Nota sobre el concepto de demostración en C. S. Peirce

Javier Legris
Universidad de Buenos Aires - CEF-CONICET
emailcontato@

Abstract: Charles Sanders Peirce developed in the last stage of his thought a conception of mathematical proof with roots in his own semiotic theory: proving is constructing an icon or diagram. The aim of this note is to make a brief but clear analysis of the notions that come into play in this conception and suggest its usefulness for the philosophy of mathematical practice.
Key words: C.S. Peirce; Diagrammatic Reasoning; Mathematical Proof.

Resumo: C. S. Peirce desarrolló en la última etapa de su pensamiento una peculiar concepción de la demostración matemática con raíces en su teoría semiótica: demostrar es construir un ícono o diagrama. El objetivo de esta nota es analizar breve pero claramente los conceptos que entran en juego en esta concepción y sugerir su utilidad para la filosofía de la práctica matemática.
Palavras-chave: C.S. Peirce; Razonamiento diagramático; Demostración matemática.

Los procedimientos demostrativos no son los únicos procedimientos con valor cognitivo en la matemática, pero, de acuerdo con una honorable y larga tradición intelectual, son los que *garantizan* el conocimiento matemático. Esta nota se ocupa de la peculiar concepción de la demostración matemática que Charles Sanders Peirce (1839-1914) sostuvo en la última etapa de su pensamiento y que diverge en varios aspectos de las concepciones imperantes. El objetivo es hacer un análisis de los conceptos que entran en juego en ella y sugerir su utilidad para la filosofía de la práctica matemática.

I

La idea contemporánea de lo que es una demostración matemática ha sido influida poderosamente por la lógica simbólica y también por la discusión en fundamentos de la matemática tal como acaeció principalmente en la primera mitad del siglo pasado. Según esta idea, una demostración consta de una secuencia de enunciados en los que algunos de ellos son puntos de partida o premisas y los demás resultan de aquellas por aplicación de reglas de inferencia. Así, una demostración es una estructura *lingüística*, en la medida en que sus componentes son enunciados de un lenguaje.

Esta idea se plasma en términos de un *sistema formal*. Una demostración es, entonces, una secuencia finita de fórmulas bien formadas del lenguaje formal en el que se basa el sistema, siendo cada miembro de la secuencia o bien un axioma (en el caso de que el sistema sea axiomático) o bien se sigue inmediatamente de fórmulas precedentes de la secuencia por medio de reglas de inferencia. Una definición en estos términos aparece en los tratados y manuales de lógica matemática. Como ilustración de esta perspectiva, basta ver Carnap 1939 o Church 1956, especialmente p. 49. Esta reconstrucción del concepto de demostración, imprescindible en el análisis metateórico de los sistemas formales, mostraría su *estructura lógica*, que es su aspecto esencial, y además conduciría a una noción *efectiva* de demostración: frente a cualquier secuencia finita de fórmulas, es posible determinar si se trata o no de una demostración. Se supone, además, que una demostración formal es una entidad puramente *sintáctica*, puesto que las reglas que la organizan son sintácticas. Los ideales clásicos de rigor, necesidad e indubitabilidad del conocimiento demostrable pretendían realizarse en esta reconstrucción.

Esta concepción lingüística ha sido criticada extensamente desde diversos puntos de vista y por diversas razones. Por ejemplo, Oswaldo Chateaubriand ha mostrado sus limitaciones y algunos de sus supuestos ontológicos (véase Chateaubriand 2005, pp. 281 y ss.). Pero también se la ha objetado insistentemente desde el punto de vista de la *práctica matemática*. En efecto, las demostraciones que aparecen en las diferentes disciplinas matemáticas no corresponden a esta idea y, más aun, su reconstrucción en términos de esta idea genera innumerables dudas y problemas. Por ejemplo, es cuestionable que toda demostración deba cumplir el requisito de efectividad, y existen casos de demostraciones con un número infinito de enunciados.

Ahora bien, una de las objeciones más repetidas es el caso de las demostraciones que incluyen *diagramas*, tal como sucede en la geometría de Euclides. En la idea recién esbozada (y, más en general, en el contexto del pensamiento matemático desde finales del siglo XIX), el uso de diagramas y figuras en las demostraciones ha sido relegado a un papel secundario y absolutamente prescindible; su valor se reduce casi exclusivamente al plano didáctico (véase Legris 2012a).

Por el contrario, figuras y diagramas revelan aspectos de las demostraciones que no son capturados por un sistema formal. Estos aspectos son englobados a veces bajo el rótulo de "visualización", pero esencialmente responden a la organización espacial – topológica – de los signos y son significativos desde el punto de vista cognitivo. Por esta razón, en la reflexión sobre la naturaleza de las demostraciones matemáticas basada en la práctica, figuras y diagramas son signos que tienen un valor independiente y pueden someterse a un análisis por derecho propio.

II

Charles Sanders Peirce fue uno de los fundadores de la lógica simbólica. A él se debe uno de los prototipos de lo que llamamos actualmente lógica de cuantificadores o de predicados, que desarrolló en un marco algebraico durante la década de 1880. Sin embargo, sus ideas filosóficas lo condujeron años más tarde a una noción de demostración matemática que diverge de la concepción esbozada antes. Una demostración es, dentro de la concepción peirceana, *la construcción de un ícono o diagrama, cuyas relaciones corresponden a las relaciones existentes en el "objeto del pensamiento"*. Así, Peirce afirma

> "El razonamiento matemático es diagramático. Esto es verdadero tanto del álgebra como de la geometría." (Peirce, CP 5.148)

En una demostración resultan esenciales los aspectos diagramáticos de los signos algebraicos o las figuras geométricas, que son los que representan el *proceso* por el que se llega a una conclusión, proceso que Peirce denomina "curso del pensamiento". Dicho en pocas palabras, toda demostración resulta de una secuencia de *acciones* realizadas sobre *signos*, de modo que es descripta mediante conceptos de la semiótica, es decir, la teoría general de los signos.

En cuanto al modo de designación, Peirce clasificaba los signos en *íconos*, *índices* y *símbolos* (véase, *v.g.*, Peirce CP 2.247 y ss.). Los primeros se entienden sobre todo por su analogía o semejanza con lo designado. Esta relación de analogía entre significante y significado es la de una similaridad *estructural*; una similaridad exclusivamente entre las relaciones. De aquí, un rasgo a destacar es que son esencialmente signos que *pueden ser manipulados* (ya sea componiéndolos o descomponiéndolos) con el fin de extraer información acerca de lo que designan. La *observación* de signos y la *acción* sobre ellos son procesos implicados por el concepto mismo de ícono. Los diagramas son un tipo de *íconos*.

Esta concepción diagramática de la demostración contribuye a delimitar los métodos de las ciencias formales y aspira también a justificar el carácter *necesario* y *evidente* que, según Peirce, tiene una demostración matemática. De esto da cuenta el siguiente pasaje de su obra póstuma *The New Elements of Mathematics*:

> "Un diagrama es un ícono de un conjunto de objetos racionalmente relacionados. […] El diagrama no sólo representa los correlatos vinculados, sino también, y de manera mucho más definida, la relación entre ellos. […] El razonamiento necesario lleva a una conclusión *evidente*. ¿Qué es esta 'evidencia'? Ella consiste en el hecho de que la verdad de la conclusión es *percibida* en toda su generalidad, y en la generalidad del cómo y por qué la conclusión es percibida. […] Un rasgo extraordinario de los diagramas es que ellos *muestran* […] que se sigue una consecuencia." (Peirce, NEM IV 316)

Peirce afirma que el carácter necesario de la matemática se explica a partir del hecho de que se ocupa exclusivamente de "estados de cosas hipotéticos" (y no de cuestiones de hecho, véase CP 4.464). El proceso demostrativo es la *construcción del diagrama en la imaginación* a la manera de un esqueleto o esbozo, donde se hacen las modificaciones requeridas por "el estado de cosas hipotético" y se observa si el resultado concuerda con lo que se quiere deducir.

III

Peirce extendía esta perspectiva diagramática a toda forma de "razonamiento necesariamente válido" (es decir, razonamientos deductivos; véase, por ejemplo, CP 4.431). Del carácter diagramático que evidencia la demostración matemática se sigue *también* la naturaleza de la deducción *en general*. Hacer deducciones no es otra cosa que seguir el procedimiento matemático: En un fragmento no identificado publicado en los *New Elements* describe este método matemático en su aplicación general:

> "… abordar los problemas tan matemáticamente como sea posible, esto es, construyendo algún tipo de diagrama que represente aquello que se supone, […] y de aquí, matemáticamente […], deduciendo las consecuencias de aquella hipótesis." (NEM IV, p. x)

En su trabajo seminal sobre el álgebra de la lógica de 1885, Peirce ya sostenía una concepción diagramática de la deducción al afirmar:

> "Todo razonamiento deductivo […] contiene un elemento de observación, a saber, la deducción consiste en construir un icono o diagrama, la relación de cuyas partes presentan una completa analogía con aquellas de las partes del objeto de razonamiento, del experimentar sobre esta imagen en la imaginación y de observar el resultado, de modo de descubrir relaciones no advertidas y ocultas entre las partes." (CP 3.363)

De acuerdo con esto, los procedimientos deductivos incluyen – en contra de la opinión usual – la *experimentación* sobre "imágenes en la imaginación", que son *prima facie* asimilables a los "estados de cosas hipotéticos" mencionados antes, y Peirce, en los *New Elements* enfatiza – con retórico entusiasmo – su importancia:

> "¡El mejor pensamiento, especialmente sobre temas matemáticos, se hace experimentando en la imaginación sobre un diagrama u otro esquema!" (NEM 1, 122)

En un pasaje de ese mismo período, Peirce se propone aclarar la función de la experimentación en la deducción comparando el uso de diagramas en el razonamiento con el uso de mapas en una campaña militar (Peirce CP 4.530). En el mapa se van señalando las diferentes ubicaciones posibles e hipotéticas según los diferentes cursos o caminos alternativos que vaya tomando una batalla. Así se entiende que los diagramas permitan hacer "experimentos", es decir, los diagramas son manipulados de manera tal que sea posible visualizar las situaciones hipotéticas, y en este punto Peirce recurre a la analogía con los experimentos en química y física (*loc*. *cit*.). En estos últimos casos los objetos de la investigación son estructuras físicas tales como estructuras moleculares y la experimentación concierne a las relaciones dentro y entre estructuras moleculares.

Ahora bien, la experimentación está conectada con la existencia de *supuestos* o *hipótesis* en las demostraciones. Este hecho fue explícitamente analizado por Peirce en los *New Elements*, generando la distinción, que tiene sus raíces en la tradición euclídea, entre deducciones *corolariales* y *teoremáticas* (Peirce NEM IV p. 38). Estas últimas son las que incluyen supuestos: En ellas “es necesario experimentar en la imaginación” para llegar a la conclusión. Más específicamente, en ellas se introduce una “idea externa” que es eliminada una vez deducida la conclusión (Peirce, NEM IV, p. 42). Por el contrario, en la deducciones corolariales basta “imaginar cualquier caso en que las premisas sean verdaderas” para obtener la conclusión. Peirce menciona en este contexto la proposición 16 del Libro I de los *Elementa*, con el fin de mostrar los problemas que enfrentan las demostraciones teoremáticas (v. *loc*. *cit*.).

Con estos procedimientos de observación y manipulación de los diagramas se obtienen conclusiones que son “verdaderas de los signos en todos los casos” (CP 2.227), esto es, verdaderas universalmente. Las verdades en las ciencias formales surgen de esta experimentación en la imaginación que tiene como apoyo material a los diagramas. Esto lleva a suponer una cierta unidad metodológica de todas las ciencias, que rompe con algunos de los criterios tradicionales para distinguir entre ciencias formales y ciencias fácticas. Incluso la distinción entre conocimiento *a priori* y conocimiento *a posteriori* requiere una reformulación.

IV

Esta forma de entender la deducción determina también la idea que Peirce tiene de la lógica:

> "Los métodos de razonamiento por medio de los cuales se establecen las verdades de la lógica deben ser matemáticos, siendo tal razonamiento evidente de manera independiente de cualquier doctrina lógica." (Peirce NEM IV, p. 19)

Así, Peirce aspiraba a un "lógica exacta" que "descansa sobre [...] el pensamiento matemático, esto es, diagramático o icónico" (Peirce CP 3.429), esto es, aspiraba a "un sistema de diagramatización por medio del cual cualquier curso de pensamiento puede ser representado con exactitud" (Peirce CP 4.530).

Esta lógica exacta cristalizó en sus *gráficos existenciales*. Los primeros trabajos de Peirce sobre estos gráficos fueron redactados en los últimos años del siglo XIX, luego de sus investigaciones algebraicas. Peirce desarrolló su sistema de gráficos existenciales "Alpha" para la lógica de conectivas y el sistema "Beta" para la cuantificación y la identidad, de modo que lo que se entiende actualmente por lógica de primer orden queda capturada mediante los gráficos. El sistema "Gamma" se ocupa de lógica modal.

Dicho muy sucintamente, los gráficos se construyen por medio de círculos o elipses a los que Peirce llama "cortes", por medio de "líneas de identidad" y de "scrolls" (es decir, "enrollando" unas elipses dentro de otras). Estos signos sirven para expresar las operaciones lógicas usuales (conectivas y cuantificadores) y la relación de identidad. Estos signos se "inscriben" en una "hoja en blanco", la *hoja de aseveración*, que representa el "universo", y sobre la hoja se inscriben también otros signos (no estrictamente diagramáticos) para indicar enunciados y predicados. Una serie de reglas permiten la composición e introducción de signos y también su descomposición o eliminación, generando el proceso deductivo. (Véase Peirce CP 4.421 - 4.431, y Legris 2012a y 2012b. Una presentación introductoria de los gráficos existenciales se encuentra en Hilpinen 2004, secc. 5.)

V

Inscribir y borrar, componer y descomponer, observar, suponer y experimentar son las acciones sobre signos que producen las deducciones en el sistema de los gráficos existenciales. Si se los compara con otros sistemas diagramáticos de la época (*v.g*. los diagramas de Venn), los gráficos existenciales son *dinámicos* (véase Legris 2012b). Esto es, los diagramas correspondientes a las premisas requieren ser transformados mediante reglas a fin de obtener la conclusión. (Por el contrario, en los diagramas de Venn la conclusión queda diagramada al diagramar las premisas.) Por lo tanto, los gráficos existenciales pretenden representar en una forma *canónica* la estructura lógica que tiene el "curso de pensamiento" subyacente a las demostraciones.

En suma, Peirce introduce una concepción semiótica de la demostración. En ella una demostración resulta de las mencionadas acciones sobre signos: su introducción, su transformación y su eliminación. El esqueleto lógico de una demostración es de naturaleza icónica, pues consta de una estructura analizable que es análoga con el "curso del pensamiento". Las notas salientes de esta concepción pueden sintetizarse del modo siguiente: (1) Se toman en cuenta sistemas semióticos que no son lingüísticos *stricto sensu*. (2) Se da cuenta del uso de *hipótesis* o supuestos. (3) Las demostraciones son entendidas como un proceso *dinámico*. Esta concepción puede asimilarse a la idea de que la verdad matemática se entiende en términos de demostraciones, esto es, las condiciones de verdad de un enunciado matemático están dadas por las condiciones para su demostración. Peirce desarrolló sus gráficos existenciales con la finalidad de mostrar canónicamente la estructura lógica subyacente a cualquier demostración. Por cierto, esta concepción no está centrada en la construcción de sistemas formales. No obstante, debe dar cuenta de varios problemas. Uno de ellos es el de representar de manera satisfactoria las demostraciones que de algún contienen supuestos referidos a entidades infinitas.

(En este punto entraría en juego la peculiar idea que Peirce tenía del infinito, en especial del continuo geométrico.)

Ahora bien, las demostraciones se construyen, de hecho, empleando signos con menor grado de iconicidad, ya sea signos algebraicos, figuras geométricas, gráficos de coordenadas, etc., e incluso, dependiendo de los fines, se pueden formular en lenguaje ordinario o en un lenguaje formalizado. Lo importante es que para Peirce, en todos los casos, su naturaleza icónica es lo que las determina como demostraciones. Esta concepción semiótica sienta las bases para un análisis de las demostraciones en la práctica matemática, pues permite incluir una variedad de signos con diferente valor cognitivo.

Referencias

Carnap, Rudolf. 1939. "Foundations of Logic and Mathematics", *International Encyclopedia of Unified Science*, vol. I, pp. 143-171.

Chateaubriand, Oswaldo. 2005. *Logical Forms. Part II. Logic, Language and Knowledge*. Campinas: UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciencia.

Church, Alonzo. 1956. *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton (N.J.), Princeton University Press, 1956.

Hilpinen, Risto. 2004. "Peirce's Logic". *Handbook of the History of Logic, volumen 3. The Rise of Modern Logic: From Leibniz to Frege*, comp. por Dov M. Gabbay & John Woods. Amsterdam *et al*.: Elsevier, pp. 611-658.

Legris, Javier. 2012a. "Visualizar y manipular. Sobre el razonamiento diagramático y la naturaleza de la deducción." Aparecerá en *Visualização nas Ciências*

Formais., comp. por Abel Lassalle Casanave & Frank Thomas Sautter. Londres, College Publications.

Legris, Javier. 2012b. “El cinematógrafo del pensamiento. Peirce y la naturaleza icónica de la lógica”. Aparecerá en *Representaciones. Revista de Estudios sobre Representaciones en Arte, Ciencia y Filosofía*.

Peirce, Charles Sanders. CP. *Collected Papers*. 8 volúmenes, vols. 1- 6 compilados por Charles Hartshorne & Paul Weiss, vols. 7-8 compilados por Arthur W. Burks. Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1931-1958

Peirce, Charles Sanders. NEM. *The New Elements of Mathematics* by Charles S. Peirce, 4 vols., comp. por Carole Eisele. The Hague, Mouton, 1976. Atlantic Highlands, N. J., 1976. cxxxviii + 2478 pp.