



## ¿CÓMO Y POR QUÉ ESTUDIAR LA RELATIVIDAD DE LA SIMULTANEIDAD EN LA ESCUELA SECUNDARIA?

### HOW AND WHY STUDY THE RELATIVITY OF SIMULTANEITY IN HIGH SCHOOL?

### ¿COMO E POR QUE ESTUDAR A RELATIVIDADE DA SIMULTANEIDADE NO ENSINO MEIO?

María Rita Otero\*, Marcelo Arlego\*\*, Edwin A. Muñoz Guzmán\*\*\*

Cómo citar este artículo: Otero, M.R., Arlego, M. y Muñoz Guzmán, E.A. (2019). ¿Cómo y por qué estudiar la relatividad de la simultaneidad en la escuela secundaria?. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*, 14(2), 303-321.

DOI: <http://doi.org/10.14483/23464712.13929>

#### Resumen

Analizamos los resultados obtenidos al poner a prueba dos situaciones que enseñan la relatividad de la simultaneidad en la escuela secundaria. Las situaciones proponen el uso de la suma clásica de velocidades y su no uso, para tomar conciencia de las implicaciones de aplicar conjuntamente el primer y segundo postulado relativista. Se analizan sucesos que ocurren en sistemas de referencia inerciales en movimiento relativo, donde la simultaneidad se pierde según el observador que está en el andén, y no según el que viaja en el tren, a diferencia del conocido problema propuesto por Einstein reproducido mayoritariamente en los textos. Se analizan los protocolos obtenidos en cuatro cursos de grado 11 (15-16 años) con 128 estudiantes de un colegio público de la ciudad de Medellín. Se identifican los invariantes operatorios que utilizan en ambas situaciones, así como las argumentaciones que ofrecen. Los resultados indican que las situaciones propuestas producirían la emergencia y la toma de conciencia de invariantes operatorios vinculados a la relatividad de Galileo, los cuales permitirían conceptualizar la relatividad de la simultaneidad en la escuela secundaria.

Recibido: 10 de octubre de 2018; aprobado: 06 de diciembre de 2018

\* Doctora en Enseñanza de las Ciencias, Universidad de Burgos (UBU), España. Investigadora principal del CONICET, investigadora del NIECyT-UNICEN. Profesora titular de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN), Argentina. Correo electrónico: rotero@exa.unicen.edu.ar - ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1682-9142>

\*\* Doctor en Ciencias Exactas Mención Física. Investigador del Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología NIECyT. Investigador del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas CONICET. Profesor de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN), Argentina. Correo electrónico: marlego@exa.unicen.edu.ar - ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9595-826X>

\*\*\* Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia (UNAL). Docente del Instituto Educativo José María Bernal, Secretaría de Educación de Medellín (Colombia). Correo electrónico: ediwnm@gmail.com - ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7867-8549>

**Palabras clave:** relatividad de la simultaneidad, TCC, escuela secundaria, TER.

### Abstract

We analyse the results obtained by testing two situations teaching the relativity of simultaneity, in high school. These situations propose to use the classic sum of speeds and their non-use, to become aware of the implications of applying together, the first and second relativistic postulate. Events in inertial reference systems in relative motion were studied, where the simultaneity is lost according to the observer on the sidewalk, and not according to the one travelling on the train, different to the well-known problem proposed by Einstein reproduced mainly in texts. We study the protocols obtained in four 11th grade courses (15-16 years old) with 128 students from a public school in the Medellín city. The operative invariants used in both situations, as well as the argumentations they offer, emerged in the process. Results indicate that the proposed situations would produce the emergence and awareness of operatively invariants linked to Galileo's relativity, which would allow conceptualizing the relativity of simultaneity in secondary school.

**Keywords:** relativity of simultaneity, TCF, high school, STR.

### Resumo

Analisamos os resultados obtidos testando duas situações que tentam ensinar a relatividade da simultaneidade no ensino meio. As situações propõem o uso da adição clássica de velocidades clássicas e seu não uso, para tomar consciência das implicações de aplicar simultaneamente o primeiro e segundo postulado relativista. Analisamos eventos que ocorrem em sistemas inerciais de referência em movimento relativo, onde a simultaneidade se perde segundo o observador que está na calçada, e não de acordo com aquele que viaja no trem, diferente do conhecido problema proposto por Einstein que é reproduzido nos livros de texto. Os protocolos obtidos de quatro cursos do 11º ano (15-16 anos) com 128 estudantes de uma escola pública da cidade de Medellín foram analisados. Os invariantes operacionais usados em ambas as situações foram identificados, bem como os argumentos que eles ofereceram. Os resultados indicam que a utilização das situações propostas no ensino meio produziria a tomada de consciência de invariantes operacionais ligados à relatividade de Galileu, e a concepção da relatividade da simultaneidade.

**Palavras chaves:** Relatividade da Simultaneidade, TCC, Ensino Médio, TER.



## Introducción

Este trabajo es parte de un proyecto de investigación que adopta una concepción desarrollista y pragmática de la conceptualización basada en la teoría de los campos conceptuales (TCC) (VERGNAUD, 1990, 2013). A largo plazo, el objetivo del proyecto es desarrollar una *didáctica de la relatividad*. Como una meta más acotada, hemos diseñado, implementado y estamos evaluando una secuencia didáctica para enseñar las nociones fundamentales de la *teoría especial de la relatividad* (TER) en la escuela secundaria (ES) y estudiar la conceptualización (OTERO, ARLEGO, PRODANOFF, 2015, 2016; OTERO, ARLEGO, 2016; ARLEGO, OTERO, 2017; OTERO, ARLEGO, MUÑOZ, 2018). En particular, aquí nos ocupamos de la relatividad de la simultaneidad, porque es a nuestro juicio, una vía apropiada para ingresar a la TER en la escuela secundaria.

En la literatura se encuentran investigaciones pioneras sobre la enseñanza de la TER a estudiantes universitarios (ANGOTTI *et al.*, 1978; PIETROCOLA, ZYLBERSZTAJN, 1999; SALTIEL, MALGRANGE, 1980; PANSE, RAMADAS, KUMAR, 1994; SCHERR 2001; SCHERR, SHAFFER, VOKOS, 2001, 2002; PÉREZ, SOLBES, 2003; HOSSON, KERMEN, PARIZZOT, 2010); y muy pocas en la enseñanza secundaria (VILLANI, PACCA, 1987; PÉREZ, SOLBES, 2006; DIMITRIADI, HALKIA, SKORDOULIS, 2009; DIMITRIADI, HALKIA 2012).

Los estudios previos reportan que los estudiantes tienen dificultades con la definición y el uso del concepto del evento (HEWSON 1982) y que confunden el *instante de un evento* con el *instante en que dicho evento es percibido por un observador* (SCHERR, SHAFFER, VOKOS, 2001; SCHERR, 2007; HOSSON *et al.*, 2010). Los estudiantes universitarios no comprenden el concepto de *sistema de referencia* y lo confunden con el *punto de vista*, así, cada observador constituiría un marco de referencia distinto (SCHERR, 2001). También se afirma que los estudiantes razonan de manera *espontánea* sobre el movimiento (lo consideran absoluto) y sobre las distancias y las velocidades cuando tienen que

explicar fenómenos mecánicos en relatividad clásica y especial (SALTIEL, MALGRANGE, 1980), y que ellos consideran que la simultaneidad es absoluta e independiente del movimiento relativo (VILLANI, PACCA, 1987).

Según el estudio realizado en Grecia (DIMITRIADI, HALKIA, 2012), para los estudiantes de grado décimo la simultaneidad es absoluta e independiente del movimiento relativo. Por otro lado, los alumnos tendrían una concepción pregalileana del movimiento, al que consideran absoluto (POSNER *et al.*, 1982; DIMITRIADI, HALKIA, 2012). Estas ideas sobreviven a la enseñanza escolar de la cinemática clásica, y cuando se intenta enseñar la cinemática relativista, se busca que los estudiantes tomen conciencia de la ruptura conceptual entre la física newtoniana y la moderna (VILLANI, ARRUDA, 1998). Pero ¿cómo podrían hacerlo sin los conceptos clásicos relevantes?

No existen antecedentes de una secuencia didáctica para la escuela secundaria (ES) diseñada con el referencial de la TCC, ni del análisis de la conceptualización de conceptos básicos de la TER usando este referencial. Para enseñar la TER y describir el proceso de conceptualización de sus nociones básicas en la ES, diseñamos una secuencia didáctica basada en lo que los estudiantes saben y no en lo que supuestamente deberían saber (OTERO, ARLEGO, 2016). Las versiones sucesivas de la secuencia se fundamentan en las implementaciones realizadas en ocho cursos de la ES en Argentina y en Colombia (OTERO, ARLEGO, PRODANOFF, 2015, 2016; OTERO, ARLEGO, 2016; ARLEGO, OTERO, 2017; OTERO, ARLEGO, MUÑOZ, 2018).

En este trabajo, presentamos resultados obtenidos en dos situaciones que integran la secuencia mencionada previamente, mediante las cuales los estudiantes pueden arribar a la relatividad de la simultaneidad. Los resultados se analizan a través de la construcción de una categorización inductiva basada en 256 protocolos obtenidos de la implementación de la secuencia didáctica en cuatro cursos de grado 11 (15-16 años) (N=128) en una escuela pública de la ciudad de Medellín, Colombia. La

categorización identifica, describe y analiza las formas de resolver de los alumnos y los invariantes operatorios subyacentes. Se evalúa si las situaciones diseñadas para producir la emergencia y la toma de conciencia de invariantes operatorios vinculados con la relatividad de Galileo, permiten además ingresar a la TER mediante el quiebre que representa la relatividad de la simultaneidad.

### a. La teoría de los campos conceptuales (TCC)

La teoría de los campos conceptuales (TCC) (VERGNAUD, 1990, 2013) establece que la conceptualización es la piedra angular del desarrollo cognitivo. El análisis en términos de invariantes operatorios (IO) permite distinguir qué características de las situaciones son efectivamente tomadas en cuenta por el sujeto, qué IO ellas ponen en juego y cuáles son las metas que intenta alcanzar y las reglas e inferencias que utiliza para hacerlo (VERGNAUD, 2013). Los IO pueden ser de dos tipos: conceptos-en-acción y teoremas-en-acción, estos organizan la acción del sujeto y la hacen operatoria. Un concepto-en-acción es una categoría, una propiedad, un predicado que se considera relevante a la situación y un teorema-en-acción es una proposición que el sujeto considera verdadera respecto a dicha situación. Los IO son implícitos, y no son equiparables con los conceptos ni con los principios científicos, porque estos últimos son explícitos y se puede discutir su pertinencia y su validez.

Para VERGNAUD (1990, 2013) existen dos formas del conocimiento en interacción: a) la operatoria, que permite al sujeto actuar en una situación y b) la predicativa, que le permite enunciar y designar a los objetos, así como comunicar su conocimiento. En la primera, la acción no se refiere solo a sus manifestaciones externas –conducta–, sino que también incluye los aspectos operatorios e implícitos en la acción: pensamiento, toma de decisiones, anticipaciones e inferencias. Frente a una nueva situación, es muy complejo saber qué hacer y no necesariamente se puede poner en palabras lo que se hace. Por tanto, la enseñanza/aprendizaje no se puede

limitar a la forma predicativa, ni un concepto puede reducirse a su definición. Nuestra investigación busca identificar y analizar los IO, porque estos son los elementos más decisivos del esquema (OTERO *et al.*, 2014). La TCC plantea una consecuencia didáctica inmediata, la *lógica* del aprendizaje no se corresponde con la de la disciplina, tal como aparece reconstruida racionalmente en los textos, o en la concepción de la comunidad productora del conocimiento. En consecuencia, la transformación y la gestión del conocimiento físico propuesto para enseñar son actividades didácticas fundamentales, basadas en el conocimiento de cómo ese saber ha surgido, en respuesta a qué preguntas y usos, y cómo ha sido comunicado hasta adoptar su *aspecto* actual.

## 1. Metodología

Nuestro trabajo reporta resultados de cuatro implementaciones de la secuencia (OTERO, ARLEGO, 2016) realizadas en cursos (C1=32, C2=34, C3=32, C4=30) de grado 11 (15-16 años) de una escuela pública en la secundaria básica (N=128) en la ciudad de Medellín, Colombia.

En todos los cursos el docente fue el mismo y los estudiantes habían realizado la primera etapa de la secuencia antes citada. En las clases, los alumnos se reúnen en grupos fijos de a lo sumo cinco miembros, conformados según su elección. En el ítem (a) de las dos situaciones consideradas aquí se pide realizar una anticipación individual sin hacer cálculos, que inmediatamente se entrega al profesor. Luego, los estudiantes se reúnen en grupos y discuten los resultados individuales sin la intervención del profesor. A continuación, se realiza una puesta en común, donde se comparten las respuestas y se establece cuál es la más apropiada. Los alumnos escriben y contestan las tareas propuestas individualmente y todos entregan su trabajo al profesor al finalizar cada clase, quien digitaliza los protocolos y los reintegra en la clase siguiente. Las puestas en común se registran en audio. Luego se construye una categorización inductiva, mediante técnicas de análisis y metaanálisis (GÜRTLER, HUBER, 2007)

generando categorías y subcategorías, que se incorporan a una matriz de datos. Las subcategorías se asocian a los IO, y se obtienen de los protocolos escritos de los estudiantes, de las puestas en común orales y del diario de clase del profesor, instrumento que contribuye a la interpretación de lo que ocurre en el aula; los IO permiten describir la conceptualización en las dos situaciones analizadas aquí. A continuación, se presenta brevemente la secuencia implementada y, más en detalle, las dos situaciones consideradas en este trabajo. Después, se describe cada categoría y las subcategorías generadas y se realizan algunos análisis de estadística descriptiva para datos cualitativos.

## 2. La relatividad de la simultaneidad y su tratamiento didáctico habitual

En los textos para el nivel universitario, usualmente el orden de presentación de los contenidos es: proponer los dos postulados relativistas, obtener (a veces definir) las transformaciones de Lorentz para la posición, el tiempo y la velocidad, deducir la dilatación del tiempo y la contracción de la longitud. Recién entonces, algunos abordan la relatividad de la simultaneidad (TIPLER, MOSCA, 2012; SERWAY, JEWETT, 2009; HEWSON, 1982). Otros textos ni siquiera tratan este último tema (por ejemplo, ALONSO, FINN, 1995; RESNICK, HALLIDAY, KRANE, 2009). Los textos mencionados asumen como evidentes las implicaciones del segundo postulado y desatienden las dificultades de los estudiantes para cambiar la adición de velocidades galileana por la relativista. Para tratar la relatividad de la simultaneidad –cuando lo hacen–, los textos de física universitarios o preuniversitarios proponen el conocido ejemplo del tren de Einstein (1916) (TIPLER, MOSCA, 2012; SERWAY, JEWETT, 2009; etc.). Algo similar ocurre en las propuestas didácticas (SCHERR, 2001, 2007; DIMITRIADI, HALKIA, 2012).

Nuestra propuesta plantea que el observador situado en la mitad del tren dispara dos haces de luz en sentidos opuestos exactamente cuando pasa frente a otro observador situado en el andén, que

ve pasar el tren hacia la derecha. En este caso la simultaneidad se da en el tren y no en el andén, como es usual en los libros de texto (a excepción de MERMIN, 2009). En ambas propuestas, subyace obviamente el mismo fenómeno: la relatividad de la simultaneidad. Sin embargo, desde un punto de vista didáctico, no implican lo mismo, sobre todo si se pretende que los estudiantes razonen cualitativamente y además realicen los cálculos posicionados en cada sistema de referencia. En la perspectiva didáctica es importante considerar el conocimiento del que disponen los estudiantes y, de ser necesario, modificar el experimento.

Nuestra propuesta didáctica se diferencia además por el orden en que presenta las nociones relativistas, y porque propone una transición entre la cinemática clásica y la relativista, poniendo en evidencia las implicancias de aplicar conjuntamente los dos postulados de Einstein. Además, se busca que los estudiantes tomen conciencia del rol central del sistema de referencia y el observador en la descripción del movimiento, como punto de partida para tratar la regla de adición clásica de velocidades. Este aspecto, que es usado a diario sin saberlo, no es usualmente abordado en la cinemática escolar y tampoco se observa un tratamiento profundo del mismo en los textos universitarios. Solo tratando de manera adecuada la adición galileana es posible dimensionar las implicaciones que tiene dejar de hacerlo, en particular la no adición a la velocidad de la luz ( $c$ ) y la subsecuente generalización de adición relativista de velocidades. Así mismo, consideramos que la puerta de entrada a la relatividad especial puede ser la relatividad de la simultaneidad, porque obliga a focalizar en la relatividad del tiempo.

## 3. Situaciones propuestas y analizadas en este trabajo

En la cinemática clásica, el tiempo no es afectado si se cambia el sistema de referencia, dos eventos que ocurren en diferentes lugares y al mismo tiempo en un sistema de referencia, también son simultáneos en otro sistema de referencia. Estos hechos son

habituales en *nuestro mundo* de bajas velocidades, sin que seamos plenamente conscientes de ello, por tanto ¿por qué debería apreciarse la pérdida de la simultaneidad, si no se tiene conciencia de ella?

Esta es una de las razones de ser de la situación 6 (S6): tomar conciencia de los resultados que produce el uso de la adición de velocidades clásica, como punto de partida de la génesis de los conceptos relativistas.

Por tratarse de una secuencia que vienen desarrollando, los estudiantes están familiarizados con la construcción de sus propios sistemas de representación y con el hecho de que estos son tomados en cuenta en la clase y por el profesor. La notación es discutida cuando ellos lo requieren. En las distintas implementaciones, se ha observado que no existen dificultades con la notación en las situaciones aquí consideradas y si los estudiantes lo prefieren, incluso pueden modificarlas. Primero, se propone realizar una anticipación sin cálculos y una discusión grupal.

Finalmente se calculará el encuentro entre los proyectiles y las paredes del vagón. Se ha completado una fila de la tabla 1, a modo de ejemplo.

Cuando los estudiantes escriben  $v'_{v'} = 0$  para OV, asumen en acto el primer postulado. Suponiendo que el vagón mide 10 m, en el sistema de referencia de OV:

$$x'_{pi} = -5 \text{ m} \quad x'_{bi} = -60 \frac{\text{m}}{\text{s}} t' \quad -5 = -60 \frac{1}{\text{s}} t'_i \quad t'_i = \frac{5}{60} \text{ s} \approx 0,083 \text{ s}$$

$$x'_{pd} = 5 \text{ m} \quad x'_{bd} = 60 \frac{\text{m}}{\text{s}} t' \quad 5 = 60 \frac{1}{\text{s}} t'_d \quad t'_d = \frac{5}{60} \text{ s} \approx 0,083 \text{ s}$$

El tiempo de encuentro a la derecha y a la izquierda es  $t'_i = t'_d = \left(\frac{1}{12}\right) \text{ s} \approx 0,083 \text{ s}$ .

Considerando el sistema de referencia de OA, el encuentro entre la pared izquierda y el proyectil sería:

$$x_{pi} = -5 \text{ m} + 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} t, x_{bi} = -40 \frac{\text{m}}{\text{s}} t, -5 \text{ m} + 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} t_i = -40 \frac{\text{m}}{\text{s}} t_i, t_i = \frac{5}{60} \text{ s} \approx 0,083 \text{ s}$$

**SITUACIÓN 6:**

Un observador está sentado en el medio de un vagón vacío. Otro observador que está parado al costado del andén determina que el vagón se mueve a velocidad constante. El observador que está en el vagón tiene un dispositivo que puede lanzar bolas de goma hacia adelante y hacia atrás, en el mismo instante.

- a) Analicen para cada observador, sin hacer cálculos, si los proyectiles llegan al mismo tiempo o no a cada pared del vagón.
- b) Completen la tabla siguiente para cada observador y propongan diferentes velocidades para el vagón y los proyectiles. (Se omiten líneas por razones de espacio).

Observador en el vagón (OV)			Observador en el andén (OA)		
$v'_{v'}$ (m/s)	$v'_{bd}$ (m/s)	$v'_{bi}$ (m/s)	$v_v$ (m/s)	$v_{bd}$ (m/s)	$v_{bi}$ (m/s)

- c) Calculen el punto de encuentro (posición y tiempo) entre los proyectiles y las paredes del vagón, para cada observador, teniendo en cuenta los diferentes valores de velocidades que han propuesto.

**Tabla 1.** Posibles velocidades relativas para las bolas según los observadores OV y OA.

Observador en el vagón (OV)			Observador en el andén (OA)		
$v'_{v'}$ (m/s)	$v'_{bd}$ (m/s)	$v'_{bi}$ (m/s)	$v_v$ (m/s)	$v_{bd}$ (m/s)	$v_{bi}$ (m/s)
0	60	-60	20	80	-40

Fuente: elaboración propia.

Y entre la pared derecha y el proyectil:

$$x_{pd} = 5 \text{ m} + 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} t, \quad x_{bd} = 80 \frac{\text{m}}{\text{s}} t,$$

$$5 \text{ m} + 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} t_d = 80 \frac{\text{m}}{\text{s}} t_d, \quad t_d = \frac{5}{60} \text{ s} \approx 0,083 \text{ s}$$

$$t_i = t_d$$

Es decir que, para ambos observadores, los sucesos son simultáneos.

Según la TER es incorrecto afirmar que para OA los proyectiles arriben simultáneamente. La situación 6 busca poner en evidencia los IO de los estudiantes respecto de la física clásica que rige *la vida cotidiana* a bajas velocidades, ya que usar apropiadamente la adición galileana es requisito para comprender las consecuencias de no usarla, habilitando una ruptura fundamental y el ingreso a la TER.

En la TER,  $c$  no cambia entre un sistema de referencia inercial y otro, esto conduce a la relatividad de la simultaneidad. Esta es la razón de ser de la situación 7 (S7) donde los proyectiles se sustituyen por rayos de luz.

Para resolver la situación es necesario conocer la invariancia de  $c$  respecto del movimiento de la fuente, o más formalmente el segundo postulado:  $c$  no se puede componer mediante la adición de velocidades de Galileo. El cálculo del encuentro entre los haces de luz y las paredes para ambos observadores conduce al resultado de la pérdida de la simultaneidad según OA. La transformación de Lorentz se está usando implícitamente, que para la luz adopta una expresión matemática sencilla. Al colocar  $\mathbf{v}'_c = \mathbf{0}$ , los estudiantes usan “en acto” el primer postulado y si no adicionan valores a  $c$ , el segundo postulado.

Para OV

$$x'_{pi} = -L \quad x'_{Li} = -c \cdot t' \quad -L = -c \cdot t'_i \quad t'_i = \frac{L}{c}$$

$$x'_{pd} = -L \quad x'_{Ld} = -c \cdot t'_d \quad -L = -c \cdot t'_d \quad t'_d = \frac{L}{c}$$

$$t'_i = t'_d$$

### SITUACIÓN 7

Un observador está sentado en el medio de un vagón vacío. Otro observador que está parado al costado del andén determina que el vagón se mueve a velocidad constante. El observador que está en el vagón tiene un dispositivo que puede disparar rayos de luz hacia adelante y hacia atrás, en el mismo instante.

- Analicen para cada observador, sin hacer cálculos, si los rayos de luz llegan simultáneamente o no a cada pared del vagón.
- Completen el siguiente cuadro para cada observador, proponiendo diferentes velocidades para el vagón y los rayos de luz.

Observador en el vagón (OV)			Observador en el andén (OA)		
$v'_v$ (m/s)	$v'_{Ld}$ (m/s)	$v'_{Li}$ (m/s)	$v_v$ (m/s)	$v_{Ld}$ (m/s)	$v_{Li}$ (m/s)

- Calculen el punto de encuentro (posición y tiempo) entre los rayos de luz y las paredes del vagón, para cada observador, teniendo en cuenta diferentes valores de velocidades.

**Tabla 2.** Posibles velocidades relativas para los haces de luz según OV y OA.

Observador OV			Observador OA		
$v'_v$ (m/s)	$v'_{Ld}$ (m/s)	$v'_{Li}$ (m/s)	$v_v$ (m/s)	$v_{Ld}$ (m/s)	$v_{Li}$ (m/s)
0	$c$	$-c$	20	$c$	$-c$

Fuente: elaboración propia.

Para OA

$$x_{pi} = -L + 20.t \quad x_{Li} = -c.t \quad -L + 20.t = -c.t_i$$

$$(c + 20).t_i = L \quad t_i = \frac{L}{c + 20}$$

$$x_d = L + 20.t \quad x_{Ld} = c.t \quad L + 20.t = c.t_d$$

$$L = (c - 20).t_d \quad t_d = \frac{L}{c - 20}$$

$$t_i \neq t_d$$

La luz tarda más tiempo en llegar a la pared de la derecha que a la de la izquierda.

### a. Categorías de análisis para S6

#### ***C1<sub>6</sub>: simultaneidad según OV en la respuesta individual al ítem (a)***

C1M1<sub>6</sub>: Según OV, las bolas llegan juntas a las paredes del vagón. Por ejemplo, los estudiantes expresan:

*Para OV, las bolas llegan a igual tiempo porque sus velocidades son iguales.*

*Para OV, el vagón está en movimiento constante, se podría decir que la velocidad del vagón es 0; solo se tendrían en cuenta las velocidades de las bolas, al ser las velocidades iguales y ser las distancias iguales deben llegar en tiempos iguales a las paredes del vagón.*

C1M2<sub>6</sub>: no hay respuesta.

La tabla 3 muestra que para OV, casi todos los estudiantes predicen que las bolas llegarán simultáneamente a las paredes del vagón.

**Tabla 3.** C1<sub>6</sub>: simultaneidad según OV en la respuesta individual al ítem (a).

Subcategoría	No. de estudiantes
C1M1 <sub>6</sub> : las bolas llegan juntas	118
C1M2 <sub>6</sub> : no contestó	10
Total	128

**Fuente:** elaboración propia.

#### ***C2<sub>6</sub>: simultaneidad según OA en la respuesta individual al ítem (a)***

C2M1<sub>6</sub>: según OA, las bolas llegan en tiempos diferentes a las paredes del vagón, e incluso algunos afirman que el disparado hacia atrás llega antes.

*OA ve llegar las bolas en tiempos diferentes porque la bola izquierda va más rápido.*

*Las bolas llegan en tiempos diferentes porque le sumo la velocidad del vagón.*

C2M2<sub>6</sub>: según OA, las bolas llegan juntas a las paredes del vagón.

*El OA ve llegar las bolas a igual tiempo*

**Tabla 4.** C2<sub>6</sub>: Simultaneidad según OA en la respuesta individual al ítem (a).

Subcategoría	No. de estudiantes
C2M1 <sub>6</sub> : las bolas llegan en tiempos diferentes	85
C2M2 <sub>6</sub> : las bolas llegan en tiempos iguales	43
Total	128

**Fuente:** elaboración propia.

La tabla 4 muestra que inicialmente más de dos tercios de los estudiantes predicen que las bolas arribarán a las paredes en tiempos diferentes.

#### ***C3<sub>6</sub>: simultaneidad según OA en la respuesta al ítem (a), después de la discusión grupal***

C3M1<sub>6</sub>: para OA las bolas llegan a igual tiempo. Luego de la interacción grupal los estudiantes esgrimen argumentos del tipo

*OA sí nota el movimiento del vagón que afecta la velocidad de las bolas. A pesar de que la velocidad de las bolas es diferente, van a llegar en tiempos iguales.*

*La bola disparada en el mismo sentido del vagón tendrá una velocidad mayor, sin embargo, la pared del vagón de ese lado va a estar alejándose de esa*

bola. En el caso contrario, que es disparada hacia el sentido contrario del movimiento del vagón va a tener una velocidad menor pero la pared de ese lado se está acercando hacia esa bola, entonces llegan en tiempos iguales, no importa si es para adentro o para afuera.

Para OA, las bolas también llegan en el mismo tiempo, pero para él las velocidades sí son distintas porque le tenemos que sumar la velocidad del vagón, la tenemos que tener en cuenta. Los que dicen que llegan a distinto tiempo no tienen en cuenta que el vagón se está moviendo. Tienen velocidades distintas, sí, pero como el vagón se está moviendo una pared se está alejando y a esa pared que se está alejando, la bola va con mayor velocidad, o sea, tiene que recorrer más trayectoria, aunque tenga más velocidad y la otra bola que tiene una menor velocidad la pared se le está acercando. Entonces esto hace que se compensen esos dos factores y que las bolas lleguen al mismo tiempo, eso es lo que deben tener en cuenta los equipos que piensan que las bolas llegan a distintos tiempos, que el vagón está en movimiento, el vagón no está estático, el vagón se está moviendo y por eso llegan al mismo tiempo y se compensan.

C3M2<sub>6</sub>: para OA, las bolas llegan en tiempos diferentes.

La tabla 5 muestra que los estudiantes modificaron su predicción para el ítem (a), después de la discusión grupal. Ahora, muchos de ellos tomarían

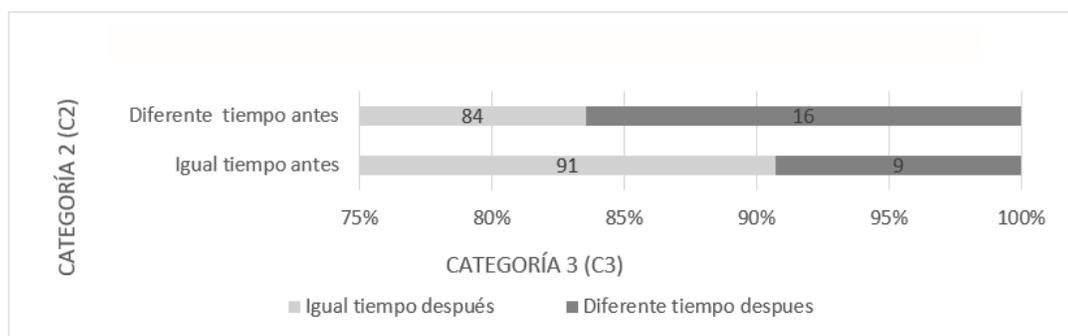
en cuenta que en el sistema de referencia de OA, las bolas tienen diferente velocidad, pero llegarían al mismo tiempo a las paredes porque la velocidad del vagón afecta la de las bolas y porque, además, las paredes se están desplazando.

**Tabla 5.** C3<sub>6</sub>: Simultaneidad según OA en la respuesta al ítem (a), después de la discusión grupal.

Subcategoría	No. de estudiantes
C3M1 <sub>6</sub> : las bolas llegan en tiempos iguales	110
C3M2 <sub>6</sub> : las bolas llegan en tiempos diferentes	18
Total	128

**Fuente:** elaboración propia.

En la figura 1 se aprecia el cambio en la anticipación de los estudiantes. Entre los 110 estudiantes que al inicio anticiparon que las bolas llegarían en tiempos diferentes, el 84 % dijo después que lo harían juntas. El 91 % de los 18 estudiantes que hicieron la predicción correcta, la mantuvieron. Las expresiones de los estudiantes y los protocolos evidencian que la discusión grupal, promueve nuevos IO, que dirigen la toma de información de los estudiantes hacia las velocidades de las balas y la del vagón, en este sistema de referencia. Por otro lado, un 16 % de los adherentes a la no simultaneidad en la anticipación, mantuvieron su postura y un 9 % de los que habían predicho correctamente la simultaneidad, cambiaron de idea.



**Figura 1.** Llegada de los proyectiles a las paredes antes y después de la discusión grupal.

**Fuente:** elaboración propia.

**C4<sub>6</sub>: completar la tabla 1 según OV**

La tabla 6 muestra que más de dos tercios de los estudiantes completan la tabla con las velocidades de las bolas correctas, en el sistema de referencia de OV. Además, usan apropiadamente el primer postulado y escriben  $v'_{\nu} = 0$ , es decir consideran a las paredes del vagón en reposo en el sistema de referencia donde está ubicado OV.

**Tabla 6.** C4<sub>6</sub>: completar la tabla 1 para OV.

Subcategoría	No. de estudiantes
C4M1 <sub>6</sub> : Solo se escribe el módulo	28
C4M2 <sub>6</sub> : Se escribe el módulo y el signo de manera correcta	100
Total	128

Fuente: elaboración propia.

**C5<sub>6</sub>: adición de velocidades al completar la tabla 1 para OA**

Se identificaron cinco maneras de completar la tabla.

C5M1<sub>6</sub>: esta subcategoría describe a quienes consideran que para OA “la bola hacia la izquierda llega antes porque va más rápido” y completan ad hoc la tabla 1 para cumplir con este IO. No componen las velocidades.

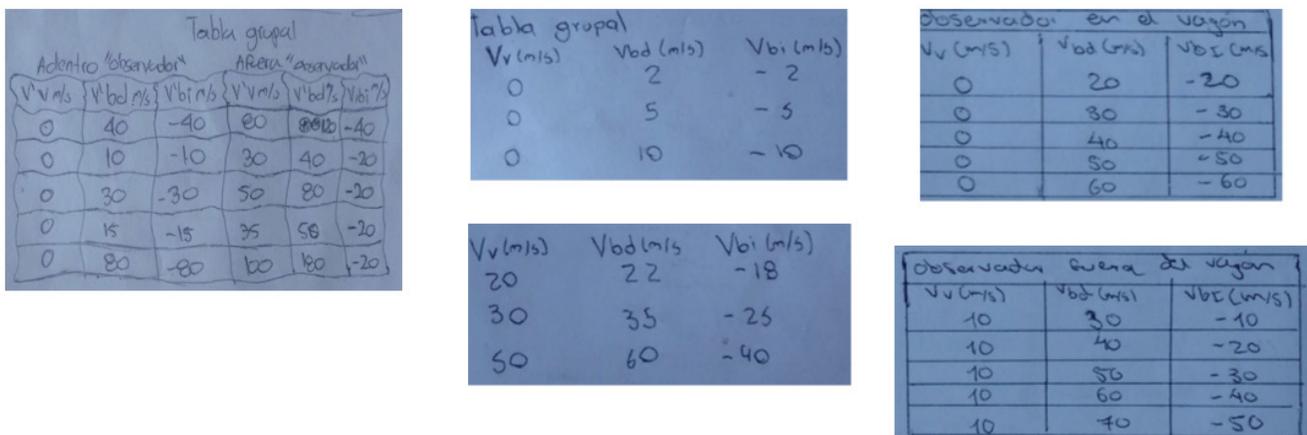
C5M2<sub>6</sub>: estos estudiantes no adicionan las velocidades y usan los IO: “para el de afuera, llega antes el que va hacia atrás” y “cuando van en igual sentido se resta y en sentido contrario se suma”. Entonces a la rapidez del vagón le restan la del proyectil disparado hacia adelante y para el que salió hacia atrás suman, luego imponen el signo.

C5M3<sub>6</sub>: estos estudiantes solo suman la velocidad del vagón para la bola disparada hacia la derecha y utilizan este valor con signo opuesto, como velocidad de la bala disparada hacia la izquierda.

C5M4<sub>6</sub>: estos estudiantes adicionan a la rapidez de los proyectiles la del vagón hacia adelante y restan hacia atrás, y al final colocan el signo para indicar el sentido. Ellos no utilizan el IO “en contra se suma y a favor se resta” (figura 2).

C5M5<sub>6</sub>: estos estudiantes adicionan la velocidad del vagón y resuelven la suma algebraica: “para OV las bolas van a 0, para cada sentido. Si para OA el vagón va a 80. Entonces la bala derecha va a 90 m/s, y la otra a 70 m/s” (figura 3).

En OV habría que sumar velocidades, pero como el vagón va a 0, esa suma no afecta en nada. Afuera también sumamos las velocidades, como el vagón va a 80, eso hace que cambie la velocidad para las bolas. Quisiera enfatizar que para OA, todas las bolas se mueven en la dirección del vagón a pesar de que sean velocidades distintas”.



**Figura 2.** Tablas del ítem (b) de la S6 para OV y OA.

Fuente: fragmento de las imágenes digitalizadas de la resolución de los estudiantes grupo C3.

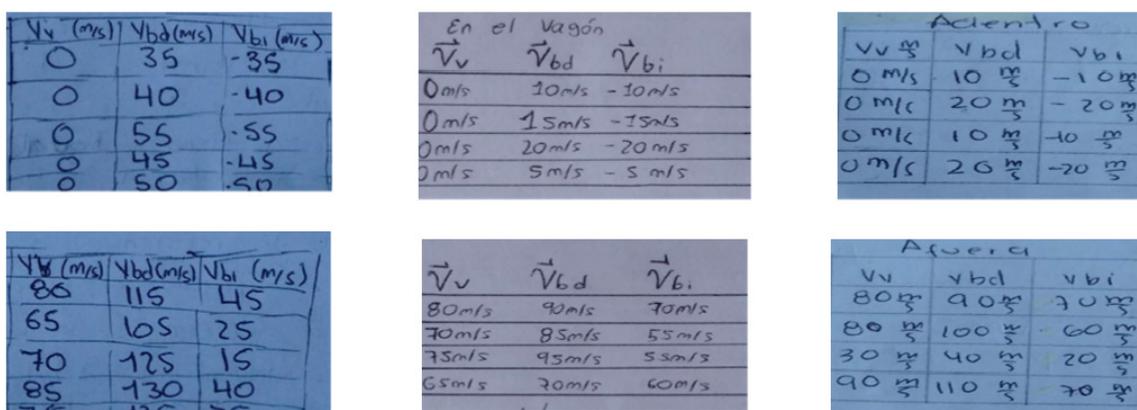


Figura 3. Tablas del ítem (b) de la S6 para OV y OA.

Fuente: fragmento de las imágenes digitalizadas de la resolución de los estudiantes grupo C4.

Tabla 7. C5<sub>6</sub>: adición de velocidades al completar la tabla 1 para OA.

Subcategoría	N	%
C5M1 <sub>6</sub> : <i>ad hoc</i> en acuerdo al IO “la velocidad de la bola izquierda es mayor”	26	20
C5M2 <sub>6</sub> : se usa el IO “en igual sentido se resta y en opuesto se suma”	22	17
C5M3 <sub>6</sub> : adicionan solo para la bola derecha y colocan el signo opuesto a la izquierda	13	19
C5M4 <sub>6</sub> : suman o restan la rapidez del vagón y la bola derecha, o izquierda respectivamente y colocan el signo	36	28
C5M5 <sub>6</sub> : adicionan las velocidades	31	24
Total	128	100

Fuente: elaboración propia.

La tabla 7 presenta el número de estudiantes en cada subcategoría y el porcentaje.

Los estudiantes de las subcategorías C5M4<sub>6</sub> y C5M5<sub>6</sub> (52 %) utilizan IO adecuados en la adición de velocidades. La figura 4 representa cuántos estudiantes mantuvieron o no la simultaneidad del arribo de los proyectiles, en el sistema de referencia del andén.

La figura 5 muestra porcentualmente cómo se desagregan las formas de realizar la adición de velocidades en el sistema de referencia del andén (OA) según el cambio o la conservación de la predicción sobre la simultaneidad de los proyectiles.

Entre los 64 estudiantes que cambiaron hacia la simultaneidad, el 45 % adiciona velocidades, mientras el 48 % no logra hacerlo, y entre los 43

estudiantes que adhirieron a la simultaneidad desde el comienzo el 70 % adiciona velocidades. Entre los 17 estudiantes que conservan la no simultaneidad, el 47 % adiciona las velocidades bien y el 18 % lo hace solo a la derecha. Finalmente, solo 4 estudiantes involucraron y entre ellos las modalidades de adición no están presentes.

Con respecto al cálculo del encuentro entre los proyectiles y las paredes del vagón para cada observador (ítem (c)), los estudiantes calcularon que los tiempos de llegada son iguales para OV. Pero, muy pocos lo pudieron realizar sin ayuda para el OA. En consecuencia, el profesor resolvió con toda la clase el encuentro y luego los estudiantes lo repitieron para varias filas de la tabla 1.

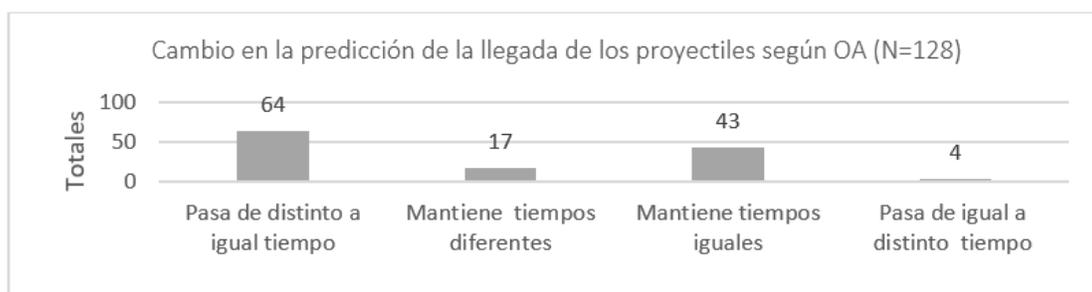


Figura 4. Cambio en la predicción de la llegada de los proyectiles según OA (N=128).

Fuente: elaboración propia.

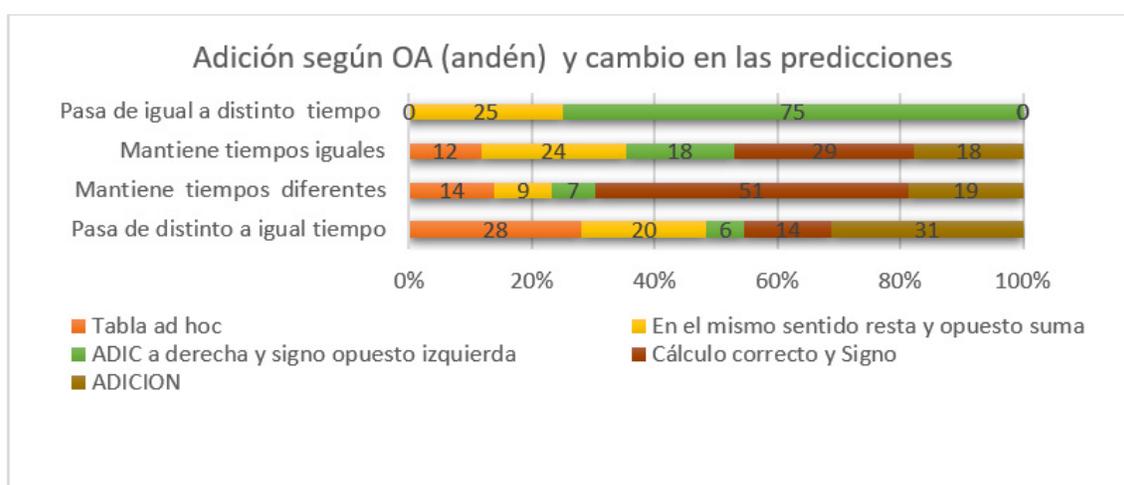


Figura 5. Adición según OA (andén) y cambio en las predicciones.

Fuente: elaboración propia.

## b. Categorías de análisis y resultados para S7

Antes de proponer la S7 se identificó que los estudiantes conocían que  $c$  es la velocidad límite, su valor en el vacío y que la propagación de  $c$  no es instantánea, incluso ofrecieron ejemplos apropiados. El profesor trató con la clase el segundo postulado y la invariancia de  $c$  respecto del movimiento de la fuente y luego propuso a los estudiantes la situación 7.

### ***C1<sub>7</sub>: simultaneidad de la luz para OV en la anticipación individual del ítem (a)***

En la tabla 8 se aprecia que casi todos los estudiantes coinciden en que OV verá llegar los haces de luz simultáneamente a las paredes del vagón.

Tabla 8. C1<sub>7</sub>: simultaneidad de la luz para OV.

Subcategoría	Estudiantes
C1M1 <sub>7</sub> : "Para OV los rayos de luz llegan a igual tiempo"	118
C1M2 <sub>7</sub> : No responde	10
Total	128

Fuente: elaboración propia.

### ***C2<sub>7</sub>: simultaneidad de la luz para OA, anticipación individual del ítem (a)***

C2M1<sub>7</sub>: "Para OA los rayos de luz llegan a igual tiempo".

*Tanto el OV tanto como el OA ven llegar los rayos de luz al mismo tiempo, ya que  $c$  es constante y no*

varía, en este caso, la velocidad del vagón no afecta el orden de llegada porque  $c$  es constante.

Para ambos observadores los rayos de luz llegan a igual tiempo, ya que el tren y  $c$  son constantes, por esto llegan los rayos a igual tiempo, también podemos decir que los rayos recorren la misma distancia entre el observador y la pared, para ambos observadores.

C2M2<sub>7</sub>: “Para OA los rayos de luz llegan en diferente tiempo”.

En la tabla 9 se aprecia que en el sistema de referencia de OA, más de dos tercios de los estudiantes anticipan la simultaneidad de los haces de luz.

**Tabla 9.** C2<sub>7</sub>: simultaneidad de la luz para OA ítem (a) individual.

Subcategoría	Estudiantes
C1M1 <sub>7</sub> : “Para OA los rayos de luz llegan en igual tiempo”	74
C1M2 <sub>7</sub> : “Para OA los rayos de luz llegan en diferente tiempo”	54
Total	128

Fuente: elaboración propia.

La figura 7 representa porcentualmente cómo la postura respecto a los proyectiles al finalizar la S6, afectaría predicción inicial en S7. El 61 % de los estudiantes que concluyeron la simultaneidad de los proyectiles en la S6, afirman la simultaneidad de la luz en S7 antes de la discusión grupal.

**C3<sub>7</sub>: simultaneidad de la luz según OA, respuesta individual al ítem (a) luego de la discusión grupal**

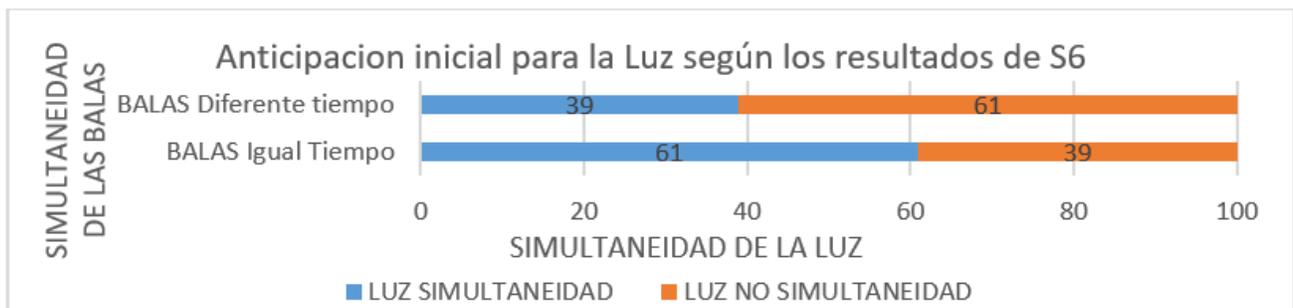
C3M1<sub>7</sub>: “Para OA, los rayos de luz llegarán juntos”.

C3M2<sub>7</sub>: “Para OA llega antes el rayo que salió hacia la izquierda pero la diferencia es muy pequeña”.

No van a llegar en tiempos iguales, pero no van a demorarse 5 segundos, sino un tiempo muy diminuto, porque las distancias, se supone que una va ser más larga que otra, pero como  $c$  es inmensa, y yo le puse que la distancia del centro a la pared va ser 10 metros, eso es diminuto, sería 0,0000 seg. Por ahí, entonces sí tiene razón, los tiempos van a ser diferentes pero muy diminutos.

Yo había dicho que los rayos de luz para el OA llegaban en distintos tiempos, porque ya no se compensaba con las velocidades una pared se iba alejando y la otra se iba acercando y la  $c$  siempre es constante, entonces va llegar una primero y la otra llega después.

Para el OA, los rayos de luz harán contacto en momentos diferentes, sin embargo, la diferencia es mínima e imperceptible. Para nuestro observador,  $c$  es constante, no puede variar, ni mermarse ni aumentarse pero a la velocidad del objeto a que va iluminar por decirlo así, que en este caso son las paredes del vagón, el de afuera ve que están en movimiento una se puede alejar una se puede acercar entonces aunque  $c$  no varía, el tiempo en el que se encuentran en sí puede variar ya que un objeto se puede acercar a la luz así no le afecte la velocidad.



**Figura 6.** Distribución de las modalidades de C3<sub>6</sub> en las de C2<sub>7</sub>.

Fuente: elaboración propia.

*C3M3*; dificultades para decidir si la diferencia de tiempo en OA existe realmente, o si es un problema de medición

La tabla 10 presenta el número de estudiantes en cada subcategoría. Luego de la discusión grupal, los estudiantes anticipan mayoritariamente la no simultaneidad de los haces de luz en el sistema de referencia de OA. Los invariantes operatorios vinculados a la no adición de  $c$  dirigen la toma de información. Según OA las paredes se mueven, como  $c$  es constante, entonces la luz llegará antes a la pared de atrás.

**Tabla 10.** C3; simultaneidad de la luz para OA, después de la discusión grupal del ítem (a).

Subcategoría	Estudiantes
C3M1; "Para OA, los rayos de luz llegarán juntos"	9
C3M2; "Llega antes el rayo que va a la izquierda pero la diferencia es muy pequeña"	108
C3M2; "No lo sé"	11
Total	128

Fuente: elaboración propia.

En la figura 7 se muestra porcentualmente cómo se distribuye la conclusión de la discusión grupal sobre la simultaneidad de la luz según la

anticipación inicial sobre el mismo asunto. Entre los 74 estudiantes que, en principio, sostuvieron la simultaneidad de la luz, el 80 % cambió su posición, y entre los 54 que anticiparon la pérdida de la simultaneidad, el 91 % conservó su idea. Es decir que, al cabo de la discusión grupal, casi todos consideran que en el sistema del andén la luz no llega simultáneamente a las paredes del vagón.

**C4**; segundo postulado al completar la tabla de S7

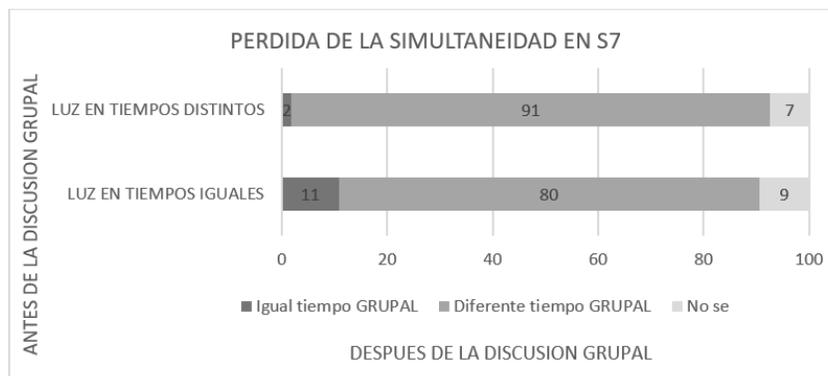
C4M1; no se adiciona a  $c$  la velocidad del vagón.

*La velocidad del vagón es cero para el OV, la velocidad del haz derecho es  $c$ , para el izquierdo es lo mismo, pero con signo contrario porque va hacia el otro lado. Para el OA, la velocidad es 20 y la velocidad de la luz es la misma que la del OV porque la velocidad de la luz nunca cambia.*

*Pusimos dos ejemplos con una velocidad distinta 23 m/s y 25 m/s para mostrar que sin importar que velocidad sea, la velocidad de la luz nunca va a cambiar porque siempre es constante.*

C4M1; no responde.

La tabla 11 muestra que la gran mayoría de los estudiantes utiliza el IO "no se suma ni se resta nada a  $c$ ".



**Figura 7.** Pérdida de la simultaneidad en S7.

Fuente: elaboración propia.

**Tabla 11.** C4<sub>7</sub>: segundo postulado al completar la tabla de S7.

Subcategoría	No. de estudiantes
C4M1 <sub>7</sub> : No se adiciona a c	109
C4M2 <sub>7</sub> : No responde	19
Total	128

Fuente: elaboración propia.

**C5<sub>7</sub>: calcular los tiempos de llegada de la luz con los valores de la tabla**

C5M1<sub>7</sub>: se realiza el cálculo correctamente y se obtienen tiempos diferentes. En la figura 8 se ilustra cómo los estudiantes realizan ese cálculo.

*Para el OA, no se le suma ni se le resta, solo la velocidad del vagón se considera, y eso es lo que marca la diferencia de porque los tiempos son distintos, aunque sea una diferencia muy mínima, casi imperceptible, ¡pero la diferencia está! Y es porque se considera la velocidad del vagón para el OA."*

*A partir de las ecuaciones se concluye que para OV los rayos de luz llegan al mismo tiempo y que para el OA llega una luz primero que otra, ya que este tiene en cuenta la velocidad del vagón, no como para*

*OV que está en reposo, a pesar de ser una mínima diferencia, una luz siempre llegará primero que otra.*

*La diferencia del OA es que él sí contempla la velocidad del vagón y a diferencia la situación anterior a c no se le suma ni se le resta la velocidad del vagón ya que esto es insignificante comparada a c y ya, y que esa velocidad no se puede variar.*

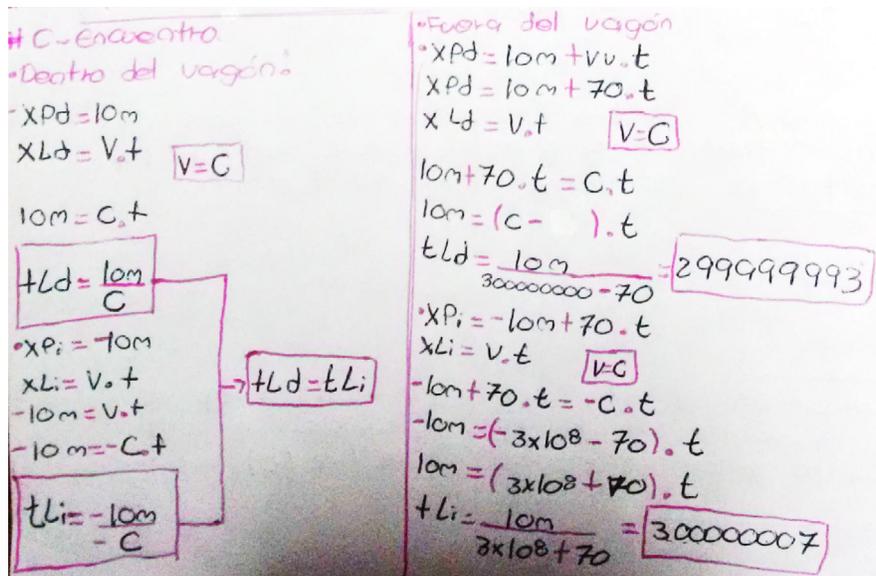
C5M2<sub>7</sub>: el cálculo es realizado correctamente, pero se añade un signo “-” para indicar el tiempo del haz que viaja hacia la izquierda.

C5M3<sub>7</sub>: no se puede realizar el encuentro o se lo hace de manera incorrecta.

La tabla 12 presenta los resultados de esta categoría. Alrededor de dos tercios de los estudiantes realizan el cálculo correctamente, considerando a los que agregan un signo negativo para indicar el tiempo a la izquierda, se llega al 75 %. El resto no puede realizar el cálculo.

**4. Discusión de resultados**

Los resultados evidencian que, en ambas situaciones, el sistema de referencia del vagón es más sencillo para los estudiantes, pues las respuestas obtenidas



**Figura 7.** Dualidad interactiva-relaciones CyT. (PT4.1VR).

Fuente: elaboración propia.

son mayoritariamente correctas. Destacamos que ellos usan apropiadamente el primer postulado y consideran que, según el observador dentro del vagón, el tren está en reposo. Este resultado se atribuye a la primera fase de la secuencia, que permite conceptualizar el primer postulado (OTERO, ARLEGO, PRODANOFF, 2015, 2016; OTERO, ARLEGO, 2016; OTERO, ARLEGO, MUÑOZ, 2016).

**Tabla 12.** C5<sub>7</sub>: pérdida de simultaneidad (OA). Cálculo de los tiempos para la luz.

Subcategoría	Estudiantes
C5M1 <sub>7</sub> : se realiza el cálculo bien y se obtienen tiempos diferentes	81
C5M2 <sub>7</sub> : se calcula bien y se obtienen tiempos diferentes, pero se agrega un signo “-”	18
C5M3 <sub>7</sub> : se realiza el cálculo mal	29
Total	128

**Fuente:** elaboración propia.

Contrariamente, en ambas situaciones, surgen dificultades en el sistema de referencia del andén donde se ubica OA. Sin embargo, la S6 ofrece más dificultades a los estudiantes que la S7. Esto se debería a que en S7 los estudiantes diferencian conocimientos ya aprendidos en la S6 y contemplan también el segundo postulado. Particularmente para OA, es de interés analizar los cambios en las predicciones de los estudiantes sobre el arribo de los proyectiles a las paredes. Cuando la mayoría de los estudiantes anticipa “que llegará primero la bola que salió hacia atrás”, los invariantes operatorios que controlan la toma de información y las inferencias son: “la bola y la pared de atrás van al encuentro” y “en contra se suma y a favor se resta”. Es decir, como “la bola disparada hacia atrás y la pared izquierda del vagón”, van una al encuentro de la otra, entonces dicha bala “sería más rápida que la disparada hacia adelante”, pues esta persigue a la pared. La discusión grupal los estudiantes que desde el inicio consideran que las bolas llegarán juntas, así como la puesta en común a toda la clase, producen otros invariantes. Los que cambian y afirman que

las bolas llegan simultáneamente, advierten que es preciso considerar que las balas tienen velocidades diferentes al adicionar la velocidad del vagón, según OA (andén). Así, algunos explican que los tiempos resultan iguales porque habría una *compensación* –la bala hacia adelante tiene agregada la velocidad del vagón, pero esto se compensa porque la pared de adelante aleja de ella con la misma velocidad– (véanse las transcripciones para la categoría C3 en la situación 6).

Casi todos los estudiantes completaron la tabla 1 correctamente con las velocidades según OV, mientras utilizaron varias formas de hacerlo para OA. Tales maneras de calcular las velocidades de las bolas indicarían distintos progresos en la conceptualización de la adición de velocidades galileana. Es importante notar que el IO “en contra se suma y a favor se resta” corresponde a un caso habitual de la adición de velocidades en la vida cotidiana, sobre el que los estudiantes acumulan mucha experiencia, cuando conducen su bicicleta o viajan en automóvil o en el metro, y se preguntan por la velocidad de otros móviles. Pero en la situación 6, ellos deben hacer a un lado esa experiencia, pues se pregunta por la velocidad de un objeto lanzado desde un sistema en movimiento. La tercera modalidad de la categoría C5<sub>6</sub> (véase la tabla 9 y la figura 2) identifica un primer paso en la conceptualización de la adición, siendo la más frecuente. El cálculo se utiliza el IO “en contra se resta y a favor se suma, y luego se coloca el signo”. La adición de velocidades es fundamental para comprender físicamente por qué las balas en el sistema de referencia de OA llegarían juntas. En este proceso, la tarea de llenar la tabla es muy importante para promover el análisis sobre cómo calcular la velocidad de cada bola. Puesto que las categorías se construyen a partir de los protocolos individuales, es decir de lo que cada estudiante decidió escribir para entregar al finalizar la clase, es posible inferir que ahora la mayoría dejó de utilizar el teorema “en contra se suma y a favor se resta”.

Al analizar la relación entre los estudiantes que cambiaron o no su anticipación sobre el arribo de

los proyectiles y la adición de velocidades propuesta en el ítem (b), se construyó una variable que tiene las cuatro posibilidades, según se aprecia en la figura 5 y cruzamos esta categoría con la adición de velocidades. El análisis muestra que hay una asociación estadísticamente significativa entre ambas variables. Es decir, la figura 6 muestra que para el caso de los proyectiles, la adición de velocidades desde sus variantes más primitivas hasta la correcta, está relacionada con el cambio desde no simultaneidad a simultaneidad, o con la conservación de esta idea. La inestabilidad y el carácter contingente y oportunista de la conceptualización se reflejan en que aun los estudiantes que persisten en la no simultaneidad de los proyectiles en el ítem (a), luego comienzan a adicionar velocidades en forma apropiada al completar la tabla 1. Remarcamos que este ítem solicita explicitar numéricamente la adición de velocidades galileana y que, históricamente, su formulación matemática recién fue realizada por Newton, lo cual revela las dificultades conceptuales que entraña.

Con respecto al cálculo de los tiempos para OA, los estudiantes no lograron realizarlo solos, ya que ignoraban cómo plantear el problema de encuentro. Esto fue realizado con el profesor, varias veces.

En la situación 7, observamos que en la primera anticipación individual, la mayoría de los estudiantes predice incorrectamente la simultaneidad del arribo de los haces de luz, porque inicialmente se basan en lo ocurrido con los proyectiles (figura 7). Sin embargo, luego de la discusión grupal y la puesta en común, se produce un cambio en lo que los estudiantes afirman para el observador en el andén. Muchos estudiantes que afirmaban la simultaneidad de la llegada de la luz a las paredes afirman ahora la pérdida de la simultaneidad, tal como se aprecia en la figura 7. Este cambio obedecería a que los estudiantes comienzan a aplicar el segundo postulado,  $c$  es la misma en ambos sistemas, y para el observador en el andén, las paredes del vagón se acercan o alejan de la luz respectivamente.

La manera en que los estudiantes calculan las velocidades en el ítem (b) de la situación 7, muestra

que casi todos aplican el segundo postulado, como muestra la tabla 11. Destacamos que la mayoría de los estudiantes pueden calcular el encuentro por sí mismos, y constatar la diferencia de tiempo y su pequeño valor, según se aprecia en la tabla 12. Destacamos que, al no haber adición para  $c$ , las ecuaciones de movimiento son matemáticamente sencillas y los estudiantes repiten el cálculo del encuentro que aprendieron en la situación 6.

## 5. Conclusiones

Los resultados evidencian la relevancia de los invariantes operatorios al seleccionar información, las inferencias que realizan los estudiantes y la complejidad del proceso de conceptualización. El análisis de la S6 muestra resultados prometedores sobre cómo los estudiantes pueden llegar a utilizar apropiadamente la adición de velocidades. En este sentido, sería importante realizar este tipo de tareas en la enseñanza de la cinemática clásica, considerando casos de la adición que no son habituales en la vida cotidiana, pero que podrían tratarse si se proponen las situaciones adecuadas. La situación 6 permite tomar conciencia de que el segundo postulado elimina toda posibilidad de *compensación* para la velocidad de la luz. Es decir que la pérdida de simultaneidad no se debería a un problema de medición, sino al hecho de que el haz izquierdo recorre una distancia menor que el derecho –con velocidad  $c$ – incidiendo antes en la pared izquierda del vagón. Los resultados sugieren que las situaciones dirigidas a usar, explicitar y tomar conciencia de los invariantes operatorios vinculados a la adición de velocidades galileana colaboran en la comprensión de la relatividad de la simultaneidad y permiten cuestionar el carácter absoluto del tiempo en los primeros años de la secundaria básica. Por otro lado, se muestra la importancia de cuestionar el tratamiento de la cinemática clásica y de la relatividad especial realizada por los textos de física elemental para la secundaria y la universidad, en los cuales, la relatividad del movimiento y la adición de velocidades clásica son superficialmente tratados

ya que se privilegia la lógica disciplinar en lugar de considerar la lógica del aprendizaje de los estudiantes, como sería esperable de textos didácticos.

## 6. Referencias Bibliográficas

- ALONSO, M.; FINN E.J. **Física**. Editorial Addison-Wesley Interamericana. Massachusetts, EE.UU. 1995.
- ANGOTTI, J.A. *et al.* Teaching relativity with a different philosophy. **American Journal of Physics**. College Park. n. 46, pp.1258-1262. 1978.
- ARLEGO, M.; OTERO, M.R. Teaching basic special relativity in high school: the role of classical kinematics. **International Journal of Physics and Chemistry Education**. Bremen. v. 9, n. 1, pp. 9-12. 2017.
- DIMITRIADI, K.; HALKIA, K. Secondary Students' Understanding of Basic Ideas of Special Relativity. **International Journal of Science Education**. Londres. v. 34, n. 16, pp. 2565-2582. 2012. <http://dx.doi.org/10.1080/09500693.2012.705048>. Visitado en: junio de 2018.
- DIMITRIADI, K.; HALKIA, K.; SKORDOULIS, C. An attempt to teach the theory of special relativity to students of upper secondary education. In: ÇAKMAKCI, G.; TASAR, M.F. (eds.), **Proceedings of ESERA 2009 "Contemporary science education research: Learning and assessment"**. Ankara: Turquía. 2009. pp. 183-187.
- GÜRTLER, L.; HUBER, G.L. Modos de pensar y estrategias de la investigación cualitativa. **Liberrabit**, Lima, Perú, v. 13, n. 13, pp. 37-52. 2007.
- HEWSON, P.A. A case study of conceptual change in special relativity: the influence of prior knowledge in learning. **European Journal of Science Education**, Londres. n. 4, pp. 61-76. 1982.
- HOSSON, C., KERMEN, I., PARIZZOT, E. Exploring students' understanding of reference frames and time in Galilean and special relativity. **European Journal of Physics**, Londres. n. 31, pp. 1527-1538. 2010. <http://dx.doi.org/10.1088/0143-0807/31/6/017>
- MERMIN, N.D. **It's about time: understanding Einstein's relativity**. Princeton University Press. Nueva Jersey. EE. UU. 2005.
- OTERO, M.R.; ARLEGO, M. **Secuencia para enseñar la Teoría Especial de la Relatividad en la Escuela Secundaria**. Ed. UNICEN. Tandil, Argentina. 2016.
- OTERO, M.R., ARLEGO, M.; MUÑOZ, E. Enseñanza de la relatividad especial básica en la escuela secundaria: una secuencia didáctica basada en la teoría de los campos conceptuales. In: ACTAS DEL II CONGRESO INTERNACIONAL DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LA MATEMÁTICA Y III ENCUENTRO NACIONAL DE ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA, pp. 428-434. 2016.
- OTERO, M.R., ARLEGO, M.; MUÑOZ, E. Relativity of the simultaneity in high school: an analysis based on the Theory of the Conceptual Fields. In TEACHING/LEARNING PHYSICS INTEGRATING RESEARCH INTO PRACTICE *GIREP MPTL*, San Sebastián, España. 2018.
- OTERO, M.R.; ARLEGO, M.; PRODANOFF, F. Design, analysis and reformulation of a didactic sequence for teaching the Special Theory of Relativity in high school. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, San Pablo. v. 37, n. 3, pp. 3401. 2015. <http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11173731891>. Visitado en: agosto de 2017.
- OTERO, M.R., ARLEGO, M.; PRODANOFF, F. Teaching the basic concepts of the Special Relativity in the secondary school in the framework of the Theory of Conceptual Fields of Vergnaud. **Il Nuovo Cimento**, Bolonia. 38C. 2016. <http://dx.doi.org/10.1393/ncc/i2015-15108-0>.
- OTERO, M.R. *et al.* **La teoría de los campos conceptuales y la conceptualización en el aula de Matemática y Física**. Editorial Dunken. Buenos Aires, Argentina. 2014.
- PANSE, S.; RAMADAS, J.; KUMAR, A. Alternative conceptions in Galilean Relativity: Frames of references. **International Journal of Science Education**, Londres. n. 16, pp. 63-82. 1994.

- PÉREZ, H.; SOLBES, J. Algunos problemas en la enseñanza de la relatividad. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona. v. 21, n. 1, pp. 135-146. 2003.
- PÉREZ, H.; SOLBES, J. Una propuesta sobre enseñanza de la relatividad en el bachillerato como motivación para el aprendizaje de la física. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona. v. 24, n. 2, pp. 269-279. 2006.
- PIETROCOLA, M.; ZYLBERSZTAJN, A. The use of the principle of relativity in the interpretation of phenomena by undergraduate students. **International Journal of Science Education**, Londres. v. 21, n. 3, pp. 261-276. 1999.
- POSNER, G. *et al.* Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. **Science Education**, Nueva York. n. 66, pp. 211-227. 1982.
- RESNICK, R.; HALLIDAY, D.; KRANE, K. **Física. Parte II**. C.E.C.S.A. México. 2009.
- SALTIEL, E.; MALGRANGE, J. Spontaneous' ways of reasoning in elementary kinematics. **European Journal of Physics**, Londres. n. 1, pp. 73-80. 1980.
- SCHERR, R.E. **An investigation of student understanding of basic concepts in special relativity**. Tesis Doctoral, University of Washington, Washington, EE. UU. 2001. Recuperado de <https://digital.lib.washington.edu/researchworks/handle/1773/9681>
- SCHERR, R.E. Modeling student thinking: An example from special relativity. **American Journal of Physics**, College Park. v. 75, n. 3, pp. 272-280. 2007. DOI:10.1119/1.2410013
- SCHERR, R.E.; SHAFFER, P.S.; VOKOS, S. Student understanding of time in special relativity: Simultaneity and reference frames. **American Journal of Physics, Physics Education Research Supplement**, College Park. v. 69, n. S1, pp. 24-35. 2001.
- SCHERR, R.E.; SCHAFFER, P.S.; VOKOS, S. The challenge of changing deeply held student beliefs about the relativity of simultaneity. **American Journal of Physics**, College Park. n. 70, pp. 1238-1248. 2002.
- SERWAY, R.A.; JEWETT, J.W. **Física para ciencias e ingeniería con Física Moderna**. 7a. ed. Cengage Learning Editores. México D.F. 2009.
- TIPLER, P.; MOSCA, G. **Física para la Ciencia y la Tecnología. Física Moderna. Mecánica cuántica, relatividad y estructura de la materia**. Barcelona, España. Reverté. 2012.
- VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble. v. 10, n. 2/3, pp. 133-170. 1990.
- VERGNAUD, G. Pourquoi la théorie des champs conceptuels? **Infancia y Aprendizaje**. Somerville. v. 36, n. 2, pp. 131-161. 2013.
- VILLANI, A.; ARRUDA, S. Special Theory of Relativity, Conceptual Change and History of Science. **Science & Education**, Berlin. v. 7, n. 2, pp. 85-100. 1998.
- VILLANI, A.; PACCA, J. Students' spontaneous ideas about the speed of light. **International Journal of Science Education**, Londres. n. 9, pp. 55-66. 1987. [www.sbfisica.org.br](http://www.sbfisica.org.br)