 319-324.

Tarzia D.A. (1981-82). An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem. Quarterly of Applied Mathematics 39, 491-497.

Tarzia D.A. (1982). Determination of the unknown coefficients in the Lamé -Clapeyron problem (or one-phase Stefan problem). Advances in Applied Mathematics 3, 74-82.

Tarzia D.A. (1983). Simultaneous determination of two unknown thermal coefficients through an inverse one-phase Lamé-Clapeyron (Stefan) problem with an overspecified condition on the fixed face. International Journal of Heat and Mass Transfer 26, 1151-1158.

Tarzia D.A. (1987). Determination of unknown thermal coefficients of a semi-infinite material for the one-phase Lamé-Clapeyron (Stefan) problem through the Solomon-Wilson-Alexiades mushy zone model. International Communications in Heat and Mass Transfer 14, 219-228.

Tarzia D.A. (2011). Explicit and Approximated Solutions for Heat and Mass Transfer Problems with a Moving Interface, Chapter 20, , pp. 439-484. In Advanced Topics in Mass Transfer, Mohamed El-Amin (Ed.). InTech Open Access Publisher, Rijeka. Available from:
http://www.intechopen.com/articles/show/title/explicit-and-approximated-solutions-for-heat-and-mass-transfer-problems-with-a-moving-interface

Zubair S.M. y Chaudhry M.A. (1994). Exact solutions of solid-liquid phase-change heat transfer when subjected to convective boundary conditions. Wärme und Stoffübertragung (Heat and Mass Transfer) 30, 77-81.

ABSTRACT

We use the Solomon-Wilson-Alexiades' mushy zone model (Letters Heat Mass Transfer, 9 (1982), 319-324) and the method given in Tarzia (Int. Heat Mass Transfer, 26 (1983), 1151-1157; Int. Comm. Heat Mass Transfer, 14 (1987), 219-228) for the determination of one unknown thermal coefficient of a semi-infinite material through a phase-change process with an overspecified convective boundary condition on the fixed face. We also find formulas for the six unknown coefficients, and the necessary and sufficient condition for the existence of the solution.

Keywords: fusion, phase-change, convective boundary condition, determination of unknown thermal coefficients, and Lamé-Clapeyron-Stefan problem.