

# Dinámica de la *Vicia Villosa Roth* como Monocultivo Dedicado al Pastoreo y a la Producción de Semillas

María Belén D'Amico

Inst. de Inv. en Ing. Eléctrica "Alfredo Desages"  
(UNS - CONICET)

Depto. de Ingeniería Eléctrica y de Computadoras  
Universidad Nacional del Sur  
Bahía Blanca, Argentina  
mbdamico@uns.edu.ar

Guillermo L. Calandrini

Inst. de Inv. en Ing. Eléctrica "Alfredo Desages"  
(UNS - CONICET)

Depto. de Ingeniería Eléctrica y de Computadoras  
Departamento de Matemática,  
Universidad Nacional del Sur  
Bahía Blanca, Argentina  
calandri@criba.edu.ar

Juan P. Renzi

Inst. Nac. de Tecnología Agropecuaria (INTA)  
Hilario Ascasubi, Argentina  
Departamento de Agronomía  
Universidad Nacional del Sur  
Bahía Blanca, Argentina  
renzipugni.juan@inta.gob.ar

Guillermo Chantre

Centro de Recursos Naturales Renovables  
de la Zona Semiárida (UNS-CONICET)  
Departamento de Agronomía  
Universidad Nacional del Sur  
Bahía Blanca, Argentina  
gchantre@criba.edu.ar

**Resumen**—Mediante un modelo poblacional se estudia un sistema agrícola-ganadero donde el cultivo de *Vicia villosa Roth* se somete a ciclos sucesivos de pastoreo y cosecha de semillas. Aplicando conceptos de teoría de dinámica de sistemas no lineales se analizan los equilibrios, sus estabilidades y posibles bifurcaciones, ante diferentes situaciones paramétricas y acciones de control constantes y variantes en el tiempo. La información analítica obtenida permite evaluar el efecto de distintas prácticas de manejo integrado sobre la capacidad de resiembra natural de esta leguminosa.

**Palabras Claves**—modelo poblacional, dinámica, control.

## I. INTRODUCCIÓN

*Vicia villosa Roth* (HV) es una leguminosa forrajera nativa de Europa y Asia Occidental que cuenta con una alta adopción en la agricultura mundial [1]. Se la cultiva como forraje en ambientes semiáridos, donde sobresale por su tolerancia al frío y a la sequía y su gran plasticidad productiva. Es un cultivo que posee una marcada aptitud forrajera y también mejora la fertilidad nitrogenada del suelo en las rotaciones con cereales de los sistemas agrícola-ganaderos de la región semiárida pampeana [2].

Debido a la alta capacidad de resiembra natural de la HV, pueden lograrse varios ciclos sucesivos en los que se forman poblaciones de utilidad agronómica. Estas poblaciones de resiembra pueden ser empleadas para pastoreo con animales, cosecha de forraje y/o cosecha de semillas. Para promover el uso agropecuario de la resiembra, deben conseguirse un adecuado ajuste del período de emergencia y una conveniente densidad de plantas [3]. El éxito agronómico de una rotación

que incluye leguminosas anuales y cereales, depende de la capacidad que tengan las leguminosas para generar una densidad poblacional adecuada para los fines productivos. Para que una comunidad de HV tenga valor forrajero, la densidad de la leguminosa debe ser igual o superior a 30 plantas/m<sup>2</sup> [4].

A pesar de los reconocidos beneficios agronómicos de la inclusión de la HV en las rotaciones agrícolas, su adopción continúa siendo limitada [5]. Una percepción adversa, relativamente común, aduce a las dificultades que pueden ocurrir por la aparición de plantas "voluntarias" (o "guachas"). El control de las plantas voluntarias de HV resulta particularmente complejo en los sistemas orgánicos, donde está restringido el uso de herbicidas [6]. En ese sentido, la modelización del proceso de emergencia de la HV podría ayudar a la planificación de los sistemas agropecuarios que la incluyan [7].

Los modelos demográficos han demostrado ser muy útiles para simular el manejo de malezas bajo diferentes estrategias de control [8-10]. También son utilizados para comprender las estrategias de resiembra de varias especies de leguminosas. En este trabajo se aborda un modelo simple de HV para evaluar la persistencia a largo plazo del banco de semillas en el suelo. A partir de [7], el modelo de población contempla las principales etapas en el ciclo de vida de HV e incluye además el pastoreo de animales y la cosecha de semillas. Su base de tiempo es naturalmente discreta, permitiendo estimar la densidad del banco de semillas actual en base a datos de la densidad del año anterior.

El objetivo específico es determinar analíticamente la capa-

cidad de resiembra de HV, considerando diferentes factores de manejo. Para ello, se utilizan conceptos de teoría de dinámica de sistemas no lineales [11]. Se logra así formalizar los puntos de equilibrio que presenta la HV y la estabilidad local de los mismos. El aporte se completa proponiendo una ley de control para el pastoreo de manera de llevar el banco de semillas a una densidad establecida y con la velocidad de convergencia deseada. Se demuestra que en todos los casos la existencia de una bifurcación transcítica define las acciones que pueden realizarse sin perder la capacidad de resiembra a largo plazo. Este enfoque es novedoso en la Agronomía y se espera que la información obtenida sobre la resiembra permita a futuro orientar sobre distintas prácticas de manejo integrado.

## II. MODELO DE POBLACIÓN

El modelo de población propuesto en [7] refleja las principales características de las distintas etapas del ciclo de vida de la HV. La estructura general de dicho modelo puede utilizarse para estudiar el comportamiento dinámico de la población en su rol tanto como cultivo o como maleza. En este último caso, se pueden incorporar parámetros específicos que representan acciones de control como los herbicidas o la remoción de semillas en la cosecha, llegando a desarrollos similares a los realizados para otras poblaciones de malezas [11].

El escenario que se plantea aquí consiste en el empleo de la HV como un monocultivo durante todo el horizonte de tiempo establecido. Además de las etapas planteadas en [7], el modelo utilizado contempla que las semillas que ingresarán al suelo dependerán de la cosecha que se realice y del nivel de pastoreo que se lleve a cabo año a año. A diferencia del tratamiento de una maleza [11], el estudio se orienta a encontrar analíticamente las relaciones que deben cumplirse para lograr la resiembra natural de la especie a partir de una siembra inicial dada.

*Emergencia.* El número de plántulas que emergen por  $m^2$  en el año  $t$  está definido por

$$Z_t = eSB_t, \quad (1)$$

donde  $e$  indica la proporción emergente y  $SB_t$  representa al banco de semillas que existe por  $m^2$  en ese mismo año.

*Supervivencia de las plántulas.* El número de plantas adultas por  $m^2$  también se considera proporcional respecto de la cantidad de plántulas que emergieron. Esto es,

$$M_t = sZ_t, \quad (2)$$

donde  $s$  representa la tasa de supervivencia.

*Producción de semillas.* La cantidad de semillas que produce cada planta adulta es densodependiente y se modela como

$$F = \frac{f}{1 + aM_t} \quad (3)$$

donde  $f$  es el número de semillas que genera una planta aislada y  $a$  es el área requerida por planta para dar  $f$  semillas. Luego, la producción total de semillas por  $m^2$  que puede ser cosechada es

$$R_t = (1 - p)FM_t. \quad (4)$$

donde  $p$  representa la disminución que produce el pastoreo.

*Banco de semillas.* Las semillas que se acumulan en el suelo para poder germinar al año siguiente se calculan como

$$SB_{t+1} = (1 - e)SB_t + (1 - m)s_r R_t, \quad (5)$$

donde  $m$  es la tasa de mortalidad debido a la predación o a factores naturales y  $s_r$  es la proporción de semillas que ingresa al suelo luego de realizar la cosecha con algún tipo de máquina cosechadora de cereales convencional.

## III. COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE HV

Operando algebraicamente con las expresiones (1)-(5), se llega a un mapa discreto que predice el estado del banco de semillas en el año siguiente en función de su composición actual y del valor de los parámetros. Esto es,

$$SB_{t+1} = (1 - e)SB_t + \frac{esf(1 - m)s_r(1 - p)SB_t}{1 + esaSB_t}. \quad (6)$$

En base a [7], la dinámica de la población no es sensible a las posibles variaciones que puedan presentar parámetros como la emergencia  $e$ , la supervivencia  $s$  y la mortalidad  $m$ . En el caso de la producción de semillas, el rango de valores que adquiere la fecundidad  $f$  es amplio debido a diversos factores (climáticos, geográficos, entre otros) y la sensibilidad que presenta el modelo a esas variaciones es alta. Lo mismo ocurre con el nivel de pastoreo  $p$  y con el remanente de cosecha  $s_r$  que ingresará al suelo para la posterior germinación.

Se estudiará entonces el impacto que producen  $f$ ,  $p$  y  $s_r$  sobre la dinámica de (6), buscando mantener la resiembra espontánea de la HV año a año. Dado que los tres parámetros cumplen la misma función matemática en (6), su efecto conjunto se resume como un nuevo parámetro  $\alpha = fs_r(1 - p)$ , de manera que el banco de semillas puede simplificarse como

$$SB_{t+1} = (1 - e)SB_t + \frac{es(1 - m)\alpha SB_t}{1 + esaSB_t}. \quad (7)$$

Los puntos de equilibrio de este modelo se obtienen de resolver la igualdad  $SB_{t+1} = SB_t = \overline{SB}$ . Así, resulta que  $\overline{SB}_1 = 0$  y

$$\overline{SB}_2 = \frac{s(1 - m)\alpha - 1}{esa}. \quad (8)$$

Como puede apreciarse, el banco de semilla podría tender a cero o a un determinado nivel que depende de las distintas combinaciones de los parámetros. La convergencia a alguno de los dos equilibrios para una condición inicial dada dependerá de la estabilidad local de los mismos.

El Jacobiano del mapa (6) se calcula como

$$J(\overline{SB}) = \left. \frac{dSB_{t+1}}{dSB_t} \right|_{SB_t = \overline{SB}} \quad (9)$$

de manera que los autovalores asociados a cada uno de los puntos de equilibrio son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= J(\overline{SB}_1) = 1 - e + es(1 - m)\alpha, \\ \lambda_2 &= J(\overline{SB}_2) = 1 - e + \frac{e}{s(1 - m)\alpha}. \end{aligned} \quad (10)$$

En sentido opuesto a lo que ocurriría si se considerara a la población como una maleza [11], se busca ver aquí si  $\overline{SB}_1$  es inestable y  $\overline{SB}_2$  estable para todos los posibles valores de  $\alpha$ .

Analizando las expresiones de los autovalores en (10) puede determinarse que existe un valor crítico  $\alpha_0$  dado por

$$s(1-m)\alpha_0 = 1. \quad (11)$$

para el cual  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  y además,  $\overline{SB}_2 = \overline{SB}_1 = 0$ . Esta condición establece que los puntos de equilibrio no son hiperbólicos y que podrían evidenciar cambios en su dinámica.

En particular, las derivadas de primer y segundo orden de (7) calculadas en la condición crítica (11) cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{dSB_{t+1}}{d\alpha} = 0; \\ D_2 &= \frac{d^2SB_{t+1}}{dSB_t^2} = -2ae^2s^2(1-m)\alpha_0 \neq 0; \\ D_3 &= \left(\frac{d^2SB_{t+1}}{dSB_t d\alpha}\right)^2 - \frac{d^2SB_{t+1}}{dSB_t^2} \frac{d^2SB_{t+1}}{d\alpha^2} \\ &= e^2s^2(1-m)^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Siguiendo [12], puede afirmarse que el modelo de población desarrolla una bifurcación transcítica y por lo tanto, existe un entorno de la condición (11) definido por la variación de  $\alpha$  donde  $\overline{SB}_1$  es inestable y  $\overline{SB}_2$  es estable ( $\alpha > \alpha_0$ ) y otro donde ocurre lo opuesto ( $\alpha < \alpha_0$ ). La condición  $\alpha > \alpha_0$  garantiza entonces la resiembra espontánea de la HV.

### III-A. Resiembra productiva

Una vez asegurada la estabilidad de la población, resulta útil también saber si la cantidad de semillas que ingresan al suelo serán las necesarias para mantener un sistema productivo. Definiendo el valor mínimo establecido en la práctica como  $SB_{min}$  se busca que  $\overline{SB}_2 \geq SB_{min}$ . Considerando (8), se establece así la cota mínima

$$s(1-m)\alpha \geq 1 + esaSB_{min}, \quad (12)$$

y que logra tanto la resiembra espontánea como el valor productivo de HV en el largo plazo. Por otro lado, observando en (10) que  $0 < \lambda_2 < 1$  para todo  $\alpha$  que cumpla (12), puede afirmarse además que, partiendo de una condición inicial mayor a  $SB_{min}$ , el comportamiento de  $SB_t$  será monótono creciente (decreciente) hacia el equilibrio (8), encontrándose siempre por encima de la cota mínima para todo  $t$ .

### III-B. Recuperación del banco de semillas

El parámetro  $\alpha$  está compuesto por la fecundidad y las acciones de cosecha y pastoreo que pueden variar año a año. En la medida que aún con las variaciones se verifique (12), el banco de semillas tendrá una densidad tal que se mantendrá la resiembra productiva. Sin embargo, si en un determinado año  $t$ ,  $\alpha$  no cumple (12) podría ocurrir que la población de HV pierda la capacidad de recuperación.

Considerando  $SB_{t+1} = SB_{min}$  en (7) y operando algebraicamente se llega a un polinomio cuadrático en  $SB_t$  dado por

$$ASB_t^2 + BSB_t - SB_{min} = 0, \quad (13)$$

con  $A = esa(1-e)$  y

$$B = (1-e) + es(1-m)\alpha - esaSB_{min}.$$

Como  $A > 0$ , el discriminante del polinomio verifica que  $\sqrt{B^2 - 4ASB_{min}} \geq \|B\|$ , lo que indica que existe una única raíz positiva dada por

$$SB_t = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4ASB_{min}}}{2A} \quad (14)$$

Dicha raíz corresponde al valor máximo que debería tener la perturbación para que el banco de semillas pueda, al menos, recuperar la densidad mínima  $SB_{min}$  al año siguiente.

## IV. PASTOREO CONTROLADO

Pensando en una potencial aplicación práctica, se propone aquí una alternativa de control sencilla que permita determinar año a año de acuerdo a la densidad de plantas adultas de HV, el nivel de pastoreo que puede realizarse de manera de llevar dicha densidad a un valor de referencia establecido y con la velocidad de convergencia deseada. La ley de control propuesta está dada por  $p_t = p_{ref} - k(M_{ref} - M_t)$  y es equivalente a una función en la variable  $SB_t$  de la forma

$$p_t = p_{ref} - esk(SB_{ref} - SB_t) \quad (15)$$

donde  $p_{ref}$  es el nivel de pastoreo que mantiene el equilibrio  $M_{ref}$  (y que coincide con el valor de  $p$  dado por el mapa a lazo abierto) y  $k$  es una ganancia que ajusta la convergencia a través del autovalor del sistema a lazo cerrado.

Dicho autovalor surge ahora de calcular la derivada de (6) considerando (15) y el punto de equilibrio  $\overline{SB} = SB_{ref}$ . Operando algebraicamente, resulta

$$\lambda = 1 - e + esf(1-m)(1 - p_{ref} + eskSB_{ref})s_r \quad (16)$$

Para que el sistema converja al valor  $SB_{ref}$  en  $t_s$  años con un error del 1%, debe cumplirse que  $\lambda = e^{-4,62/t_s}$  y así, se despeja la ganancia  $k$ . Esto surge de utilizar el criterio de ubicación del autovalor en la raíz del polinomio de Bessel característico de sistemas continuos de primer orden, discretizando para un período anual [13].

Como en la práctica la estimación de los parámetros que se utilizan para calcular  $p_{ref}$  y  $k$  puede ser imprecisa, es necesario asegurar la estabilidad del equilibrio ante posibles variaciones. Siguiendo un procedimiento similar al detallado en la Sección III, se demuestra que el mapa a lazo cerrado presenta una bifurcación transcítica y la condición crítica para el nacimiento de la misma está dada por

$$sf(1-m)(1 - p_{ref} + eskSB_{ref})s_r = 1 \quad (17)$$

Considerando, por ejemplo, a la fecundidad como el parámetro con desviación, el equilibrio deseado será estable siempre que  $f$  sea mayor a un valor crítico dado por (17).

Por otro lado, la cota para posibles desviaciones fijas y que asegure un nuevo equilibrio que se encuentra por encima de la resiembra productiva se define como

$$sf(1-m)(1 - p_{ref} - esk(SB_{min} - SB_{ref}))s_r \geq (1 + aesSB_{min}) \quad (18)$$

Cuadro I  
VALORES DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO DE HV.

Parámetro	Definición	Valor
$e$	tasa de emergencia	0,81
$s$	tasa de supervivencia	0,80
$m$	tasa de mortalidad	0,11
$a$	área por planta ( $m^2$ ) para producir $f$ semillas	0,0457
$f$	fecundidad (semillas/planta)	[0, 228, 5]
$p$	tasa de reducción de la producción debido al pastoreo	[0, 1]
$s_r$	tasa de semillas ingresando al suelo luego de la cosecha	[0, 24, 0, 65]

Finalmente, la condición para no perder la capacidad de recuperación ante una variación en un determinado año es la menor raíz positiva del polinomio cuadrático (13) con

$$A = esa(1 - e) - ke^2s^2f(1 - m)s_r,$$

$$B = (1 - e) + es(1 - m)fs_r(1 - p_{ref}) - esaSB_{min} + ke^2s^2f(1 - m)s_rSB_{ref}.$$

## V. SIMULACIONES

En el Cuadro I se resumen los valores de los parámetros que representan el comportamiento dinámico de la HV en la región pampeana semirárida de la República Argentina [7]. La densidad de siembra inicial es de 47 semillas/ $m^2$  (equivalente a una población de 30 plantas/ $m^2$ ). Este nivel corresponde además a la densidad mínima  $SB_{min}$  requerida para lograr una resiembra productiva.

### V-A. Características dinámicas de HV

En la Fig. 1 se muestra la superficie (en gris) que representa en el espacio de parámetros  $f$ ,  $p$  y  $s_r$  a la condición crítica (11) de la bifurcación transcítica. Por encima de la superficie, el punto  $\overline{SB}_2$  se mantiene estable y por debajo inestable. Este último caso implica que la población tiende a cero, perdiendo la resiembra natural. En la gráfica se incluye además la superficie (en naranja) correspondiente a (12) donde el equilibrio alcanzado es  $SB_{min}$ . En la medida que la combinación de  $f$ ,  $p$  y  $s_r$  se encuentre por encima de ambas superficies podrá afirmarse que la población de HV logra siempre una resiembra productiva. Sin embargo, si se ubican entre ambas superficies, existirá resiembra pero no en niveles suficientes que determinen un valor productivo.

La Fig. 2 presenta el detalle de las zonas definidas en función de la fecundidad y del pastoreo al considerar el caso del menor ingreso de semillas al suelo luego de la cosecha ( $s_r = 0,24$ ). Como puede observarse, aún en el caso extremo en el que no se realice pastoreo ( $p = 0$ ) es necesario que la especie mantenga una fecundidad anual por encima de 5,85 semillas/planta para no perder la resiembra y de 14 semillas/planta para sostener un banco de semillas en el largo plazo de más de 47 semillas/ $m^2$ . A medida que aumenta  $f$ , el nivel de pastoreo que puede realizarse manteniendo la resiembra también aumenta. Para fecundidades altas, la variación de  $p$  deja de ser pronunciada. Los niveles máximos admisibles para el caso de fecundidad máxima ( $f = 228,5$ )

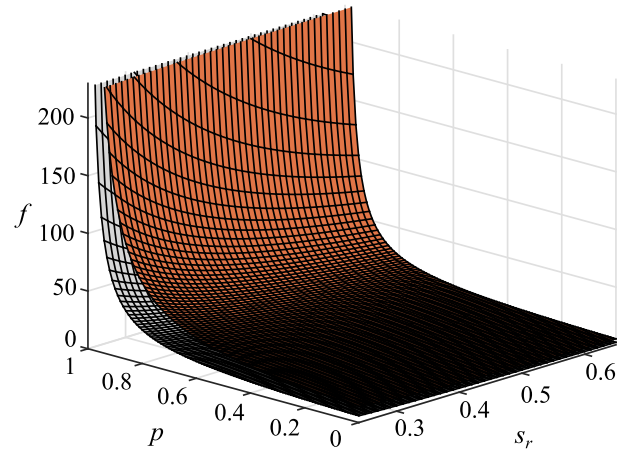


Figura 1. Superficies en el espacio de parámetros  $f$ ,  $p$  y  $s_r$  correspondientes a la condición crítica de la bifurcación transcítica (gris) y a la cota mínima que alcanza un equilibrio mayor a  $SB_{min}$  (naranja).

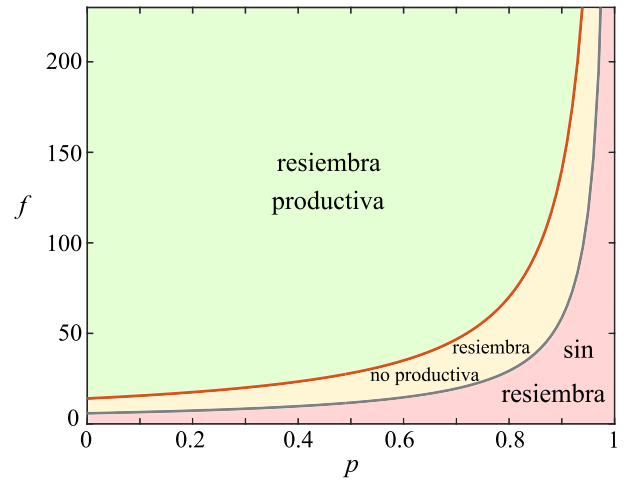


Figura 2. Distintas condiciones de resiembra en función de  $f$  y  $p$  para  $s_r = 0,24$ . Curva gris: condición crítica de la bifurcación transcítica; curva naranja: cota mínima que alcanza un equilibrio mayor a  $SB_{min}$ .

son de  $p = 0,93$  para mantener el banco de semillas por encima de  $SB_{min}$  y de  $p = 0,97$  para no perder la resiembra.

Las perturbaciones, dadas por (14), que podrían producirse en un año determinado de manera de recuperar el nivel productivo de resiembra al año siguiente se resumen en la Fig. 3. Las menores desviaciones se encuentran representadas por la superficie interna (azul) correspondiente a la cosecha máxima ( $s_r = 0,24$ ). Niveles menores de cosecha hacen que ingresen más semillas al banco lo que implica que se toleren mayores perturbaciones. El límite máximo está dado por la superficie externa (celeste) que corresponde al mínimo nivel de cosecha ( $s_r = 0,65$ ). Puede observarse en la figura que las desviaciones anuales tolerables disminuyen apreciablemente para fecundidades bajas o niveles de pastoreo altos.

### V-B. Respuestas temporales

La Fig. 4 muestra el comportamiento temporal del modelo de la HV en un horizonte de tiempo de 10 años considerando un nivel de pastoreo fijo de 0,65 y la máxima cosecha

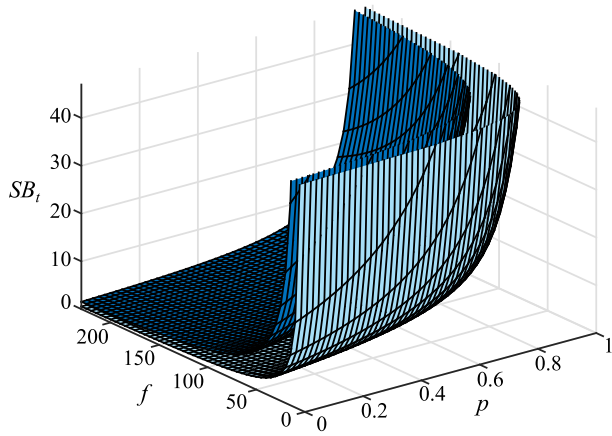


Figura 3. Perturbación máxima que puede producirse en  $SB_t$  para recuperar la cota mínima  $SB_{min}$  al año siguiente y no perder la resiembra productiva. En azul: superficie correspondiente a  $s_r = 0,24$  y en celeste a  $s_r = 0,65$ .

( $s_r = 0,24$ ). En las simulaciones se plantean distintos escenarios representados por valores de fecundidad anuales en el entorno de las 50 semillas/planta. Para esa combinación de los parámetros, las disminuciones que pueda tener  $f$  no deberían llevar a  $SB_t$  por debajo de las 33,4 semillas/ $m^2$  (línea punteada azul) para no perder la capacidad de recuperar el valor  $SB_{min}$  al año siguiente (línea punteada roja).

El caso I (celeste oscuro) muestra el comportamiento dinámico que presentaría la HV si la fecundidad se mantuviera igual a 50 semillas/planta en todo el intervalo de tiempo. Como puede observarse, el banco de semillas crece monótonamente desde  $SB_{min}$  hasta alcanzar 68 semillas/ $m^2$  en el largo plazo, encontrándose siempre dentro de los niveles de resiembra productiva (zona verde).

El caso II (naranja oscuro) corresponde a una situación donde la fecundidad al inicio tiene una variación que lleva a  $SB_t$  a caer por un año en la zona no productiva (amarillo claro) pero como dicha densidad no es menor a 33,4 semillas/ $m^2$ , el banco logra recuperarse y volver a la condición de resiembra productiva al año siguiente. El resto de los años, la población se mantiene en la misma condición productiva, pues las variaciones de  $f$  se reducen, alcanzando también las 68 semillas/ $m^2$  a los 10 años.

El caso III (amarillo oscuro) ejemplifica un comportamiento dinámico más crítico donde una de las variaciones anuales de  $f$  ubica al banco de semillas de HV por debajo de las 33,4 semillas/ $m^2$  ( $t = 5$ ). La simulación verifica los resultados dados en la Fig. 3 pues  $SB_t$  no logra superar la cota mínima  $SB_{min}$  al año siguiente. El punto por debajo de las 33,4 semillas/ $m^2$  marca una instancia donde en la práctica muy probablemente puedan tomarse acciones como la siembra de semillas o la rotación de cultivos y que no están contempladas en el modelo estudiado. La línea punteada posterior muestra lo que ocurriría si no se toman acciones y las fecundidades vuelven a niveles similares a las 50 semillas/planta. En ese escenario, la población lograría recuperar en el año subsiguiente la resiembra espontánea.

Finalmente, el caso IV (violeta) presenta un escenario donde

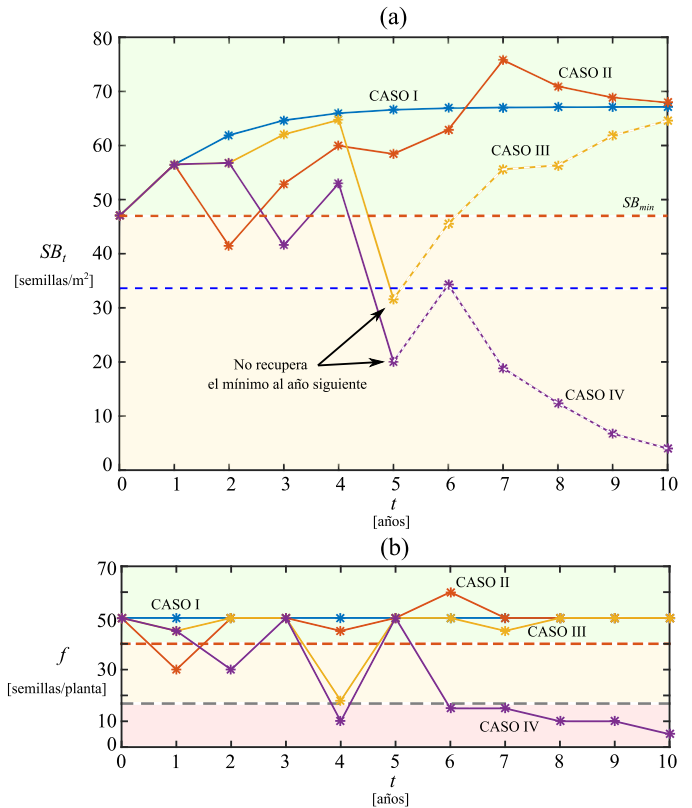


Figura 4. Dinámica del banco de semilla de la HV realizando un pastoreo fijo de  $p = 0,65$  y la máxima cosecha de semillas ( $s_r = 0,24$ ) ante distintas variaciones de  $f$  en el entorno de las 50 semillas/planta. (a) Banco de semillas; (b) Fecundidad. En líneas punteadas, el límite  $SB_{min}$  (rojo) y el que asegura la recuperación (azul) y el nacimiento de la bifurcación transcítica (gris).

en  $t = 4$  el banco de semillas logra recuperarse luego de una caída a valores entre las 33,4 y las 47 semillas/ $m^2$ . Posteriormente, vuelve a caer pero esta vez sin recuperarse al año siguiente, de manera similar al caso III. A partir de allí, se plantea una situación donde los valores de fecundidad se ubican en la zona de pérdida de resiembra (rojo claro). El modelo indica entonces que de no tomarse ninguna acción externa en  $t = 5$ , la población tendería directamente a la extinción (línea punteada). Matemáticamente hablando, esto ocurre porque la combinación de parámetros se ubica ahora en la parte de la bifurcación transcítica donde el origen pasó a ser el equilibrio estable.

### V-C. Comportamiento ante un pastoreo controlado

La Fig. 5 presenta el comportamiento de la HV al implementar el pastoreo controlado (15). Para facilitar la comparación con el pastoreo fijo, se ensayaron los mismos escenarios de variación de fecundidad que en la Fig. 4. Para la implementación del controlador, se consideró entonces  $SB_{ref} = 68$  semillas/ $m^2$  que es aproximadamente igual a la densidad de equilibrio alcanzada para  $p = 0,65$ ,  $f = 50$  semillas/planta y  $s_r = 0,24$ . El valor de  $p_{ref}$  se ajustó en 0,647 y la ganancia se calculó para un tiempo de establecimiento de alrededor de 1 año, resultando,  $k = 0,004438$ . Para el sistema controlado, las disminuciones que pueda tener  $f$  no deberían llevar a  $SB_t$

por debajo de las 20,42 semillas/m<sup>2</sup> (línea punteada azul) para no perder la capacidad de recuperación al valor  $SB_{min}$  al año siguiente. La pérdida de estabilidad ocurre para fecundidades por debajo de 10,66 semillas/planta. Como puede observarse, ambos límites se ampliaron respecto al mapa sin controlar.

El caso I muestra que el tiempo de establecimiento se redujo apreciablemente cuando la fecundidad se mantiene igual a 50 semillas/planta en todo el intervalo de tiempo. El resto de los casos evidencian un mejor desempeño ante las desviaciones planteadas en  $f$  que el manifestado en la figura anterior. En particular, desaparecen las situaciones de pérdida de recuperación del banco  $SB_t$  para  $t = 5$  años de los casos III y IV pues ahora ambas densidades se encuentran por encima del límite de los 20,42 semillas/m<sup>2</sup>. Sobre el final de la simulación del caso IV no se recupera el nivel mínimo  $SB_{min}$  aún cuando  $SB_t$  está dentro del rango posible. Esto ocurre porque el valor de fecundidad de ese año y las sucesivas ( $t \geq 8$  años) son menores al valor crítico que indica el cambio de estabilidad y la población tiende a la extinción.

## VI. CONCLUSIONES

En este trabajo se estudió el comportamiento dinámico que puede presentar una leguminosa como la *Vicia Villosa Roth* en el uso agropecuario de su resiembra. Se tuvieron en cuenta situaciones de pastoreo constante y controlado y distintos niveles de cosecha de semillas. Se obtuvieron condiciones críticas que aseguran que no se extinga el cultivo y cotas paramétricas que mantienen valores prácticos de resiembra en el largo plazo. Además, se analizó la capacidad que tiene esta especie de recuperar su nivel productivo luego de caer en zonas con riesgo de perder la resiembra espontánea. Se simularon situaciones realistas, con grandes variaciones de fecundidad. La acción de pastoreo controlado mostró mejor respuesta y recuperación ante estas perturbaciones.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el financiamiento de la SGCyT de la UNS (PGIs 24/K087, 24/L113 y 24/A225).

## REFERENCIAS

- [1] Ates S., D. Feindel, A. El Moneim y J. Ryan. Annual forage legumes in dryland agricultural systems of the West Asia and North Africa Regions: research achievements and future perspective. *Grass Forage Science*, **69**, 17-31, 2013.
- [2] Renzi J.P. y colegas. Diversity of Naturalized Hairy Vetch (*Vicia Villosa Roth*) Populations in Central Argentina as a Source of Potential Adaptive Traits for Breeding. *Frontiers in Plant Science*, **11**, 189, 2020.
- [3] Nichols, P.G.H. y colegas. New annual and short-lived perennial pasture legumes for Australian agriculture – 15 years of revolution. *Field Crops Research*, **104**, 10-23, 2007.
- [4] Renzi J.P. y Cantamutto M.A. *Vicias: Bases agronómicas para el manejo en la Región Pampeana*. INTA, Buenos Aires (Argentina), 2013.
- [5] Pittman, K.B., J.N. Barney, C.W. Cahoon y M.L. Flessner. Influence of hairy vetch seed germination and maturation on weediness in subsequent crops. *Weed Research*, **59**, 427-436, 2019.
- [6] Wayman, S. y colegas. Organic and conventional farmers differ in their perspectives on cover crop use and breeding. *Renewable Agriculture and Food Systems*, **32**, 376-385, 2016.
- [7] Renzi J.P., G.R. Chantre, J. L. González-Andujar y M. A. Cantamutto. Development and validation of a simulation model for hairy vetch (*Vicia Villosa Roth*) under different crop rotations. *Field Crops Research*, **235**, 79–86, 2019.
- [8] Sakai K. *Nonlinear Dynamics and Chaos in Agricultural Systems*, Elsevier, Amsterdam, 2001.
- [9] González-Andujar J. L. y C. Fernández-Quintanilla. Modelling the population dynamics of annual ryegrass (*Lolium rigidum*) under various weed management systems. *Crop Protection* **23**, 723–729, 2004.
- [10] Bagavathiannan M.V. y colegas. Simulation models on the ecology and management of arable weeds: structure, quantitative insights, and applications. *Agronomy*, **10**, 1611, 2020.
- [11] D'Amico M. B., G. Calandrini, J. L. González-Andujar y G. Chantre. Analysis of different management strategies for annual ryegrass (*Lolium rigidum*) based on a population dynamic model. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, **28(12)**, 2018.
- [12] Wiggins S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, 2da edición, Springer-Verlag, Nueva York (Estados Unidos), 2013.
- [13] Vaccaro S. *Digital Control: A State-Space Approach*, McGraw-Hill, Nueva York (Estados Unidos), 1995.

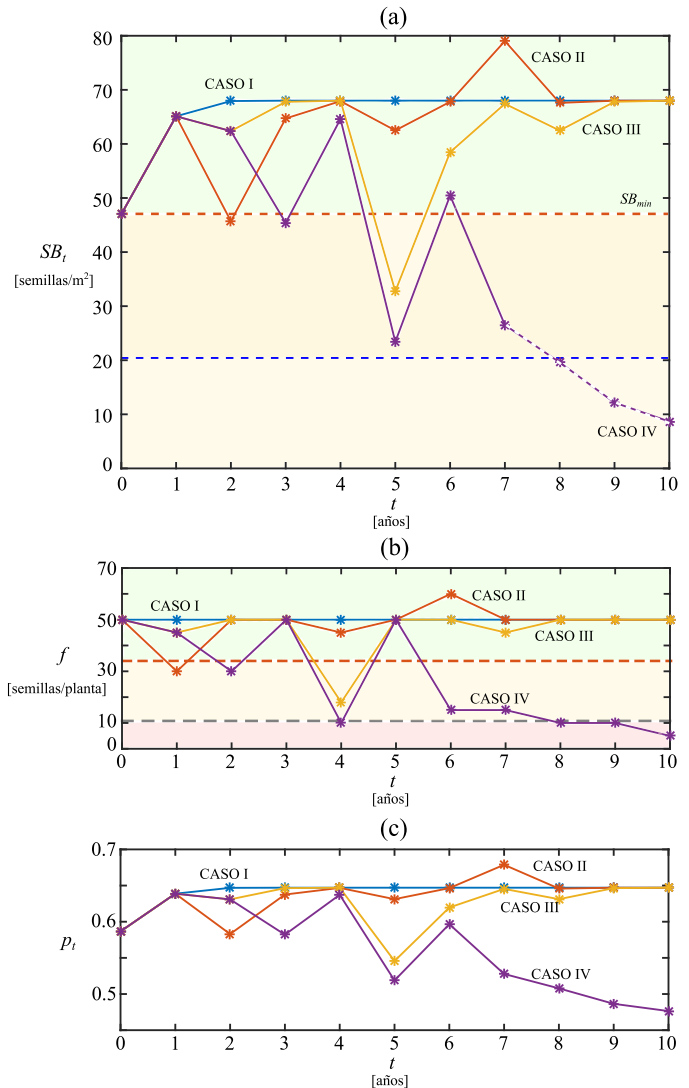


Figura 5. Dinámica del banco de semilla de la HV ante un pastoreo controlado para  $s_r = 0,24$  y distintas variaciones de  $f$  en el entorno de las 50 semillas/planta. (a) Banco de semillas; (b) Fecundidad. (c) Nivel de pastoreo. En líneas punteadas, el límite  $SB_{min}$  (rojo) y el que asegura la recuperación (azul) y el nacimiento de la bifurcación transcítica (gris).