REVIN
REVISTA INTERNACIONAL DE PESQUISA EM DIDÁTICA DAS CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

A DIVISÃO ENTRE GEOMETRIA ANALÍTICA E ÁLGEBRA LINEAR NO ENSINO UNIVERSITÁRIO: PROBLEMA EPISTEMOLÓGICO OU DIDÁCTICO?

THE SEPARATION OF ANALYTICAL GEOMETRY AND LINEAR ALGEBRAGE IN UNIVERSITY TEACHING: AN EPISTEMOLOGICAL OR A DIDACTIC PROBLEM?

LA ESCISIÓN DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA Y EL ÁLGEBRA LINEAL EN LA ENSEÑANZA UNIVERSITARIA: ¿PROBLEMA EPISTEMOLÓGICO O DIDÁCTICO?

Pablo Agustin Sabatinelli[1]
Viviana Carolina Llanos[2]

Resumo: Este artigo faz parte de uma pesquisa que aborda o problema do ensino da Álgebra Linear (AL) e da Geometria Analítica (GA) no ciclo básico dos cursos de Engenharia na Argentina. Especificamente, estamos interessados em responder às perguntas: Que ligações epistemológicas podemos identificar entre GA e AL? O fenómeno da divisão entre GA e AL pode ser justificado por razões epistemológicas ou é uma questão de decisões didácticas? Concluímos que o fenómeno da desarticulação entre GA e AL responde a decisões que afectam o seu ensino e não são de natureza epistemológica.
Palavras-chave: Geometria Analítica. Álgebra Linear. Formação em Engenharia. Teoria da Transposição Didáctica. Teoria Antropológica da Didáctica.

Abstract: This paper is part of a research that addresses the problem of the teaching of Linear Algebra (LA) and Analytic Geometry (AG) in the basic cycle of Engineering careers in Argentina. Specifically, we are interested in answering the questions: What epistemological connections can we identify between AG and LA? Can the phenomenon of splitting between AG and LA be justified on epistemological grounds or is it a matter of didactic decisions? We conclude that the phenomenon of disarticulation between AG and LA responds to decisions that affect their teaching and are not epistemological.
Keywords: Analytic Geometry. Linear Algebra. Engineering Education. Theory of Didactic Transposition. Anthropological Theory of Didactics.

Resumen: Este trabajo es parte de una investigación que aborda el problema de la enseñanza del Álgebra Lineal (AL) y la Geometría Analítica (GA) en el ciclo básico de las carreras de Ingeniería en Argentina. Especificamente nos interesa responder a las preguntas ¿Qué vínculos epistemológicos podemos identificar entre el GA y la AL? ¿Puede justificarse el fenómeno de escisión entre los saberes de GA y AL a partir de razones epistemológicas o se trata de decisiones didácticas? Concluimos que el fenómeno de desarticulación entre GA y AL responde a decisiones que afectan su enseñanza y no son de órden epistemológico.
Palabras-clave: Geometría Analítica. Álgebra Lineal. Formación de Ingenieros. Teoría de la Transposición Didáctica. Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Submetido 15/02/2022 **Aceito 01/06/2022** **Publicado 02/06/2022**

[1] Licenciado en Educación Matemática. Jefe de Trabajos Prácticos, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR), Rosario, Argentina. ORCID: 0000-0001-9686-3780 E-mail: pablosabatinelli@gmail.com.
[2] Doctora en Enseñanza de las Ciencias. NIECYT, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. CONICET, Argentina. ORCID: 0000-0003-0433-2654 E-mail: vcllanos@exa.unicen.edu.ar.

Revista Internacional de Pesquisa em Didática das Ciências e Matemática

Introducción

Un análisis basado en 168 investigaciones sobre el problema de la enseñanza del Álgebra Lineal y la Geometría Analítica (en adelante AL y GA respectivamente) en la Universidad, confirma la existencia del fenómeno de escisión entre estos conocimientos (Sabatinelli, Llanos y Otero, 2021). Específicamente los trabajos de Oropeza y Sánchez (2015), Oropeza y Lezama (2007, 2008), Dogan-Dunlap (2010) y Shi (2009) abordan este problema que consiste en estudiar separadamente GA y AL, incluso en el caso en que estos saberes conformen una única materia, como ocurre en el ciclo básico de la formación de ingenieros en las universidades de Argentina. Sin embargo nos preguntamos ¿ocurre lo mismo desde el punto de vista epistemológico? En el trabajo de Dorier (1995) se propone que el AL debe ser entendida como el estudio de los espacios vectoriales a partir del carácter unificador y generalizador que éstos tienen. La generalización de problemas geométricos a espacios de dimensión mayor a tres reforzó la cohesión de los problemas lineales, y en definitiva la vinculación entre AL y GA. Tanto el modelo de R^n como espacio vectorial finito-dimensional la teoría de determinantes, las representaciones gráficas y el uso de vocabulario geométrico gradualmente se conformó como el bagaje teórico para poder hacer frente a cualquier problema de linealidad. Este proceso muestra cómo la idea de espacio vectorial, es en definitiva la síntesis entre la geometría y la teoría de los determinantes. Por otra parte, en el trabajo de Katz y Barton (2007) se sintetizan las fases del desarrollo del Álgebra: geométrica, estática, de resolución de ecuaciones, dinámica funcional y abstracta. Estas etapas se identifican con las propuestas de los programas de estudio para Ingeniería en las universidades argentinas. Desde los primeros programas de estudio en 1880 con una fuerte carga en la resolución de ecuaciones, al estudio de las estructuras algebraicas clásicas (grupos, anillos, etc.) y los espacios vectoriales. Intentamos aquí analizar si este fenómeno de escisión es propio de estos conocimientos desde su creación, la referencia, o si por el contrario se corresponde con transformaciones, en ocasiones inapropiadas, como puede ocurrir por ejemplo cuando comenzamos a pensar en la enseñanza de un determinado saber.

Se realizará un estudio exploratorio y descriptivo, basado en un análisis documental (Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio, 2016; Valles, 1999) a partir de los documentos producidos por el saber de referencia y la noosfera y nos serviremos de las herramientas que nos proporciona la Teoría de la Transposición Didáctica (TTD) (Chevallard,

1985) y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Ibíd, 1999, 2007) para dar respuesta a las preguntas ¿Qué vínculos epistemológicos podemos identificar entre el AL y la GA? ¿Puede justificarse el fenómeno de escisión entre los saberes de GA y AL a partir de razones epistemológicas o se trata de decisiones didácticas que exceden al nivel de la referencia?

En primer lugar y por orden cronológico de su desarrollo se analizan las características de la GA, y luego del AL. Se realiza también una discusión entre sus puntos de encuentro, destacando y seleccionando como ejemplos los conocimientos de proporcionalidad y linealidad tanto en GA como en AL. Se realiza una discusión sobre las transformaciones de estos conocimientos, según las referencias consideradas en el análisis (planes de estudio, programa de las asignaturas de AL y GA de universidades en Argentina y los libros de texto que conforman los programas). Si bien aquí solo realizamos sucintamente una descripción epistemológica de los conocimientos de GA y AL, en las discusiones se recuperan los problemas didácticos que identificamos en la enseñanza de estos conocimientos en la Universidad.

Marco Teórico

La Teoría de la Transposición Didáctica (TTD) (Chevallard, 1985) establece que el saber producido en la comunidad científica de referencia (*saber sabio*) "sufre" modificaciones, transformaciones y sustituciones hasta convertirse en un *saber a enseñar* o *saber escolar*; por lo tanto el saber escolar no es una copia del *saber sabio* sino que es la adaptación necesaria de éste. Estas transformaciones ocurren en lo que Chevallard llama *noósfera* (Chevallard, 1985, 2007; Otero, 2021). Entre los documentos de la *noosfera* se encuentran los diseños curriculares, los planes de estudio de las carreras, los programas de las asignaturas, los libros de texto, materiales didácticos y las investigaciones científicas desarrolladas en el seno de una comunidad. El fenómeno de la transposición pone de manifiesto otro, denominado *relatividad institucional simultánea de lo matemático y de lo didáctico*, asumiendo la existencia de una transposición desde la institución en donde se pretende enseñar (Otero, 2021). Así ocurre en la universidad, donde el modelo epistemológico que identificamos es el de la escisión de los saberes de GA y AL, sin considerar los problemas vinculados a la pérdida de sentido que dicha separación produce, y a la utilidad de estos conocimientos en la formación de los ingenieros. Como señalan Bosch y Gascón (2007) la limitación más fuerte ocurre cuando el proceso de transposición no es capaz de mantener o recrear una posible "*razón de ser*" de los conocimientos, que en este caso, la universidad se propone transmitir.

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1985, 1999), postula que para interpretar la actividad matemática en una institución dada es imprescindible estudiar los procesos de construcción y las transformaciones de estos saberes desde la comunidad productora del *saber sabio* hasta las transformaciones dadas al saber que se vuelve objeto de enseñanza. El análisis de la génesis y las transformaciones en la comunidad de referencia, permite acercarnos al problema de la escisión entre AL y GA desde otro lugar, con el objeto de comprender si el tratamiento de estos conocimientos en la formación de ingenieros en Argentina obedece a restricciones de la comunidad de referencia o si existen razones de índole epistemológica que lo justifiquen. La TAD entiende que los saberes matemáticos a estudiar en una institución dependen de restricciones y condiciones que operan a distintos niveles. Chevallard (2001) identifica y reúne en una *escala de codeterminación didáctica*, una jerarquía de niveles relativa a las formas de organizar los conocimientos a estudiar. Un esquema general (Chevallard, 2001, 2019) se puede sintetizar así: *Humanidad* ↔ *Civilización* ↔ *Sociedades* ↔ *Escuelas* ↔ *Pedagogía* ↔ *Disciplina* ↔ *Dominio* ↔ *Sector* ↔ *Tema* ↔ *Cuestión*. En cada una de estas etapas, se imponen restricciones y condiciones que terminan definiendo qué se puede estudiar de la cuestión considerada. El profesor tiene una injerencia parcial en los niveles inferiores tales como *Tema* o *Cuestión*. Entonces, ¿quién decide qué estudiar de AL y GA en carreras de Ingeniería en Argentina? Chevallard entiende que el profesor "abandona" los niveles superiores de la escala, no por decisión propia, sino porque no tiene acceso a ellos. Los niveles superiores son propios de quienes "piensan" el funcionamiento general del sistema sin tener intervenciones en el aula.

La Geometría Analítica

El auge del Álgebra en el siglo XVI, a partir de los trabajos de Tartaglia, Vietè y Bombelli entre otros, posibilitó que tanto René Descartes (1596-1650) como Pierre de Fermat (1607-1665) estudiaran geometría a partir de recursos algebraicos. Descartes publica *La Geometría* (1637) como apéndice de su *Discurso del Método* (1637), mientras que Fermat, el mismo año envía al Padre Mersenne parte de sus investigaciones de 1629 contenidas en el trabajo *Introducción a los Lugares Planos y Sólidos*, pero que no se publica hasta que su hijo lo incluye en las *Varia Opera Mathematica* (1679). Estos dos trabajos dan origen a lo que conocemos como GA. En ellos, se reconoce una de las características centrales de la GA: asociar ecuaciones algebraicas con curvas y superficies. En concordancia con lo que sostienen varios investigadores como Boyer (1944), Wolff (1970) y Kline (2012) el aporte definitivo de la GA es el ser una nueva *metodología*, que consiste en:

- suponer el problema resuelto;
- nombrar todos los segmentos, puntos, rectas, etc. necesarios para representar los datos del problema, ya sean éstos conocidos (datos) o desconocidos (incógnitas);
- determinar la ecuación que vincule las longitudes conocidas con las desconocidas;
- resolver la ecuación resultante;
- construir geométricamente la solución.

En lo que sigue, describiremos el trabajo de Descartes y Fermat en relación a la creación de la GA, como así también algunos de los aportes de otros matemáticos en los que éstos se basaron para desarrollarla. También explicaremos a qué se hace referencia con "*nueva metodología*" para la GA y señalaremos las diferencias que tiene ésta con la Geometría Euclideana.

Fermat se interesó por el estudio de los lugares geométricos siguiendo lo que iniciaron algunos geómetras griegos, pero que a consideración del matemático francés no pudieron generalizar adecuadamente.

> "No se puede dudar de que los antiguos se ocuparon largamente de los lugares geométricos; lo sabemos por Pappus, quien, al principio del Libro VII, atestigua que Apolonio había escrito sobre lugares planos, y Aristeo sobre lugares sólidos. Pero, si no nos equivocamos, la búsqueda de los lugares no fue lo suficientemente fácil para ellos. Lo conjeturamos por el hecho de que, para muchos lugares, no dieron una declaración suficientemente general, como veremos más adelante." (Fermat, 1679, p.22)

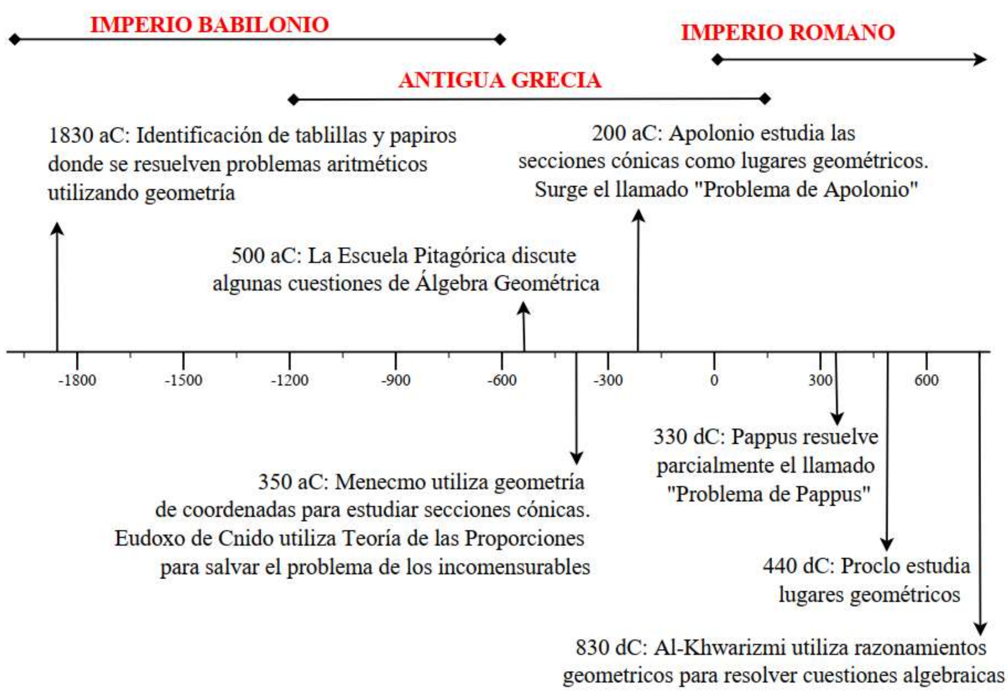
En este mismo párrafo, Fermat ya sabe que podrá generalizar y simplificar lo que los antiguos no pudieron, gracias al recurso del álgebra que floreció durante el renacimiento en Europa. Fermat se desprende de lo que llamaba intuición geométrica y en cambio propone una forma de trabajo general que no se fundamente en dicha intuición a través del estudio de los lugares geométricos, entendidos éstos como conjunto de puntos que cumplen con determinadas condiciones. "*Siempre que en una ecuación final encontremos dos incógnitas, tendremos un lugar geométrico, el extremo de una de ellas que describe una línea recta o curva.*" (Fermat, 1679, p.23). Es decir, Fermat estudia las curvas y sus propiedades a partir del estudio de las ecuaciones correspondientes y utiliza el álgebra para hacer esto.

Para el trabajo de Descartes, fueron decisivos los aportes del matemático italiano Bombelli (1526-1572) y del matemático francés Vietè (1540-1603). Descartes buscó continuar con el trabajo de Vietè referido a la construcción geométrica de raíces de ecuaciones algebraicas. En un intento de proponer una metodología unificadora de técnicas geométricas, en su obra *La Géométrie* (1637) propone la utilización del álgebra renacentista como procedimiento para abordar problemas de índole geométrica. Así, entendemos que la identificación de ecuaciones con curvas va mucho más allá de un cambio de registro o forma de representar un ente matemático. Se abre camino de este modo en la resolución de problemas de origen geométrico utilizando técnicas algebraicas pero también posibilita abordar problemas algebraicos desde un enfoque geométrico. Para Descartes la solución a un problema geométrico no dependerá ya de la habilidad del geómetra para dibujar ciertas rectas o establecer determinadas conexiones. Con el uso del álgebra tan difundido por aquella época en Europa, Descartes propone métodos algebraicos por sobre los geométricos en búsqueda de una metodología amplia. A partir del uso del álgebra, Descartes está en condiciones de sortear algunas dificultades que los griegos no pudieron. Como ejemplo, citamos parte del trabajo de Eudoxo de Cnido (390a.C.-337a.C.) que luego Descartes utilizará y reformulará. En la *Teoría de la Proporción*, Eudoxo utiliza un *álgebra geométrica*[3], que consiste en la geometrización de métodos algebraicos para abordar la crisis de los inconmensurables que se dio en la matemática griega, según consta en el libro V de los *Elementos* de Euclides (ca. 300 a.C./1996). Eudoxo introdujo la noción de *magnitud*, que sin ser un número le sirvió para tratar ángulos, segmentos, áreas, volúmenes, que variasen de una manera continua. Una razón de magnitudes era una proporción, es decir una identidad de dos razones, fueran éstas conmensurables o no. Tanto el concepto de razón como el de proporción sólo tenían sentido en la geometría pero no en la aritmética, porque no trataba de números que en ese entonces eran entendidos como multiplicidad de unidades. Observemos que la distinción entre número y magnitud incluso se traslada al enunciado y demostración de resultados dentro de los *Elementos*. En el libro V, la

[3] El término corresponde matemático e historiador danés Hieronymus Georg Zeuthen (1839 - 1920).

proposición 16 dice "*si cuatro magnitudes son proporcionales, también por alternancia serán proporcionales*", mientras que con demostración diferente la proposición 13 del libro VII dice "*si cuatro números son proporcionales, también por alternancia serán proporcionales*" (Euclides, ca. 300 a.C./1996). Esta imposibilidad de manipular algebraicamente magnitudes geométricas (y viceversa) la explica Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.) cuando concluye que no podemos demostrar verdades geométricas mediante la aritmética donde los géneros son diferentes; no se pueden adjuntar demostraciones aritméticas a lo que es incidental a las magnitudes (a menos que las magnitudes sean números).

Figura 1: Vinculación geométrica, aritmética y algebraica en la antigüedad



El uso que Descartes hace del álgebra como instrumento para "automatizar" y "mecanizar" la resolución de problemas algebraicos, nos permite afirmar como hacen otros investigadores (Boyer, 1944; Wolff, 1970; Kline, 2012) que la Geometría Analítica que propone el matemático francés es verdaderamente una *metodología de trabajo*. Descartes supondrá el problema resuelto y a partir de allí, es que razonará hasta encontrar esa solución supuesta previamente. El método al que refiere Descartes y que explica inicialmente en un apéndice de su obra *Discurso del método* (1637) consiste en el establecimiento de una correspondencia entre los puntos del plano y pares ordenados de números reales, permitiendo asociar curvas planas y ecuaciones en dos variables, de modo que cada curva del plano tiene asociada una ecuación $f(x,y) = 0$ y recíprocamente, pero además se establece una correspondencia entre las propiedades algebraicas de la ecuación $f(x,y) = 0$ y las propiedades geométricas de la curva asociada. Así, podría llegar a interpretarse a la GA como una especie de diccionario entre el Álgebra y la Geometría, pero no es tal. Por ejemplo, para hallar la intersección de dos curvas representadas por las ecuaciones $f(x,y) = 0$ y $g(x,y) = 0$, lo que conforma un problema geométrico se podrá resolver a partir del sistema formado por ambas ecuaciones, lo que constituye ahora un problema algebraico. Es decir, Descartes estudia las propiedades de las ecuaciones a partir de las curvas que ésta representan.

Esta forma de hacer geometría tiene diferencias con la Geometría euclideana. Mientras que para Euclides la construcción de una figura significa graficarla (o entender cómo hacerlo) usando los postulados por él propuestos, para Descartes significa encontrar una ecuación algebraica para esta figura. La innovación en Descartes es que el dibujo propiamente dicho de la curva ya no es importante en el sentido de que todas las propiedades (geométricas) que la figura posea serán revelados por la ecuación que la identifica. La manipulación algebraica de la ecuación tiene un correlato con la construcción geométrica de la figura.

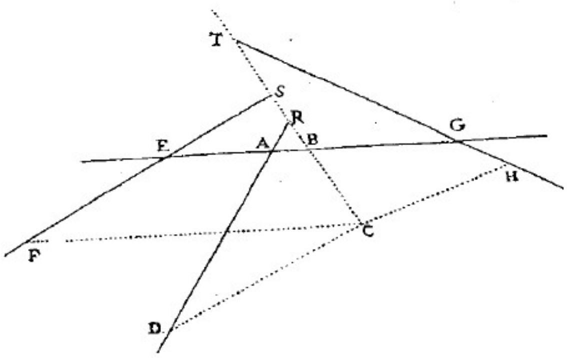
Otra diferencia entre la propuesta de Descartes y la Geometría euclideana surge al considerar los problemas a resolver. Para el geómetra griego, resolver un problema geométrico significa comenzar con lo conocido o dado y después, gradualmente, agregar nuevas afirmaciones (tanto proposiciones como postulados), hasta llegar a la respuesta requerida. Como este método conduce al objetivo a través de la compilación de varias piezas de conocimiento adquirido previamente, se lo llama método “sintético”. Este método aúna o sintetiza muchas piezas sueltas a fin de conseguir un resultado antes desconocido. Para Descartes, resolver un problema geométrico significa buscar la solución como si ya se hubiera encontrado y descomponerla (o analizarla) en partes más pequeñas donde cada componente ya es conocida por nosotros. Este método, en consecuencia, se llama “analítico” y cuando se aplica a la geometría ésta recibe el nombre de “Geometría Analítica” (Wolff, 1970).

Un ejemplo paradigmático en la Geometría de Descartes es el conocido *problema de Pappus*. El problema parte de que están dados un cierto número de rectas, un número determinado de ángulos, una razón y un segmento. Se pide determinar la curva cuyos puntos satisfacen una cierta relación con la razón dada. Euclides, Apolonio y Pappus pudieron conseguir algunas soluciones parciales a casos particulares, pero la dificultad de resolverlo de forma general desbordaba las posibilidades de la geometría euclideana.

Descartes resuelve el problema que podría considerase de lugar geométrico usando GA, e ilustra el uso del método aplicándolo al caso de cuatro rectas. El enunciado que hace Descartes del problema de Pappus es el que sigue:

> "Sean AB, AD, EF, GH, etc…, varias líneas dadas, debiendo hallarse un punto como C, desde el que trazando varias líneas rectas sobre las líneas dadas, como CB, CD, CF y CH, de modo que los ángulos CBA, CDA, CFE, CHG sean dados, y de modo tal que el resultado de la multiplicación de una parte de estas líneas sea igual al resultado obtenido por la multiplicación de las otras, o bien que guarden alguna otra proporción dada, lo cual en nada dificulta el problema." (Descartes, 1637/1987, pág. 289)

Figura 2



Fuente: Descartes (1637/1987), pág. 289.

Aquí ya puede verse la diferencia con la geometría de los griegos: Descartes utiliza un método analítico y no uno sintético; supone el punto C (es decir un punto que verifique las condiciones del problema) y sobre él razona hasta encontrarlo.

> En primer lugar, supongo resuelto el problema y, para librarme de la confusión de todas esas líneas, considero solamente una de las dadas y una de las que es preciso calcular, por ejemplo AB y CB, como las principales y con las que intento relacionar todas las otras. (Descartes, 1637/1987, pág. 290)

A continuación sobre el punto A fija el origen de coordenadas, la recta AB será el eje de abscisas y la recta BC el de ordenadas, de manera que el segmento AB mida x mientras que el segmento BC mida y. Con las consideraciones iniciales, todos los ángulos y distancias a las diferentes rectas pueden determinarse en función de x, y y el ángulo determinado por los *ejes* *de referencia*. Seguidamente fija incógnitas convenientemente para las diferentes razones y mediante sustituciones consigue una expresión para el lugar geométrico propuesto.

Es preciso destacar, por otra parte, que hay claros puntos de contacto entre la geometría griega y la GA. Ésta última terminó siendo la respuesta a la cuestión de unificar la geometría con la aritmética y con el álgebra. Los intentos que hasta ese momento hubo en referencia a esta cuestión fueron primero a través de la teoría de las proporciones de Eudoxo, que conforman el libro V de los *Elementos* de Euclides, y posteriormente durante el Renacimiento a partir del florecimiento del pensamiento algebraico, donde se buscó una analogía entre las operaciones aritméticas sobre los números y las construcciones geométricas que utilizaban líneas rectas y círculos, pero en ambos casos resultaron insuficientes. Es cierto que los algebristas pudieron justificar geométricamente los algoritmos para resolver ecuaciones lineales cuadráticas y cúbicas a partir de teoremas publicados en los *Elementos* como puede consultarse en Charbonneau (1996); sin embargo, un álgebra de magnitudes geométricas como la que se propuso tiene la limitación del espacio y la dimensionalidad. Descartes aborda el problema creando un "cálculo geométrico" a partir de un *álgebra de segmentos*. Para ello, la teoría de las proporciones de los *Elementos* es fundamental en las definiciones que Descartes propone. De esta forma, define la multiplicación, división y raíz cuadrada de segmentos a partir de la teoría de proporciones de la geometría euclideana, pero aclara que no hará esas operaciones como los griegos sino que le basta con designar a cada una de ellas con una letra e indicar con $a+b$, $a-b$, ab y $\frac{a}{b}$ su suma, diferencia, producto o cociente. Del mismo modo, a^2, b^3, $\sqrt{a^2+b^2}$,… designan potencias o raíces.

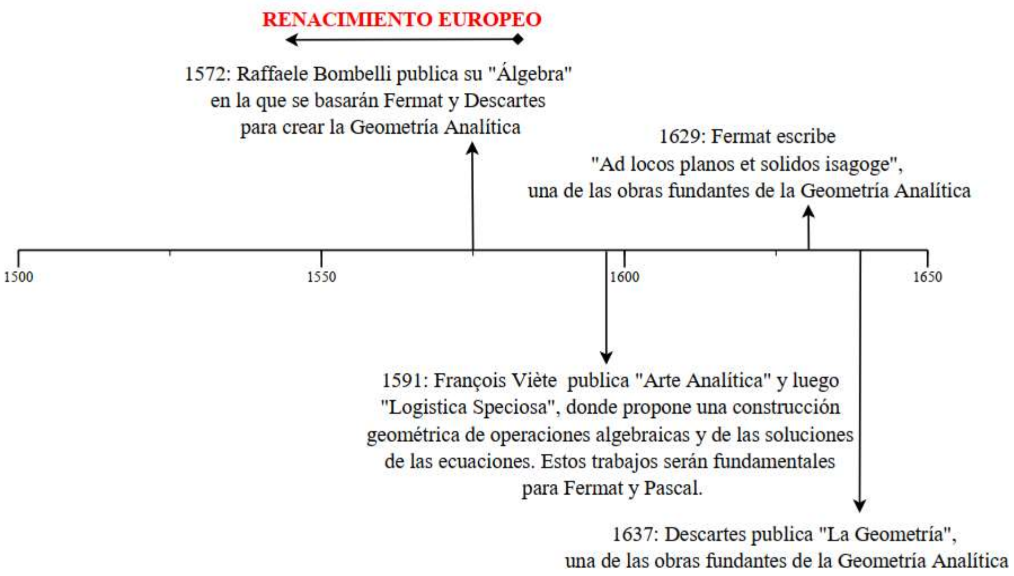
Vemos que la proporcionalidad desde Eudoxo hasta Descartes fue un concepto subyacente en la constitución de la GA: primero para abordar la crisis de los inconmensurables que se dio en la matemática griega y permitió el capítulo V de los *Elementos*, pero también durante el siglo XVII en las definición de las operaciones de multiplicación, división y raíz cuadrada de segmentos.

En la línea de tiempo que presentamos a continuación, además de reseñar los aportes que ya describimos, complementamos con otros resultados que fueron tenidos en cuenta por Descartes y Fermat y que permiten dimensionar la evolución que tuvieron algunas ideas matemáticas que se registran durante el siglo XVII a.C. hasta que durante el siglo XVII d.C. finalmente terminan de configurar lo que conocemos como GA. En estos casi 33 siglos de

RevIn
Revista Internacional de Pesquisa em Didática das Ciências e Matemática

trabajo hubo aportes desde diferentes culturas: al comienzo de este camino hubo ejemplos notables y cada vez más sofisticados de cómo la geometría podía pensarse en términos algebraicos. Primero fue el caso del álgebra geométrica y la relación entre cantidades conmensurables y segmentos o áreas de rectángulos; después la idea de representar curvas a partir de un sistema de referencia hasta que finalmente con la influencia que tuvo el Álgebra durante los siglos XVI y XVII, Descartes y Fermat desarrollan la GA.

Figura 3: Nacimiento de la GA



La Proporcionalidad y el Álgebra Lineal

Identificar el origen del AL nos lleva a estudiar las matemáticas de las civilizaciones antiguas, donde cada una desarrolló diferentes técnicas ad hoc para resolver ecuaciones lineales. Existen registros de problemas que fueron abordados mediante un razonamiento que involucra la proporcionalidad y las ecuaciones lineales (o sistemas de ellas) en muchas y diversas civilizaciones; de ahí que con el título *La proporcionalidad y el Álgebra Lineal* proponemos sintetizar los principales desarrollos alcanzados en ese sentido.

Las civilizaciones egipcia (3150 a.C. – 31 a.C.) y babilonia (1895 a.C.– 539 a.C.) utilizaron la proporcionalidad para calcular impuestos, hacer cálculos astronómicos y mercantiles, y calcular por ejemplo áreas de terrenos y volúmenes de silos. Por otra parte, la noción de linealidad, se puede identificar a partir de los problemas que se plantean y sus soluciones. En el papiro Rhind (1650 a.C.) se han planteado y resuelto algunos problemas cotidianos a través de ecuaciones lineales de la forma $x + ax = b$ o $x + ax + bx = c$. A modo de ejemplo damos los problemas 24, 28 y 33 y la ecuación de primer orden que en cada caso corresponde. La resolución que en el papiro se da a cada uno de los problemas requiere conocer los modos de sumar y multiplicar números del Antiguo Egipto, pero puede consultarse la resolución completa de todos los problemas en Robins y Shute (1987).

Tabla 1. Ejemplos del papiro Rhind (con notación moderna)

Problema	Notación actual
Problema 24. Una cantidad (cualquiera) más una séptima parte se convierte en 19. ¿Cuál es la cantidad?	$x + \frac{1}{7}x = 19$
Problema 28. A una cantidad junto con sus dos tercios se le quita un tercio de la suma para obtener 10. ¿Cuál es la cantidad?	$\left(x + \frac{2}{3}x\right) - \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}x\right) = 10$
Problema 33. La suma de una determinada cantidad con sus dos tercios, su mitad y su una séptima parte es 37. ¿Cuál es la cantidad?	$x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x = 37$

Durante el imperio babilonio se resolvían sin dificultad ecuaciones lineales, cuadráticas y sistemas de ecuaciones lineales como el famoso problema sobre los dos anillos de plata que corresponde al problema 18 de una tablilla conservada en el Museo Británico (BM 85196):

> "Hay dos anillos de plata: la séptima parte del primer anillo y la onceava del segundo se rompen, de modo que lo que se rompe pesa 1 shequel. El primero disminuido en su séptima parte, pesa tanto como el segundo disminuido en sus onceava parte. ¿Cuánto pesaban originalmente los anillos de plata?" (BM 85196)

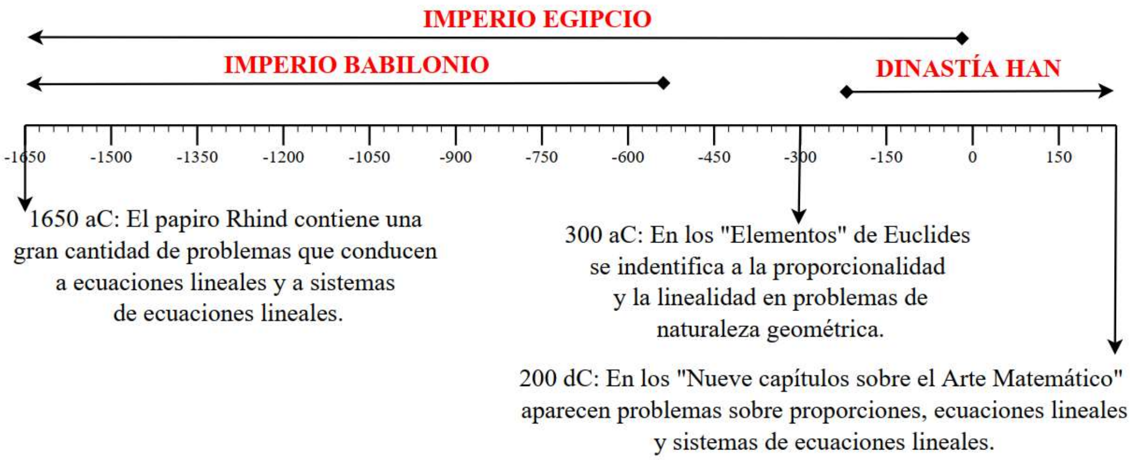
En la matemática griega, también identificamos la proporcionalidad y la linealidad en gran cantidad de problemas de índole geométrica. Por ejemplo, en la memoria científica que Arquímedes escribe a Eratóstenes llamada *El Método* (siglo III a.C.) se utilizan métodos mecánicos y geométricos para determinar áreas de superficies curvas y volúmenes de sólidos. Los métodos geométricos empleados por Arquímedes se basan en la teoría de las razones y proporciones establecida por Eudoxo y recopiladas por Euclides. Damos algunas proposiciones como ejemplos: "*Las pirámides que tienen la misma altura y tienen triángulos como bases son entre sí como sus bases*" (Euclides, ca. 300 a.C./1996, p.278), que puede también entenderse como que el volumen de una pirámide es proporcional al área de su base; "*Los polígonos* *semejantes inscritos en círculos son uno a otro como los cuadrados de los diámetros*" (Euclides, ca. 300 a.C./1996, p.267); "*Los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros*" (Euclides, ca. 300 a.C./1996, p.268); "*Las esferas guardan entre sí una razón triplicada de la de sus respectivos diámetros*" (Euclides, ca. 300 a.C./1996, p.310). De esta última podemos decir que el volumen de una esfera es proporcional al cubo de su diámetro, o de otra forma: el volumen tiene una relación lineal con el cubo de su diámetro y una relación no lineal con el diámetro.

En China hay registros de que en la dinastía Han (206 a.C. – 220 d.C.) aparecen porcentajes, el uso de proporciones y problemas relacionados con el cálculo de impuestos, de manera que es posible identificar la noción de proporcionalidad. Por ejemplo en el tratado *"Nueve capítulos sobre el Arte Matemático"* (s. II a.C.) aparecen estos dos problemas, el primero corresponde a un sistema de ecuaciones lineales mientras que el segundo es sobre proporciones:

> "Supongamos que 3 bing de mijo de calidad alta, 2 bing de mijo de calidad media, 1 bing de mijo de calidad baja producen 39 dou; que 2 bing de mijo de calidad alta, 3 bing de mijo de calidad media, 1 bing de mijo de calidad baja, producen 34 dou; que 1 bing de mijo de alta calidad, 2 bing de mijo de media calidad, 3 bing de mijo de baja calidad, producen 26 dou; se pregunta cuánto produce un bing de mijo de alta calidad, de media calidad, de baja calidad respectivamente." (Chemla y Shuchun, 2004, pp. 9-10)
> "Supongamos que un buey, un caballo y una oveja se han comido las plantas de alguien y que el dueño de las plantas reclama 5 dou de mijo como compensación por ello, que el dueño de la oveja dice: 'mi oveja se comió la mitad de lo que comió el caballo', y el dueño del caballo: 'mi caballo se comió la mitad de lo que comió el buey'. Si suponemos que queremos compensarle (al propietario de las plantas) ponderando según los grados, preguntamos cuánto paga cada uno." (Chemla y Shuchun, 2004, p. 285)

Sin embargo, ni en documentos como el Papiro de Rhind u otros de características similares (Papiro de Moscú, Papiros de Lahun, Papiros de Berlín, EMLR, ...), ni en los tratados de Arquímedes, Eudoxo, Euclides, etc., ni en los trabajos de los matemáticos chinos se registran técnicas y métodos generales de resolución ni tampoco estudios acerca de la posibilidad de resolución o cantidad de soluciones que pueda tener el problema analizado, sea ésta una ecuación lineal o un sistema de ecuaciones lineales. En cada uno de los casos que ejemplificamos se estudiaban problemas específicos y concretos, pero no había una generalización de las técnicas de resolución. El estudio de técnicas generales, las preguntas del tipo ¿todo sistema de ecuaciones tiene solución? ¿cuántas y de qué tipo? ¿Habrá algún procedimiento sistemático para resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales?…tendrán lugar en el siglo XVIII y dará lugar a lugar a lo que conocemos como AL.

Figura 4: Tres momentos destacados de los precursores del AL



El estudio de los sistemas de ecuaciones lineales que comenzó durante el siglo XVIII surge a partir del concepto de determinante. La idea de determinante fue publicada inicialmente por el matemático japonés Takakazu Seki (1642 - 1798) en su obra *Método para Resolver los Problemas Disimulados* (1683) en la cual introduce métodos matriciales similares a los usados por los matemáticos chinos antes de nuestra era (que explicamos en la introducción de este trabajo) y además introduce los determinantes. Seki calculó determinantes (aunque el término no aparece en la literatura matemática hasta 1801) de matrices de tamaño 5×5. Por la misma época pero en Europa, Leibniz, quien estaba interesado por la resolución general de ecuaciones algebraicas, comienza el estudio de sistemas de ecuaciones lineales. Le comunica a l'Hôspital una forma de resolver sistemas de ecuaciones lineales *al estilo de Cramer*. Por ejemplo, el sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas 2, 3 y 4 lo escribe:

$$
\begin{array}{ll}
12{,}2 + 13{,}3 + 14{,}4 - 119 = 0 & \text{Proba: } 24 + 39 + 56 \text{ æqu. } 119 \\
22{,}2 + 23{,}3 + 24{,}4 - 209 = 0 & \text{Proba: } 44 + 69 + 96 \text{ æqu. } 209 \\
32{,}2 + 33{,}3 + 34{,}4 - 299 = 0 & \text{Proba: } 64 + 99 + 136 \text{ æqu. } 299
\end{array}
$$

Las constantes 119, 209 y 299 corresponden a los valores numéricos correspondientes a la suma y que sirven para control en los cálculos. Para la incógnita 4, Leibniz escribe

$$4\ æqu. \frac{-12{,}23\ 299 + 12{,}33\ 209 - 22{,}33\ 119 + 13{,}22 \ldots - 13{,}32 \ldots + 23{,}32 \ldots}{-12{,}23\ 34 + 12{,}33\ 24 - 22{,}33\ 14 + 13{,}22 \ldots - 13{,}32 \ldots + 23{,}32 \ldots}$$

Gabriel Cramer (1704 - 1752) inicia su estudio sobre determinantes en su obra *Introduction a l'analyse des lignes courbes algebriques* (1750). En esta obra, Cramer intenta determinar una curva algebraica de grado n que pase por $\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n$ puntos dados, lo que conduce a la resolución de un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas que el propio Cramer resuelve utilizando la regla que lleva su nombre, aunque no da una demostración de su validez. Durante el siglo XVIII el estudio de las ecuaciones lineales se hacía a través del estudio de los determinantes, por lo que no se consideraban sistemas lineales que no fuesen cuadrados. La observación de que un sistema de n ecuaciones en n incógnitas no tiene necesariamente una única solución, sino que es necesario establecer algunas condiciones para que ello ocurra, es de Euler quien desde ese momento tenía la idea de la dependencia de una ecuación con respecto a las otras, aunque no daba condiciones precisas. Por ejemplo, Euler en su obra *Sur une Contradiction Apparente dans la Doctrine des Ligna Courbes* (1750), observó que en el sistema formado por las ecuaciones $3x - 2y = 5$, y $4y = 6x - 10$, no es posible determinar las incógnitas x e y, ya que la segunda ecuación puede escribirse de la forma $6x - 4y = 10$, y por lo tanto más allá de ser el doble de la primera ecuación, no difiere de ésta en nada. El mismo Euler propone un ejemplo similar para sistemas lineales de tres ecuaciones y concluye que cuando se requiere determinar tres incógnitas, es suficiente contar con tres ecuaciones y una restricción adicional sobre éstas, que debe ser lo *suficientemente diferente* como para que una de las ecuaciones no esté *comprendida* en las otras. Si bien los términos “comprendida” y “suficientemente diferente” no fueron explicitados claramente, en los textos actuales estaríamos hablando de dependencia e independencia lineal (Dorier, 1995). Superada definitivamente la etapa de estudiar técnicas aisladas para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales se pasa al estudio sistemático de los mismos desde un punto de vista teórico, lo que dará lugar a los conceptos de dependencia e independencia lineal, y en definitiva al inicio del AL.

La noción fundamental de espacio vectorial se encuentra en el trabajo de Grassmann (1844) *"Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik"*, que fue desestimado en su momento por la comunidad matemática, fundamentalmente porque resultó difícil de entender. En ese trabajo, Grassmann definió un espacio vectorial como el conjunto de combinaciones lineales $\sum a_i e_i$ $(i = 1,2,\dots,n)$, donde a_i son números reales y e_i "unidades", que se supone que son linealmente independientes. A continuación definió la suma, resta y multiplicación por números reales de la manera habitual, seguida de una lista de "propiedades fundamentales": las leyes conmutativas y asociativas de la suma y varias leyes que se ocupan de la multiplicación por los escalares. Probó además varios resultados sobre los espacios vectoriales, incluida la relación fundamental $\dim V + \dim W = \dim (V+W) + \dim (V \cap W)$ para los subespacios V y W de un espacio vectorial. Peano retoma el trabajo de Grassmann al reconocer su valor. En su libro *Calcolo Geometrico* (1888), el matemático italiano finalmente da una definición axiomática de un espacio vectorial sobre los números reales, que llamó "sistema lineal". Lo que Peano llama "Cálculo Geométrico" es lo que actualmente se denomina "Álgebra Lineal". Resulta patente esta identificación a partir de lo que el matemático italiano explica en el prefacio de su libro:

> "El cálculo geométrico, en general, consiste en un sistema de operaciones realizadas sobre entidades geométricas, similares a las que el álgebra realiza sobre los números. Permite expresar con fórmulas los resultados de construcciones geométricas, representar con ecuaciones proposiciones de geometría y sustituir una transformación de ecuaciones por un razonamiento. El cálculo geométrico presenta una analogía con la geometría analítica; se diferencia en que, mientras que en la geometría analítica los cálculos se hacen sobre los números que determinan las entidades geométricas, en esta nueva ciencia los cálculos se hacen sobre las entidades mismas." (Peano, 1888, p. v)

El propio Peano reconoce que su trabajo intenta difundir la obra de Grassmann, pero además explica la fuerte vinculación entre su cálculo geométrico (nuestra AL) y la GA en donde presenta a ésta como un caso particular. Finalmente, destacamos la definición que da Peano en el capítulo 9 de un sistema lineal:

> "Existen sistemas y entes sobre los que se dan las siguientes definiciones:
> 1. Se define la igualdad de dos entes $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ del sistema, es decir, una proposición, indicada con una $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, que expresa una condición entre dos entes del sistema, satisfecha por ciertos pares de entes, y no por otros, y que satisface las ecuaciones lógicas:

$$(\mathrm{a}=\mathrm{b})=(\mathrm{b}=\mathrm{a}),(\mathrm{a}=\mathrm{b})\cap(\mathrm{b}=\mathrm{c})<(a=c).$$

2. Se define la suma de dos entes $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{a}$, es decir, un ente, indicado con $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, que también pertenece al sistema dado, y que cumple las condiciones:

$$(\mathrm{a}=\mathrm{b})<(a+c=b+c), a+b-b+a, a+(b+c)=(a+b)+c,$$

y el valor común de los dos miembros de la última igualdad se indicará con $\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}$.

3. Siendo $\boldsymbol{a}$ un ente del sistema, y m un número entero y positivo, con la escritura $m\boldsymbol{a}$ significaremos la suma de m entidades iguales a $\boldsymbol{a}$. Es fácil de reconocer, siendo $\boldsymbol{a}$,b,… entes del sistema, $m, n, \ldots$ números enteros y positivos, que

$$(\mathrm{a}=\mathrm{b})<(m\mathrm{a}=\mathrm{mb});\ \mathrm{m}(\mathrm{a}+\mathrm{b})=\mathrm{ma}+\mathrm{mb};\ (\mathrm{m}+\mathrm{n})\mathrm{a} \\ =\mathrm{ma}+\mathrm{na};\ \mathrm{m}(\mathrm{na})=(\mathrm{mn})\mathrm{a};\ 1\mathrm{a}=\mathrm{a}.$$

Asumiremos que hay un significado para la escritura $m\boldsymbol{a}$, cualquiera que sea el número real m, pero de forma en que todavía se satisfagan las ecuaciones anteriores. La entidad $m\boldsymbol{a}$ se dirá que es el producto del número (real) m para el ente $\boldsymbol{a}$.

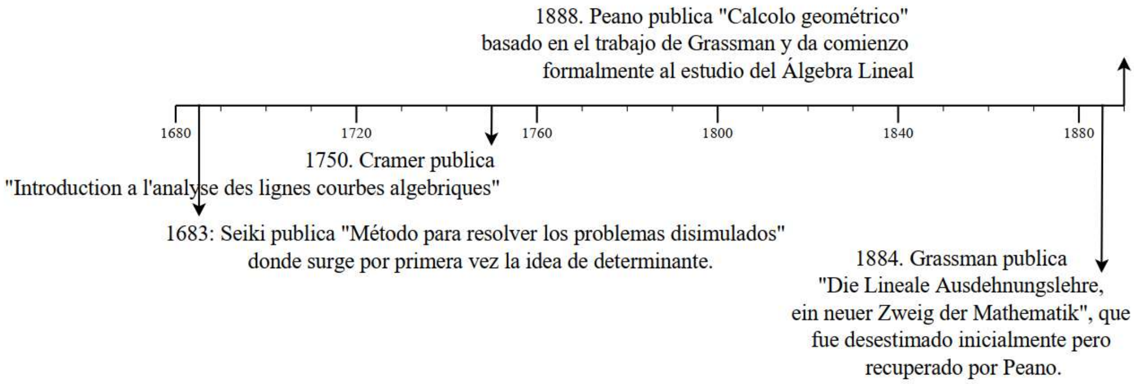
4. Finalmente supondremos que hay un ente del sistema, que diremos ente nulo y que indicaremos con un 0, de modo que cualquiera que sea la entidad $\boldsymbol{a}$, el producto del número 0 por el ente $\boldsymbol{a}$ dará siempre el ente $\mathbf{0}$, es decir: $0\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$.

Si a la escritura $\mathrm{a}-\mathrm{b}$ se le da el significado $\mathrm{a}+(-1)\mathrm{b}$ se deduce: $\mathrm{a}-\mathrm{a}=0, \mathrm{a}+0=\mathrm{a}$.

Definición: Los sistemas de entes para los que se dan las definiciones 1, 2, 3, 4, de tal manera que se cumplan las condiciones impuestas son sistemas lineales.” (Peano, 1888, págs. 141-142)

Peano definió además la dependencia lineal (de la misma manera que lo hacemos actualmente) y la dimensión de un sistema lineal como el máximo número de entes que son independientes y pueden generar al sistema. Enunció y demostró el teorema que establece que todo elemento de un sistema de dimensión *n* puede escribirse como combinación lineal de *n* elementos linealmente independientes, y llamó coordenadas de un ente a los escalares de esa combinación lineal.

Figura 5: Momentos finales en la creación del AL



La figura 5 permite sintetizar los últimos resultados y publicaciones necesarias para que hoy podamos hablar de AL. En el inicio de este recorrido pueblos y culturas diferentes resolvieron con técnicas ad-hoc ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales. Sin embargo no fue hasta el siglo XVIII que los matemáticos comenzaron a hacerse preguntas ya no por el problema que devenía en una ecuación o un sistema de ellas, sino por la existencia de solución para tales problemas o las condiciones respecto de la unicidad de esa solución. Ya en el siglo XIX la revisión de los trabajos de Grassmann por parte del matemático italiano G. Peano sentaron las bases no solamente para responder las preguntas de los matemáticos del siglo XVIII, sino que permitieron la resolución y modelización de problemas mucho más complejos con el estudio de lo que actualmente conocemos como espacios vectoriales y que constituyen el corazón del AL.

Discusión

La GA se constituye sólidamente en la comunidad matemática a partir de los trabajos de René Descartes (1637) y Pierre de Fermat (1629), quienes se aprovecharon del desarrollo del Álgebra durante el renacimiento. Prueba de esto está en los intentos parciales que hicieron otros matemáticos casi 2000 años antes, entre los que se destacan Eudoxo (330 aC) con la Teoría de las Proporciones y Apolonio (200 aC) con las secciones cónicas. Como una característica destacada mencionamos que la proporcionalidad está presente en todo este desarrollo: desde la teoría propuesta por Eudoxo, utilizándolo para el problema de los inconmensurables, hasta las operaciones con segmentos que define Descartes como proporcionalidad geométrica, motivo por el cual la noción de proporcionalidad permite ejemplificar y explicar la génesis y transformaciones en esta parte del desarrollo.

El AL surge definitivamente a partir del trabajo de Peano (1888), pero como evolución de un proceso histórico que se inició cuando las civilizaciones egipcia y babilonia respondieron preguntas que surgían de problemas concretos como la medición de terrenos o cálculos de impuestos, entre otros; que remiten a situaciones de proporcionalidad y linealidad desde su génesis. El proceso continuó cuando la comunidad matemática ya no se hizo preguntas sobre problemas concretos sino sobre la matemática que permite dar respuestas a esos problemas. Durante el siglo XVIII comienzan las investigaciones sobre la compatibilidad y cantidad de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales. Esto da lugar a la noción de combinación lineal y de independencia lineal.

Desde un punto de vista epistemológico confirmamos que los conocimientos de GA y AL no se constituyeron como partes separadas que convergen a un mismo sector del conocimiento. Se pueden identificar en sus desarrollos en el tiempo, que hay conocimientos matemáticos comunes abordados desde la GA y el AL que se consolidan con los desarrollos de esta última disciplina, pero con fines y alcances distintos. Por ejemplo la proporcionalidad y la linealidad son conocimientos comunes tanto en GA como en AL. En GA la proporcionalidad se utiliza primero para definir operaciones con segmentos, luego operaciones con vectores y hasta las operaciones con rectas y planos. Sin embargo, en AL una idea fundamental es la de combinación lineal, que no es más que una generalización de la idea de proporcionalidad en GA. Con relación a la linealidad, entendida como generalización de la proporcionalidad, desde la GA podríamos definirla como planos formados por vectores linealmente independientes, y en AL como el subespacio generado por los mismos. Este núcleo común entre la linealidad y la proporcionalidad justifica la importancia de no considerar a los conocimientos de GA y AL como partes separadas de un mismo problema, ya que muchos problemas geométricos y sus generalizaciones son resueltos por métodos algebraicos, y algunas cuestiones algebraicas también en términos geométricos.

Conclusiones

El fenómeno de escisión identificado entre los conocimientos de GA y AL en una misma materia del ciclo básico de la formación de ingenieros en Argentina, no obedece a razones epistemológicas. En este sentido, estudiar los saberes de GA y AL como dos partes separadas, parecería tener un modelo epistemológico conducente a eliminar las *razones de ser* y el sentido de estos conocimientos. Queda abierta la necesidad de investigar específicamente en qué niveles de la *escala de codeterminación didáctica* se ubican las razones de la pérdida de sentido del AL y la GA en la universidad, aunque no podemos perder de vista que es en la *noosfera* donde se llevan a cabo las orientaciones que exceden a las Instituciones y a los profesores con relación a los conocimientos que se proponen a enseñar. Esto involucra un estudio de los planes del ciclo básico, los programas de AL y GA en carreras de ingeniería, y de libros de texto contenidos en dichos programas. Del análisis documental podremos identificar sien la propuesta, dichos saberes aparecen juntos o separados. Pero el problema de la *pérdida de sentido* excede a las referencias. Por otro lado, aceptamos que los profesores no tienen injerencia en la decisión de qué matemática se estudia en el ciclo básico de las carreras de ingeniería, pero sí son los responsables de recuperar preguntas como ¿por qué? y ¿para qué? estudiar GA y AL conjuntamente. Una respuesta a estas preguntas pueden encontrarla en un estudio epistemológico que involucre estos conocimientos.

Referencias

BOSCH, M.; GASCÓN, J. 25 años de transposición didáctica. In RUIZ-HIGUERAS, L., ESTEPA, A. Y GARCÍA, F.J. (eds.) **Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico**. Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén, 2007, p. 385-406.

BOYER, C. B. Analytic Geometry: The Discovery of Fermat and Descartes. **The Mathematics Teacher**, 37(3), p. 99-105, 1944.

CHARBONNEAU, L. From Euclid to Descartes: Algebra and its relation to geometry. In **Approaches to algebra**, Dordrecht: Springer, 1996, p. 15-37.

CHEMLA, K.; SHUCHUN, G. **Les neuf chapitres. Le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires**. Paris: Dunod, 2004.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné**. Grenoble: La Pensée sauvage, 1985. 180 p.

CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 19(2), p. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. Aspectos problemáticos de la formación docente. **XVI Jornadas de Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas.** Huesca, 2001.

CHEVALLARD, Y. Steps towards a new epistemology in mathematics education. In BOSCH, Marianna (Ed.), **Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education** (CERME 4). Barcelona: FUNDEMI-IQS, 2006, p. 21-30.

CHEVALLARD, Y. Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. **Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico**, 2007, p. 705-746.

CHEVALLARD, Y. Introducing the anthropological theory of the didactic: An attempt at a principled approach. **Hiroshima journal of mathematics education**, 12, 71-114, 2019.

DESCARTES, R. **Discurso del método. Dióptrica. Meteoros. Geometría.** Trad. G. Quintas Alonso. Madrid: Alfaguara, 1987. (Trabajo original publicado en 1637). 490 p.

DOGAN-DUNLAP, H. Linear algebra students' modes of reasoning: Geometric representations. **Linear algebra and its applications**, 432 (8), p. 2141-2159, 2010.

DORIER, J.-L. A general outline of the genesis of vector space theory. **Historia mathematica**, 22(3), p. 227-261, 1995.

EUCLIDES. **Elementos**. Trad. María Luisa Puertas Castaños. Madrid: Gredos, 1996. (Trabajo original publicado ca. 300 a.C.) 368 p.

FERMAT, P. **Varia opera mathematica**. Tolosae: Joannem Pech, 1679. 210 p.

HERNÁNDEZ SAMPIERI, R.; FERNÁNDEZ COLLADO, C.; BAPTISTA LUCIO, M. **Metodología de la Investigación**. 6 ed. México: Mc Graw Hill, 2016. 600 p.

KATZ, V. J.; BARTON, B. Stages in the history of algebra with implications for teaching. **Educational studies in mathematics**, 66(2), p. 185-201, 2007.

KLINE, M. **El pensamiento matemático. De la antigüedad hasta nuestros días**. Madrid: Alianza Editorial, 2012. 1634 p.

OROPEZA, C.; SÁNCHEZ, J. Estudio que promueve la articulación de argumentos analíticos y geométricos en combinación lineal de matrices. In FLORES, Rebeca (Ed.), **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**. México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 2015, p. 846-855.

OROPEZA, C.; LEZAMA, J. La visualización, como estrategia de estudio en el concepto de dependencia e independencia lineal. En LESTÓN, Patricia (Ed.), **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**. México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C., 2008, p. 23-31.

OROPEZA, C.; LEZAMA, J. Dependencia e independencia lineal: una propuesta de actividades para el aula. **Revista electrónica de investigación en educación en ciencias**, 2(1), p. 23-39, 2007.

OTERO, M. R. **La formación de profesores: recursos para la enseñanza por indagación y el cuestionamiento del mundo**. Tandil: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, 2021. 216 p.

PEANO, G. **Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann: preceduto dalla operazioni della logica deduttiva**. Torino: Fratelli Bocca, 1888. 170 p.

ROBINS, G.; SHUTE, C. **The Rhind Mathematical Papyrus. An ancient Egyptian text.** London: The British Museum Publications, 1987. 59 p.

SABATINELLI, P.; LLANOS, V. C.; OTERO, M. R. Álgebra Lineal y Geometría Analítica en carreras de Ingeniería: reporte de investigaciones. **Ikastorratza. e-Revista de Didáctica** (26), 2021. doi: 10.37261/26_alea/2

SHI, Y. Applications of a particular linear transformation: teaching analytic geometry and linear algebra. **Mathematics and Computer Education**, 43(2), 109, 2009.

VALLES, M. **Técnicas cualitativas de investigación social**. Madrid: Síntesis, 1999. 430 p.

WOLFF, P. **Breakthroughs in mathematics**. Clinton: Plume Books, 1970. 284 p.