Ricardo Gómez y la corriente disidente en la filosofía de la matemática[9]

Javier Legris
CIECE, IIEP-BAIRES
CONICET

En el ámbito de habla hispana, Ricardo Gómez ha sido reconocido por varias generaciones de estudiantes e interesados en epistemología a raíz de su trabajo de 1972 sobre la ciencia aristotélica (reimpreso muy recientemente Gómez 2016) y, sobre todo, el volumen I de su obra *Las Teorías Científicas* de 1977 (el único publicado). Allí se incluía un examen del desarrollo histórico del concepto de teoría formal y consideraciones exhaustivas sobre el concepto de teoría axiomática, los problemas de la teoría de conjuntos y el desarrollo del programa de Hilbert.

El objetivo de este trabajo es ubicar esta obra en el contexto de las discusiones en la filosofía de la matemática de aquel momento. En particular intentaré mostrar que la perspectiva que Gómez adopta tiene puntos de contacto con la llamada "corriente disidente" (*maverick*) en filosofía de la matemática que comenzaba a manifestarse por esos años. Tomando en cuenta el momento de su publicación, esta es una gran virtud en un texto sistemático y con un objetivo didáctico, ya que implicaba tomar distancia del desinterés por los aspectos históricos vigente en la filosofía de la matemática de la época.

En el volumen, originado en cursos de posgrado en filosofía de la ciencia, Gómez ofrece una introducción a la filosofía de las ciencias formales con cierto nivel de sofisticación, variedad y detalle, incluyendo tesis propias acerca de la naturaleza de las teorías científicas, la filosofía de la

[9] Es una gran alegría contribuir a este volumen de homenaje a Ricardo Gómez. Cuando era estudiante de grado, leí con interés y provecho su libro *Las Teorías Científicas* y luego lo utilicé en cursos de filosofía de las ciencias formales. Posteriormente, me enteré de que el libro tenía su origen en cursos de posgrado ofrecidos en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires, en los primeros años de la década de 1970, que fueron un momento esencial en la consolidación de los estudios epistemológicos en esta facultad.

ciencia de ese momento, la actividad científica en general y sobre la matemática en particular. De la lectura del primer capítulo queda claro que este volumen formaba parte de una empresa más amplia que pretendía abordar en un segundo volumen problemas de la filosofía de las ciencias fácticas. No sólo se tenía la intención de discutir las ideas de Popper sobre la investigación científica y la justificación de hipótesis y teorías desde una perspectiva "falsacionista", sino que se aspiraba a analizar la concepción que Thomas Kuhn defendía acerca del desarrollo de las teorías en las ciencias fácticas y que tenía como base estudios de casos históricos en torno de la noción de revolución científica. Por esos años, las ideas de Kuhn eran intensamente discutidas, obligando a los epistemólogos a sumergirse en las aguas no tan cristalinas de la historia de la ciencia.

En su reseña de 1981, Roberto Torretti calificaba al volumen como una "introducción avanzada a la filosofía contemporánea de la ciencia", en tanto plantea problemas y dudas que son evitadas en los manuales más elementales (Torretti, 1981, 244). Sin duda, el libro contiene una mirada original, que se advertirá en las observaciones siguientes.

Gómez señala como uno de los problemas centrales a examinar el del *progreso científico*, o sea la dinámica de las ideas científicas (Gómez, 1977, 15). En este sentido afirma la *crisis* del empirismo lógico, el cual se encuentra en "una serie de callejones sin salida" (Gómez 1977, 16). Esta idea de crisis está focalizada en la filosofía de las ciencias fácticas practicada por el empirismo lógico (tomado en un sentido amplio que abarca tanto las ideas del Círculo de Viena como las del Círculo de Berlín, al menos en la forma en que han sido popularizadas). No obstante, como se verá en breve, también afecta a las ciencias formales. Más específicamente, Gómez señala algunas limitaciones que presenta la concepción de la lógica y la matemática del empirismo lógico, en la que se advertía la influencia (no siempre explícita) del logicismo.

En el volumen se sostiene que "la estructuración contemporánea de la Matemática responde a las tesis de Nicolás Bourbaki" (Gómez, 1977, 401). Según el grupo de matemáticos franceses que firmaban como Bourbaki había diversos tipos de estructuras en los cuales se ubicaban las disciplinas matemáticas. No me voy a ocupar de esta tesis en particular aquí ni tampoco voy a analizar la idea de la unidad de la matemática vinculada con esta. Cabe señalar, en todo caso, que esta preferencia por la caracterización bourbakiana de la matemática marca una primera diferenciación con el empirismo lógico e incluso una aproximación más ligada a la práctica matemática, al abandonar el modelo fundacional, basado en la teoría de conjuntos.

En cambio, hay otras tesis que son filosóficamente más significativas. Así, en el prefacio del libro, Gómez señala:

> Nuestro método se asienta en un supuesto básico: todo análisis filosófico sobre las ciencias presupone el esclarecimiento de los hechos históricos de las mismas. No hay Filosofía de las Ciencias sin, al menos, una fundamentación de la misma en la Historia. (Gómez, 1977, 9)

Esta afirmación evoca las ideas sostenidas en esa misma época por Imre Lakatos (1922-1974), que partía del desarrollo histórico de la matemática. Esto se hace evidente en su trabajo "El método de análisis y síntesis". Lakatos es uno de los autores que se encuentran en el origen de un cambio de rumbo en la filosofía de la matemática del siglo XX. Al trabajar en su tesis doctoral en la universidad de Cambridge a fines de la década de 1950, este autor señaló en una serie de obras la central importancia de la *metodología heurística* (el "método de invención") para el desarrollo de las ciencias y, en particular, de la matemática. Por esa razón, trató de recuperar para la reflexión presente el problema tradicional de la lógica de la invención, que había preocupado tanto a los matemáticos antiguos como a los modernos y que encontró en el *método de análisis y síntesis* una formulación clásica que luego haría historia, y que implicaba una interpretación del método axiomático.

Lakatos analizaba métodos de descubrimiento (o invención) en la historia de la matemática. El procedimiento filosófico subyacente parte de tomar casos históricos específicos que resulten típicos respecto de un espectro amplio de casos interesantes. Como resultado, se obtienen una serie de reglas heurísticas tentativas, pero que no pretenden imponerse como un conjunto de reglas fijas y únicas de invención en matemática. Lakatos había empleado este procedimiento en su tesis doctoral, presentada en 1962 y que se convertiría en su libro *Proofs and Refutations* (publicado luego de su muerte). La investigación de Lakatos encerraba una crítica directa a la línea predominante, que se manifiesta en la paráfrasis que hace de un célebre *dictum* kantiano:

> La historia de la matemática sin la guía de la filosofía se ha vuelto ciega, mientras que la filosofía de la matemática, al darle la espalda a los fenómenos más fascinantes de la historia de la matemática, se ha vuelto vacía. (Lakatos, 1976, 2)

Lakatos criticaba la filosofía de la matemática que se basa en lo que él llama *racionalidad estática* y que consiste en el empleo de criterios puramente lógicos para explicar el desarrollo del conocimiento matemático, con el consecuente acento en el concepto de demostración como una sucesión de enunciados de un lenguaje formal que surge por aplicación de reglas lógicas. Claramente, tanto el programa logicista surgido originalmente del pensamiento de Frege como el formalismo, originado en el programa de Hilbert, vistos como posiciones filosóficas, serían ejemplos conspicuos de esta racionalidad estática.

El caso de estudio del que se ocupa Lakatos es *el teorema de Euler para poliedros*, según el cual el número de vértices de un poliedro sumado a sus caras excede exactamente en 2 al número de sus aristas. No me voy a detener en el examen que hace Lakatos de las demostraciones de este teorema. La posición de Lakatos es un importante caso, tal vez el más conocido de una *línea disidente* (*maverick*) en filosofía de las ciencias formales (siguiendo la denominación propuesta por William Aspray y Phillip Kitcher en la introducción a 1988). Esta línea disidente se oponía a la "línea principal" (*mainstream*) que estos autores consideraban enfocada hacia los problemas de fundamentos. Ejemplo de esta línea es la muy conocida compilación de Paul Benacerraf e Hilary Putnam sobre filosofía de la matemática, publicada originalmente en 1964 (pero con una segunda edición revisada y aumentada en 1982), obra que incluso en la actualidad sigue siendo una referencia insoslayable.

Si nos limitamos a la tradición analítica en general, la "línea principal" dominó durante buena parte del siglo pasado, centrando sus discusiones en torno de los problemas de fundamentación de la matemática, surgidos, al menos parcialmente, luego del descubrimiento de las conocidas paradojas en la teoría de conjuntos. En ellos se imbricaron las escuelas tradicionales en fundamentos: el logicismo, el intuicionismo y el formalismo (un breve panorama puede encontrarse en Esquisabel & Legris, 2020). Los problemas filosóficos clásicos que presentaba la matemática, de un modo u otro, fueron discutidos a través del prisma de estos problemas. En particular, el acento estuvo puesto en cuestiones ontológicas, discutiendo, por ejemplo, si las entidades matemáticas tenían una naturaleza independiente de las entidades físicas o no. Las cuestiones metodológicas y estrictamente epistemológicas (la noción de demostración, por ejemplo) se proyectaban sobre este fondo ontológico.

Otra consecuencia fue el supuesto de que el conocimiento matemático estaba cristalizado en teorías axiomáticas. Dicho de otra manera, la matemática era considerada como un cuerpo de teorías abstractas más o menos axiomatizadas o en vías de la axiomatización. Aquí se advertía claramente la adopción de un "punto de vista lógico" (que era en parte resultado de un "logicismo implícito" en la línea principal). Sin duda, el impacto que tuvo el fenomenal desarrollo de la lógica simbólica en las primeras décadas del siglo pasado determinó que el análisis del conocimiento matemático se centrara en su sistematización (conceptual y deductiva). La filosofía de la matemática no era más que una *lógica del conocimiento matemático*, o sea, *lógica aplicada*. Este punto de vista se hacía evidente en los criterios que Carnap empleaba para distinguir entre ciencias formales y ciencias fácticas.

Por supuesto, en la compilación de Benacerraf y Putnam de 1964 ya aparecen textos que plantean algunos problemas a la línea principal (lo que se manifiesta aún más en la segunda edición de 1983), como es el caso de los influyentes trabajos de Paul Benacerraf (n. 1931). Por ejemplo, el llamado "dilema de Benacerraf" plantea la imposibilidad (dados ciertos supuestos) de arribar a una concepción unificada de la semántica de las expresiones matemáticas y del conocimiento de las entidades designadas por esas expresiones. Esto llevó a dejar de lado las cuestiones ontológicas y a enfocarse más en las metodológicas.

El hecho es que ambas líneas coexistieron a fines del siglo pasado, conduciendo a modificaciones en la filosofía de la matemática, que se advierten en trabajos publicados en los primeros años del siglo XXI. La línea disidente es un antecedente de la actual *filosofía de la práctica matemática*, que tomó forma en la compilación de Paolo Mancosu con ese nombre (véase Mancosu, 2005; para tener un panorama general, véase Carter, 2019) y que se va haciendo cada vez más presente en el escenario filosófico.

> Según el resumen del libro accesible en el sitio *Philosophical Papers*, Existe en la filosofía de la matemática una urgente necesidad de nuevas perspectivas que le presten mayor atención a la práctica matemática. Este libro trazará el camino: ofrece análisis filosóficos de características importantes de la matemática contemporánea y de muchos aspectos de la actividad matemática que escapan al tratamiento puramente lógico. (*Philosophical Papers* URL: https://philpapers.org/rec/MANTPO-19)

Años más tarde, Mancosu hizo una visión retrospectiva del volumen, donde señala:

> considero que la teoría del conocimiento de la matemática necesita ser extendida más allá de sus confines actuales para abordar temas gnoseológicos que tienen que ver con fecundidad conceptual, evidencia, visualización, razonamiento diagramático, comprensión, explicación, y otros aspectos de la teoría del conocimiento de la matemática que son ortogonales respecto del problema del acceso a 'objetos abstractos' (Mancosu, 2016, 132).

Si bien no hay una caracterización enteramente homogénea de lo que es la *filosofía de la práctica matemática*, Jessica Carter señala acertadamente en su trabajo de 2019 dos rasgos generales que la identifican:

(1) el ámbito de análisis abarca cualquier variedad de lo que se entienda por matemática, sin considerar una visión idealizada de la disciplina;

(2) toma resultados y métodos de otras disciplinas (historia, ciencias cognitivas, sociología, etc.)

En este sentido puede decirse que esta perspectiva parte de una concepción naturalista de la filosofía, un *naturalismo* filosófico (muy defendido actualmente en otras áreas) según el cual los resultados de las ciencias fácticas tienen relevancia para la justificación de tesis filosóficas.

Frente a las objeciones que Gómez plantea a la línea principal, cabe discutir su papel como un antecedente de esta filosofía de la práctica matemática. En el capítulo final de *Las Teorías científicas*, se hacen explicitas una serie de conclusiones que extrae de su exposición. Me detengo especialmente en dos de ellas (Gómez, 1977, 407), que resultan muy importantes en el volumen,

> T4) La Matemática Pura se construye a partir de la Teoría de Conjuntos.
>
> T5) El método de la matemática es el método axiomático.

Ambas tesis aparecen en el volumen dentro del contexto de una defensa, ya mencionada, de la concepción *bourbakiana* de la matemática, que toma como concepto básico el de estructura.

En este contexto, se distingue primeramente la matemática pura de la matemática aplicada como ámbitos separados, con criterios de justificación claramente distintos. Gómez afirma:

> Las cuestiones relativas a la Matemática Pura se elucidan con total independencia del orbe factual; las cuestiones de matemática aplicada se resuelven teniendo en cuenta el dominio objetal al cual se pretende aplicar una cierta estructura. (Gómez, 1977, 401-402)

La distinción clásica entre enunciados analíticos y sintéticos (cuestionada desde hace décadas) parece estar subyacente a esta posición. La naturaleza analítica de la matemática lleva a que el estudio de la relación de la matemática con la realidad no sea un tema central (un ejemplo de esta posición se encuentra en el trabajo clásico de Hans Hahn "Lógica, matemática y conocimiento de la naturaleza", Hahn 1933). El "contenido" de los enunciados matemáticos no incluye conceptos empíricos, de modo que las aplicaciones de la matemática no tienen ningún valor en la justificación teórica. En general, la "línea principal" en la filosofía de la matemática del siglo pasado ha prestado poca atención al problema de la aplicabilidad de la matemática, sin inmutarse demasiado ante el "milagro" que el físico Paul Wigner veía en la aptitud de la matemática para formular las leyes de la física (véase Wigner, 1960). Gómez habla de un "traslado" de la teoría acerca de la estructura matemática al ámbito de la realidad fáctica.

La tesis T4 implica la necesidad de una teoría *fundacional* en la que se base toda la matemática pura y al mismo tiempo le otorgue unidad a toda la matemática. En la concepción del grupo Bourbaki existían varias estructuras básicas de la matemática; Gómez, no obstante, afirma la primacía de la teoría de conjuntos. Actualmente, los matemáticos preocupados por este asunto discuten otros candidatos, tales como la teoría de categorías o la teoría de homotipos, que son teorías con un desarrollo más reciente que la teoría de conjuntos. De este modo, la elección de la teoría depende de la evolución interna de la matemática, aunque su justificación no sea una tarea exclusivamente matemática. Las "teorías de fundamentos" se van modificando de acuerdo al desarrollo de la matemática.

Esta situación resulta problemática, si se acepta la siguiente afirmación que Gómez hace unos párrafos más adelante, "Toda teoría de fundamentación de la Matemática constituye el núcleo de toda filosofía de la Matemática" (1977, 409).

No cabe duda de que gran parte de las ideas de las escuelas clásicas en fundamentos de la matemática se originan en desarrollos de la práctica matemática durante la constitución de la "matemática moderna" a fines del siglo XIX.

Gómez contextualiza la tesis 5 en la "estructuración de la matemática", esto es, en la manera en que se va construyendo el edificio de la matemática, y explícitamente se refiere a la tradición que comienza en Euclides y para Gómez culmina en el grupo Bourbaki, donde se presenta como un "método de descubrimiento", según el cual los axiomas definen una estructura y las demostraciones llevan a descubrir teoremas (Gómez, 1977, 407).

Como se ha mencionado, en las últimas décadas los filósofos han cuestionado posiciones excesivamente idealizadas o normativas acerca de las demostraciones y la construcción de sistemas axiomáticos y se han orientado hacia otros temas y problemas: (i) el estudio de la formulación y desarrollo de conceptos, teoremas, teorías en casos históricos; (ii) el análisis de las herramientas cognitivas que están en juego en el descubrimiento matemático, llegando a esbozar un panorama complejo, en el que no es fácil arribar a un único método de investigación (un ejemplo ya clásico es el estudio, mencionado antes, que Lakatos hizo del teorema de Euler para poliedros); (iii) la consideración de un uso *explicativo* de las demostraciones (al modo de las explicaciones nomológico-deductivas en las ciencias fácticas); (iv) el análisis de la función de los diagramas en las demostraciones y la discusión acerca de la posibilidad de demostraciones puramente diagramáticas; (v) el estudio de la llamada *pureza* de métodos empleados en las demostraciones, problema mencionado ya por Aristóteles, pero que se reexamina actualmente respecto de casos históricos concretos (el teorema de Desargues sobre geometría proyectiva, por ejemplo); (vi) el examen de los elementos retóricos que aparecen en las demostraciones axiomáticas (que cobran particular importancia en la Edad Moderna).

Bastan los casos mencionados para advertir los cambios ocurridos en la filosofía de la matemática en las últimas décadas. Dado este panorama, es razonable poner en duda la tesis 5, al menos en la forma en que Gómez la formulaba. En su obra, Gómez trataba de equilibrar el análisis sistemático con la perspectiva histórica y el estudio de casos. Esto lo distanciaba de la corriente principal vigente y lo acercaba a los antecedentes de los desarrollos actuales en filosofía de la matemática.

De este modo, Gómez revelaba una actitud que no es ajena al pensamiento de muchos autores de países de América del Sur y que puede clasificarse claramente como *heterodoxa*. Es esta una actitud que enriquece la discusión al proporcionar puntos de vista alternativos. Al mismo tiempo, sus supuestos filosóficos llevaron a Gómez a concentrarse en los problemas de fundamentación, analizándolos con herramientas formales, y dejando así a un lado los casos concretos de la actividad matemática. Leer *Las Teorías Científicas* a varias décadas de su publicación exige volver a reflexionar sobre temas básicos de la filosofía de la matemática, tales como el carácter necesario y formal del conocimiento matemático, la relación entre la filosofía y la práctica concreta o la actitud naturalista.

REFERENCIAS

Aspray, W. & P. Kitcher, eds. *History and Philosophy of Modern Mathematics, Minnesota Studies in the Philosophy of Science Vol. XI*. Minneapolis: University of Minnesota Press, 1988.

Benacerraf, P. & H. Putnam, eds. *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. Cambridge: Cambridge University Press, 1982.

Carter, J. "Philosophy of Mathematical Practice —Motivations, Themes and Prospects". *Philosophia Mathematica,* 27, (1); (2019): 1-32. DOI 10.1093/philmat/nkz002.

Esquisabel, O. M. & J. Legris. "El simposio de Königsberg sobre fundamentos de la matemática en perspectiva". *Metatheoria – Revista de Filosofía e Historia de la Ciencia*, 10, (2); (2020): 7-15. ISSN 1853-2330. Disponible en: https://www.metatheoria.com.ar/index.php/m/article/view/207

Gómez, R. J. "Sobre el concepto aristotélico de ciencia. Reconstrucción y vigencia". *Disputatio. Philosophical Research Bulletin* 5, (6); (2016): 237-265. (Publicado originalmente en 1972).

---. *Las Teorías Científicas -Desarrollo –Estructura –Fundamentación*. Tomo 1. Buenos Aires: El Coloquio, 1977.

Hahn, H. "Logik, Mathematik und Naturerkennen". B. F. McGuinness, comp. *Empirismus, Logik, Mathematik*, Frankfurt a. M.: Suhrkamp. 1988 [1933]. 141-172.

Lakatos, I. *Proofs and Refutations*. Traducción castellana *Pruebas y refutaciones -La lógica del descubrimiento matemático*, Madrid: Alianza, 1986. Cambridge: Cambridge University Press, 1976.

Mancosu, P. "Algunas observaciones sobre *The Philosophy of Mathematical Practice*". *Disputatio. Philosophical Research Bulletin,* 5, (6); (2016):131—156.

---. *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford: Oxford University Press, 2008.

Torretti, R. "Review" of (Gómez, 1977). *Noûs*, 15, (2); (1981): 244-246.

Wigner, P. "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences". *Communications on Pure and Applied Mathematics,* 13, (1); (1960): 1-14. DOI 10.1002/cpa.3160130102