CURSO DE NIVELACIÓN **MATEMÁTICA**

NOTAS TEÓRICAS
GUÍA DE ACTIVIDADES

ediUNS

SERIE DOCENCIA
COLECCIÓN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

Bel, Andrea L.
Notas teóricas: guía de actividades / Andrea L. Bel; Jessica A. Del Punta. -1ª ed. - Bahía Blanca: Editorial de la Universidad Nacional del Sur. Ediuns, 2017.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-655-170-0

1. Ciencias Naturales. I. Del Punta, Jessica A. II. Título
CDD 580

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Editorial de la Universidad Nacional del Sur
Santiago del Estero 639 - B8000HZK - Bahía Blanca - Argentina
Tel.: 54-0291-4595173 / Fax: 54-0291-4562499
www.ediuns.uns.edu.ar | ediuns@uns.edu.ar

Libro Universitario Argentino

Red de Editoriales de Universidades Nacionales

Queda hecho el depósito que establece la Ley n.° 11723.
Bahía Blanca, Argentina, noviembre de 2017.

Prólogo

El ingreso y permanencia en la Universidad enfrenta al estudiante a cambios sustanciales en su vida. Los logros de cada estudiante dependerán, en buena medida, de su esfuerzo y dedicación.

El Curso de Nivelación de Matemática tiene como objetivo acompañar al alumno a iniciar este camino, no solo en cuanto a los contenidos académicos sino en su adaptación a la vida universitaria. Los docentes brindaremos el apoyo necesario para transitar esta etapa sabiendo que tanto docentes como alumnos debemos participar seria, crítica y activamente en esta propuesta.

El material que compone estas notas ha sido elaborado por docentes del Departamento de Matemática para dar a todos los estudiantes la posibilidad de revisar conceptos y habilidades de esta ciencia adquiridos en el nivel medio, y los cuales se consideran básicos para poder cursar, sin mayores dificultades, las primeras materias vinculadas a la Matemática en la carrera elegida.

Pretendemos también que estas notas sean un primer paso hacia la formalidad matemática. Es por esto que, sin ser muy rigurosos con las definiciones y demostraciones, presentaremos los diferentes conceptos combinando el lenguaje coloquial, al que los alumnos están habituados, con el lenguaje formal y simbólico de la matemática.

Octubre 2017

Agradecimientos

El Curso de Nivelación se dicta desde hace varios años y en cada oportunidad distintos docentes de este departamento colaboraron con la elaboración de material para su dictado. Por eso queremos agradecer a todos y cada uno de los docentes que fueron parte de este proceso que nos lleva hoy a publicar estas notas.

Coordinador General

Rodolfo E. Salthú

Secretario Académico

Departamento de Matemática

Universidad Nacional del Sur

Redacción y Compaginación Final

Andrea L. Bel

Jessica A. Del Punta

Contenido

Consideraciones generales

A lo largo de cada una de las unidades realizamos tanto una revisión teórica de los conceptos seleccionados y sus propiedades, como también algunas preguntas que invitan a reflexionar sobre los contenidos desarrollados. Cada unidad finaliza con una serie de actividades y problemas para aplicar y repensar lo estudiado. Una vez desarrolladas todas las unidades teórico-prácticas, presentamos un apéndice destinado a aquellos que deseen profundizar sobre algunos de los conceptos presentados. Finalizamos estas notas con las respuestas a todas las preguntas y actividades planteadas.

Mencionamos a continuación algunos conceptos y observaciones generales que irán surgiendo de forma particular en las distintas unidades de estas notas.

Demostraciones y contraejemplos

En matemática, cada vez que enunciamos una nueva propiedad de los conceptos que estamos estudiando debemos demostrarla (probarla), la demostración es la que le da validez a la propiedad. Para demostrar que una afirmación es verdadera no alcanza con mostrar algunos ejemplos que la cumplan, hay que probarla para todos los casos posibles buscando alguna estrategia de demostración. En estas notas daremos las demostraciones de algunas de las propiedades que enunciemos, aquellas que además nos permitan mostrar de manera sencilla las formas más habituales de demostración en matemática.

Dos formas de probar una afirmación son las siguientes. Una opción es realizar una **demostración directa**, a partir de algo conocido (hipótesis) y aplicando propiedades que son verdaderas (es decir, que ya fueron demostradas) llegar a verificar la nueva propiedad. Esta estrategia es la que se usa en la **Unidad 1** cuando, luego de definir la distancia entre dos números reales, se demuestra una de sus propiedades. Otra forma muy común de demostración, es la que se conoce como **demostración por el absurdo**. En este caso se supone que la afirmación que queremos probar es falsa y luego, aplicando propiedades ya conocidas, obtenemos una afirmación absurda. De esta forma se concluye que la afirmación inicial no podía ser falsa. Un ejemplo de demostración por el absurdo se presenta en la **Unidad 2**, en la sección en que se estudian las inecuaciones. Allí esta técnica es utilizada para demostrar una propiedad de las desigualdades.

Por otro lado, cuando una afirmación es falsa, es suficiente mostrar un ejemplo para la cual no se verifique. A estos ejemplos que permiten refutar una afirmación se los llama **contraejemplos**. No siempre es posible encontrar un contraejemplo, pero en la mayoría de los casos que se estudian en estas notas se podrá recurrir a esta estrategia. En la **Unidad 1**, luego de presentar las reglas de signo para la multiplicación, se utilizan estas ideas para mostrar que no existe una regla de signo para la suma.

Resolución de problemas y unidades de medida

En general al modelar problemas los distintos valores involucrados (coeficientes y variables) tienen asociadas unidades de medida. En estas notas no vamos a estudiar este aspecto de manera rigurosa, solo indicaremos en algunos casos las unidades de medida al inicio del problema y al momento de dar las respuestas a las preguntas planteadas.

También, al trabajar con figuras geométricas en el plano cartesiano (como por ejemplo, el triángulo que determinan tres puntos dados no alineados) podemos estar interesados en calcular su área o su perímetro para lo cual necesitamos una unidad de medida. Dado que en el plano cartesiano no tenemos una unidad de medida particular, cuando la necesitemos vamos a usar una **unidad de medida genérica** la cual indicamos **u.m.**

Bibliografía y textos de apoyo

Los siguientes libros pueden ser útiles como material de consulta de las distintas unidades. Estos ejemplares se encuentran en la **Biblioteca Central** de la Universidad Nacional del Sur. Algunos ejemplos y ejercicios de estas notas están inspirados en otros que aparecen en esta bibliografía.

- ⋄ STEWART, J. y REDLIN, L. (2007). *Precálculo: matemáticas para el cálculo* (5ta ed.). México D. F., México: Cengage Learning.

- ⋄ LARSON, R. (2012). *Precálculo* (8va ed.). México D. F., México: Cengage Learning.

- ⋄ FAIRES, J. D. y DEFRANZA, J. (2001). *Precálculo* (2da ed.) México D. F., México: Thomson Learning.

Además, sugerimos consultar también las notas y ejercicios de los cursos de nivelación de años anteriores, así como sus exámenes parciales y finales. Varias de las actividades propuestas en estas notas fueron tomadas de la "Guía de Ejercicios" del Curso de Nivelación 2015. Este material se encuentra publicado en la página web del **Departamento de Matemática** (www.matematica.uns.edu.ar) en la sección **Ingresantes** del **Menú Principal**.

Notación

A continuación presentamos algunos de los símbolos matemáticos usados a lo largo de estas notas, indicando su significado. La definición, interpretación y uso de cada uno de ellos se explicará más detalladamente a medida que los mismos sean utilizados a lo largo del texto.

Conjuntos numéricos

$\mathbb{N}$	conjunto de los números naturales
$\mathbb{Z}$	conjunto de los números enteros
$\mathbb{Q}$	conjunto de los números racionales
$\mathbb{I}$	conjunto de los números irracionales
$\mathbb{R}$	conjunto de los números reales
$\mathbb{R}^+$	conjunto de los números reales positivos
$\mathbb{R}^-$	conjunto de los números reales negativos
$\mathbb{R}^2$	plano cartesiano; conjunto de los pares ordenados (x, y), donde x, y son números reales.

Relaciones entre conjuntos numéricos y sus elementos

$>$	mayor que
$\geqslant$	mayor o igual que
$<$	menor que
$\leqslant$	menor o igual que
$\in$	pertenece
$\notin$	no pertenece
$\cup$	unión
$\cap$	intersección
$:$	tal que
$\emptyset$	conjunto vacío

Operaciones y funciones

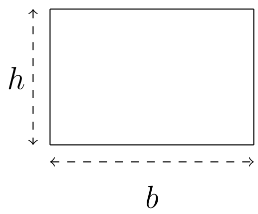
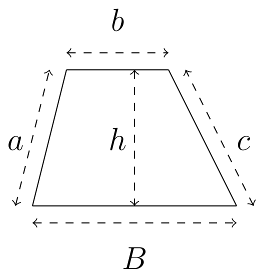
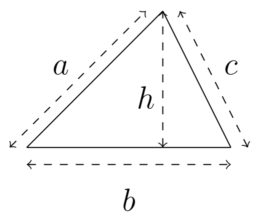
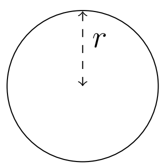
$\simeq$	aproximado
$\lvert\ \rvert$	según el contexto, estas barras pueden indicar: $\lvert a\rvert$ valor absoluto del número a $\lvert\overline{AB}\rvert$ medida del segmento $\overline{AB}$
$d(a,b)$	distancia entre a y b
Δ	discriminante de la ecuación cuadrática
$f : A \to B$	función f definida de A en B, se lee "f de A en B"
$f(a)$	función f evaluada en el elemento a, se lee "f en a"
$\mathrm{Dom}\,(f)$	dominio de la función f
$\mathrm{Im}\,(f)$	imagen de la función f
$f \circ g$	composición entre las funciones f y g, se lee "f compuesta con g"

Otros símbolos

(a,b)	dependiendo el contexto, esta notación puede indicar un intervalo o un punto en el plano, se aclara debidamente en cada situación
$\Longrightarrow$	implica
$\Longleftrightarrow$	si, y solo si
u.m.	unidad de medida

Fórmulas geométricas

A continuación recordamos las fórmulas de área y perímetro de algunas figuras geométricas, que luego utilizaremos a lo largo de estas notas.

Figura geométrica		**Área** (A) **y perímetro** (P)
Rectángulo		$A = b \cdot h,$ $P = 2b + 2h.$
Trapecio		$A = \dfrac{(B+b)\cdot h}{2},$ $P = B + b + a + c.$
Triángulo		$A = \dfrac{b \cdot h}{2},$ $P = a + b + c\ .$
Circunferencia - Círculo		$A = \pi r^2,$ $P = 2\pi r.$

1 Los números reales

Síntesis de la unidad

En esta unidad estudiaremos los siguientes conceptos vinculados al conjunto de los números reales que indicamos con el símbolo $\mathbb{R}$.

1. Las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación, y las propiedades que las caracterizan.
2. La representación de $\mathbb{R}$ en la recta numérica y la noción de valor absoluto.
3. La relación de orden entre elementos de $\mathbb{R}$.
4. Los subconjuntos del conjunto de los números reales: los números naturales ($\mathbb{N}$), los enteros ($\mathbb{Z}$), los racionales ($\mathbb{Q}$) y los irracionales ($\mathbb{I}$), y algunas de sus características.
5. La racionalización de algunos cocientes en los cuales aparecen raíces cuadradas en el denominador.

1.1 Operaciones elementales. Propiedades

Con la letra $\mathbb{R}$ representamos al conjunto de los números reales. Para indicar que a es un número real, esto es, que a pertenece al conjunto de los números reales, escribimos $a \in \mathbb{R}$.

Sobre el conjunto $\mathbb{R}$ se definen dos operaciones elementales: la **suma** ($+$) y la **multiplicación** o producto ($\cdot$). La suma y el producto de dos números reales es un número real. Además se verifican las siguientes **propiedades**:

(1) *Asociativa.* Si a, b y $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$(a+b)+c = a+(b+c) \quad \text{y} \quad (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c).$$

(2) *Conmutativa.* Si a y $b \in \mathbb{R}$, entonces

$$a+b = b+a \quad \text{y} \quad a\cdot b = b\cdot a.$$

(3) *Distributiva.* Si a, b y $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c \quad \text{y} \quad c\cdot(a+b) = c\cdot a + c\cdot b.$$

(4) *Elemento neutro.* Existen dos números reales distintos, el 0 y el 1, tales que para cualquier $a \in \mathbb{R}$ se verifica

$$a+0 = a \ \ \text{(neutro aditivo)},$$
$$a\cdot 1 = a \ \ \text{(neutro multiplicativo)}.$$

(5) *Elemento opuesto.* Para cada $a \in \mathbb{R}$ existe un único número real llamado **opuesto** (simétrico) de a, y lo escribimos $-a$, de forma que la suma de estos números es el neutro aditivo. Esto es,

$$a+(-a) = 0 \ \ \text{(opuesto)}.$$

(6) *Elemento inverso.* Para cada número real $a \neq 0$ existe un único número real llamado **inverso** de a, que expresamos a^{-1}, de forma que el producto de estos números es el neutro multiplicativo. Esto es,

$$a \cdot a^{-1} = 1 \quad \text{(inverso)}.$$

Observación 1.1.1. Una particularidad del neutro aditivo 0 es que cualquiera sea $a \in \mathbb{R}$ se verifica $a \cdot 0 = 0$. Más aún, el producto de dos números reales es nulo si, y solo si, uno de ellos es 0. Simbólicamente:

$$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \ \text{ ó } \ b = 0.$$

Si bien definimos solo la suma y la multiplicación de dos números reales, también podemos hablar de **resta** $(-)$ y **división** o cociente $(:)$. La resta no es otra cosa que sumar el opuesto de un número. De forma similar, la división es la multiplicación por un inverso. De esta forma,

$$a - b = a + (-b) \qquad \text{y} \qquad a : b = a \cdot b^{-1},$$

y esta última operación es válida siempre que $b \neq 0$. A menudo escribimos

$$a : b = \frac{a}{b},$$

de forma que para el caso particular $a = 1$ resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} &= 1 : b \\ &= 1 \cdot b^{-1} \quad \text{(definición de división)} \\ &= b^{-1} \qquad \text{(1 es elemento neutro multiplicativo)}. \end{aligned}$$

Así, por ejemplo,

$$5,4 - 3 = 5,4 + (-3) = 2,4 \qquad \text{y} \qquad \sqrt{2} : 5 = \sqrt{2} \cdot 5^{-1} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{\sqrt{2}}{5}.$$

Para cualquier par de número reales a, b, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$, tenemos

$$(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1} \qquad \text{y} \qquad (a : b)^{-1} = b : a.$$

Otra propiedad muy utilizada es

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b},$$

válida para cualquier terna de números reales a, b, c, siempre que $b \neq 0$ y $c \neq 0$. Esto es consecuencia inmediata del hecho de que $x \cdot 1 = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. En efecto,

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}.$$

Esta propiedad es la que permite, por ejemplo, simplificar fracciones. Así

$$\frac{14}{21} = \frac{2 \cdot \cancel{7}}{3 \cdot \cancel{7}} = \frac{2}{3}.$$

También esta propiedad es la que usamos al racionalizar expresiones como las que estudiaremos en la **Sección 1.5**.

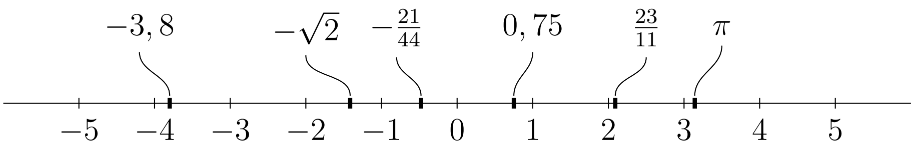
En la **Sección 1.3** presentamos más detalles y ejemplos de operaciones con fracciones, y algunas otras propiedades de los números reales serán introducidas en la **Sección 2.3** al estudiar la resolución de ecuaciones. Además, en el **Apéndice** pueden encontrarse propiedades que completan las aquí presentadas y son de utilidad en la resolución de operaciones combinadas.

1.2 La recta numérica. Valor absoluto

Representamos gráficamente el conjunto $\mathbb{R}$ en una **recta numérica**. A cada número real le corresponde un único punto sobre la recta y a cada punto en la recta numérica se le asocia un único número real. Además los números reales están ordenados. Los símbolos $<$ (menor), $>$ (mayor), $\leqslant$ (menor o igual) y $\geqslant$ (mayor o igual) describen el orden entre los elementos de $\mathbb{R}$. Para cualquier par de números $a, b \in \mathbb{R}$ se verifica una, y solo una, de las siguientes relaciones

$$a = b, \qquad a < b, \qquad a > b.$$

En el siguiente gráfico se muestra la ubicación de algunos números reales en la recta.



Vemos, por ejemplo, en este gráfico que

$$-3,8 \leqslant -\sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad \pi > \frac{23}{11}.$$

Presentaremos algunas propiedades de las desigualdades cuando estudiemos inecuaciones en la **Sección 2.5**.

El orden en $\mathbb{R}$ nos permite distinguir entre el conjunto de **números positivos** (mayores que 0), que indicamos $\mathbb{R}^+$, y el conjunto de **números negativos** (menores que 0), que indicamos $\mathbb{R}^-$. Simbólicamente,

$$\mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\} \qquad \text{y} \qquad \mathbb{R}^- = \{a \in \mathbb{R} : a < 0\}.$$

El primero de estos conjuntos se lee

"*$\mathbb{R}^+$ es el conjunto de los números a en $\mathbb{R}$ tales que a es mayor que cero*".

Por ejemplo,

$$-3,8 \in \mathbb{R}^-, \quad -\sqrt{2} \in \mathbb{R}^-, \quad 0,75 \in \mathbb{R}^+ \quad \text{y} \quad \pi \in \mathbb{R}^+.$$

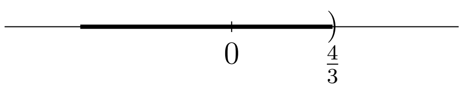
Observación 1.2.1. Notemos que si $a \in \mathbb{R}$ es positivo (es decir, $a > 0$) entonces su opuesto $-a$ es negativo (esto es, $-a < 0$). De la misma forma, si $a < 0$, entonces $-a > 0$. Simbólicamente,

$$\begin{aligned} a \in \mathbb{R}^+ &\implies -a \in \mathbb{R}^-, \\ a \in \mathbb{R}^- &\implies -a \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.2

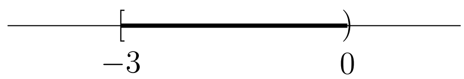
Representamos en la recta numérica el conjunto de todos los números reales menores que $\frac{4}{3}$. Esto es,

$$A = \left\{a \in \mathbb{R} : a < \frac{4}{3}\right\}$$



Usamos el paréntesis en el extremo $\frac{4}{3}$ para indicar que ese número no pertenece al conjunto A. Ahora, representamos el conjunto de los números reales negativos mayores o iguales que -3.

$$B = \left\{b \in \mathbb{R}^- : b \geqslant -3\right\}$$

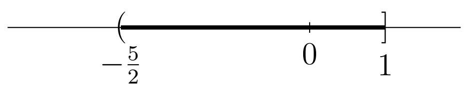


Usamos un corchete en el extremo -3 para indicar que este número pertenece al conjunto B y un paréntesis en el extremo 0 ya que $0 \notin B$. Observemos que este conjunto también puede escribirse de la forma

$$B = \{b \in \mathbb{R} : -3 \leqslant b < 0\}.$$

Por último, representamos el conjunto de todos los números reales mayores que $-\frac{5}{2}$ y menores o iguales que 1.

$$C = \left\{c \in \mathbb{R} : -\frac{5}{2} < b \leqslant 1\right\}$$



En este caso combinamos paréntesis y corchetes para indicar que $-\frac{5}{2} \notin C$ y $1 \in C$.

Profundizaremos sobre estas representaciones de subconjuntos de $\mathbb{R}$ en la **Sección 2.5** cuando estudiemos inecuaciones.

A partir de la distinción entre números reales positivos y negativos tenemos las siguientes **reglas de signo** para la multiplicación (y división).

$$(+)\cdot(+) = (+), \qquad (+)\cdot(-) = (-),$$

$$(-)\cdot(-) = (+), \qquad (-)\cdot(+) = (-).$$

De esta forma calculamos, por ejemplo,

$$(-30) : 6 = -5, \qquad -\frac{2}{5}\cdot(-7) = \frac{14}{5}.$$

Podríamos preguntarnos si existe una regla de signo para la suma. Es fácil observar que la suma de dos números positivos es siempre un número positivo, y la suma de dos números negativos es siempre un número negativo. Esto es,

$$\begin{aligned} a > 0 \ \text{ y } \ b > 0 \quad &\Longrightarrow \quad a + b > 0, \\ a < 0 \ \text{ y } \ b < 0 \quad &\Longrightarrow \quad a + b < 0. \end{aligned}$$

Ahora, ¿podemos afirmar que la suma de un número positivo y un número negativo es siempre un número negativo? La respuesta es no. En otras palabras, la afirmación es falsa. Como mencionamos en las **Consideraciones generales**, para mostrar que una afirmación es falsa alcanza con encontrar un **contraejemplo**. En este caso tomemos un valor de $a > 0$, por ejemplo, $a = 3$ y un valor de $b < 0$, por ejemplo, $b = -1$. Con estos valores obtenemos

$$\left.\begin{array}{ll} a = 3 & \text{(positivo)} \\ b = -1 & \text{(negativo)} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad a + b = 3 + (-1) = 2 \text{ (positivo)}.$$

Mostramos así, con un contraejemplo, que la suma de un número positivo y uno negativo no es siempre un número negativo. De la misma forma podemos mostrar que la suma de un número positivo y uno negativo no siempre es un número positivo. Podemos considerar, por ejemplo, un valor de $a > 0$, en particular $a = 3$, y un valor $b < 0$, por ejemplo $b = -9$, de forma que

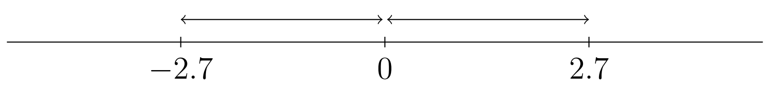
$$\left.\begin{array}{ll} a = 3 & \text{(positivo)} \\ b = -9 & \text{(negativo)} \end{array}\right\} \implies a + b = 3 + (-9) = -6 \text{ (negativo)}.$$

De estas observaciones concluimos que no existe una regla de signo para la suma.

Otro concepto relacionado con los números reales es el de valor absoluto. El **valor absoluto** de un número real se asocia con la distancia de dicho número al 0. Al valor absoluto de $a \in \mathbb{R}$ lo escribimos $|a|$. Así,

$$|2,7| = 2,7 \quad \text{y también} \quad |-2,7| = 2,7.$$

Gráficamente se observa que la distancia de ambos números a 0 es la misma.



La definición formal de valor absoluto está dada por

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si} \quad a \geqslant 0, \\ -a, & \text{si} \quad a < 0. \end{cases}$$

Para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$ se verifican las siguientes **propiedades**:

(1) $|a| \geqslant 0$,

(2) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$,

(3) $|-a| = |a|$.

Además, el único número real cuyo valor absoluto es cero, es el cero. Simbólicamente se escribe

$$|a| = 0 \iff a = 0,$$

y se lee: *El valor absoluto de a es igual a cero si, y solo si a es cero.*

Ejemplo 1.2.3

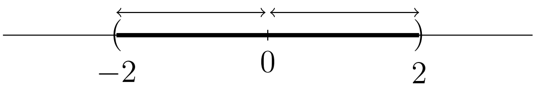
Veamos cómo representar en la recta numérica todos los números reales cuyo valor absoluto es menor que 2. Al conjunto de estos números, que vamos a llamar A, lo podemos escribir como

$$A = \{a \in \mathbb{R} : |a| < 2\}.$$

Los números a que están en A deben cumplir dos condiciones:

- ⋄ Ser menores que 2. Es decir, $a < 2$.
- ⋄ Ser mayores que -2. En decir, $a > -2$.

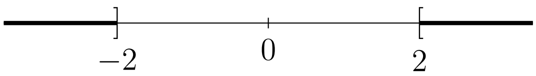
Así encontramos



Ahora representamos el conjunto B de los números reales cuyo valor absoluto es mayor o igual que 2. Simbólicamente, $B = \{b \in \mathbb{R} : |b| \geqslant 2\}$. Los elementos de B deben cumplir dos condiciones:

- Ser mayores que 2. Es decir, $b \geqslant 2$.
- Ser menores que -2. En decir, $b \leqslant -2$.

En la recta numérica, este conjunto es



La representación de conjuntos numéricos en la recta volverá a estudiarse en la **Sección 2.5** cuando representemos gráficamente las soluciones de inecuaciones. Veremos también en dicha sección, cómo expresar estos conjuntos usando notación de intervalos.

A partir de la noción de valor absoluto introducimos la noción de distancia. Si $a, b \in \mathbb{R}$, definimos la **distancia** entre a y b de la forma

$$d(a, b) = |b - a|.$$

Así, por ejemplo, la distancia entre -3 y 2 es

$$d(-3, 2) = |2 - (-3)| = 5.$$

Propiedad de la distancia. Para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$, se verifica

$$d(a, b) = d(b, a).$$

Esta propiedad es sencilla de demostrar, y lo haremos usando las propiedades ya enunciadas. Esta estrategia de demostración se describió en las **Consideraciones generales**. A partir de las propiedades (2) y (3) anteriores resulta

$$d(a, b) = |b - a| = |(-1) \cdot (a - b)| \overset{(2)}{=} |-1| \cdot |a - b| \overset{(3)}{=} |a - b| = d(b, a).$$

Para pensar 1

Supongamos que $x, y, z \in \mathbb{R}$ son tales que la distancia de x a y es positiva, y es igual a la distancia de x a z. ¿Qué se puede decir de la distancia entre y y z?

1.3 Subconjuntos de $\mathbb{R}$

Dentro del conjunto de los números reales podemos distinguir algunos subconjuntos particulares.

1. **Números enteros** ($\mathbb{Z}$)
   El conjunto de los números enteros está formado por los números naturales ($\mathbb{N}$), también llamados enteros positivos ($\mathbb{Z}^+$), los enteros negativos ($\mathbb{Z}^-$) y el elemento neutro. Simbólicamente
   $$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+.$$

2. **Números racionales** ($\mathbb{Q}$)
   Los números racionales se forman a partir del cociente entre dos números enteros. Simbólicamente
   $$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \in \mathbb{R} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}.$$
   Notemos que el cociente entre dos números enteros puede ser exacto (es decir, al dividir el resto es cero), como por ejemplo
   $$\frac{12}{-6} = -2,$$
   y entonces el número es también entero, o bien el cociente es una expresión decimal no entera (el resto de dividir el numerador por el denominador es distinto de cero). A su vez, estas expresiones decimales pueden ser
   - finitas:
   $$\frac{3}{4} = 0,75, \qquad -\frac{11}{8} = -1,375,$$
   - periódicas puras:
   $$\frac{7}{3} = 2,333\ldots = 2,\widehat{3}, \qquad \frac{23}{11} = 2,090909\ldots = 2,\widehat{09},$$
   - periódicas mixtas:
   $$\frac{7}{6} = 1,1666\ldots = 1,1\widehat{6}, \qquad \frac{35}{36} = 1,02777\ldots = 1,02\widehat{7},$$
   $$-\frac{21}{44} = -0,47727272\ldots = -0,47\widehat{72}.$$

3. **Números irracionales** ($\mathbb{I}$)
   Los números reales que no se pueden expresar como cociente de dos números enteros forman el conjunto de números irracionales. La expresión decimal de un número irracional no es finita ni periódica. Por ejemplo, π, $\sqrt{2}$, $\sqrt[5]{3}$ y $2 + 3\pi$ son números irracionales.

Tenemos así el siguiente esquema

$$\mathbb{R} : \text{Reales} \begin{cases} \mathbb{Q} : \text{Racionales} \begin{cases} \mathbb{Z} : \text{Enteros} \begin{cases} \mathbb{N} : \text{Naturales} \\ 0 : \text{Cero} \\ \mathbb{Z}^- : \text{Enteros negativos} \end{cases} \\ \text{Racionales no enteros} \begin{cases} \text{Distintas expresiones decimales:} \\ \quad \text{Finitas} \\ \quad \text{Periódicas Puras} \\ \quad \text{Periódicas Mixtas} \end{cases} \end{cases} \\ \mathbb{I} : \text{Irracionales} \end{cases}$$

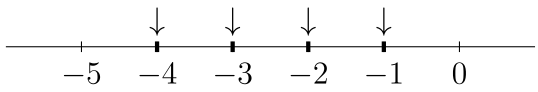
Ejemplo 1.3.1

Hallemos en cada uno de los siguientes casos los números que verifican las condiciones indicadas.

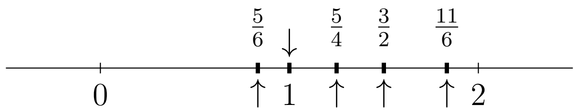
1. Todos los números enteros mayores que -5 y menores o iguales que -1.
2. Cinco números racionales mayores que $\frac{2}{3}$ y menores que 2.
3. Tres números enteros negativos cuyo valor absoluto sea mayor que $\frac{5}{2}$.

Para responder a estas consignas puede ser útil representar la situación en una recta numérica.

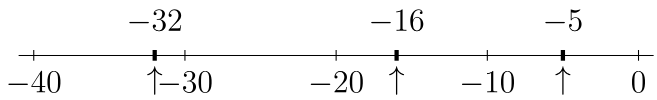
1. $-4, -3, -2, -1$.



2. $\frac{5}{6}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}$.



3. $-5, -16, -32$.



Para pensar 2

1. ¿Es cierto que el único número racional entre $2,1$ y $2,3$ es $2,2$?
2. ¿Es posible indicar todos los números racionales mayores que 1 y menores que $2s$?
3. ¿Cuántos números enteros tienen valor absoluto menor o igual que 4? ¿Y cuántos naturales cumplen esa condición?

Algo más sobre números racionales

Un mismo número racional tiene muchas formas de representarse. A estas distintas representaciones se las llama **fracciones equivalentes**. Así,

$$\frac{9}{15}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{6}{10}, \quad \frac{30}{50}$$

son fracciones equivalentes porque todas representan al mismo número racional. La propiedad que nos asegura que todas estas expresiones corresponden al mismo número es la presentada al final de la **Sección 1.1**: dividiendo o multiplicando numerador y denominador por un mismo número obtenemos fracciones equivalentes. Usando esta propiedad encontramos

$$\frac{9}{15} \overset{:3}{=} \frac{3}{5}, \qquad \frac{3}{5} \overset{\times 2}{=} \frac{6}{10}, \qquad \frac{3}{5} \overset{\times 10}{=} \frac{30}{50}$$

y vemos así que estas son todas fracciones equivalentes. Usando esta propiedad simplificamos fracciones,

$$\frac{24}{30} \overset{:2}{=} \frac{12}{15} \overset{:3}{=} \frac{4}{5}, \qquad \frac{36}{45} \overset{:3}{=} \frac{12}{15} \overset{:3}{=} \frac{4}{5}.$$

Para sumar (o restar) fracciones debemos buscar un denominador común. Recordamos esta operación con algunos ejemplos:

- ◇ $\frac{2}{3} - 2 = \frac{2}{3} - \frac{6}{3} = -\frac{4}{3}$,
- ◇ $\frac{7}{2} + \frac{3}{4} = \frac{14}{4} + \frac{3}{4} = \frac{14+3}{4} = \frac{17}{4}$,
- ◇ $\frac{2}{5} + \frac{3}{2} = \frac{4}{10} + \frac{15}{10} = \frac{4+15}{10} = \frac{19}{10}$.

La multiplicación de fracciones se resuelve multiplicando numeradores entre sí y denominadores entre sí. Además debemos tener en cuenta que en algunos casos podemos simplificar expresiones. Por ejemplo,

- ◇ $\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 7} = \frac{8}{21}$,
- ◇ $\frac{5}{6} \cdot 3 = \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 1} = \frac{5 \cdot \cancel{3}}{2 \cdot \cancel{3}} = \frac{5}{2}$.

La división entre fracciones la resolvemos multiplicando por el inverso multiplicativo. Esto es,

- ◇ $\frac{4}{5} : \frac{11}{2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{11} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 11} = \frac{8}{55}$,
- ◇ $\frac{15}{8} : \frac{9}{2} = \frac{15}{8} \cdot \frac{2}{9} = \frac{15 \cdot 2}{8 \cdot 9} = \frac{\cancel{3} \cdot 5 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{3}} = \frac{5}{12}$.

Recordemos, a partir de ejemplos, cómo se resuelven algunas operaciones combinadas entre números racionales, y la manera correcta de simplificar las expresiones obtenidas.

Ejemplo 1.3.2

Resolvamos paso a paso algunas operaciones entre números racionales.

1. $$-2 - \left[\frac{3}{7} - \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{4}{25}\right)^{-1}\right] = -2 - \left[\frac{3}{7} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5} \cdot 5}{\cancel{2} \cdot 2}\right] - 2 - \left[\frac{3}{7} - \frac{5}{2}\right]$$
$$= -2 - \frac{6-35}{14} = -2 + \frac{29}{14} = \frac{-28+29}{14} = \frac{1}{14}.$$

2. $$1 + \frac{-1+3^{-1}}{2+3^{-1}} = 1 + \frac{-1+\frac{1}{3}}{2+\frac{1}{3}} = 1 + \frac{\frac{-3+1}{3}}{\frac{6+1}{3}} = 1 + \frac{\frac{-2}{3}}{\frac{7}{3}}$$
$$= 1 - \frac{2}{3} : \frac{7}{3} = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{7} = 1 - \frac{2}{7} = \frac{7-2}{7} = \frac{5}{7}.$$

3. $$\frac{\frac{15}{4}}{\frac{40}{3}} = \frac{15}{4} : \frac{40}{3} = \frac{15}{4} \cdot \frac{3}{40} = \frac{3 \cdot \cancel{5}}{4} \cdot \frac{3}{8 \cdot \cancel{5}} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 8} = \frac{9}{32}.$$

Notemos que en el segundo paso de este último ejemplo habría sido un error simplificar el denominador 4 con el numerador 40, y también sería erróneo simplificar el numerador 15 con el denominador 3.

A continuación resolvemos algunos cálculos entre números reales e indicamos el subconjunto de $\mathbb{R}$ al cual pertenece cada resultado.

Ejemplo 1.3.3

El resultado del siguiente cálculo,

$$-4^{-1} \cdot \left|\frac{4}{5} - 2\right| = -\frac{1}{4} \cdot \left|-\frac{6}{5}\right| = -\frac{3}{10} = -0,3,$$

es un número real que también es racional. Se trata de una expresión decimal finita.

En el siguiente cálculo obtenemos

$$\frac{14}{3} : \left(\frac{6}{(-7)}\right)^{-1} = -\frac{14}{3} : \frac{7}{6} = -4,$$

es un número real que también es racional y entero. Más aún, es un entero negativo.

Ahora, si resolvemos

$$\sqrt[3]{1 - \left(\frac{11}{21} - \frac{1}{7}\right)^{-1}} = \sqrt[3]{2 - \frac{21}{8}} = \sqrt[3]{-\frac{5}{8}} = -\frac{\sqrt[3]{5}}{2},$$

encontramos un número real e irracional.

Por último, el resultado del cálculo

$$2\sqrt{3} - \left(\frac{1}{2\sqrt{3} - 1}\right)^{-1} = 2\sqrt{3} - (2\sqrt{3} - 1) = 1,$$

es un número real que también es racional, entero y natural.

Para pensar 3

¿Son válidas las siguientes igualdades para cualquier par de números reales a, b distintos de cero?

$$\text{(i)} \quad \frac{a}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{b} \qquad \text{y} \qquad \text{(ii)} \quad \frac{\frac{a}{b}}{a} = \frac{a}{\frac{b}{a}}$$

Nota: Esta actividad está relacionada con el ejercicio 8 de las actividades de esta unidad.

Para pensar 4

Mostrar que las igualdades

$$\text{(i)}\quad \frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c} \qquad \text{y} \qquad \text{(ii)}\quad \frac{a}{a+b} = \frac{1}{b}$$

no son válidas en general. Para cada una de ellas, encontrar tres números a, b y c que las verifiquen. ¿Es posible encontrar otros?

Nota: Esta actividad está vinculada con lo propuesto en el ejercicio 9 de las actividades de esta unidad.

1.4 Potenciación y radicación. Propiedades

Si $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos la **potencia n-ésima** de a como

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ \ldots \cdot a}_{n \text{ veces } a}.$$

El número a se llama **base** de la potencia y n es el **exponente**.

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$, tenemos las siguientes **propiedades de la potenciación**

(P1) $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$,

(P2) $a^{m \cdot n} = (a^m)^n$,

(P3) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$,

(P4) $(a : b)^n = a^n : b^n$, si $b \neq 0$.

Si $a \neq 0$, extendemos la definición de potencia para $n = 0$ y para potencias enteras negativas

$$\begin{aligned} a^0 &= 1, \\ a^{-n} &= (a^{-1})^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Observación 1.4.1 (Signo de las potencias)**.** Como consecuencia de la regla de signo para la multiplicación, podemos dar una regla para la potenciación.

Si $a > 0$ entonces $a^n > 0$ para todo n natural.

Si $a < 0$ entonces hay dos posibilidades: $a^n < 0$ si n es impar ó $a^n > 0$ si n es par.

Por ejemplo,

◇ $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ (base positiva $\longrightarrow$ resultado positivo)

◇ $(-1)^6 = \underbrace{(-1) \cdot (-1)}_{\text{positivo}} \cdot \underbrace{(-1) \cdot (-1)}_{\text{positivo}} \cdot \underbrace{(-1) \cdot (-1)}_{\text{positivo}} = 1$

◇ $(-3)^3 = \underbrace{(-3) \cdot (-3)}_{\text{positivo}} \cdot (-3) = -27$

Ejemplo 1.4.2

Aplicando propiedades podemos simplificar la siguiente expresión

$$\begin{aligned}\frac{7^2\cdot(-14)^{-3}}{(10^{-2})^3\cdot 5^4} &= \frac{7^2\cdot(-2\cdot 7)^{-3}}{(2\cdot 5)^{-6}\cdot 5^4} = \frac{7^2\cdot(-1)^{-3}\cdot 2^{-3}\cdot 7^{-3}}{2^{-6}\cdot 5^{-6}\cdot 5^4}\\ &= -\frac{7^{2-3}\cdot 2^{-3+6}}{5^{-6+4}} = -\frac{7^{-1}\cdot 2^3}{5^{-2}} = -\frac{2^3\cdot 5^2}{7}\end{aligned}$$

Para $a \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos la **raíz n-ésima (principal)** de a como el número real positivo b que verifica

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{si} \quad b^n = a.$$

El valor n se llama **índice** de la raíz.

Si $a = 0$ tenemos $\sqrt[n]{0} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ya que $0^n = 0$ para $n \in \mathbb{N}$. Si $a < 0$ solo existirá una raíz real n-ésima para valores de n impares. Si n es par, resulta que b^n es positivo para todo $b \neq 0$ (ver la **Observación 1.4.1**) y por lo tanto, no existirán raíces reales con índice par de números negativos. Veamos a partir de algunos ejemplos las distintas situaciones presentadas.

◇ Si n es impar la raíz real de a existe y tiene el mismo signo que a. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{27} = 3 &\quad \text{pues} \quad 3^3 = 27,\\ \sqrt[5]{-32} = -2 &\quad \text{pues} \quad (-2)^5 = -32.\end{aligned}$$

◇ Si n es par y a es positivo, la raíz existe y es positiva. Por ejemplo, $\sqrt[2]{9} = 3$ ya que $3^2 = 9$.

◇ Si n es par y a es negativo no existen raíces reales de a. Por ejemplo, no tenemos solución real para $\sqrt[4]{-16}$ ya que no existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b^4 = -16$.

Observación 1.4.3. De la definición de raíz n-ésima resulta que, si n es par, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$. Por ejemplo, para $a = -3$ y $n = 2$,

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = |-3|$$

Si $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $m, n, s \in \mathbb{N}$, entonces se verifican las siguientes **propiedades de la radicación para reales positivos**

(R1) $\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$

(R2) $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

(R3) $\sqrt[n]{\sqrt[s]{a}} = \sqrt[s\cdot n]{a}$

(R4) $\sqrt[n\cdot s]{a^{m\cdot s}} = \sqrt[n]{a^m}$

Si $a < 0$, las propiedades anteriores son válidas solo si consideramos índices n y s impares. Esta restricción de índices permite asegurar que cada una de las raíces existirá.

Ejemplo 1.4.4

Combinando las propiedades (R1) y (R4) podemos calcular

$$\sqrt[6]{\left(\frac{2}{5}\right)^9} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt[2\cdot 3]{\left(\frac{2}{5}\right)^{3\cdot 3}} \cdot \sqrt[2\cdot 2]{\left(\frac{2}{5}\right)^2} \overset{(R4)}{=} \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^3} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}$$
$$\overset{(R2)}{=} \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \frac{2}{5}} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^{2\cdot 2}} \overset{(R4)}{=} \frac{4}{25}.$$

Notemos que no podemos proceder igual si en lugar de $\frac{2}{5}$ tenemos $-\frac{2}{5}$. En tal caso, el primer factor no tendría solución real y en el segundo factor no se puede aplicar la propiedad en forma directa pero se puede calcular la raíz. Esto es,

- ◇ $\sqrt[6]{\left(-\frac{2}{5}\right)^9}$ no tiene solución en $\mathbb{R}$,
- ◇ $\sqrt[4]{\left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt[4]{(-1)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt[2\cdot 2]{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{5}}.$

Para pensar 5

¿Existe algún $x \in \mathbb{R}$ que verifique $x^2 = 5$? Si existe, ¿es el único? ¿Y existe algún $x \in \mathbb{R}$ que verifique $x^2 = -5$?

En los siguientes ejemplos resolvemos, paso a paso, operaciones combinadas.

- ◇ $\sqrt{-2^{-2} + \frac{\sqrt[3]{12-20}}{4} + \sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}}} = \sqrt{-\frac{1}{2^2} + \frac{\sqrt[3]{-8}}{4} + \sqrt{9}} = \sqrt{-\frac{1}{4} - \frac{2}{4} + 3} = \frac{3}{2},$
- ◇ $\sqrt[4]{(-2)^{-2} - \frac{5}{16}} = \sqrt[4]{\frac{1}{4} - \frac{5}{16}} = \sqrt[4]{-\frac{1}{16}}$ $\to$ no es posible resolver este cálculo en $\mathbb{R}$.

A partir de las definiciones de potenciación y radicación presentadas definimos la **potencia de exponente racional**, para $a \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$, como

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

La segunda igualdad nos indica que la potencia de exponente $\frac{m}{n}$ existirá si la raíz n-ésima está bien definida. Así, si n es par, la base a debe ser positiva o cero para que esta operación esté bien definida en $\mathbb{R}$. Si n es impar la operación está bien definida para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$.

Además, podemos extender la definición anterior para exponentes racionales negativos. Si $a \neq 0$ y $m, n \in \mathbb{N}$, entonces

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

Las propiedades de la potenciación (P1), (P2), (P3) y (P4) son válidas para potencias de exponente racional siempre y cuando todos los términos existan. Como sucedió con las propiedades de raíces, si la base es negativa las propiedades son válidas si agregamos algunas restricciones sobre los exponentes. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.4.5

Si las bases son positivas, entonces todas las propiedades de potencia son válidas para cualquier exponente racional.

$$\frac{\left(3^{-1}\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{3 \cdot 5^3}}{\left(5^4 \cdot \sqrt[4]{3^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3^{-1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{3}{2}}}{5^{4 \cdot \frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{3^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{3}{2}}}{5^2 \cdot 3^{\frac{1}{4}}} = 3^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{2}-2} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Si alguna base es negativa, podemos usar propiedades siempre que el denominador del exponente racional sea impar.

$$\sqrt[5]{(-7)^{\frac{1}{3}}} \cdot (-7)^2 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)^{\frac{2}{5}} = (-7)^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}} \cdot (-7)^2 \cdot (-7)^{-\frac{2}{5}} = (-7)^{\frac{1}{15}+2-\frac{2}{5}} = (-7)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{(-7)^5}.$$

Para pensar 6

¿Son válidas las igualdades

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \text{y} \quad (a+b)^3 = a^3 + b^3$$

para cualquier par de números reales a, b? ¿Existen pares de números $a, b \in \mathbb{R}$ que verifiquen alguna de estas igualdades?

Nota: Esta actividad está relacionada con lo propuesto en el ejercicio 5 de las actividades planteadas al final de esta unidad.

1.5 Racionalización

En ciertas expresiones en las que intervienen raíces es conveniente transformar el numerador o el denominador en un número entero.

Dos fórmulas, que estudiaremos con más detalle en la siguiente unidad, son de utilidad en estos casos. Ambas se verifican aplicando la propiedad distributiva.

1. *Cuadrado de un binomio.*

$$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + 2ab + b^2.$$

2. *Diferencia de cuadrados.*

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2.$$

Veamos cómo racionalizar expresiones por medio de los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.5.1

Consideremos dos casos en el que tenemos solo una raíz en el denominador. En el primer caso la raíz es cuadrada, es por eso que multiplicamos numerador y denominador por esta misma raíz.

$$\frac{2-\sqrt{13}}{\sqrt{3}} = \frac{(2-\sqrt{13})\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{13\cdot 3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{39}}{3}.$$

Es importante recordar que al multiplicar por un mismo número el numerador y el denominador de una expresión racional, esta expresión no cambia. Vimos esta propiedad al final de la **Sección 1.1**.

En el segundo caso la raíz es cúbica. Si bien en las actividades solo se racionalizarán raíces cuadradas, presentamos este ejemplo a modo ilustrativo dado que la estrategia es similar a la presentada en el caso anterior. Para que una raíz cúbica se simplifique debemos multiplicar numerador y denominador por el cuadrado de dicha raíz.

$$\frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\left(5+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{\sqrt[3]{2}\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^2} = \frac{5\cdot\sqrt[3]{4}+\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{4}}{2}.$$

Ejemplo 1.5.2

Veamos ahora dos casos en los que tenemos en el denominador una suma (o resta) con raíces. La estrategia es la misma en ambos casos: obtener una diferencia de cuadrados en el denominador.

1.
$$\begin{aligned}
\frac{3\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-2} &= \frac{(3\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+2)}{(\sqrt{2}-2)\cdot(\sqrt{2}+2)}\\
&= \frac{3(\sqrt{2})^2-\sqrt{2}+2\cdot 3\sqrt{2}-2}{(\sqrt{2})^2-2^2}\\
&= \frac{6+5\sqrt{2}-2}{2-4}\\
&= \frac{4+5\sqrt{2}}{-2} = -2-\frac{5}{2}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} &= \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})}\\
&= \frac{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}\\
&= \frac{3-2\sqrt{6}+2}{3-2}\\
&= 5-2\sqrt{6}.
\end{aligned}$$

Actividades

1. Expresar los siguientes conjuntos usando notación de conjunto y representarlos en una recta numérica.
   (a) El conjunto de todos los números reales menores o iguales que 4.
   (b) El conjunto de todos los números reales negativos mayores o iguales que $-\frac{8}{3}$.
   (c) El conjunto de todos los números reales mayores que $-\frac{5}{2}$ y menores que 3.

2. (a) Resolver las operaciones indicadas en cada caso

   i. $a = 6,\ b = 2 \longrightarrow$ $|a+b| = \ldots\ldots\ldots$ $|a-b| = \ldots\ldots\ldots$

   $|a|+|b| = \ldots\ldots\ldots$ $|a|-|b| = \ldots\ldots\ldots$

   ii. $a = \dfrac{2}{3},\ b = \dfrac{5}{2} \longrightarrow$ $|a+b| = \ldots\ldots\ldots$ $|a-b| = \ldots\ldots\ldots$

   $|a|+|b| = \ldots\ldots\ldots$ $|a|-|b| = \ldots\ldots\ldots$

   iii. $a = 2,\ b = -\dfrac{12}{5} \longrightarrow$ $|a+b| = \ldots\ldots\ldots$ $|a-b| = \ldots\ldots\ldots$

   $|a|+|b| = \ldots\ldots\ldots$ $|a|-|b| = \ldots\ldots\ldots$

   (b) Observando los resultados encontrados en el inciso anterior, ¿podemos decir que para cualquier par de números reales a, b valen las igualdades

$$|a+b| = |a|+|b| \quad \text{y} \quad |a-b| = |a|-|b|?$$

3. Indicar a qué conjunto/s pertenece cada uno de los siguientes números.

   (a) $\dfrac{\pi}{2}$,
   (b) $\sqrt{36}$,
   (c) $2,25111$,
   (d) 0,
   (e) $\sqrt{7}$,
   (f) $-2,0\widehat{1}$,
   (g) $-\dfrac{9}{81}$,
   (h) $\sqrt[3]{-8}$,
   (i) -11^{-1},
   (j) $\left(-\dfrac{2}{6}\right)^{-1}$.

4. Para cada afirmación, indicar si es verdadera (V) o falsa (F) y justificar.

   (a) Todo número real es racional.
   (b) Todo número natural es entero.
   (c) Todo número entero es racional.
   (d) Todo número real es irracional.
   (e) Existen números naturales que no son racionales.
   (f) Existen números racionales que no son enteros.
   (g) El inverso de cualquier número entero es un número entero.
   (h) El inverso de un número natural nunca es un número natural.
   (i) El inverso de cualquier racional distinto de cero es un racional.
   (j) El opuesto de cualquier número entero siempre es negativo.
   (k) El opuesto de cualquier número natural es un entero negativo.
   (l) Los números reales opuestos tienen el mismo valor absoluto.

5. Escribir, en cada caso, todos los números enteros
   (a) mayores que -101 y menores que -97,
   (b) mayores o iguales que -17 y menores que $-\frac{25}{2}$,
   (c) menores o iguales que 2 y mayores o iguales que $-\sqrt{5}$,
   (d) cuyo valor absoluto es menor o igual que 5,
   (e) cuyo valor absoluto es menor que π.

6. Representar en una recta numérica los siguientes conjuntos. Expresar con palabras de qué conjunto se trata.
   (a) $A = \{a \in \mathbb{N} : a > 3\}$.
   (b) $B = \left\{b \in \mathbb{R}^+ : b \leqslant \dfrac{5}{4}\right\}$.
   (c) $C = \left\{c \in \mathbb{Z} : |c| < \dfrac{5}{2}\right\}$.
   (d) $D = \left\{r \in \mathbb{R} : |r| \geqslant \dfrac{7}{3}\right\}$.

7. Las expresiones indicadas a continuación **no son verdaderas**. Marcar los errores cometidos y hallar el resultado correcto.
   (a) $2 - 3 \cdot (4 \cdot 2 + 8) = -1 \cdot 16 = -16$,
   (b) $\dfrac{-2^2 + 4^{-1}}{-2^3 - 2^{-1}} = \dfrac{4 + \frac{1}{4}}{-8 - \frac{1}{2}} = \dfrac{17}{4} : \left(-\dfrac{17}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$.
   (c) $\left|-5 - \dfrac{11}{2}\right| : \sqrt{1 + \dfrac{9}{16}} = \left|-\dfrac{21}{2}\right| : \left(1 + \dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{21}{2} : \dfrac{7}{4} = 6$.

8. Sean a, b, c tres números reales no nulos. Indicar en cada caso a qué es igual la expresión de la izquierda.
   (a) $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \ldots\ldots$ ☐ $a : \dfrac{b}{c}$ ó ☐ $\dfrac{a}{b} : c$,
   (b) $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = \ldots\ldots$ ☐ $a : \dfrac{b}{c}$ ó ☐ $\dfrac{a}{b} : c$.

9. Mostrar con un ejemplo que las siguientes igualdades son **falsas** en general, para números $a, b, c \in \mathbb{R}$.
   (a) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$,
   (b) $a - b = b - a$,
   (c) $a - (b + c) = a - b + c$,
   (d) $\sqrt[3]{a + b} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$,
   (e) $\dfrac{1}{a + b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$, $a, b \neq 0$.

10. Simplificar cada una de las siguientes expresiones.
   (a) $\dfrac{\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}{4^{-1} : \frac{2}{3}}$
   (b) $\dfrac{12 : \frac{4}{3}}{\frac{9}{2} \cdot \sqrt[3]{-\frac{8}{27}}}$
   (c) $\dfrac{\frac{15}{7} \cdot 6^{-1}}{(-2)^{-2} : 7}$

11. Resolver utilizando la definición y las propiedades de la potenciación y radicación.

(a) $2^{-1} \cdot 2^{-3} \cdot 2^{-4}$,

(b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^0$,

(c) $\left(7^{-1} : 7^{-3}\right) \cdot 7^{-2}$,

(d) $\sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2}}}$,

(e) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{5}} \cdot \sqrt[6]{5^5}\right)^3$,

(f) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2 : \sqrt[4]{3^{-1}}\right)^{\frac{4}{7}}$,

(g) $\left(\sqrt[5]{(-4)^3} : (-4)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{\frac{4}{5}}\right)^{-1}$,

(h) $\left(7^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot 7^{-2}} : \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{3}}$,

(i) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{5}{3}} \cdot \sqrt[5]{\left(\frac{1}{5}\right)^{10} \cdot \sqrt[3]{(-2)^{-1}} : (-2)^{-2}}$,

(j) $\dfrac{\sqrt{3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-3}} \cdot \sqrt[4]{3 \cdot 2^3}}{\left(\sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[3]{3}\right)^6}$.

12. Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$, simplificar las siguientes expresiones aplicando propiedades.

(a) $\dfrac{(a^2 \cdot b)^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{b^5}}{\sqrt{a^{\frac{1}{2}} \cdot b}}$,

(b) $\dfrac{a \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot b}}{\sqrt[3]{b \cdot \sqrt{a \cdot b^3}}}$.

13. Mostrar la validez de las siguientes igualdades **sin utilizar calculadora**.

(a) $\left(\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}\right)^{96} + \left\{\left[\left(\sqrt[6]{\sqrt[3]{2}}\right)^2\right]^3\right\}^9 = 24$,

(b) $\dfrac{\sqrt{5^{999} + 5^{999} + 5^{999} + 5^{999} + 5^{999}}}{\sqrt[3]{5^{1.493} + 5^{1.493} + 5^{1.493} + 5^{1.493} + 5^{1.493}}} = 25$.

14. Calcular el valor exacto **sin utilizar calculadora**.

(a) $-6 \cdot 3 - (-5) \cdot [-9 : (-3)]$,

(b) $\left(-\frac{16}{2} + 4\right) : 4 - \left(\frac{2-5}{-4} \cdot 2 + \frac{3}{2}\right)$,

(c) $\left(3^2\right)^2 - \left[(-2)^3\right]^2 + \left(-5^2\right)$,

(d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1} : \sqrt{8 : \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} + \frac{3}{2} : (-2) - \left[\left(\frac{1}{2} - 1\right)^{-1}\right]^0$,

(e) $|2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4} - 2|$,

(f) $\sqrt[3]{\left(\frac{5}{-15} + 3^{-3}\right)} - 2 : \left|\frac{3}{4} - 1\right|^{-1}$.

15. Efectuar las siguientes operaciones e indicar a qué conjuntos numéricos pertenece el resultado.

(a) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{4} - \dfrac{3+3\sqrt{2}}{4}$,

(b) $-\sqrt{3} - 5 - 2 \cdot \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

(c) $2 \cdot (1 + 2\sqrt{5}) - (\sqrt{5} - 2)^2$,

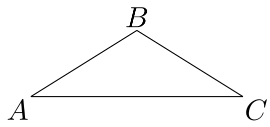
(d) $\left(-\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2 - \dfrac{4 - 2\sqrt{6}}{3}$,

(e) $\left(\sqrt{5} - \sqrt{6}\right) \cdot \left(\sqrt{5} + \sqrt{6}\right) \cdot \frac{1}{2}$,

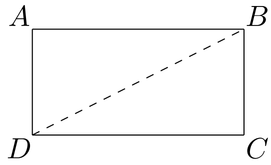
(f) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2$.

16. Haciendo uso de las fórmulas elementales de la geometría, calcular en forma exacta el área y el perímetro de las siguientes figuras.

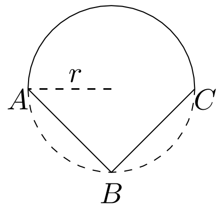
(a) $\overset{\triangle}{ABC}$ es un triángulo isósceles,
$|\overline{AC}| = 12\sqrt{3}$ cm,
$|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = 10\sqrt{3}$ cm.



(b) $ABCD$ es un rectángulo,
$|\overline{AB}| = 4\sqrt{2}$ cm,
$|\overline{BD}| = 5\sqrt{2}$ cm.



(c) Los puntos A, B, C están sobre la circunferencia de radio $r = 3$



17. Racionalizar las siguientes expresiones y, cuando sea posible, operar algebraicamente hasta obtener una expresión más simple.

(a) $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$,

(b) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$,

(c) $\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1}$,

(d) $\dfrac{1}{2\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{5})}$,

(e) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-2}$,

(f) $\dfrac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}$,

(g) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} - \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$,

(h) $\dfrac{2\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{12}}{1-\sqrt{3}}$.

2 Expresiones algebraicas. Ecuaciones. Inecuaciones

Síntesis de la unidad

En esta unidad vamos a estudiar distintas expresiones algebraicas y algunas operaciones definidas entre ellas. Los principales conceptos que desarrollaremos son los siguientes.

1. Definición de expresión algebraica y operaciones (suma y multiplicación).
2. Factorización y simplificación de expresiones algebraicas.
3. Resolución de distintos tipos de ecuaciones e inecuaciones.
4. Planteo y resolución de problemas usando ecuaciones e inecuaciones.

2.1 Expresiones algebraicas. Operaciones

Las expresiones matemáticas en las cuales se combinan números, letras y operaciones se denominan **expresiones algebraicas**. Una expresión algebraica permite expresar una relación o una operación entre distintos valores numéricos pero de manera general. Las fórmulas, las ecuaciones y los polinomios se presentan a partir de expresiones algebraicas. Por ejemplo,

$$2ab^2 - 3a + b^3$$

es una expresión algebraica. Los números 2, -3 y 1 son los **coeficientes** de los términos ab^2, a y b^3, que forman la **parte literal** de la expresión.

Llamamos **términos semejantes** a aquellos términos que tienen las mismas letras con las mismas potencias (es decir, la misma parte literal). Así, $4xy^3$ y $-2y^3x$ son términos semejantes, mientras que $-2ab^2$ y $3a^2b$ no lo son.

La **suma** de dos expresiones algebraicas se realiza sumando los coeficientes de los términos semejantes. Así, por ejemplo,

- $2a^2b + ab + 3ba - 6a^2b = -4a^2b + 4ab$,
- $1 - xy + 2xz - 3 + 4xz - xy = -2 - 2xy + 6xz$.

La **multiplicación** de expresiones algebraicas se realiza aplicando la propiedad distributiva, haciendo uso de las propiedades de la potenciación y por último sumando los términos semejantes. Así, por ejemplo,

- $(b - 3ab) \cdot \left(2a + \dfrac{3}{2}\right) = 2ab + \dfrac{3}{2}b - 6a^2b - \dfrac{9}{2}ab = -\dfrac{5}{2}ab + \dfrac{3}{2}b - 6a^2b$,
- $(x^2 + 2y) \cdot (y - 3x^2) = x^2y - 3x^4 + 2y^2 - 6x^2y = -5x^2y - 3x^4 + 2y^2$.

2.2 Factorización

Factorizar una expresión algebraica consiste en expresarla como producto de nuevas expresiones más simples. En esta unidad vamos a estudiar solo algunos casos de factorización. En la siguiente unidad, al estudiar polinomios, veremos otros casos de factorización.

1. *Factor común.*

   En la expresión $ab^2 + 2a^2b^2 - 3ab^3$, el factor ab^2 aparece en todos los términos, por lo que podemos expresar
   $$ab^2 + 2a^2b^2 - 3ab^3 = ab^2 \cdot (1 + 2a - 3b).$$
   En el siguiente ejemplo, el factor común es $2a^2b$
   $$2a^3b - 6a^2b^4c + 8a^3b^2c = 2a^2b \cdot (a - 3b^3c + 4abc).$$

2. *Trinomio cuadrado perfecto* $\longleftrightarrow$ *Cuadrado de un binomio.*

   La forma general de un trinomio cuadrado perfecto es
   $$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$$
   Verificamos que estas expresiones son equivalentes aplicando propiedad distributiva
   $$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$
   Por ejemplo, podemos factorizar los siguientes trinomios,
   - ⋄ $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$,
   - ⋄ $25x^2y^4 + 10xy^2z + z^2 = (5xy^2 + z)^2$.

   Sin embargo, el trinomio $m^2 - 2mn + 9n^2$ no es un trinomio cuadrado perfecto.

3. *Diferencia de cuadrados* $\longleftrightarrow$ *Suma por diferencia.*

   La forma general de una diferencia de cuadrados es
   $$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b).$$
   Veamos que efectivamente estas expresiones son iguales
   $$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 \cancel{- ab + ba} - b^2 = a^2 - b^2.$$
   Por ejemplo, podemos factorizar
   $$25x^2 - y^2z^4 = (5x + yz^2) \cdot (5x - yz^2).$$

Para pensar 7

1. ¿Qué término se podría agregar (sumar o restar) al binomio $9p^2 - 12pq$ para que sea un trinomio cuadrado perfecto? ¿Y para el caso del binomio $y^2 + 16z^4$?
2. ¿Es posible factorizar la expresión $a^2 - 2$ como suma por diferencia? ¿Y la expresión $a - 2$, para $a > 0$?

Nota: Estas preguntas se relacionan con los ejercicios 3 y 4 de las actividades propuestas al final de la unidad.

Expresiones algebraicas racionales. Simplificación

Las operaciones con expresiones algebraicas racionales son similares a las operaciones entre fracciones. De esta forma, para sumar dos de estas expresiones debemos factorizar el denominador y encontrar un denominador común.

Ejemplo 2.2.1

Resolvamos la siguiente suma.

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{a^2+3a}+\frac{a+9}{a^2+6a+9}-1 &= \frac{a^{\cancel{2}}}{\cancel{a}(a+3)}+\frac{a+9}{(a+3)^2}-1\\
&= \frac{a(a+3)+a+9-(a+3)^2}{(a+3)^2}\\
&= \frac{a^2+3a+a+9-(a^2+6a+9)}{(a+3)^2}\\
&= \frac{\cancel{a^2}+4a+\cancel{9}-\cancel{a^2}-6a-\cancel{9}}{(a+3)^2}=-\frac{2a}{(a+3)^2}.
\end{aligned}$$

También la multiplicación y división de expresiones algebraicas racionales es similar al caso de las fracciones. Para simplificar expresiones debemos, en primer lugar, factorizar numeradores y denominadores.

Ejemplo 2.2.2

Veamos cómo simplificar la siguiente expresión.

$$\begin{aligned}
\frac{a^2+6ab+9b^2}{a^{-2}-(3b)^{-2}}:\frac{a^2b+3ab^2}{6b-2a} &= \frac{(a+3b)^{\cancel{2}}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{9b^2}}:\frac{ab\cdot\cancel{(a+3b)}}{2\cdot(3b-a)}\\
&= \frac{a+3b}{\frac{9b^2-a^2}{9a^2b^2}}:\frac{ab}{2\cdot(3b-a)}\\
&= \frac{\cancel{(a+3b)}\cdot(9a^2b^2)}{(3b-a)\cdot\cancel{(3b+a)}}:\frac{ab}{2\cdot(3b-a)}\\
&= \frac{9a^{\cancel{2}}b^{\cancel{2}}}{\cancel{(3b-a)}}:\frac{\cancel{ab}}{2\cdot\cancel{(3b-a)}}\\
&= 18ab.
\end{aligned}$$

2.3 Ecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas en las que aparece un valor desconocido llamado **incógnita**. Resolver una ecuación significa encontrar, si existe, el valor de esta incógnita, es decir, un valor real que hace verdadera la igualdad. Las ecuaciones pueden no tener solución, o bien tener una, varias o infinitas soluciones.

Para resolver ecuaciones usamos algunas propiedades de los números reales. Dos de ellas son

(1) *Propiedad uniforme de la suma.* Sean a, b y $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$a = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a + c = b + c.$$

(2) *Propiedad uniforme de la multiplicación.* Sean a, b, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Entonces

$$a = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \cdot c = b \cdot c.$$

Así, por ejemplo,

◇ La primera propiedad nos permite resolver

$$\overbrace{x+7}^{a} = \overbrace{2}^{b} \quad \Longrightarrow \quad \overbrace{x+7}^{a} + \overbrace{(-7)}^{c} = \overbrace{2}^{b} + \overbrace{(-7)}^{c} \quad \Longrightarrow \quad x = -5.$$

◇ La propiedad de monotonía del producto nos permite resolver

$$\overbrace{6x}^{a} = \overbrace{10}^{b} \quad \Longrightarrow \quad \overbrace{\cancel{6}x}^{a} \cdot \overbrace{\cancel{6^{-1}}}^{c} = \overbrace{10}^{b} \cdot \overbrace{6^{-1}}^{c} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

Estos procedimientos no son más que la justificación formal de lo que habitualmente se hace al resolver ecuaciones. En lenguaje coloquial diríamos: *"despejamos la incógnita pasando términos o factores de un miembro al otro".*

Ejemplo 2.3.1

Veamos tres ejemplos que ilustran las distintas situaciones con que podemos encontrarnos.

1. Resolviendo la siguiente ecuación obtenemos

$$\begin{aligned}
2\left(1 - \frac{1}{6}\sqrt{x+3}\right) &= \sqrt{x+3} \\
2 &= \frac{1}{3}\sqrt{x+3} + \sqrt{x+3} \\
2 &= \frac{4}{3}\sqrt{x+3} \\
\frac{3}{2} &= \sqrt{x+3} \\
\frac{9}{4} &= x+3 \\
-\frac{3}{4} &= x,
\end{aligned}$$

encontramos así que esta ecuación tiene una **única solución** en $\mathbb{R}$.

2. Al operar algebraicamente sobre la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} 2\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}x &= 7-\frac{5}{2}(4-x) \\ 2x-3+\frac{1}{2}x &= 7-10+\frac{5}{2}x \\ \frac{5}{2}x-3 &= -3+\frac{5}{2}x, \end{aligned}$$

encontramos que esta ecuación es **válida para cualquier valor de** $x \in \mathbb{R}$, así la solución es el conjunto $\mathbb{R}$. Esto se conoce con el nombre de **identidad**.

3. La siguiente es una ecuación que **no tiene solución en** $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (p+3)^2-3p &= 3p \\ p^2+6p+9-3p &= 3p \\ p^2 &= -9. \end{aligned}$$

Esta ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$ dado que si $p \in \mathbb{R}$ entonces se tiene $p^2 \geqslant 0$.

Una vez resuelta una ecuación podemos **verificar** si la solución encontrada es la correcta. Para esto, al reemplazar con el valor hallado en cada miembro de la ecuación debe resultar una identidad.

Ejemplo 2.3.2

Tenemos que $x = -\frac{3}{4}$ es solución de la ecuación del primero de los ejemplos anteriores. Para saber si la solución es correcta reemplazamos este valor en ambos miembros de la ecuación. Por un lado

$$2\left(1-\frac{1}{6}\sqrt{-\frac{3}{4}+3}\right) = 2\left(1-\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Mientras que por otro lado

$$\sqrt{-\frac{3}{4}+3} = \frac{3}{2}.$$

Luego la solución encontrada es correcta.

Para pensar 8

Resolvemos la ecuación

$$\begin{aligned} (\sqrt{x}+3)^2-6\sqrt{x} &= 5 \\ x\cancel{+6\sqrt{x}}+9\cancel{-6\sqrt{x}} &= 5 \\ x &= -4, \end{aligned}$$

y encontramos que $x = -4$ es la solución. ¿Es esto correcto?

2.4 Algunas ecuaciones particulares

La ecuación cuadrática

Una **ecuación cuadrática** es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

El valor $\Delta = b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** de la ecuación cuadrática, y nos indica la cantidad de soluciones que tiene esta ecuación en el conjunto de los números reales.

- Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
- Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una única solución real.
- Si $\Delta < 0$, la ecuación no tiene solución en los reales.

Existe una fórmula resolvente para esta ecuación, válida siempre y cuando $\Delta \geqslant 0$. Las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Observemos que si $\Delta = 0$, resulta que $x_1 = x_2$, y así es que en este caso encontramos una única solución real.

Si existen soluciones x_1, x_2 de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, entonces podemos expresar el miembro de la izquierda en forma factorizada

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Ejemplo 2.4.1

Consideremos la ecuación $3x^2 + 3x - 6 = 0$. En este caso $a = 3, b = 3, c = -6$, y el discriminante es

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6) = 81 > 0.$$

Luego esta ecuación tiene dos soluciones reales distintas dadas por

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{81}}{2 \cdot 3} = 1, \qquad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{81}}{2 \cdot 3} = -2.$$

Así, podemos también dar una factorización de la expresión $3x^2 + 3x - 6$,

$$3x^2 + 3x - 6 = 3(x - 1)(x - (-2)) = 3(x - 1)(x + 2).$$

Observación 2.4.2. Las soluciones de la ecuación cuadrática y la forma factorizada de la expresión algebraica correspondiente, nos serán de utilidad en la siguiente unidad, cuando se estudie la factorización de polinomios de segundo grado, y también en la **Unidad 7** donde estudiaremos en detalle la función cuadrática.

Ejemplo 2.4.3

La ecuación

$$x^4 - 11x^2 + 18 = 0$$

puede resolverse usando lo visto para ecuaciones cuadráticas. Si llamamos $x^2 = u$ resulta que $x^4 = (x^2)^2 = u^2$ y así la ecuación planteada se transforma en

$$u^2 - 11u + 18 = 0.$$

Esta es una ecuación cuadrática con incógnita u. Resolvemos esta ecuación con la fórmula presentada anteriormente. Para este caso,

$$a = 1,\ b = -11,\ c = 18 \quad \Longrightarrow \quad \Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 49 > 0,$$

y encontramos dos soluciones

$$u_1 = \frac{11 + \sqrt{49}}{2} = 9, \qquad u_2 = \frac{11 - \sqrt{49}}{2} = 2.$$

Para hallar las soluciones x de la ecuación inicial, recordemos que llamamos $x^2 = u$ y así

$$\begin{aligned} u_1 = 9 \quad &\Longrightarrow \quad x^2 = 9 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 3, \quad x_2 = -3 \\ u_2 = 2 \quad &\Longrightarrow \quad x^2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad x_3 = \sqrt{2}, \quad x_4 = -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Encontramos así cuatro soluciones $x_1 = 3,\ x_2 = -3,\ x_3 = \sqrt{2},\ x_4 = -\sqrt{2}$ de la ecuación inicial.

Ecuaciones como del ejemplo anterior reciben el nombre de **ecuaciones bicuadráticas**. La estrategia de sustituir la incógnita por una nueva expresión suele ser muy útil en diversos casos. Veremos más ejemplos en la **Unidad 3** al estudiar raíces de polinomios, y en la **Unidad 8**, cuando resolvamos ecuaciones trigonométricas.

Resolución de ecuaciones factorizadas

Un caso de interés es aquel en el que tenemos una expresión factorizada e igualada a cero. Este tipo de ecuaciones se resuelve teniendo en cuenta la **Observación 1.1.1**.

Ejemplo 2.4.4

Veamos cómo resolver la ecuación $(x-3)(2-3x+x^2) = 0$. Por la **Observación 1.1.1** sabemos que

$$(x-3)(2-3x+x^2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x - 3 = 0 \quad \text{ó} \quad 2 - 3x + x^2 = 0.$$

La primera de estas ecuaciones tiene por solución $x_1 = 3$. La segunda es una ecuación cuadrática con discriminante $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0$, es decir que existen dos soluciones reales,

$$x_2 = \frac{3+\sqrt{1}}{2} = 2 \qquad x_3 = \frac{3-\sqrt{1}}{2} = 1.$$

De esta forma, la ecuación inicial tiene tres soluciones, $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1$.

Ecuaciones con valor absoluto

Para resolver ecuaciones en las que la incógnita se encuentra dentro de una expresión con valor absoluto, debemos tener presente la definición de valor absoluto dada en la unidad anterior. Por ejemplo, si queremos resolver

$$|x| = 5$$

debemos recordar que existen dos números distintos cuyo valor absoluto es 5:

$$x_1 = 5 \quad \text{y} \quad x_2 = -5.$$

En forma general resulta que, para cualquier número real a mayor que cero, tenemos

$$|x| = a \quad \Longleftrightarrow \quad x = a \quad \text{ó} \quad x = -a.$$

Notemos que si $a = 0$, la expresión anterior se reduce a una sola opción

$$|x| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0.$$

Ahora, dentro del valor absoluto puede haber una expresión más compleja que una simple x. Aún en ese caso podemos aplicar el razonamiento anterior. Por ejemplo,

$$|3x - 11| = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x - 11 = 4 \quad \text{ó} \quad 3x - 11 = -4,$$

y luego debemos resolver separadamente dos ecuaciones ya conocidas.

Ejemplo 2.4.5

Veamos cómo resolver

$$2 - \frac{2}{7}|1 - 4x| = 0.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} 2 - \frac{2}{7}|1 - 4x| = 0 &\Longleftrightarrow -\frac{2}{7}|1 - 4x| = -2 \\ &\Longleftrightarrow |1 - 4x| = 7 \\ &\Longleftrightarrow 1 - 4x = 7 \quad \text{ó} \quad 1 - 4x = -7. \end{aligned}$$

De la primera ecuación resulta

$$1 - 4x = 7 \Longleftrightarrow x = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2},$$

mientras que al analizar la segunda encontramos

$$1 - 4x = -7 \Longleftrightarrow x = 2.$$

Tenemos entonces dos soluciones: $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = 2$. Podemos verificar si las soluciones encontradas son correctas. Para $x_1 = -\frac{3}{2}$ resulta

$$2 - \frac{2}{7}\left|1 - 4\left(-\frac{3}{2}\right)\right| = 2 - \frac{2}{7}\,|1+6| = 2 - \frac{2}{7}\cdot 7 = 0.$$

Para $x_2 = 2$ encontramos

$$2 - \frac{2}{7}\,|1 - 4\cdot 2| = 2 - \frac{2}{7}\,|-7| = 2 - \frac{2}{7}\cdot 7 = 0.$$

Recordemos que $|x|$ es un número real mayor o igual que cero, simbólicamente $|x| \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Por esta razón, ecuaciones de la forma

$$\left|\frac{2}{3} - \frac{1}{5}x\right| = -3$$

no tienen solución.

Ecuaciones con expresiones algebraicas racionales

A continuación estudiamos el caso en que las expresiones algebraicas involucradas son racionales.

Ejemplo 2.4.6

Resolvamos la siguiente ecuación

$$\frac{x^2 + x - 12}{(x-3)^2} = \frac{1}{x-3}.$$

Comencemos observando que $x \neq 3$, pues el denominador no puede anularse, luego escribamos ambas fracciones en un mismo miembro y sumemos

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 + x - 12}{(x-3)^2} - \frac{1}{x-3} &= 0,\\
\frac{x^2 + x - 12 - (x-3)}{(x-3)^2} &= 0,\\
\frac{x^2 + x - 12 - x + 3}{(x-3)^2} &= 0.
\end{aligned}$$

Esta igualdad se verifica si, y solo si el numerador es igual a cero, esto es

$$x^2 - 9 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad (x+3)(x-3) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x = 3 \quad \text{ó} \quad x = -3.$$

Inicialmente indicamos que $x \neq 3$, por lo que la única solución resulta ser $x = -3$.

Para pensar 9

1. ¿Es posible encontrar un valor de m para que $x = -2$ sea solución de la ecuación $x^2 - (m+1)x + m = 1$?

2. ¿Es posible encontrar un valor de p para que $x^4 - (p-2) = 1$ no tenga solución en $\mathbb{R}$?

Nota: Estas preguntas se vinculan con lo planteado en el ejercicio 10 de las actividades propuestas al final de esta unidad.

Planteo y resolución de problemas

Ejemplo 2.4.7

Ana, Marcos y Ariel compraron un regalo para su madre. Ana paga las dos quintas partes del costo del regalo, Marcos aporta la tercera parte de lo que resta pagar y Ariel colabora con los $ 108 faltantes. ¿Cuánto aportó Ana? ¿Cuánto costó el regalo?

Si llamamos x al precio del regalo, tenemos la ecuación

$$x = \frac{2}{5}x + \frac{1}{3}\left(x - \frac{2}{5}x\right) + 108.$$

Resolvemos para obtener el valor de x

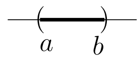
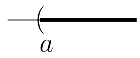
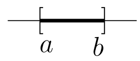
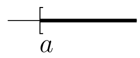
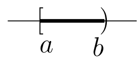
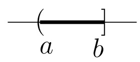
$$\begin{aligned} x - \frac{2}{5}x - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}x &= 108 \\ \frac{2}{5}x &= 108 \\ x &= 270. \end{aligned}$$

De esta manera resulta que el regalo costó $ 270. Ana aportó $\frac{2}{5}$ del total de $ 270, es decir, $ 108.

2.5 Inecuaciones

Las inecuaciones son desigualdades entre expresiones algebraicas en las que aparece un valor desconocido. La solución de una inecuación es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Si existen valores reales que verifican la inecuación, entonces podemos expresar su solución en forma de **intervalo** (o de unión de intervalos). Si ningún valor real verifica la inecuación, entonces el subconjunto solución es el **conjunto vacío**, que indicamos $\emptyset$.

En la siguiente tabla presentamos los distintos tipos de intervalos, su representación en una recta numérica y su notación de conjunto. Un primer ejemplo relacionado con estos conceptos fue presentado en la **Unidad 1**, en el **Ejemplo 1.2.2**.

Intervalo	**Notación de intervalo**	**Notación de conjuntos**	**Gráfica**
Abiertos	(a,b)	$\{x : a < x < b\}$	
	$(-\infty,a)$	$\{x : x < a\}$	
	$(a,+\infty)$	$\{x : x > a\}$	
Cerrados	$[a,b]$	$\{x : a \leqslant x \leqslant b\}$	
	$(-\infty,a]$	$\{x : x \leqslant a\}$	
	$[a,+\infty)$	$\{x : x \geqslant a\}$	
Semiabiertos	$[a,b)$	$\{x : a \leqslant x < b\}$	
	$(a,b]$	$\{x : a < x \leqslant b\}$	

En algunos casos la solución de una inecuación es un único punto. En tales situaciones no utilizamos la notación de intervalos para indicar la solución. Por ejemplo, la única solución de $x^2 \leqslant 0$ es $x = 0$.

Al momento de resolver una inecuación debemos tener presente las siguientes **propiedades de las desigualdades**. Las mismas son válidas para $<$,$>$, $\leqslant$ y $\geqslant$, pero por claridad solo las enunciamos en el caso de la desigualdad $<$.

(1) *Transitividad.* Si a, b y $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$a < b \quad y \quad b < c \qquad \Longrightarrow \qquad a < c.$$

(2) *Monotonía de la suma.* Si a, b y $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$a < b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a + c < b + c.$$

(3) *Monotonía del producto.* Si a, b, $c \in \mathbb{R}$ y $c > 0$ entonces

$$a < b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \cdot c < b \cdot c.$$

(4) *Elemento opuesto.* Si a y $b \in \mathbb{R}$, entonces

$$a < b \qquad \Longleftrightarrow \qquad -a > -b.$$

La cuarta propiedad es muy importante y vamos a demostrarla en forma directa.

Demostración de la propiedad 4

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, y supongamos $a < b$. De esta hipótesis, y por la monotonía de la suma, resulta que $a - b < 0$. Simbólicamente

$$a < b \quad \Longrightarrow \quad a + (-b) < b + (-b) \quad \Longrightarrow \quad a - b < 0.$$

Nuevamente utilizando la monotonía de la suma, obtenemos que

$$a - b < 0 \quad \Longrightarrow \quad a - b + (-a) < 0 + (-a) \quad \Longrightarrow \quad -b < -a.$$

Probamos así que para todo $a, b \in \mathbb{R},\ a < b \Longrightarrow -a > -b$. Usando estas mismas estrategias se prueba que para todo $a, b \in \mathbb{R},\ -a > -b \Longrightarrow a < b$ y con esto queda demostrada la propiedad.

Como consecuencia de las propiedades (3) y (4) tenemos que si a, b, $c \in \mathbb{R}$ y $c < 0$, entonces

$$a < b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \cdot c > b \cdot c.$$

Más propiedades de las desigualdades pueden encontrarse en el **Apéndice**.

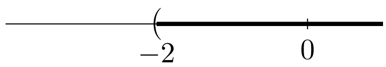
Veamos a continuación, a partir de ejemplos, cómo resolver distintos tipos de inecuaciones.

Ejemplo 2.5.1

Resolvamos la siguiente inecuación, indicando su solución en forma de intervalo, usando notación de conjunto y representando los valores encontrados en una recta numérica.

$$\begin{aligned} 2x - (x + 4) &< 5 \cdot (x + 1) - 1 \\ x - 4 &< 5x + 4 \\ -4x &< 8 \\ x &> -2. \end{aligned}$$

En notación de intervalo, la solución de esta inecuación es el intervalo abierto infinito $\mathcal{S} = (-2, +\infty)$. En notación de conjunto tenemos $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} : x > -2\}$ y su representación en la recta numérica es



Tenemos así un conjunto infinito de valores que verifican esta desigualdad. Por ejemplo, $x = -1$ es una solución ya que si reemplazamos con este valor en cada miembro de la inecuación inicial encontramos

$$2 \cdot (-1) - (-1 + 4) = -2 - 3 = -5 \qquad \text{y} \qquad 5 \cdot (-1 + 1) - 1 = -1,$$

es decir que se verifica la desigualdad planteada, porque $-5 < -1$. Sin embargo $x = -5$ no es una solución de esta inecuación pues al reemplazar en cada miembro resulta

$$2 \cdot (-5) - (-5 + 4) = -10 + 1 = -9 \qquad \text{y} \qquad 5 \cdot (-5 + 1) - 1 = -21,$$

y esto no verifica la desigualdad planteada, porque $-9 \not< -21$.

Ejemplo 2.5.2

Analicemos a continuación dos situaciones particulares: inecuaciones sin solución e inecuaciones para las que cualquier número real es solución.

1. Consideremos la inecuación

$$\begin{aligned} 5-8x &< 3(1-x)-5x \\ 5-8x &< 3-8x \\ 5 &< 3. \end{aligned}$$

   Esta desigualdad es absurda, es decir que la inecuación no tiene solución, luego el conjunto solución es $\mathcal{S}=\emptyset$.

2. Sea la inecuación

$$\begin{aligned} 2(x-4) &< 1-2(1-x) \\ 2x-8 &< -1+2x \\ -8 &< -1. \end{aligned}$$

   Esta desigualdad es verdadera para cualquier $x \in \mathbb{R}$ y así tenemos que el conjunto solución es $\mathcal{S}=\mathbb{R}$.

Para pensar 10

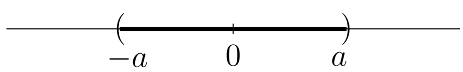
1. Sea $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. ¿Cuál es el signo de x^{-1}?
2. Sean $x, y \in \mathbb{R}$, tales que $x > y > 0$. ¿Es correcto afirmar que $x^{-1} > y^{-1}$? ¿Y que $x^2 > y^2$?

Inecuaciones con valor absoluto

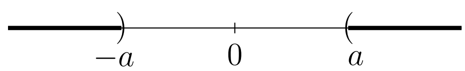
Las inecuaciones en las que aparece el valor absoluto pueden expresarse como un par de inecuaciones del tipo ya visto. Un primer ejemplo relacionado con este concepto fue presentado en la **Unidad 1**, en **Ejemplo 1.2.3**.

En general, si $a \in \mathbb{R}^+$ tenemos

$$\begin{aligned} |x| < a \quad &\Longleftrightarrow \quad -a < x < a \\ &\Longleftrightarrow \quad x > -a \quad \text{y} \quad x < a \end{aligned}$$



$$|x| > a \quad \Longleftrightarrow \quad x > a \quad \text{ó} \quad x < -a$$



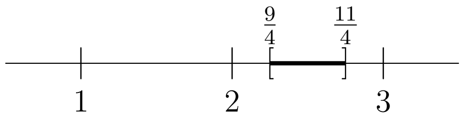
Ejemplo 2.5.3

Veamos, paso a paso, cómo resolver la siguiente inecuación.

$$\begin{aligned}
2\left|x-\frac{5}{2}\right|+\frac{1}{2} &\leqslant 1\\
2\left|x-\frac{5}{2}\right| &\leqslant \frac{1}{2}\\
\left|x-\frac{5}{2}\right| &\leqslant \frac{1}{4}\\
-\frac{1}{4}\leqslant x-\frac{5}{2} &\leqslant \frac{1}{4}\\
\frac{9}{4}\leqslant x &\leqslant \frac{11}{4}.
\end{aligned}$$

Podemos expresar la solución de esta inecuación en forma de intervalo cerrado finito o bien sobre una recta numérica

$$\mathcal{S}=\left[\frac{9}{4},\frac{11}{4}\right]$$



Ejemplo 2.5.4

Veamos a continuación el otro caso posible de una inecuación con valor absoluto.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6}-\frac{2}{3}|2-x| &< -1\\
-\frac{2}{3}|2-x| &< -\frac{7}{6}\\
|2-x| &> -\frac{7}{6}:\left(-\frac{2}{3}\right) \iff \underbrace{2-x>\frac{7}{4}}_{(1)} \quad \text{ó} \quad \underbrace{2-x<-\frac{7}{4}}_{(2)}.
\end{aligned}$$

Entonces, resolvemos (1) y encontramos

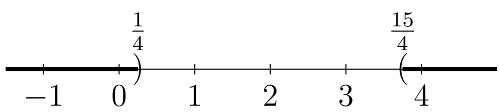
$$2-x>\frac{7}{4} \iff -x>-\frac{1}{4} \iff x<\frac{1}{4}.$$

Y luego resolvemos (2)

$$2-x<-\frac{7}{4} \iff -x<-\frac{15}{4} \iff x>\frac{15}{4}.$$

Así, la solución de la inecuación se expresa como la unión de dos intervalos abiertos infinitos

$$\mathcal{S}=\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{15}{4},+\infty\right)$$



Para pensar 11

1. ¿Qué valores de $y \in \mathbb{R}$ son solución de $1 - |2y| > 3$?
2. ¿Qué valores de $y \in \mathbb{R}$ verifican la inecuación $|y + 2| + 5 > 1$?

Inecuaciones y reglas de signo

Otro tipo de inecuaciones que estudiaremos es aquel en que factorizamos la expresión algebraica y hacemos uso de las reglas de signo.

Ejemplo 2.5.5

Veamos cómo resolver la inecuación

$$\frac{1}{3-x} - \frac{1}{2x} < \frac{2+x}{2x(3-x)},$$

y representar su solución en forma de intervalo.

Comenzamos agrupando todos los términos en un mismo miembro de la desigualdad.

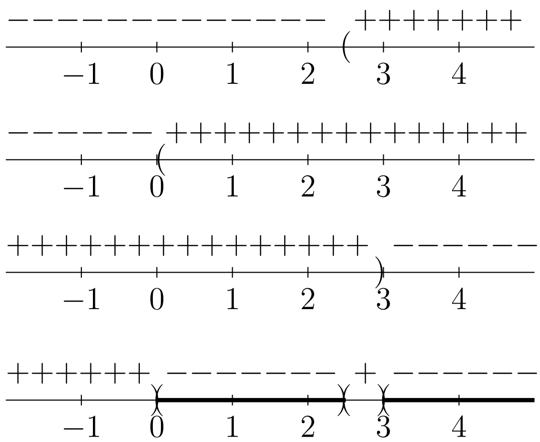
$$\begin{aligned} \frac{1}{3-x} - \frac{1}{2x} - \frac{2+x}{2x(3-x)} &< 0 \\ \frac{2x-(3-x)-(2+x)}{2x(3-x)} &< 0 \\ \frac{2x-5}{2x(3-x)} &< 0. \end{aligned}$$

Debe ser $x \neq 0$ y $x \neq 3$, y tenemos tres factores: $2x-5$, $2x$ y $3-x$, para los cuales vamos a realizar un estudio de signo. Tenemos

$$2x - 5 > 0 \iff x > \frac{5}{2}$$

$$2x > 0 \iff x > 0$$

$$3 - x > 0 \iff x < 3$$



signo de $2x-5$

signo de $2x$

signo de $3-x$

signo de $\dfrac{2x-5}{2x(3-x)}$

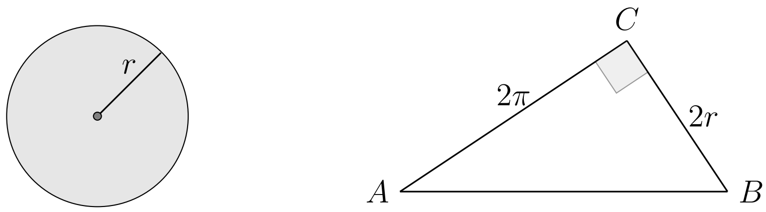
Luego

$$\frac{2x-5}{2x(3-x)} < 0 \iff x \in \mathcal{S} = \left(0, \frac{5}{2}\right) \cup (3, +\infty).$$

Planteo y resolución de problemas

Ejemplo 2.5.6

Calculemos los valores de r para los que el área del círculo es menor que el área del triángulo de la siguiente figura.



La inecuación que corresponde a este problema es

$$\pi r^2 < \frac{2r \cdot 2\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad \pi r^2 - 2\pi r < 0 \quad \Longrightarrow \quad \pi r(r-2) < 0.$$

Para que este producto sea negativo, dado que $r > 0$, debe ser

$$r - 2 < 0 \quad \Longrightarrow \quad r < 2.$$

Luego, para que el área del círculo sea menor que la del triángulo se debe verificar que $r \in (0, 2)$.

Actividades

1. Factorizar, si es posible, las siguientes expresiones.

   (a) $169a^5b^3c + 13ab^3c^5$,

   (b) $\dfrac{x^3y^2}{\sqrt{2}} + \left(\dfrac{y}{\sqrt{2}}\right)^3 x^2 + \left(\dfrac{xy}{\sqrt{2}}\right)^4$,

   (c) $5a^3b^2 - 10a^5b^2 + 5a^2b^3 + 15a^6b^5$,

   (d) $\dfrac{5}{2}m^5n^3 - \dfrac{1}{2}m^3n + \dfrac{1}{8}m^3np^3 + \dfrac{5}{2}m^4n$,

   (e) $\dfrac{10}{21}xyz + \dfrac{4}{3}x^2y^5z^4 - \dfrac{2}{9}xy^6z^5 - \dfrac{2}{3}xy^2z^8$.

2. Los siguientes trinomios pueden expresarse como cuadrado de un binomio. Encontrar dicha expresión.

   (a) $x^2 + 10x + 25$,

   (b) $m^2 - 2mn + n^2$,

   (c) $\dfrac{q^2}{4} - pq + p^2$,

   (d) $2y^4 + x^2 + 2\sqrt{2}xy^2$,

   (e) $4x^6 + \dfrac{4}{3}x^3y + \dfrac{y^2}{9}$,

   (f) $4x^6 + \dfrac{1}{16}y^8 - x^3y^4$.

3. Completar cada uno de los siguientes binomios (sumando o restando un término) para que resulte un trinomio cuadrado perfecto.

   (a) $x^2 + 4xy$,

   (b) $9a^2 - 6ab$,

   (c) $\dfrac{25}{4}x^2 - 15x$,

   (d) $16 + 4x$,

   (e) $\dfrac{9}{4}x^2 + 2xy$,

   (f) $a^2 - 6\sqrt{2}ab$.

4. Factorizar las siguientes diferencias de cuadrados.

   (a) $x^2 - 9$,

   (b) $y^2 - 25\,m^2$,

   (c) $4\,a^2 - 3\,b^4$,

   (d) $144\,m^6 - 121\,x^8y^4$,

   (e) $(x-y)^2 - a^2$,

   (f) $\dfrac{4}{9}a^6 - \dfrac{b^4}{25}$.

5. Operar algebraicamente, factorizar y simplificar al máximo las siguientes expresiones.

   (a) $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{x+3}{x^2+4x+4}$,

   (b) $\dfrac{6}{2y+6} - \dfrac{3y}{y^2-9}$,

   (c) $\dfrac{bx^2-b}{x^2+2x+1} - \dfrac{bx^2+1}{x^2+x}$,

   (d) $\left(\dfrac{a}{q+1} - \dfrac{a}{q-1}\right) \cdot \dfrac{a-aq^2}{3a^2}$,

   (e) $\left(p + q + \dfrac{q^2}{p-q}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{q^2}{p^2}\right)$,

   (f) $\dfrac{(ab)^{-2}}{(a+b)^{-2} \cdot (b^{-2} - a^{-2})}$,

   (g) $\left(x + \dfrac{2x}{x-2}\right) : \left(1 + \dfrac{4}{x^2-4}\right)$,

   (h) $\dfrac{m^2-n^2}{mn+n^2} \cdot \dfrac{mn}{m^2-2nm+n^2}$.

6. Comprobar las siguientes igualdades.

   (a) $\dfrac{(x^{-1}+y^{-1})^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}} : (x^{-2}-y^{-2})^{-1} = 1$,

   (b) $\left[\dfrac{3x^2+1}{2x^2} - \dfrac{3x+1}{9x^2-1}\dfrac{(3x-1)^2}{2x}\right] : \dfrac{x^2+2x+1}{4x^3} = \dfrac{2x}{x+1}$.

7. (a) Verificar la validez de la igualdad $\dfrac{b}{\sqrt{a}-\sqrt{a+b}} = -\sqrt{a}-\sqrt{a+b}.$

   (b) Usando el resultado anterior, operar algebraicamente y simplificar la expresión

$$\frac{b}{(a+b)\left(\sqrt{a}-\sqrt{a+b}\right)} + \frac{1}{\sqrt{a+b}}.$$

8. Resolver las siguientes ecuaciones.

   (a) $2x-3=\dfrac{1}{2}$,

   (b) $5-2\,(x+3) = -\dfrac{1}{2}\,(4x+2)\,,$

   (c) $\sqrt{x-2}=4$,

   (d) $\dfrac{4x-6}{12}-\dfrac{3x-8}{4}=\dfrac{2x-9}{6}-\dfrac{x-4}{8}$,

   (e) $\dfrac{2-(1-x)}{3}-x=1-\dfrac{2}{3}x$,

   (f) $2\left(\sqrt{2}-\sqrt{\dfrac{5}{2}}\,x\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{\dfrac{5}{2}}\,x$.

9. Determinar si los valores de x indicados son soluciones de la ecuación respectiva.

   (a) $x^3+3x^2-x-3=0;\qquad x=2,\qquad x=-1,$

   (b) $x+\sqrt[3]{x^3+1}=2x+1;\qquad x=-1,\qquad x=-2,$

   (c) $\dfrac{x+1}{x^2-1}=0;\qquad x=-1.$

10. Encontrar, si existen, las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

    (a) $2x+3-x^2=0$,

    (b) $2x^2-x+6=0$,

    (c) $3x^2=12(x-1)$,

    (d) $2x^2+\dfrac{1}{2}x+1=x(x-2)$.

11. Determinar el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones y verificar el resultado obtenido.

    (a) $\dfrac{8}{3}x^4+4x^2-\dfrac{9}{2}=0$,

    (b) $2x^4+6=8x^2$,

    (c) $(x^2-2)^2=9$,

    (d) $3\,(x^3+8)\,(x+5)=0$,

    (e) $\left(x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}\right)\left(\sqrt{2}x-2\sqrt{2}\right)=0$,

    (f) $(x^2-25)\,(x+1)\,x=0$,

    (g) $(x^2+1)\,(x-12)=0$,

    (h) $x\sqrt{x+9}+18=18$,

12. Encontrar, si existen, las soluciones de las siguientes ecuaciones con valor absoluto.

    (a) $|2x-7|=5$,

    (b) $\dfrac{4}{3}\left|2-\dfrac{5}{6}x\right|-\dfrac{2}{9}=0$,

    (c) $3-2\,|x+6|=8$,

    (d) $3\sqrt{5}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left|\sqrt{3}x+1\right|=\sqrt{5}$,

    (e) $5\,|1-2x|+6=0$

    (f) $-2\left|\dfrac{1}{3}x-2\right|+\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$,

13. Resolver las siguientes ecuaciones.

    (a) $\dfrac{x}{x-3}+\dfrac{2}{x+3}=\dfrac{x^2}{x^2-9}$,

    (b) $\dfrac{5x-3}{4-x^2}=\dfrac{5+x}{2+x}+\dfrac{x-3}{2-x}$,

    (c) $\dfrac{x^2-4x+1}{x-1}=\dfrac{x^2-3x}{x-1}-1$,

    (d) $x+\dfrac{2}{x+5}=\dfrac{12+2x}{x+5}$,

    (e) $\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}=-1$,

    (f) $\dfrac{(x+1)\,(x+3)}{x+1}=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

14. Encontrar un valor de k de forma que

    (a) $x=-3$ sea solución de $5x+3k=1$,

    (b) $x=\sqrt{2}$ sea solución de $2x^2+kx=6$,

    (c) $x=-\frac{1}{3}$ sea solución de $3kx^2+x=k$.

15. Plantear y resolver los siguientes problemas.

    (a) Después de un 20% de descuento, un proyector se vendió en 9.600 pesos. ¿Cuál es el precio original del artículo?

    (b) En 5 años Alberto tendrá 3 veces la edad que tenía hace 7 años. ¿Cuántos años tiene Alberto?

    (c) Cuatro socios de una empresa se reparten la ganancia de una operación comercial de la siguiente manera: a Eduardo le corresponde la tercera parte de lo ganado, a Jorge las dos quintas partes de lo ganado y los $ 2.420 restantes se los reparten Miguel y Roberto en partes iguales. ¿Cuál fue la ganancia que dejó la operación comercial? ¿Cuánto recibió cada uno?

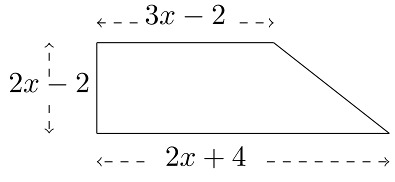
16. Plantear cada uno de los siguientes problemas, resolver y verificar la validez de la respuesta obtenida.

    (a) Hallar dos números naturales consecutivos tales que su producto sea 9.506.

    (b) Hallar la medida del lado de un cuadrado sabiendo que al disminuir en 6 m uno de sus lados, se obtiene un rectángulo cuya área es 91 m^2.

    (c) Calcular las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su base es tres centímetros mayor que su altura y su área 78, 75 cm^2.

    (d) Calcular la medida en cm. de las bases y la altura del siguiente trapecio sabiendo que su área es de 34 cm^2.



17. Resolver las siguientes inecuaciones, graficar el conjunto solución y expresarlo usando la notación de intervalo.

    (a) $10-\dfrac{5x}{2}\geqslant 0$,

    (b) $-3x+1\leqslant 5(x-3)+2$,

    (c) $\dfrac{34-2x}{3}-9<\dfrac{3x+8}{4}-x$,

    (d) $(x-1)^2-7>(x-2)^2$.

18. Resolver las siguientes inecuaciones con valor absoluto, representar la solución en la recta numérica y expresarla en forma de intervalos.

(a) $\left|\dfrac{2-3x}{7}\right| \leqslant 2$,

(b) $3|2x-5|-1<8$,

(c) $1-\left|1-\dfrac{x}{3}\right| \leqslant -\dfrac{1}{3}$,

(d) $1-2|x-3|<5$.

19. Resolver las siguientes inecuaciones haciendo uso de las reglas de signos y expresar la solución en forma de intervalo.

(a) $(2x-1)(x-3) \geqslant 0$,

(b) $(x-2x^2)\left(x+\dfrac{1}{2}\right) \leqslant 0$,

(c) $\dfrac{-1-3x}{1-4x} < 2$,

(d) $\dfrac{x+2}{2-x} \geqslant 1$,

(e) $x^2 \leqslant x$,

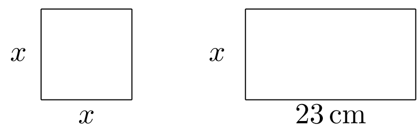
(f) $x^4-(3x)^2 > 0$,

(g) $\dfrac{1}{x+2} \leqslant -\dfrac{x^2}{x+2}$,

(h) $-\dfrac{2}{x} > -\dfrac{5x}{x^2+6}$.

20. Plantear y resolver los siguientes problemas.

(a) Hallar los valores de x para los cuales el área del cuadrado es mayor que la del rectángulo.



(b) Se quiere alquilar un auto para un viaje y las opciones con que se cuenta son

i. un costo fijo de \$ 100 al que se agrega \$ 20 por km recorrido,

ii. un cargo inicial de \$ 400 más \$ 17 por km recorrido.

¿Cuántos kilómetros hay que recorrer para que la opción ii) resulte la más conveniente?

(c) El Índice de Masa Corporal (IMC) es la razón entre la masa corporal y el cuadrado de la estatura de una persona. Diversos estudios realizados han concluido que el grupo más saludable corresponde a un IMC comprendido entre 20 $\frac{kg}{m^2}$ y 25 $\frac{kg}{m^2}$.
Si una persona mide 1,5 metros, para ser considerada saludable su masa corporal en kg deberá estar comprendida entre

i. 30 y $37,5$,

ii. 30 y $56,25$,

iii. 40 y 50,

iv. 45 y $56,25$,

v. 45 y 55.

Indicar la respuesta correcta.

(d) El perímetro de un cuadrado es inferior a 30 cm. Si aumentamos cada lado en 2,5 cm su perímetro supera los 30 cm. ¿Entre qué valores se encuentra la medida de su lado?

3 Polinomios

Síntesis de la unidad

En esta unidad estudiaremos un caso particular de expresiones algebraicas: los polinomios. Los conceptos sobre los que trabajaremos son los siguientes.

1. Definición y elementos característicos.
2. Operaciones (suma, resta, multiplicación y división).
3. El método de Ruffini para dividir un polinomio $P(x)$ por otro de la forma $Q(x) = x - a$.
4. Cálculo de raíces de un polinomio.
5. El concepto de divisibilidad para polinomios.

3.1 Definición y elementos de un polinomio

Un **polinomio** con coeficientes reales es una expresión algebraica de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

donde los valores $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales, n es un número natural o cero y x se denomina indeterminada.

Si $a_n \neq 0$, podemos distinguir los siguientes elementos de un polinomio:

- $a_0, \ldots, a_n$ son los **coeficientes del polinomio**,
- a_n es el **coeficiente principal**,
- a_0 es el **término independiente**,
- n se llama **grado** del polinomio.

Observación 3.1.1. Vamos a considerar, por convención, que el polinomio nulo $P(x) = 0$, no tiene grado.

Si el coeficiente principal es $a_n = 1$, el polinomio se llama **mónico**.

Un polinomio es **completo** si todos los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son distintos de cero, es decir que en el polinomio aparecen todos los términos desde el de mayor grado hasta el término independiente. Además, si los grados de los términos están ordenados en forma decreciente o creciente se dice que el polinomio está **ordenado**.

Dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ son **iguales** si los coeficientes correspondientes a términos semejantes son iguales. Por ejemplo,

$$P(x) = 3x - 2x^2 + 6 \quad \text{y} \quad Q(x) = -2x^2 + 3x + 6,$$

son polinomios iguales.

Ejemplo 3.1.2

Consideremos el polinomio $Q(x) = 2 - \sqrt{2}x^3 + 5x$.

El coeficiente principal de $Q(x)$ es $a_3 = -\sqrt{2}$ y el término independiente es $a_0 = 2$. El polinomio $Q(x)$ tiene grado 3 y no es mónico porque $a_3 \neq 1$.

El polinomio no tiene término de grado 2 entonces no es completo. Podemos escribirlo en forma ordenada decreciente de la siguiente manera

$$Q(x) = -\sqrt{2}x^3 + 5x + 2.$$

Dado un polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, y $c \in \mathbb{R}$, llamamos **valor numérico** de $P(x)$ en c al número

$$P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \ldots + a_1 c + a_0.$$

Ejemplo 3.1.3

Sea $Q(x)$ el polinomio del ejemplo anterior. El valor numérico de $Q(x)$ en -1 es

$$Q(-1) = 2 - \sqrt{2}(-1)^3 + 5(-1) = 2 + \sqrt{2} - 5 = \sqrt{2} - 3.$$

3.2 Operaciones entre polinomios

Dado que los polinomios son expresiones algebraicas, las operaciones de **suma** y **multiplicación** definidas en la unidad anterior siguen siendo válidas.

- La suma de dos polinomios se realiza sumando (o restando) los coeficientes de términos semejantes.
- La multiplicación entre dos polinomios se realiza aplicando la propiedad distributiva: se multiplica cada término de un polinomio por los términos del otro y luego se agrupan (sumando o restando) los términos semejantes.

En todos los casos puede ser útil escribir los polinomios con los que vamos a trabajar en forma ordenada decreciente o creciente. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.2.1

Calculemos la suma y la multiplicación de los polinomios

$$P(x) = \frac{3}{4} - 3x^2 + x^4 \quad \text{y} \quad Q(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1.$$

$$P(x) + Q(x) = x^4 - 3x^2 + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x^2 + 1 = x^4 + \left(-3 - \frac{1}{2}\right)x^2 + \frac{3}{4} + 1 = x^4 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{4}.$$

Observemos que antes de realizar la suma escribimos a $P(x)$ en forma ordenada decreciente.

La multiplicación de ambos polinomios es

$$\begin{aligned}
P(x)\cdot Q(x) &= \left(x^4-3x^2+\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}x^2+1\right)\\
&= x^4\left(-\frac{1}{2}x^2\right)+x^4-3x^2\left(-\frac{1}{2}x^2\right)-3x^2+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}x^2\right)+\frac{3}{4}\\
&= -\frac{1}{2}x^6+x^4+\frac{3}{2}x^4-3x^2-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{4}\\
&= -\frac{1}{2}x^6+\frac{5}{2}x^4-\frac{27}{8}x^2+\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

La **división entera** de dos polinomios, que escribimos $P(x)/Q(x)$, se realiza mediante un procedimiento similar al de la división de números enteros. Al dividir el polinomio $P(x)$ (dividendo) por el polinomio $Q(x)$ (divisor) obtenemos un polinomio $C(x)$ (cociente) y un polinomio $R(x)$ (resto). Tenemos entonces la siguiente relación

$$P(x) = Q(x)\cdot C(x) + R(x).$$

Es importante destacar que *el grado del resto $R(x)$ es siempre menor al grado del divisor $Q(x)$* ó $R(x) = 0$.

Veamos por medio de un ejemplo cómo resolver una división de polinomios.

Ejemplo 3.2.2

Dividir el polinomio $P(x) = 8x^4 - 6x^2 + x$ por $Q(x) = 2x^2 - 3$.

1. Escribimos ambos polinomios en forma decreciente. Si los polinomios no son completos agregamos los términos faltantes multiplicados por cero.

$$8x^4+0x^3-6x^2+x+0 \qquad \underline{\big|\; 2x^2+0x-3}$$

2. Calculamos el cociente entre el término principal de $P(x)$ y el del divisor $Q(x)$. Esto es $8x^4/2x^2 = 4x^2$. Multiplicamos este cociente por el divisor y lo restamos de $P(x)$.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
8x^4 & +0x^3 & -6x^2 & +x & +0 & 2x^2+0x-3 \\ \cline{6-6}
-8x^4 & +0x^3 & +12x^2 & & & 4x^2 \\ \cline{1-5}
 & & 6x^2 & +x & +0 &
\end{array}$$

3. Calculamos ahora el cociente entre el término de mayor grado de la resta y el divisor $Q(x)$. En nuestro ejemplo tenemos $6x^2/2x^2 = 3$. Multiplicamos el divisor por este cociente y lo restamos al polinomio que obtuvimos en el paso anterior.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
8x^4 & +0x^3 & -6x^2 & +x & +0 & 2x^2+0x-3 \\ \cline{6-6}
-8x^4 & +0x^3 & +12x^2 & & & 4x^2+3 \\ \cline{1-5}
 & & 6x^2 & +x & +0 & \\
 & & -6x^2 & +0x & +9 & \\ \cline{3-5}
 & & & x & +9 &
\end{array}$$

El cálculo termina porque el grado del polinomio que resulta luego de la resta es menor que el grado del divisor.

El cociente de la división es $C(x) = 4x^2 + 3$ y el resto es $R(x) = x + 9$. Tenemos entonces

$$P(x) = (2x^2 - 3)(4x^2 + 3) + x + 9.$$

Para pensar 12

Al dividir el polinomio $P(x)$ por $Q(x) = 2x^2 - 3$ se obtiene el polinomio cociente $C(x) = x^2 - x + 1$ y el resto resulta $R(x) = 3x - 2$. ¿Cuál es la expresión del polinomio $P(x)$?

Nota: Esta actividad esta vinculada a lo propuesto en el ejercicio 9 de las actividades incluidas al final de la unidad.

Método de Ruffini

El método de Ruffini nos permite realizar, de forma sencilla, divisiones de polinomios en el caso particular en el que el divisor es de la forma $Q(x) = x - c$, $c \in \mathbb{R}$. Veamos en un ejemplo como utilizamos este método.

Ejemplo 3.2.3

A continuación mostramos paso a paso cómo hallar el cociente y el resto de dividir el polinomio $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5$ por $Q(x) = x - 3$ aplicando el método de Ruffini.

Para comenzar escribimos el polinomio $P(x)$ en forma decreciente y si el polinomio no es completo agregamos los términos faltantes multiplicados por cero, así resulta

$$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 0x + 5.$$

Como el divisor es $Q(x) = x - 3$, tenemos el valor $c = 3$.

Realizamos la división con la ayuda de una tabla en la que colocamos en la primer fila los coeficientes del polinomio $P(x)$ y a la izquierda de la línea vertical colocamos el valor de c. A continuación describimos los cálculos que se realizan para completar la tabla y hallar así el cociente y el resto de la división.

1. El primer coeficiente de $P(x)$, que en este caso es 2 se reescribe en la tercer fila, luego se multiplica por c y el resultado se coloca debajo del segundo coeficiente de $P(x)$.

	2	-7	0	5
3		**6**		
	2			

2. Sumamos el segundo coeficiente con el valor que agre– gamos en el paso anterior y colocamos el resultado debajo de ambos en la tercer fila. Luego multiplicamos este último valor por c y colocamos el resultado en la segunda fila debajo del tercer coeficiente de $P(x)$.

	2	-7	0	5
3		6	$\mathbf{-3}$	
	2	$\mathbf{-1}$		

3. Siguiendo los cálculos de esta manera completamos la tabla.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -7 & 0 & 5 \\
3 & & 6 & -3 & -9 \\
\hline
 & 2 & -1 & -3 & \boxed{-4}
\end{array}$$

El último valor en la tercer fila de la tabla es el resto de la división, en este caso es $R(x) = -4$. Los demás valores son los coeficientes del polinomio cociente ordenados en forma decreciente. Así en este ejemplo resulta $C(x) = 2x^2 - x - 3$. Finalmente encontramos

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x) = (x - 3) \cdot (2x^2 - x - 3) - 4.$$

Observemos que en el caso particular en que el divisor es de la forma $x-c$, el cociente siempre tiene un grado menos que el polinomio que estamos dividiendo y el resto es una constante, es decir, el resto es el polinomio nulo o un polinomio de grado cero.

Al presentar este método escribimos en forma genérica que el divisor tiene la forma $Q(x) = x - c$, con $c \in \mathbb{R}$. Es importante tener en cuenta que el número c puede ser negativo, como ocurre en los siguientes ejemplos

- $Q(x) = x + 2 \implies c = -2$,
- $Q(x) = x + 3\sqrt{7} \implies c = -3\sqrt{7}$.

En estos casos el método descripto se aplica de la misma manera. Un ejemplo de esta situación se resuelve en la siguiente sección (**Ejemplo 3.3.3**).

3.3 Raíces de un polinomio. Factorización

Un valor $c \in \mathbb{R}$ es una **raíz** de un polinomio $P(x)$ si el valor numérico de $P(x)$ en c es cero, es decir, si $P(c) = 0$. Podemos pensar entonces a la raíz c como una solución de la ecuación $P(x) = 0$ y utilizar las herramientas de la unidad anterior para hallar las raíces de un polinomio.

Si c es raíz del polinomio $P(x)$, el mismo se puede expresar en la forma

$$P(x) = (x - c) \cdot C(x).$$

El polinomio $C(x)$ tendrá un grado menos que $P(x)$ y lo podemos calcular realizando la división de $P(x)$ por $x - c$. Para esto podemos utilizar, por ejemplo, el método de Ruffini.

Se dice que una raíz c tiene **multiplicidad** m, con $m \in \mathbb{N}$, (o bien que c es una raíz de orden m) si existe un polinomio no nulo $Q(x)$ tal que

$$P(x) = (x - c)^m \, Q(x) \qquad \text{y} \qquad Q(c) \neq 0,$$

es decir, c no es raíz de $Q(x)$.

Ejemplo 3.3.1

El valor $c = 0$ es raíz de $P(x) = 6x^3 + 2x^6 - x^7$, pues $P(0) = 0$.

Notemos que x^3 es un factor común en todos los términos del polinomio, por lo que podemos expresarlo de la forma

$$P(x) = x^3 \cdot (6 + 2x^3 - x^4) = x^3 \cdot Q(x).$$

Dado que el polinomio $Q(x) = 6+2x^3-x^4$ no tiene a $c = 0$ como raíz, esto es $Q(0) = 6 \neq 0$, entonces concluimos que $c = 0$ es una raíz de P de multiplicidad 3 (también se dice raíz de orden 3 o raíz triple).

Conocer las raíces de un polinomio nos permite expresarlo en **forma factorizada**, esto es, como un producto de polinomios de menor grado. De esta observación es posible concluir que *un polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales distintas.* Tener un polinomio escrito en forma factorizada nos facilita la tarea de encontrar sus raíces.

Ejemplo 3.3.2

Si tenemos un polinomio expresado en la forma factorizada

$$P(x) = 2(x-2)(x-3)^3(x+3),$$

inmediatamente podemos concluir que las raíces de $P(x)$ son $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -3$.

Esto es así dado que encontrar las raíces de $P(x)$ equivale a resolver $P(x) = 0$, y

$$P(x) = 0 \iff 2(x-2)(x-3)^3(x+3) = 0 \iff \begin{cases} x-2=0 & \iff x = 2, \\ (x-3)^3 = 0 & \iff x = 3, \\ x+3 = 0 & \iff x = -3. \end{cases}$$

Más aún, $x_1 = 2$ y $x_3 = -3$ son raíces simples (raíces de orden 1), mientras que $x_2 = 3$ es raíz triple.

Es importante observar que no todo polinomio tiene raíces reales, pues no siempre una ecuación de la forma $P(x) = 0$ tiene solución en $\mathbb{R}$. Por ejemplo,

- el polinomio $P(x) = x^2 + 5$ no tiene ninguna raíz real, pues la ecuación $P(x) = 0$ no tiene soluciones reales,
- el polinomio $Q(x) = x^2+2x+3$ no tiene raíces reales dado que la ecuación $x^2+2x+3 = 0$ tiene discriminante $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8 < 0$ y por lo tanto no tiene solución en $\mathbb{R}$.

En estos casos en que no existen raíces reales, la forma en que está dado el polinomio ya es su forma factorizada.

Ejemplo 3.3.3

Calculemos las raíces del polinomio $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 9x^2 - x + 3$ sabiendo que $c = -1$ es raíz de $P(x)$.

Que $c = -1$ sea raíz de $P(x)$ quiere decir que $P(x)$ es divisible por $Q(x) = x + 1$. Podemos entonces hacer la división de $P(x)$ por $Q(x) = x + 1$, utilizando el método de Ruffini presentado en la sección anterior. En este caso tenemos $c = -1$ y resulta

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 2 & -3 & -9 & -1 & 3 \\ -1 & & -2 & 5 & 4 & -3 \\ \hline & 2 & -5 & -4 & 3 & \multicolumn{1}{|r}{0} \\ \cline{6-6} \end{array}$$

Entonces podemos expresar $P(x) = (x+1)(2x^3 - 5x^2 - 4x + 3)$. Seguimos factorizando ahora el polinomio $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$.

El enunciado del ejercicio nos indica que $c = -1$ es una raíz, pero nada dice acerca de su multiplicidad, por lo que una opción es volver a aplicar la regla de Ruffini con $c = -1$ para ver si la raíz tiene orden mayor que uno (es decir, si la raíz se repite). Aplicamos nuevamente la regla

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -5 & -4 & 3 \\ -1 & & -2 & 7 & -3 \\ \hline & 2 & -7 & 3 & \multicolumn{1}{|r}{0} \\ \cline{5-5} \end{array}$$

y encontramos que $c = -1$ es una raíz por lo menos de orden 2. Hasta aquí tenemos

$$P(x) = (x+1)^2(2x^2 - 7x + 3).$$

Si volvemos a aplicar la regla de Ruffini, ahora al polinomio $2x^2 - 7x + 3$ y

$$\begin{array}{r|rr|r} & 2 & -7 & 3 \\ -1 & & -2 & 9 \\ \hline & 2 & -9 & \multicolumn{1}{|r}{12} \\ \cline{4-4} \end{array}$$

Dado que el resto no es cero, entonces $2x^2 - 7x + 3$ no es divisible por $Q(x) = x + 1$. En otras palabras, -1 es una raíz de multiplicidad 2.

Ahora, para hallar más raíces de $P(x)$, si es que existen, debemos resolver la ecuación

$$P(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2(2x^2 - 7x + 3) = 0.$$

Es decir que debemos resolver la ecuación cuadrática $2x^2 - 7x + 3 = 0$. En la unidad anterior presentamos la fórmula para calcular las soluciones de este tipo de ecuaciones. En este caso el discriminante es $\Delta = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 > 0$, es decir, que existen dos soluciones

$$c_2 = \frac{7 + \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{12}{4} = 3 \qquad \text{y} \qquad c_3 = \frac{7 - \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Así, las raíces de $P(x)$ son $c_1 = -1$ (raíz doble), $c_2 = 3$ (raíz simple) y $c_3 = \frac{1}{2}$ (raíz simple).

Ya que conocemos las raíces del polinomio con su orden de multiplicidad y sabiendo que su coeficiente principal es $a_3 = 2$, podemos expresarlo de forma factorizada

$$P(x) = 2(x+1)^2(x-3)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Ejemplo 3.3.4

Encontremos un polinomio de grado mínimo con coeficientes reales que tenga como raíz simple a $c_1 = 2$ y como raíz doble a $c_2 = -5$.

Dado que $P(x)$ tiene una raíz simple y una doble, tiene como mínimo grado 3. Como c_1 es raíz simple, $P(x)$ tiene un factor de la forma $(x-2)$, y como c_2 es raíz doble, el polinomio tiene un factor de la forma $(x+5)^2$. Luego, tenemos que

$$P(x) = a(x-2)(x+5)^2, \qquad a \in \mathbb{R},\, a \neq 0.$$

Notemos que no existe un único polinomio que cumpla con las condiciones impuestas.

Ahora, si agregamos por ejemplo la condición de que $P(0) = 50$, entonces resulta que

$$50 = P(0) = a(-2)25 = -50\,a \quad \Longrightarrow \quad a = -1,$$

y así, el único polinomio que cumple todas las condiciones es $P(x) = -(x-2)(x+5)^2$.

Los polinomios de grado 4 de la forma $P(x) = ax^4 + bx^2 + c$, $a \neq 0$, pueden estudiarse usando la fórmula resolvente vista para ecuaciones cuadráticas. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.3.5

Calculemos las raíces reales del polinomio $P(x) = x^4 - x^2 - 2$.

Para hallar las raíces de $P(x)$ debemos resolver la ecuación bicuadrática $x^4 - x^2 - 2 = 0$. Como hicimos en el **Ejemplo 2.4.3**, sustituimos la incógnita x con la expresión $x^2 = u$ y encontramos, para la incógnita u, la ecuación cuadrática

$$u^2 - u - 2 = 0.$$

El discriminante es $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 > 0$ por lo que existen dos soluciones

$$u_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2} = 2 \qquad \text{y} \qquad u_2 = \frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2} = -1.$$

Es decir que podemos expresar $u^2 - u - 2 = (u-2)(u+1)$. Volviendo a la variable x resulta

$$P(x) = (x^2-2)(x^2+1).$$

El primer factor es una diferencia de cuadrados que puede factorizarse, mientras que el segundo factor es un polinomio que no posee raíces reales y por lo tanto no puede factorizarse. Finalmente,

$$P(x) = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+1),$$

y las raíces reales de $P(x)$ son $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$, ambas son raíces simples.

Para pensar 13

1. Si a es raíz del polinomio $P(x)$ y $Q(x)$ es otro polinomio cualquiera, entonces a es raíz del polinomio $T(x) = P(x) \cdot Q(x)$. ¿Por qué?
2. Si un polinomio $P(x)$ tiene término independiente nulo, entonces podemos indicar en forma inmediata una de sus raíces. ¿Cuál?

Divisibilidad de polinomios. Teorema del resto

Si al dividir un polinomio $P(x)$ por un polinomio no nulo $Q(x)$ resulta el resto igual a cero, decimos que el polinomio $P(x)$ es **divisible** por el polinomio $Q(x)$.

Ejemplo 3.3.6

1. En el caso del ejemplo 3.2.2 el polinomio $P(x) = 8x^4 - 6x^2 + x$ no es divisible por $Q(x) = 2x^2 - 3$ ya que el resto de la división no es cero.
2. Vimos que el polinomio del ejemplo 3.3.3 se puede expresar en la forma

$$P(x) = 2(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-3).$$

De acuerdo a esta expresión, $P(x)$ es divisible por ejemplo por los polinomios

$$Q_1(x) = x+1, \quad Q_2(x) = x - \frac{1}{2}, \quad Q_3(x) = x-3,$$

$$Q_4(x) = 2(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right), \quad Q_5(x) = (x+1)(x-3).$$

En cada caso podemos obtener fácilmente el polinomio cociente. En general, si el resto de dividir $P(x)$ por $Q(x)$ es cero, el cociente está determinado por $C(x) = P(x)/Q(x)$. De esta forma, el cociente de dividir $P(x)$ por $Q_5(x)$ es

$$C_1(x) = \frac{2\cancel{(x+1)}\left(x - \frac{1}{2}\right)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-3)}} = 2\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Escribimos la división en forma racional (en forma de fracción) pues así es fácil ver el resultado: basta con simplificar la expresión.

En el caso en que el divisor sea un polinomio de la forma $x - c$, podemos calcular el resto sin realizar la división usando el siguiente teorema.

Teorema 3.3.7: Teorema del Resto

El resto de dividir un polinomio $P(x)$ por $x - c$ es igual al valor numérico del polinomio $P(x)$ en c, es decir, $P(c)$.

Demostración: Si dividimos un polinomio $P(x)$ por $x-c$ tenemos la siguiente expresión

$$P(x) = (x-c)\cdot C(x) + R(x).$$

Como el divisor es un polinomio de grado uno, el resto $R(x)$ es un polinomio de grado 0 ó $R(x)=0$. Así, el resto es un número real $R(x)=r$, y se obtiene calculando el valor numérico del polinomio en $x=c$

$$P(c) = (c-c)\cdot C(c) + r = r.$$

$\square$

Entonces, utilizando el teorema anterior, si el resto de la división es igual a cero, es decir $P(c)=0$ (o, equivalentemente c es raíz de $P(x)$), podemos asegurar que el polinomio $P(x)$ es divisible por $x-c$.

Ejemplo 3.3.8

Hallemos el resto de dividir el polinomio $P(x) = x^5 - 7x^2 - 35x$ por $x+2$ sin realizar la división.

En este caso el valor de c es -2, calculamos entonces

$$P(-2) = (-2)^5 - 7(-2)^2 - 35(-2) = -32 - 28 + 70 = 10.$$

Luego, utilizando el Teorema del resto podemos asegurar que el resto de dividir $P(x)$ por $x+2$ es 10. Así, podemos asegurar que el polinomio $P(x)$ no es divisible por $x+2$.

Ejemplo 3.3.9

Determinemos el valor de b para que el polinomio $P(x) = -2x^4 + bx^2 + 5bx$ sea divisible por $x+1$.

Utilizando el Teorema del resto podemos asegurar que si $P(-1)=0$ el polinomio $P(x)$ será divisible por $x+1$. Debemos hallar entonces un valor de b tal que se verifique $P(-1)=0$. Reemplazando tenemos

$$P(-1) = -2(-1)^4 + b(-1)^2 + 5b(-1) = -2 + b - 5b, \quad \Longrightarrow \quad -2 - 4b = 0,$$

y así $b = -\dfrac{1}{2}$ es el valor buscado.

Para pensar 14

Si el resto de dividir un polinomio $P_1(x)$ por $Q(x) = x-a$ es 3 y el resto de dividir un polinomio $P_2(x)$ por el mismo $Q(x)$ es -5, ¿es posible saber cuál es el resto de dividir $P(x) = P_1(x)\cdot P_2(x)$ por este mismo polinomio $Q(x)$? ¿Qué se puede asegurar respecto del resto de dividir $T(x) = P_1(x) + P_2(x)$ por el polinomio $Q(x)$?

Actividades

1. Indicar cuáles de las siguientes expresiones son polinomios con coeficientes reales.

   (a) $\frac{1}{5}x^2$,
   (b) $8x^2 - \sqrt{5}x^9 - 1$,
   (c) $5x^{-1} - x + 2$,
   (d) $2\pi x^3 - \frac{\pi}{3}x^2 + 1$,
   (e) $7 - \frac{1}{x}$,
   (f) -3,
   (g) $2^x + 3^{x+1}$,
   (h) $3\sqrt{x} - 4x + x^3$,
   (i) $6^{-1} - 2x + 3x^3$.

2. Completar la siguiente tabla.

Polinomio	Grado	Coeficiente principal	Término independiente	Forma decreciente
$P(x) = 3+5x^5+6x^3$				
$P(x) = 2 - x$				
$P(x) = 8$				
$P(x) = x^4 + x^7 + 9x$				
$P(x) = x + 1 + 4x^2$				
$P(x) = 3x^6$				

3. Determinar los valores reales a, b y c para que se verifique $P(x) = Q(x)$.
   (a) $P(x) = x^3 + 5x^2 - 1$ y $Q(x) = (a+1)x^3 + bx^2 + c$.
   (b) $P(x) = -x^5 + 2x^3 - x$ y $Q(x) = -(a+b)x^5 + 2x^3 + bx^4 - x + c$.

4. Determinar los valores de a y $b \in \mathbb{R}$ para que el polinomio

$$Q(x) = (3a-6)x^2 + (4a-b-9)x,$$

   sea igual al polinomio nulo.

5. Dados los siguientes polinomios, hallar el valor numérico para $x = 2$ y $x = -1$.
   (a) $P(x) = -3x^2 + 4x + 3$,
   (b) $Q(x) = x^4 - 3x^3 + 2x$,
   (c) $R(x) = -5x - 4x^2 - 2$.

6. Hallar el valor de m en los siguientes polinomios para que se cumplan las condiciones indicadas en cada caso.
   (a) $P(x) = x^3 + 2x^2 - mx$ y $P(-1) = 3$,
   (b) $Q(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^2 - m$ y $Q(1) = 2$,
   (c) $R(x) = -x^2 + 3\sqrt{5}x - m$ y $R(\sqrt{5}) = 0$.

7. Dados los polinomios

$$P(x) = x^5 - 3x^2 + 2x, \quad Q(x) = -2x^4 + 5x^2, \quad R(x) = 4x^6 - 3x^4 + x^3 - 7x^2 + 3x,$$

efectuar las siguientes operaciones indicando el grado del polinomio resultante.

(a) $P(x) - Q(x)$,
(b) $P(x) + 3\,Q(x) + 5x^2$,
(c) $-3\,R(x) - P(x)$,
(d) $P(x) \cdot Q(x)$,
(e) $Q(x)^2$,
(f) $Q(x)^2 + x\,P(x) + R(x)$.

8. Calcular, en cada caso, el cociente $C(x)$ y el resto $R(x)$ de dividir el polinomio $P(x)$ por $Q(x)$ y expresar cada polinomio como $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$. Cuando sea posible, aplicar la Regla de Ruffini.

(a) $P(x) = x^4 + 3x^3 - 3x + 8$ y $Q(x) = x^3 - x^2 + x - 1$,

(b) $P(x) = 6x^7 - 2x^6 - x^4 + x$ y $Q(x) = x - 1$,

(c) $P(x) = -2x^4 - 3x^2$ y $Q(x) = x + 3$,

(d) $P(x) = 3x^5 - x^4 + 5x - 2$ y $Q(x) = x^2 + x - 4$.

9. (a) Hallar el dividendo $P(x)$ de una división, sabiendo que el resto es $R(x) = 3x^2 + x$, el cociente es $C(x) = x^3 - x$ y el divisor es $Q(x) = x^4 - 3x^3 + 1$.

(b) Hallar el divisor $Q(x)$ de una división de polinomios, sabiendo que el dividendo es $P(x) = -x^5 + 3x^2 + 2x - 1$, el cociente es $C(x) = -x^3 + x + 3$ y el resto es $R(x) = x - 4$.

10. Determinar cuáles de los números indicados son raíces del polinomio dado.

(a) $P(x) = 3x^2 + 5x - 2$ y los valores $x = -2$, $x = -1$ y $x = \dfrac{1}{3}$,

(b) $P(x) = -2x^3 + x^2 - x - 1$ y los valores $x = 2$, $x = -1$ y $x = -\dfrac{1}{2}$.

11. Hallar, si existen, las raíces reales de los siguientes polinomios, indicando, en cada caso, el orden de multiplicidad. Dar una expresión factorizada de cada polinomio.

(a) $P(x) = 2x^5 + x^4 + x^2$, sabiendo que -1 es raíz,

(b) $P(x) = x^5 + 2x^3 + x$,

(c) $P(x) = 8x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 9x - 2$, sabiendo que $\frac{1}{2}$ es raíz,

(d) $P(x) = (x^4 - 18x^2 + 81)(x^5 + 4x^3)$,

(e) $P(x) = (x^4 - 25)(x^2 + 2x + 2)$,

(f) $P(x) = 3x^4 - 9x^3 + 9x^2 - 3x$, sabiendo que 1 es una raíz.

12. Indicar, en cada caso, un polinomio de grado mínimo con coeficientes reales tal que

(a) tiene por raíces $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{4}$, $x_3 = \frac{2}{3}$ y $x_4 = -1$; x_4 es raíz de multiplicidad dos,

(b) tiene por raíces $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = 4$, ambas de multiplicidad dos,

(c) su coeficiente principal es -3 y sus raíces son $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$, $x_3 = \sqrt{2}$ y $x_4 = -\sqrt{2}$,

(d) tiene por raíces $x_1 = 2$, $x_2 = -3$ y es divisible por $x^2 + 4$.

(e) sea divisible por $x^2 - 1$ y cuyo valor numérico en $x = 2$ y $x = 3$ sea cero. ¿El polinomio hallado es el único que verifica estas condiciones?

(f) sea divisible por $x^2 + 3$, tenga a $x = 1$ como raíz triple y cuyo valor numérico en $x = -1$ sea 8. ¿Es único?

13. Determinar, sin efectuar la división, si $P(x)$ es divisible por $Q(x)$.

(a) $P(x) = x^3 - 8$ y $Q(x) = x - 2$,

(b) $P(x) = 2x^7 + 3x^6 + 18x^3 + 29x + 10$ y $Q(x) = x + 1$,

(c) $P(x) = x^2 - 5x + 6$ y $Q(x) = x - 3$,

(d) $P(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ y $Q(x) = x + \dfrac{1}{2}$.

14. Determinar el valor de k para que $P(x)$ resulte divisible por $Q(x)$.

(a) $P(x) = x^3 + kx^2 + k + 4$ y $Q(x) = x - 1$,

(b) $P(x) = kx^4 - 4x^3 + 16kx - 16$ y $Q(x) = x + 2$.

15. (a) Calcular el valor de m para que el resto de la división de $P(x) = 4x^4 + mx^3 + 3x^2$ por $Q(x) = x - 3$ sea 324.

(b) Hallar la única raíz real de $P(x) = 2x^3 - 18x^2 + x - 9$, sabiendo que $P(x)$ es divisible por $Q(x) = 2x^2 + 1$.

(c) Encontrar los valores de a tales que al dividir $x^2 + 5x - 2$ por $x - a$ el resto es igual a -8.

4 Funciones de variable real

Síntesis de la unidad

En esta unidad vamos a trabajar con los siguientes conceptos relacionados con funciones.

1. Definición, dominio e imagen.
2. Representación gráfica de funciones de variable real.
3. Funciones definidas por partes.
4. Operaciones entre funciones: suma, resta, multiplicación, división y composición.
5. Funciones polinómicas.

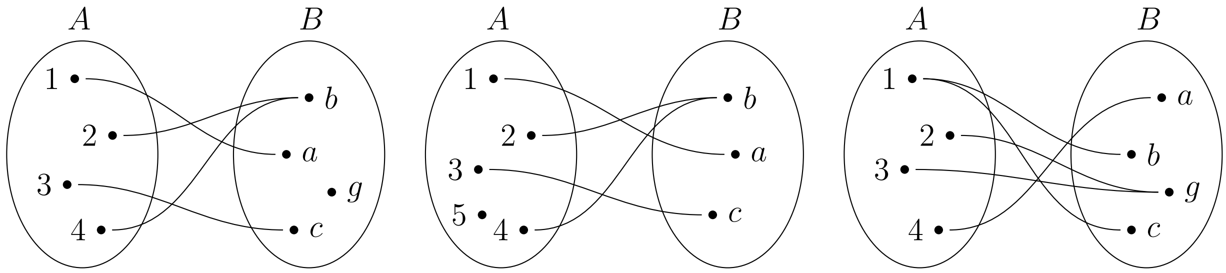
4.1 Funciones. Dominio e imagen

Sean A y B dos conjuntos. Una **función** f de A en B, que indicamos $f : A \to B$, es una correspondencia que a cada elemento de A le asigna uno y solo un elemento de B.

El conjunto A se llama **dominio** de la función, y el conjunto formado por los elementos de B que se relacionan con algún elemento de A se llama **imagen** de la función.

Ejemplo 4.1.1

Los siguientes **diagramas de Venn** representan tres correspondencias distintas entre dos conjuntos A y B.



(a) (b) (c)

1. En el esquema (a) la relación es una función $f : A \to B$ con dominio $\mathrm{Dom}\,(f) = A = \{1, 2, 3, 4\}$ e imagen $\mathrm{Im}\,(f) = \{a, b, c\}$. Observemos que la imagen de esta función no coincide con el conjunto B.
2. En el esquema (b) no tenemos una función $f : A \to B$ ya que hay un elemento en A, el número 5, al que no le corresponde ningún elemento de B. Sin embargo, si tomamos un nuevo conjunto $\widetilde{A} = \{1, 2, 3, 4\} \subset A$, la relación $f : \widetilde{A} \to B$ es una función con dominio $\mathrm{Dom}\,(f) = \widetilde{A}$ e imagen $\mathrm{Im}\,(f) = \{a, b, c\}$.
3. El esquema (c) no es una función porque al elemento $1 \in A$ le corresponden dos elementos en B.

4.2 Funciones de una variable real

Se llama **función real de una variable real** a cualquier aplicación $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, que hace corresponder a cada $x \in D$ uno y solo un valor $f(x) \in \mathbb{R}$. Estas funciones suelen representarse de la forma $y = f(x)$ donde x se llama **variable independiente** e y se llama **variable dependiente**.

Por lo general expresamos estas funciones mediante una fórmula. Así, el **dominio** de una función f es el conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ formado por todos los valores $x \in \mathbb{R}$ en los que la función f está definida, es decir, los valores para los que dicha fórmula tiene sentido. Por ejemplo, el dominio de $f(x) = \sqrt[4]{x}$ es $D = \mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dado que las raíces de índice par no están definidas para números negativos.

La **imagen** de una función f es el conjunto definido por $\mathrm{Im}\,(f) = \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in D\}$.

Para conocer el **valor de una función** f en un punto $x_0 \in \mathrm{Dom}\,(f)$, reemplazamos dicho valor en la fórmula que la define. Por ejemplo,

$$\text{si} \quad f(x) = 1 - x^2 \quad \text{entonces} \quad f(-2) = 1 - (-2)^2 = -3.$$

Representación gráfica. Intersecciones con los ejes cartesianos

Podemos representar gráficamente a una función de variable real f en un **plano cartesiano**, al que indicamos con el símbolo $\mathbb{R}^2$. Sobre el eje horizontal, llamado eje de las **abscisas**, o simplemente eje x, representamos los valores del dominio de la función, mientras que en el eje vertical, llamado eje de las **ordenadas**, o bien eje y, representamos los valores de la imagen. Así, sobre este plano cartesiano dibujamos los distintos **pares ordenados** $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$.

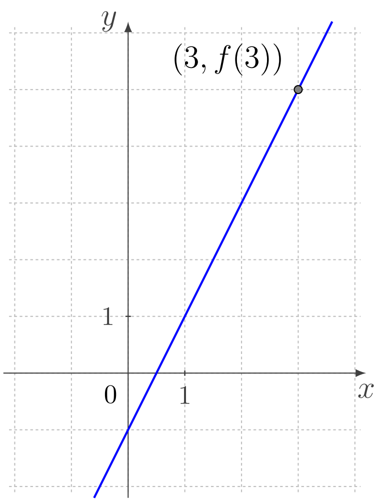
Ejemplo 4.2.1

En los siguientes ejemplos analizamos el dominio, la imagen y la representación gráfica de distintas funciones reales.

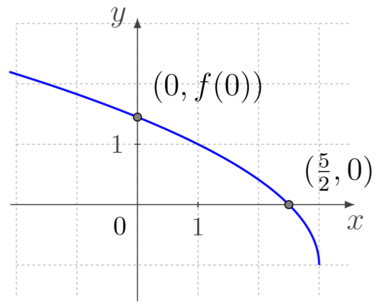
1. La función dada por $f(x) = 2x - 1$ está definida para cualquier número real, es decir que $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$. También $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$. Y su representación gráfica es una recta. El valor de f en $x = 3$ es

$$f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5.$$

Así encontramos que el par ordenado $(3, 5)$ pertenece al gráfico de f.
Este tipo de funciones, llamadas funciones lineales, se estudiarán con más detalle en la unidad siguiente.



2. La función $g(x) = \sqrt{6-2x} - 1$ está definida para valores de $x \in \mathbb{R}$ que cumplan la condición $6 - 2x \geqslant 0$, esto es $x \leqslant 3$. Es decir que el dominio de g es $\mathrm{Dom}\,(g) = (-\infty, 3]$. Su imagen, podemos verlo a partir del gráfico, es $\mathrm{Im}\,(g) = [-1, +\infty)$.

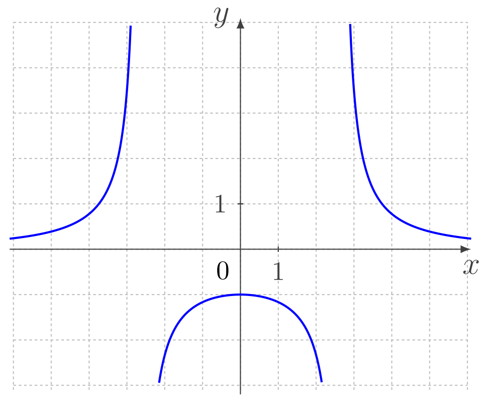


3. La función $h(x) = \frac{7}{x^2-7}$ está bien definida siempre que el denominador no se anule. Esto es $x \neq \sqrt{7}$ y $x \neq -\sqrt{7}$. Tenemos entonces

$$\mathrm{Dom}\,(h) = \mathbb{R} - \{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}.$$

Y a partir del gráfico se observa que

$$\mathrm{Im}\,(h) = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty).$$



Un punto de interés, al momento de estudiar la representación gráfica de una función real, es conocer sus **intersecciones con los ejes cartesianos**.

- ◇ Sobre el eje de las ordenadas, los puntos tienen la forma $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$. Es decir que para encontrar la **intersección con el eje** y reemplazamos con el valor $x = 0$ en la fórmula que define la función. Así, el punto de intersección con este eje es $P = (0, f(0))$.

- ◇ Sobre el eje de las abscisas, los puntos tienen la forma $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$. Entonces, para encontrar la **intersección con el eje** x igualamos la expresión de la función a 0 y despejamos el correspondiente valor de x.

Ejemplo 4.2.2

Retomemos la segunda función estudiada en el ejemplo 4.2.1, dada por $g(x) = \sqrt{6-2x} - 1$. La intersección del gráfico con el eje de las ordenadas (eje y) corresponde al par ordenado

$$P = (0, f(0)) = (0, \sqrt{6} - 1).$$

Para encontrar la intersección entre el gráfico de esta función y el eje de las abscisas (eje x) debemos igualar la expresión que define la función a 0. Esto es

$$0 = \sqrt{6-2x} - 1 \iff \sqrt{6-2x} = 1 \iff 6 - 2x = 1 \iff x = \frac{5}{2}.$$

Así, $Q = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$ es el punto en que el gráfico intersecta al eje x (ver figura en el ejemplo anterior).

Ejemplo 4.2.3

Veamos cuál es el dominio de

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x^2-3x+2}}$$

y hallemos las intersecciones del gráfico de esta función con los ejes cartesianos.

Esta función está definida para valores de x tales que

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2} \geqslant 0 \qquad \text{y} \qquad x^2-3x+2 \neq 0.$$

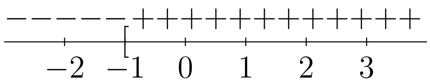
Para analizar la primera de estas condiciones debemos factorizar el denominador, como vimos en la Unidad 3, y luego hacer un estudio de signos de la forma presentada en la Unidad 2. El discriminante de x^2-3x+2 es $\Delta = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 2 = 1 > 0$ por lo que la ecuación $x^2-3x+2=0$ tiene dos soluciones

$$x_1 = \frac{3+1}{2} = 2, \qquad x_2 = \frac{3-1}{2} = 1.$$

Luego los valores $x_1 = 2, x_2 = 1$ no pertenecen al dominio de f. Ahora,

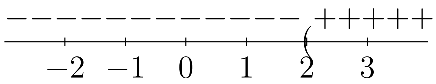
$$\frac{x+1}{x^2-3x+2} \geqslant 0 \iff \frac{x+1}{(x-2)(x-1)} \geqslant 0.$$

$x+1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -1$



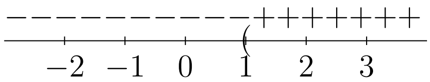
signo de $x+1$

$x-2 > 0 \iff x > 2$

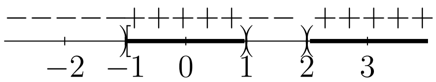


signo de $x-2$

$x-1 > 0 \iff x > 1$



signo de $x-1$



signo de $\dfrac{x+1}{(x-2)(x-1)}$

Entonces tenemos que $\text{Dom}\,(f) = [-1,1) \cup (2,+\infty)$.

Para encontrar la intersección del gráfico de f con el eje y calculamos $y = f(0) = \sqrt{\frac{1}{2}}$, y así el punto de intersección es $P = (0, \sqrt{\frac{1}{2}})$.

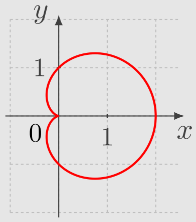
Para hallar las intersecciones con el eje x buscamos las soluciones de $f(x) = 0$. Esto es,

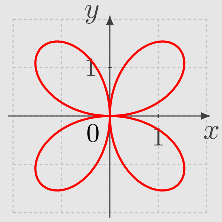
$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x^2-3x+2}} = 0 \iff \frac{x+1}{x^2-3x+2} = 0 \iff x+1 = 0 \iff x = -1.$$

Luego, el punto de intersección es $Q = (-1, 0)$.

Para pensar 15

Los siguientes gráficos ¿corresponden a funciones de la forma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? ¿Por qué?



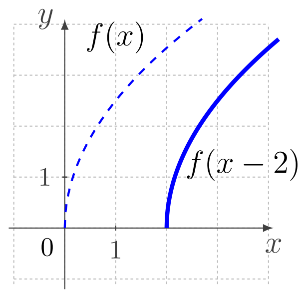


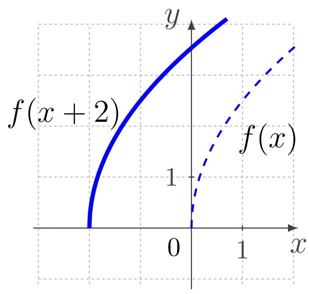
Nota: Esta actividad se corresponde con el primero de los ejercicios propuestos al final de esta unidad.

Gráfico de una función por desplazamientos y reflexiones

A partir del gráfico de la función $f : D \to \mathbb{R}$ podemos determinar los gráficos de $f(x-h)$, $f(x)+k$, $f(-x)$ y $-f(x)$, para cualquier $h, k \in \mathbb{R}$.

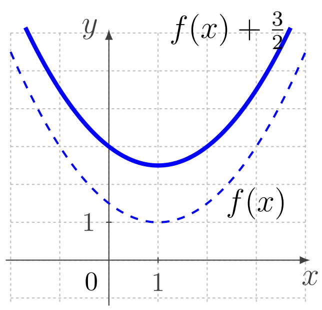
1. El gráfico de $f(x-h)$ se obtiene desplazando h unidades en forma horizontal el gráfico de $f(x)$. Si $h > 0$, el desplazamiento es hacia la derecha, y si $h < 0$ el desplazamiento es hacia la izquierda. Graficamos dos ejemplos, en línea punteada indicamos la función f original.

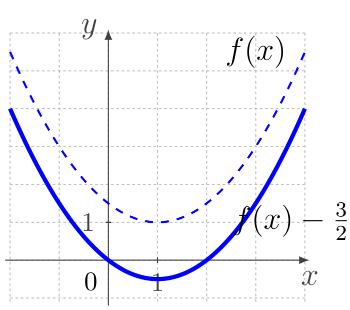




   Notemos que en estos desplazamientos el dominio de la función resultante puede ser distinto que el de la función inicial. Sin embargo la imagen no varía.

2. El gráfico de $f(x)+k$ se obtiene desplazando k unidades en forma vertical el gráfico de $f(x)$. El desplazamiento es hacia arriba si $k > 0$ y hacia abajo si $k < 0$. Por ejemplo,

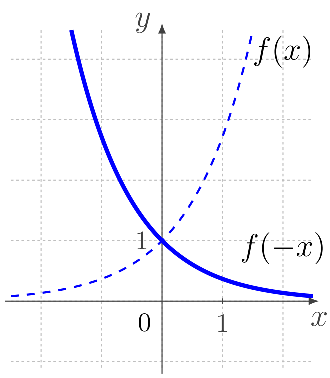


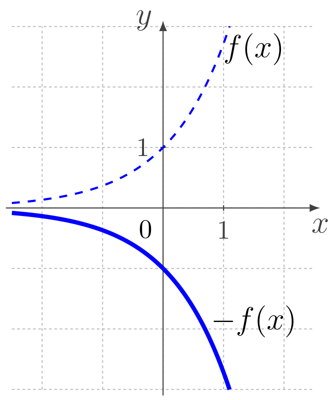


En este caso, el dominio de las funciones resultantes es el mismo que el de la función inicial. Lo que puede cambiar es la imagen.

3. El gráfico de $f(-x)$ se obtiene a partir del gráfico de $f(x)$ por una reflexión respecto del eje y. Mostramos un ejemplo en la figura abajo a la izquierda. En este caso el dominio de la función resultante puede ser distinto que el de la función inicial. Sin embargo la imagen no varía. Ver la figura abajo a la izquierda.

   El gráfico de $-f(x)$ se obtiene a partir del gráfico de $f(x)$ por una reflexión respecto del eje x. Graficamos un ejemplo en la figura abajo a la derecha. Aquí, el dominio de la función resultante coincide con el de la función inicial. En cambio la imagen puede cambiar.





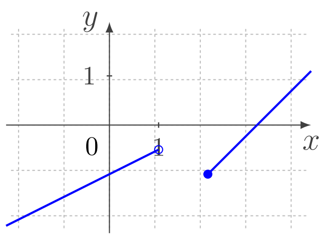
4.3 Funciones definidas por partes

Las funciones definidas por partes se caracterizan por tener distintas expresiones en distintos intervalos del dominio. Estudiemos este tipo de funciones a partir de un ejemplo.

Ejemplo 4.3.1

Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x - 1, & \text{si } x < 1, \\ x - 3, & \text{si } x \geqslant 2. \end{cases}$$



En el gráfico de la derecha mostramos la representación gráfica de f.

El dominio de esta función es $\text{Dom}\,(f) = (-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$ y la imagen es $\text{Im}\,(f) = \mathbb{R}$.

El elemento del dominio $x = -2$ verifica $-2 < 1$, por lo tanto si queremos saber el valor de la función en $x = -2$ reemplazamos en la expresión que corresponde a $x < 1$,

$$f(-2) = \frac{1}{2}(-2) - 1 = -2.$$

En cambio, $x = 7 \geqslant 2$, por lo que para encontrar el valor de la función en $x = 7$ debemos reemplazar en la expresión que corresponde a $x \geqslant 2$,

$$f(7) = 7 - 3 = 4.$$

Para encontrar los valores de x para los cuales $f(x) = -1$ debemos tener en cuenta las dos partes en la definición de la función. Esto es

$$f(x) = -1 \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x - 1 = -1 & \Longleftrightarrow \quad x = 0, \\ x - 3 = -1 & \Longleftrightarrow \quad x = 2. \end{cases}$$

Así encontramos dos valores $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ que verifican $f(x) = -1$.

4.4 Operaciones entre funciones

Dadas dos funciones $f : D_1 \to \mathbb{R}$ y $g : D_2 \to \mathbb{R}$, $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$, se definen la **suma** (o **resta**), la **multiplicación** y la **división** de f y g de la forma

1. $f + g : D \to \mathbb{R}, \quad D = D_1 \cap D_2, \qquad (f + g)(x) = f(x) + g(x),$
2. $f \cdot g : D \to \mathbb{R}, \quad D = D_1 \cap D_2, \qquad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$
3. $\dfrac{f}{g} : D \to \mathbb{R}, \quad D = \{x \in D_1 \cap D_2 : g(x) \neq 0\}, \qquad \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}.$

Veamos con un ejemplo concreto como se realizan las operaciones anteriores.

Ejemplo 4.4.1

Sean $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por

$$f(x) = \frac{x}{x-1}, \qquad g(x) = 3x - 6.$$

Entonces

- $f + g : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$,
$$(f+g)(x) = \frac{x}{x-1} + 3x - 6 = \frac{x + (3x-6)(x-1)}{x-1} = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x-1},$$
- $f \cdot g : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$,
$$(f \cdot g)(x) = \frac{x}{x-1} \cdot (3x - 6) = \frac{3x^2 - 6x}{x-1},$$
- $\dfrac{f}{g} : \mathbb{R} - \{1, 2\} \to \mathbb{R}$,
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\frac{x}{x-1}}{3x-6} = \frac{x}{(x-1)(3x-6)}.$$

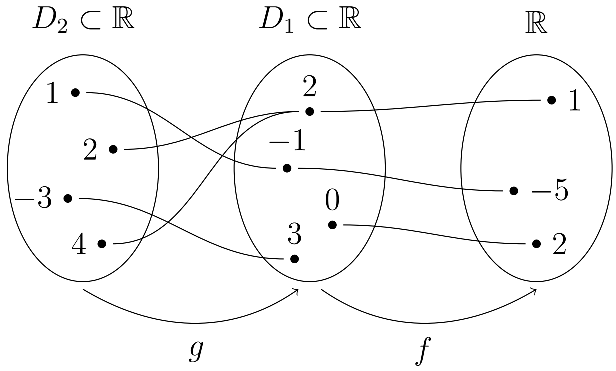
Dadas dos funciones $f : D_1 \to \mathbb{R}$ y $g : D_2 \to \mathbb{R}$, $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$, se llama **composición** de f y g, y la notamos $f \circ g$, a la función

$$f \circ g : D \to \mathbb{R}, \qquad (f \circ g)(x) = f\,(g(x))\,.$$

Observemos que calcular $(f \circ g)(x) = f\,(g(x))$ significa calcular en primer lugar $g(x)$ y luego aplicar f sobre ese resultado. Para poder hacer esto es necesario que el valor $g(x)$ pertenezca al dominio de la función f. De acuerdo a lo anterior, el dominio D de la composición de f y g está dado formalmente por

$$D = \{x \in \mathrm{Dom}\,(g) : g(x) \in \mathrm{Dom}\,(f)\}.$$

Ejemplo 4.4.2



Veamos cómo es la composición de las funciones f y g dadas en los diagramas. Tenemos que

$$\mathrm{Dom}\,(g) = \{-3, 1, 2, 4\}, \qquad \mathrm{Im}\,(g) = \{-1, 2, 3\}, \quad \text{y} \quad \mathrm{Dom}\,(f) = \{-1, 0, 2\}.$$

Notemos que $g(-3) = 3 \notin \mathrm{Dom}\,(f)$ por lo que $-3 \notin \mathrm{Dom}\,(f \circ g)$. Así

$$\mathrm{Dom}\,(f \circ g) = \{1, 2, 4\},$$

y en forma explícita encontramos

- $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(-1) = -5$,
- $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(2) = 1$,
- $(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(2) = 1$.

Ejemplo 4.4.3

Si $f : [-3, +\infty) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $f(x) = \sqrt{x+3}$, y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 1$, entonces

$$h_1(x) = (f \circ g)(x) = f(2x+1) = \sqrt{(2x+1)+3} = \sqrt{2x+4},$$

el dominio de esta nueva función es $D = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 4 \geqslant 0\} = [-2, +\infty)$. Notemos que el dominio de la composición h está contenido en el dominio de g, esto es

$$\text{Dom}\,(h_1) = [-2, +\infty) \subseteq \text{Dom}\,(g) = \mathbb{R}.$$

Por otro lado,

$$h_2(x) = (g \circ f)(x) = g(\sqrt{x+3}) = 2\sqrt{x+3} + 1$$

y en este caso $\text{Dom}\,(h_2) = [-3, +\infty) = \text{Dom}\,(f)$.

Ejemplo 4.4.4

Consideremos las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $g(x) = \dfrac{x+1}{x}$, definidas en los dominios,

$$\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R} - \{1\}, \quad \text{Dom}\,(g) = \mathbb{R} - \{0\}.$$

La composición $f \circ g$ resulta

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{x+1}{x} - 1} = x.$$

Notemos que, si bien la función $h(x) = x$ está bien definida para cualquier $x \in \mathbb{R}$, ese no es el caso de la función $h(x) = (f \circ g)(x) = x$. Recordemos que el dominio de h está contenido en el dominio de g. Es decir que $x = 0$ no pertenece al dominio de h, ya que no pertenece al dominio de g. Tenemos entonces que $\text{Dom}\,(h) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Ejemplo 4.4.5

Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - (2x+7)^3$. Podemos, por ejemplo, pensar a f como la composición de dos funciones:

$$f = f_1 \circ f_2 \qquad \text{para} \qquad f_1(x) = 3 - x^3, \qquad f_2(x) = 2x + 7,$$

con $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Verifiquemos esta afirmación.

$$(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x)) = f_1(2x+7) = 3 - (2x+7)^3 = f(x).$$

También $g : [3, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{2\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+4}$ puede pensarse como la composición

$$g = g_1 \circ g_2 \qquad \text{para} \qquad g_1(x) = \frac{2x}{x+4} \qquad g_2(x) = \sqrt{x-3}.$$

La forma de representar a g como una composición no es única. Por ejemplo, otra forma es

$$g = g_3 \circ g_4 \qquad \text{para} \qquad g_3(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} \qquad g_4(x) = x - 3.$$

Para pensar 16

Consideremos las funciones $f(x) = 1 - x$ y $g(x) = x^2$ y notemos que para $x = 0$ y para $x = 1$ se verifica $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

$$(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(0) = 1 \quad \text{y} \quad (g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(1) = 1,$$

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = 0 \quad \text{y} \quad (g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(0) = 0.$$

A partir de esto, ¿podemos concluir que la composición de funciones es conmutativa? Es decir, ¿vale la propiedad $f \circ g = g \circ f$?

Nota: Esta actividad esta relacionada con lo propuesto en el ejercicio 14 de las actividades planteadas al final de la unidad.

4.5 Funciones polinómicas

Llamamos **función polinómica** a las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

donde $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$.

La expresión que define a una función polinómica tiene la misma forma que un polinomio de grado n. Así, buscar las intersecciones del gráfico de estas funciones con el eje x equivale a buscar las raíces del polinomio correspondiente.

Ejemplo 4.5.1

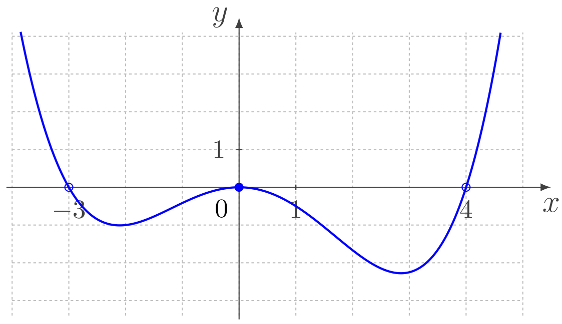
Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{2}x^2.$$

La intersección de su gráfico con el eje de las ordenadas la encontramos calculando el valor de la función en $x = 0$, en este caso tenemos $f(0) = 0$. Para hallar sus intersecciones con el eje de las abscisas debemos resolver $f(x) = 0$, esto es

$$\begin{aligned} \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{2}x^2 &= 0, \\ \frac{1}{24}x^2\left(x^2 - x - 12\right) &= 0, \\ \frac{1}{24}x^2(x+3)(x-4) &= 0. \end{aligned}$$

Así es fácil ver que las soluciones de la ecuación anterior son $x_1 = 0$, $x_2 = -3$ y $x_3 = 4$. Por lo tanto, las intersecciones buscadas son los puntos $(0, 0)$, $(-3, 0)$ y $(4, 0)$. La representación gráfica de esta función es



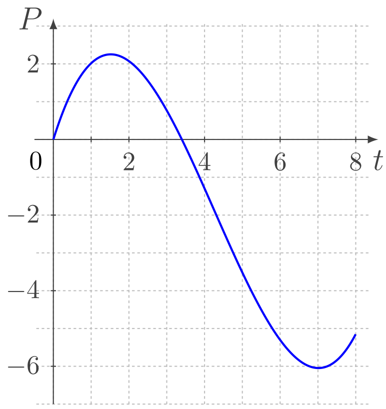
Las funciones polinómicas pueden utilizarse para modelar ciertos problemas.

Ejemplo 4.5.2

Se realiza un estudio, durante 8 semanas, sobre la variación de peso de un grupo de pacientes sometidos a un cierto tratamiento médico. La función que modela los resultados encontrados está dada por

$$P(t) = 3,196\,t - 1,28\,t^2 + 0,1\,t^3,$$

donde t representa el tiempo (en semanas) transcurrido desde el inicio del tratamiento y P es la variación de peso (en kg) del paciente. Su representación gráfica es



A partir de la observación del gráfico podemos decir que durante la primer semana y media, aproximadamente, los pacientes aumentan algo más de 2 kg de peso. Luego, desde la semana y media y hasta la séptima los pacientes pierden hasta 6 kg de peso y en la última semana vuelven a aumentar un kilo. Esta interpretación es visual y por lo tanto aproximada.

Sin embargo, podemos determinar con exactitud el momento en que la variación de peso fue nula. Para esto debemos buscar las intersecciones de la función con el eje de las abscisas. Esto requiere factorizar la expresión polinómica.

$$\begin{aligned} P(t) &= 3,196\,t - 1,28\,t^2 + 0,1\,t^3 \quad (t \text{ es factor común}) \\ &= t(3,196 - 1,28\,t + 0,1\,t^2) \quad (\text{fórmula resolvente para ecuación cuadrática}) \\ &= 0.1\,t(t - 3,4)(t - 9,4). \end{aligned}$$

De esto se deduce que los valores del dominio en que esta función es nula son $t = 0$ y $t = 3,4$. Notemos que si bien la expresión se anula también en $t = 9,4$, este valor no pertenece al dominio de la función estudiada.

También podemos decir en forma exacta, por ejemplo cuál fue la variación de peso a las dos semanas de iniciado el tratamiento. Para esto reemplazamos en la expresión dada con $t = 2$ para encontrar

$$P(2) = 3,196 \cdot 2 - 1,28 \cdot (2)^2 + 0,1 \cdot (2)^3 = 2,072.$$

Es decir, a las dos semanas de iniciado el tratamiento el paciente aumentó $2,072$ kg.

Algunos casos particulares de funciones polinómicas son la **función lineal**, que tiene la forma $f(x) = ax + b$ y su gráfico es una recta, y la **función cuadrática**, cuya forma general es $f(x) = ax^2 + bx + c$ y su gráfico es una parábola. Estas dos funciones se estudiarán con más detalle en capítulos siguientes.

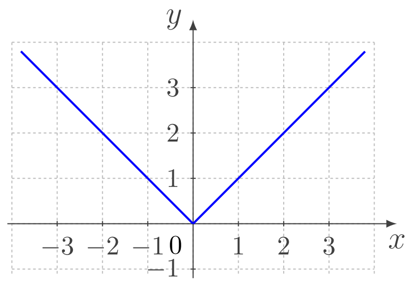
4.6 Otras funciones de interés

A continuación presentamos dos funciones que suelen ser de interés.

La primera es la que se conoce como **función valor absoluto**, su forma general es

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Notemos que se trata de una función definida por partes, siendo cada parte una función lineal (esto lo retomaremos en la **Unidad 5**). Mostramos en la siguiente figura su representación gráfica.

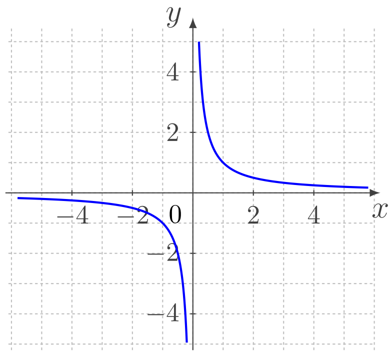


Esta función está bien definida para todos los números reales, es decir, $\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$. Su imagen son los números reales no negativos, que en notación de intervalos se escribe $\text{Im}\,(f) = [0, +\infty)$.

Otra función frecuentemente utilizada es la **función racional**,

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Su gráfica es una **hipérbola**



Observemos que esta función no está definida para $x = 0$. Además, el valor $f(x) = 0$ no se puede obtener con ningún valor de la variable x. Esto nos indica que

$$\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R} - \{0\}, \qquad \text{Im}\,(f) = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Ejemplo 4.6.1

Veamos cómo encontrar los gráficos de las funciones

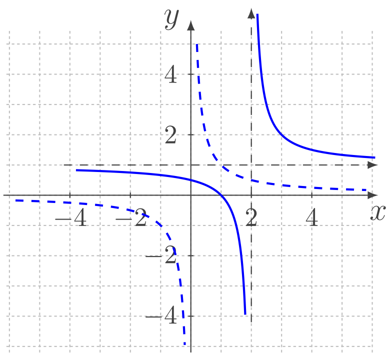
$$f(x) = \frac{1}{x-2} + 1 \quad \text{y} \quad g(x) = 2 - |x+1|,$$

para luego indicar el dominio y la imagen de las mismas.

El gráfico de f se puede obtener a partir de un desplazamiento de dos unidades hacia la derecha y una unidad hacia arriba del gráfico de la función racional presentada anteriormente. Así encontramos el gráfico de la derecha.

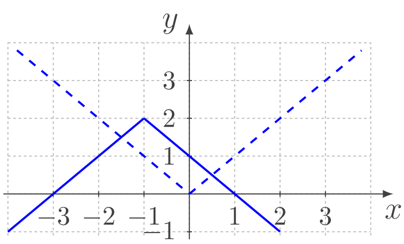
Observando el gráfico podemos decir que

$$\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R} - \{2\}, \qquad \text{Im}\,(f) = \mathbb{R} - \{1\}.$$



El grafico de g se puede obtener mediante una reflexión, un desplazamiento lateral y uno vertical de la función valor absoluto.

En este caso encontramos $\text{Dom}\,(g) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}\,(g) = (-\infty, 2]$.



Expresiones de este tipo ya se trabajaron al estudiar ecuaciones e inecuaciones en la **Unidad 2**. Así, para estas funciones estamos en condiciones de encontrar, en forma analítica, sus intersecciones con los ejes coordenados.

Ejemplo 4.6.2

Retomamos las funciones

$$f(x) = \frac{1}{x-2} + 1 \quad \text{y} \quad g(x) = 2 - |x+1|$$

presentadas en el ejemplo anterior, y calculamos, en forma analítica, las intersecciones de sus gráficos con los ejes coordenados.

Empecemos recordando que el gráfico de una función h corta al eje de las ordenadas en un punto de la forma $(0, h(0))$. Entonces, calculando

$$f(0) = \frac{1}{-2} + 1 = \frac{1}{2}, \qquad g(0) = 2 - |1| = 1$$

tenemos que el gráfico de la función f intersecta al eje y en $P_f = \left(0, \frac{1}{2}\right)$, mientras que la función g lo hace en $P_g = (0, 1)$. Ambos puntos de intersección pueden observarse en los gráficos del ejemplo anterior.

Las intersecciones con el eje de las abscisas tienen la forma $(x, 0)$ y se obtienen igualando la función a 0. Así,

$$f(x) = 0 \iff \frac{1}{x-2} = -1 \iff -(x-2) = 1 \iff x = 1$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\iff |x+1| = 2 \\ &\iff x+1 = 2 \quad \text{ó} \quad x+1 = -2 \\ &\iff \quad x = 1 \quad \text{ó} \quad x = -3 \end{aligned}$$

Luego, el punto de intersección del gráfico de f con el eje x es $Q_f = (1, 0)$ y los puntos en que el gráfico de g corta a este eje son $Q_{g,1} = (-3, 0)$ y $Q_{g,2} = (1, 0)$. También estos puntos pueden observarse en los gráficos presentados en el ejemplo anterior.

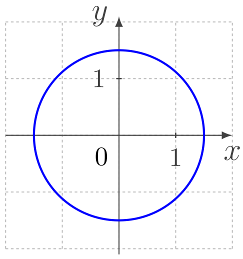
Más aún, para estas mismas funciones f y g podemos calcular todos los valores $x \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) < x + 2$, o bien todos los valores $x \in \mathbb{R}$ tales que $g(x) > 2$. Para esto, basta plantear y resolver las inecuaciones

(a) $\dfrac{1}{x-2} < x + 2$,

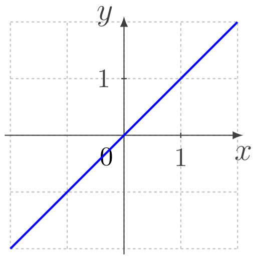
(b) $2 - |x+1| > 2$.

Actividades

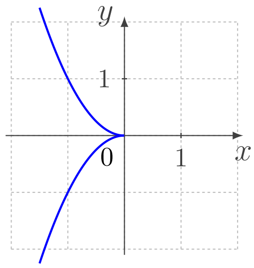
1. Indicar cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una función.



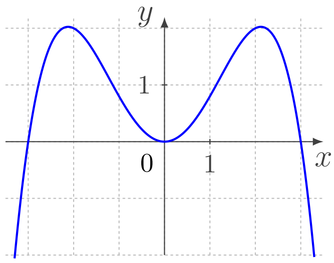
(a)



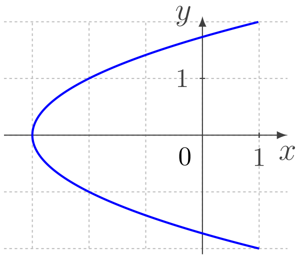
(b)



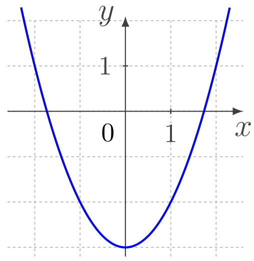
(c)



(d)

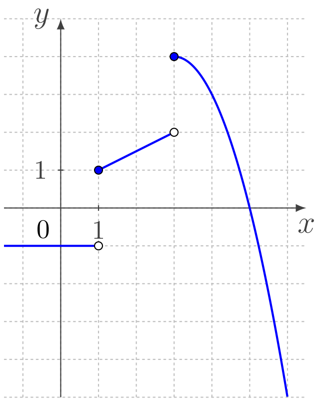


(e)

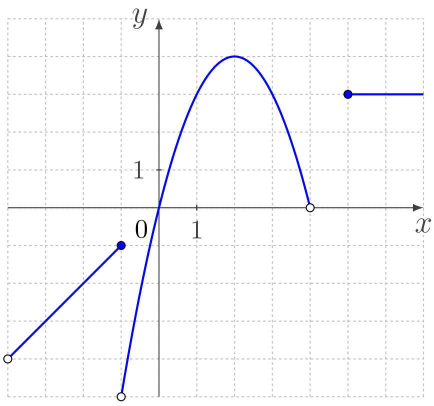


(f)

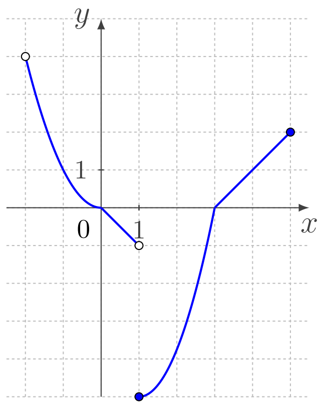
2. A partir de las gráficas de las siguientes funciones



f



g



h

determinar

(a) el dominio e imagen de cada una,

(b) si es posible, $f\,(3)$, $f\,(-2)$, $g\left(\frac{9}{2}\right)$, $g\,(5)$, $h\,(3)$ y $h\,(-2)$,

(c) si existen, los puntos de intersección con los ejes coordenados,

(d) los intervalos del dominio donde f es positiva,

(e) los intervalos del dominio donde g es negativa.

3. Para cada una de las siguientes funciones

$$f(x)=\sqrt{x^3-3},\qquad g(x)=\frac{4x^2-x}{3x-4},\qquad h(x)=\frac{1-x}{x},$$

determinar, si es posible

(a) $f(3)$, $f(0)$,

(b) los x tales que $f(x)=5$,

(c) $g(-2)$, $g\left(\frac{4}{3}\right)$,

(d) los x tales que $g(x)=0$,

(e) $h(1)$, $h(0)$,

(f) los x tales que $h(x)>1$.

4. Dada $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+1$, determinar analíticamente los valores del dominio de f para los cuales

(a) $f(x)=0$, (b) $f(x)=3$, (c) $f(x)<-1$, (d) $f(x)>3$.

5. (a) Encontrar una expresión para el área de un triángulo equilátero en función del lado ℓ. ¿Cuál es el área del triángulo si el lado mide 3 cm?

(b) Hallar una expresión para el perímetro de una circunferencia en función de su diámetro d.

(c) Expresar el área de un rectángulo en función de su altura h, sabiendo que la altura h es el triple de su base. ¿Cuál es el área del rectángulo si la altura es $h=12$ cm?

6. Hallar el dominio de las siguientes funciones y expresarlo utilizando notación de intervalo.

(a) $f(x)=-x^3+3x^2+9$,

(b) $f(x)=\sqrt{2x-1}$,

(c) $f(x)=\sqrt[3]{2x^2-6}$,

(d) $f(x)=\dfrac{16}{3x^2-9x}$,

(e) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-1}}$.

7. Determinar el dominio de las siguientes funciones.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}-3},\qquad g(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}+3}.$$

(a) ¿Son iguales los dominios?

(b) Calcular, si es posible, $f(-8)$ y $g(-8)$.

8. A partir de los gráficos de $y=x^3$ y de $y=\sqrt{x}$ mostrados a continuación, representar gráficamente las siguientes funciones e indicar, en cada caso, si se realiza un desplazamiento (vertical u horizontal) o una reflexión (respecto del eje x o del eje y).

(a) $y=(x-2)^3$,

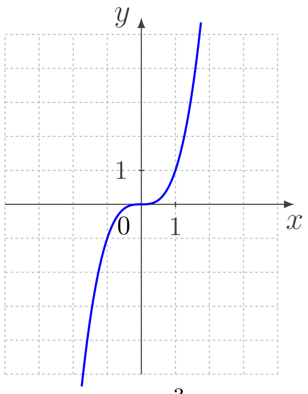
(b) $y=-(x-2)^3$,

(c) $y=-(x-2)^3+1$,

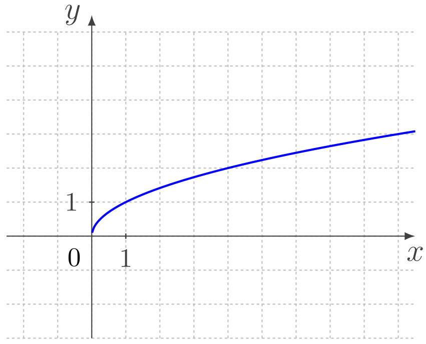
(d) $y=\sqrt{-x}$,

(e) $y=\sqrt{-x+5}$,

(f) $y=\sqrt{-x+5}-1$.



$y = x^3$



$y = \sqrt{x}$

9. Representar gráficamente las siguientes funciones, teniendo en cuenta los gráficos del ejercicio anterior.
   (a) $y = (x+4)^3 + \pi$,
   (b) $y = \sqrt{-x} - 3$,
   (c) $y = \begin{cases} \sqrt{x+2} - 1, & \text{si} \quad x > 0, \\ x^3 + 1, & \text{si} \quad x \leq 0, \end{cases}$
   (d) $y = \begin{cases} -\sqrt{x+1}, & \text{si} \quad x \geq 1, \\ x^3, & \text{si} \quad -1 \leq x < 1, \\ \sqrt{-x}, & \text{si} \quad x < -1. \end{cases}$

10. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 4, & \text{si} \quad x < -2, \\ 4, & \text{si} \quad -2 < x < 2, \\ x + 1, & \text{si} \quad x \geqslant 2, \end{cases}$$

calcular, si es posible

(a) $f(-3)$,
(b) $f(0)$,
(c) $f(2)$,
(d) $f(-2)$,
(e) los x tales que $f(x) = -1$,
(f) los x tales que $f(x) = 4$.

11. Sean f_1, f_2, f_3 definidas por

$$f_1(x) = 2x - 1, \qquad f_2(x) = \frac{1}{x+2}, \qquad f_3(x) = x^2 - 4.$$

(a) Encontrar una expresión para cada una de las siguientes funciones.

i. $f(x) = (2f_1 + f_2)(x)$,
ii. $f(x) = ((f_1)^2 - 3f_3)(x-2)$,
iii. $f(x) = \left(f_1 + \dfrac{2}{f_3}\right)(x)$,
iv. $f(x) = (f_2 \cdot f_1)(x)$,
v. $f(x) = (f_1 \cdot f_3)(3x-1)$,
vi. $f(x) = \left(3f_2 - \dfrac{f_1}{f_3}\right)(x)$.

(b) Hallar el dominio de cada una de las funciones encontradas en el inciso anterior.

12. Determinar el dominio de las siguientes funciones.
   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2 - 16}$,
   (b) $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{4x - x^2}$,
   (c) $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

13. A partir de las funciones f y g definidas como

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	1	5	3	-2	7

x	-2	-1	1	2	3	4
$g(x)$	-1	1	4	-1	0	2

realizar las tablas que representan a las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ e indicar sus respectivos dominios.

14. Dadas las siguientes funciones

$$f(x) = x^3 - 2, \qquad g(x) = \sqrt{x+1}, \qquad h(x) = x + \frac{1}{x}.$$

   (a) Encontrar una expresión para
      i. $(f \circ g)(x)$,
      ii. $(g \circ f)(x)$,
      iii. $(g \circ h)(x)$,
      iv. $(h \circ f)(x)$.
   (b) ¿Son $f \circ g$ y $g \circ f$ iguales?
   (c) Hallar, si es posible,
      i. $(f \circ h)(2)$,
      ii. $(h \circ g)(-1)$,
      iii. $(h \circ f)(2)$,
      iv. $(g \circ f)(0)$.

15. Hallar en cada caso, dos funciones f y g de modo que la composición $f \circ g$ sea la función h indicada.
   (a) $h(x) = \sqrt{x+1}$,
   (b) $h(x) = 4(x^3 + 3)$,
   (c) $h(x) = \sqrt[5]{x^2 - 1}$,
   (d) $h(x) = \sqrt[5]{x^2} - 1$.

16. Dadas las funciones polinómicas

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 \qquad g(x) = ax^3 - 3x + a,$$

determinar los valores de a que verifican
   (a) $f(a) = \dfrac{1}{2}$,

(b) $g(-2) = 27$,

(c) f intersecta al eje de las abscisas en $x = -a - 1$,

(d) g intersecta al eje de las abscisas en $x = -2$.

17. En un laboratorio se toma la temperatura de una cierta sustancia a partir de las 8 de la mañana. Se obtiene la siguiente función polinómica que permite calcular la temperatura, en grados, de esa sustancia en función del tiempo a partir del cual se comenzaron a realizar las mediciones: $f(x) = 0,2x^3 - 5,6x^2 + 36x$.

(a) ¿Cuál fue la temperatura a las 5 horas de haber comenzado las mediciones?

(b) ¿En qué instantes la temperatura fue de $0° \, C$?

(c) ¿Hubo algún momento en el cual la temperatura fue negativa?

18. Sean

$$f(x) = |x - 3| - 2, \qquad g(x) = 1 - \frac{1}{x+2}.$$

(a) Representar graficamente estas funciones, a partir de los gráficos de las funciones presentadas en la **Sección 4.6**.

(b) Indicar su dominio y su imagen.

(c) Encontrar, analíticamente, los puntos en que los gráficos de f y g intersectan a cada eje coordenado.

(d) Encontrar, analíticamente, el conjunto de valores de x tales que $f(x) > 2$.

(e) Encontrar, analíticamente, el conjunto de valores de x tales que $g(x) < -x - 1$.

Síntesis de la unidad

En esta unidad estudiamos particularmente la función lineal. Recordaremos los siguientes conceptos vinculados con esta función.

1. Definición y representación gráfica (la recta).
2. Obtención de una recta a partir de datos.
3. Planteo y resolución de problemas utilizando funciones lineales.
4. Rectas paralelas y perpendiculares.
5. Distancia entre puntos del plano cartesiano.

5.1 Definición y representación gráfica

Una **función lineal** es una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la fórmula

$$f(x) = ax + b,$$

donde a y b son números reales.

El gráfico en el plano cartesiano de una función lineal es una **recta** no vertical de ecuación

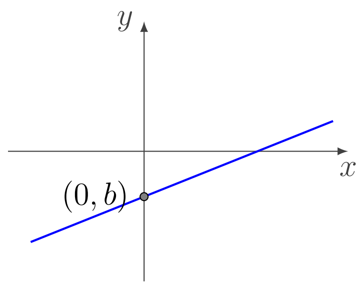
$$y = ax + b.$$

El valor a es la **pendiente** de la recta y mide la inclinación de la misma. Si la pendiente es positiva la recta es creciente, si $a = 0$ la recta es horizontal y si la pendiente es negativa la recta es decreciente. El valor b en la ecuación de la recta es la **ordenada al origen** y nos indica el punto en que la recta intersecta al eje y. Notemos que b es el valor que resulta de reemplazar en la función con $x = 0$. Es decir

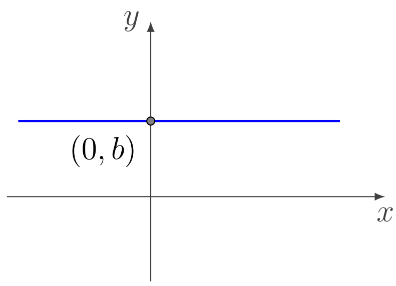
$$f(x) = ax + b \qquad \Longrightarrow \qquad b = f(0).$$

Así, el punto de intersección de una recta con el eje y tiene coordenadas $(0, b)$.

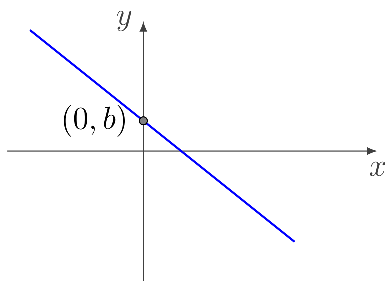
En los siguientes gráficos se muestran rectas de la forma $y = ax + b$ considerando pendiente positiva, cero o negativa, en cada caso se marca con un punto la ordenada al origen.



$a > 0$



$a = 0$



$a < 0$

Si la pendiente de la recta no es cero, el gráfico intersecta al eje x. De acuerdo a lo visto en la unidad anterior resolviendo

$$0 = ax + b,$$

obtenemos que el punto de intersección con el eje x de una recta no horizontal es $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

Ejemplo 5.1.1

A continuación estudiamos la función lineal $f(x) = -3x + 2$. Nos interesa representarla gráficamente en el plano cartesiano, indicar su dominio y su imagen y calcular los puntos de intersección con los ejes coordenados.

La ecuación de la recta es

$$y = -3x + 2.$$

Para graficarla es suficiente encontrar dos puntos de la recta.

1. Si $x = 0$ entonces $y = 2$, que es la ordenada al origen. Luego $P = (0, 2)$ pertenece a la recta.

2. Si $x = 1$ entonces $y = -3 \cdot 1 + 2 = -1$, así encontramos el punto $M = (1, -1)$ que pertenece a la recta.

Ubicando los puntos anteriores en el plano podemos graficar la recta que los contiene.

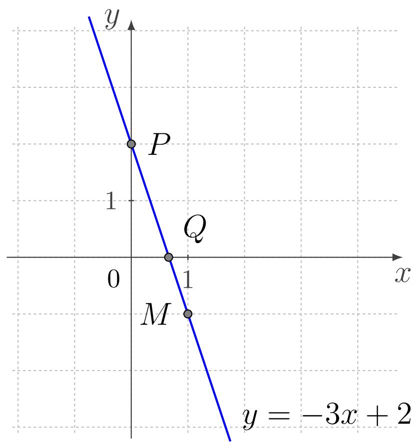
Se observa claramente que

$$\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R}, \quad \text{Im}\,(f) = \mathbb{R}.$$

La intersección con el eje y es el punto $P = (0, 2)$, y si resolvemos la ecuación

$$0 = -3x + 2,$$

obtenemos el punto de intersección con el eje x, que resulta ser $Q = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$.



Para pensar 17

Sea $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. ¿Cuál es el conjunto imagen de la función f? Si $a = 0$, ¿cuál es el conjunto imagen de f?

La ecuación de una recta puede estar dada en forma **implícita**

$$my + nx + d = 0,$$

en este caso debemos despejar la variable y para obtener la ecuación de la recta. Luego, si $m \neq 0$ resulta

$$y = -\frac{n}{m}x - \frac{d}{m}.$$

Si $m = 0$ y $n \neq 0$, la solución de la ecuación $nx + d = 0$ es un valor de x constante. El gráfico de la ecuación $x = c$, con $c \in \mathbb{R}$, es una **recta vertical**. Esta ecuación no corresponde con ninguna función real ya que al valor $x = c$ se le asocian todos los valores de $y \in \mathbb{R}$.

En la unidad anterior presentamos la función $f(x) = |x|$ y mostramos que es una función lineal a trozos. Ahora estamos en condiciones de representar gráficamente un caso más general: $f(x) = |ax + b|$, $a > 0$. Primero observemos que

$$|ax + b| = ax + b \iff ax + b \geqslant 0,$$

es decir, si $x \geqslant -\frac{b}{a}$. Mientras que

$$|ax + b| = -(ax + b) \iff ax + b < 0,$$

es decir, si $x < -\frac{b}{a}$. Entonces tenemos que, para $a > 0$,

$$f(x) = |ax + b| = \begin{cases} ax + b, & \text{si } x \geqslant -\dfrac{b}{a}, \\ -ax - b, & \text{si } x < -\dfrac{b}{a}. \end{cases}$$

El razonamiento para el caso en que $a < 0$ es similar al anterior, la diferencia surge al despejar x en las desigualdades $ax + b \geqslant 0$ ó $ax + b < 0$. Es este caso, al dividir por a se invierte el sentido de la desigualdad. Así, para $a < 0$,

$$ax + b \geqslant 0 \iff x \leqslant -\frac{b}{a} \qquad \text{y} \qquad ax + b < 0 \iff x > -\frac{b}{a}.$$

Esto quedará aclarado en el segundo de los ejemplos que presentamos a continuación.

Ejemplo 5.1.2

Consideremos $f(x) = |2x - 1|$, podemos graficar esta función expresándola previamente como una función lineal a trozos.

Notemos que

$$|2x - 1| = 2x - 1 \iff 2x - 1 \geqslant 0,$$

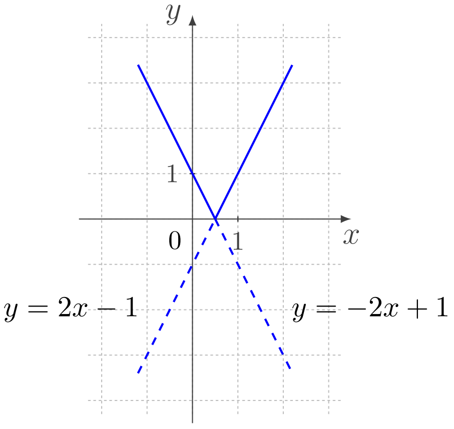
es decir, si $x \geqslant \frac{1}{2}$. De la misma forma tenemos que

$$|2x - 1| = -(2x - 1) \iff 2x - 1 < 0.$$

Así resulta,

$$f(x) = |2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1, & \text{si } x \geqslant \frac{1}{2}, \\ -2x + 1, & \text{si } x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Mostramos a la derecha el gráfico de la función f.



Ejemplo 5.1.3

Dada la función

$$f(x) = 2 - \left|1 - \frac{1}{2}x\right|,$$

podemos encontrar su gráfico a partir del gráfico de $g(x) = \left|1 - \frac{1}{2}x\right|$ mediante una reflexión y un desplazamiento. Primero notemos que

$$\left|1 - \frac{1}{2}x\right| = 1 - \frac{1}{2}x \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{2}x \geqslant 0,$$

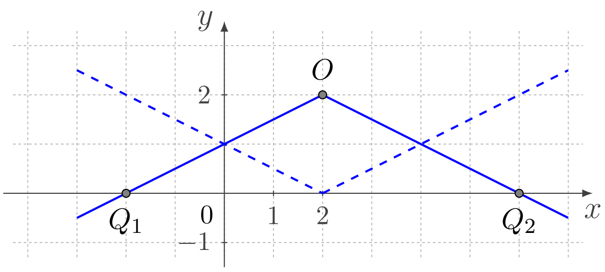
esto es, si $x \leqslant 2$. Y por otro lado

$$\left|1 - \frac{1}{2}x\right| = -\left(1 - \frac{1}{2}x\right) \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{2}x < 0,$$

esto es, si $x > 2$. Así,

$$g(x) = \left|1 - \frac{1}{2}x\right| = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}x, & \text{si } x \leqslant 2, \\ -1 + \frac{1}{2}x, & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

En la siguiente figura graficamos la función g con línea punteada y la función f con línea continua. El gráfico de f fue obtenido por reflexión y desplazamiento de dos unidades hacia arriba del gráfico de g.



Calculemos las intersecciones de esta función con el eje de las abscisas.

$$\begin{aligned} 2 - \left|1 - \frac{1}{2}x\right| = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left|1 - \frac{1}{2}x\right| = 2 \\ &\Longleftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{2}x = 2 \quad \text{ó} \quad 1 - \frac{1}{2}x = -2 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = -2 \quad \text{ó} \quad x = 6 \end{aligned}$$

Tenemos entonces $Q_2 = (-2, 0)$, $Q_2 = (6, 0)$.

Veamos también cómo encontrar el punto O. La abscisa de este punto es el valor para el cual cambia la expresión que define a la función, y se encuentra igualando a cero el término que tiene valor absoluto. En este caso,

$$\left|1 - \frac{1}{2}x\right| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2,$$

y luego $O = (2, f(2)) = (2, 2)$.

5.2 Ecuación de una recta a partir de datos

En algunos casos no contamos con la ecuación de la recta, pero podemos deducirla a partir de distintos datos conocidos. Nos podemos encontrar con alguna de las siguientes situaciones.

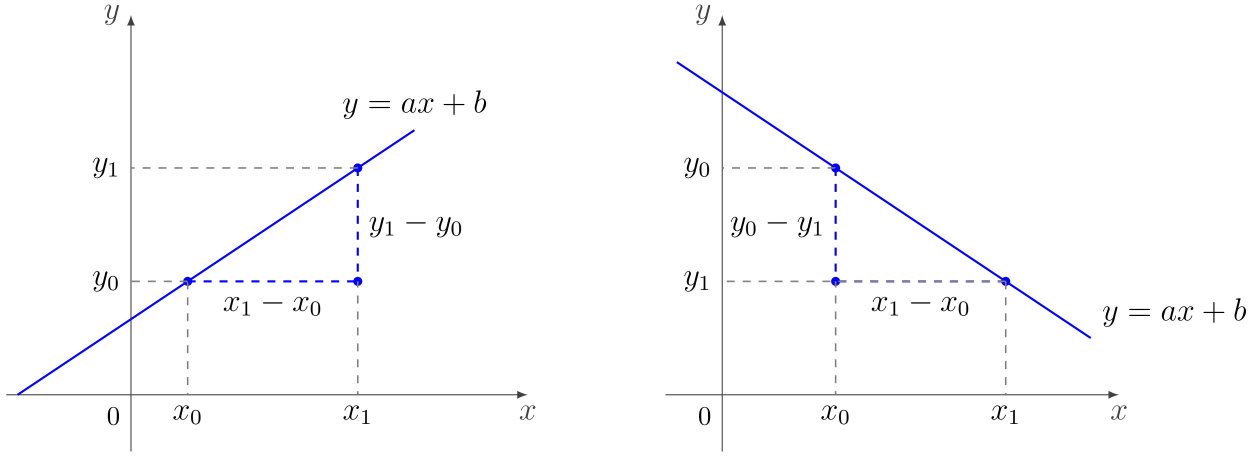
1. *Conocemos la pendiente a y un punto (x_0, y_0) que pertenece a la recta.*

   En este caso la ecuación de la recta es
   $$y = a(x - x_0) + y_0.$$

2. *Conocemos dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) que pertenecen a la recta.*

   Podemos calcular la pendiente de la recta como
   $$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$
   Con la pendiente y los puntos de la recta, de acuerdo al inciso anterior, la ecuación resulta
   $$y = a(x - x_0) + y_0 \qquad \text{ó} \qquad y = a(x - x_1) + y_1.$$

Observemos que la fórmula de pendiente dada es igual al cociente del desplazamiento vertical (en la coordenada y) sobre el desplazamiento horizontal (en la coordenada x) entre dos puntos de una recta.



$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} > 0 \qquad\qquad a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = -\frac{y_0 - y_1}{x_1 - x_0} < 0$$

Ejemplo 5.2.1

Determinemos en forma analítica si los puntos $A = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $B = \left(-1, -\frac{2}{3}\right)$ y $C = (-2, -1)$ están alineados.

Una forma de resolver este problema es encontrar la ecuación de la recta que pasa por dos de estos puntos y luego verificar si el punto restante pertenece a esta recta. Empecemos entonces buscando la ecuación de la recta y_{AB} que pasa por A y B. La pendiente de esta recta es
$$a = \frac{-\frac{2}{3} - 2}{-1 - \frac{1}{2}} = -\frac{8}{3} : \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{16}{9},$$

y con esto ya conocemos la pendiente y un punto que pertenece a la recta (por ejemplo A). Entonces la ecuación de la recta es

$$y_{AB} = \frac{16}{9}\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{16}{9}x + \frac{10}{9}.$$

Veamos si el punto $C = (-2, -1)$ pertenece a la recta y_{AB}, es decir si al remplazar $x = -2$ en la ecuación obtenemos $y = -1$. Reemplazamos $x = -2$ y encontramos

$$y = \frac{16}{9} \cdot (-2) + \frac{10}{9} = -\frac{22}{9} \neq -1.$$

Luego C no pertenece a la recta y_{AB} y por lo tanto los tres puntos no están alineados.

5.3 Planteo y resolución de problemas

En ocasiones las funciones lineales y su representación gráfica son útiles para interpretar y modelar problemas.

Ejemplo 5.3.1

En algunos países la temperatura se mide en grados Fahrenheit ($°F$). En esta unidad de medida el agua se congela a $32°F$ y el punto de ebullición se alcanza a los $212°F$. Sabiendo que la relación entre $°F$ y $°C$ es lineal, ¿cuál es la fórmula que expresa la temperatura en grados Celsius en función de la temperatura dada en grados Fahrenheit? Haciendo uso de la relación encontrada responder

1. ¿Cuál es la temperatura en grados Celsius que corresponde a $51,26°F$?

2. ¿Cuál es la temperatura en grados Fahrenheit que corresponde a $18°C$?

Llamamos y a la temperatura dada en grados Celsius y x a la temperatura dada en grados Fahrenheit. Buscamos entonces una función lineal de la forma $y = f(x) = ax + b$.

Para determinar los valores de a y b debemos utilizar los datos proporcionados por el problema y relacionarlos con datos conocidos: en grados Celsius, el agua se congela a $0°C$ y entra en ebullición a $100°C$. De esta forma, conocemos dos puntos que pertenecen al gráfico de la función lineal buscada: $P_1 = (32, 0)$, $P_2 = (212, 100)$. Utilizando la fórmula para la pendiente tenemos

$$a = \frac{100 - 0}{212 - 32} = \frac{5}{9}.$$

Calculamos b reemplazando P_1 en la ecuación de la recta

$$y = \frac{5}{9}x + b \quad \Longrightarrow \quad 0 = \frac{5}{9}32 + b \quad \Longrightarrow \quad b = -\frac{160}{9}.$$

Luego la función lineal buscada es

$$y = f(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}.$$

Para responder a las preguntas planteadas simplemente reemplazamos el valor dado en la fórmula encontrada.

1. La incógnita es el valor en grados Celsius, es decir el valor de y. Reemplazamos entonces con $x = 51,26$ y resulta

$$y = \frac{5}{9}\,51,26 - \frac{160}{9} = \frac{256,3 - 160}{9} = 10,7.$$

   Es decir que $51,26°F$ equivalen a $10,7°C$.

2. En este caso, el valor buscado es el de la variable x y el dato es el valor $y = 18$.

$$18 = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \left(18 + \frac{160}{9}\right) : \frac{5}{9} = 64,4.$$

   Es decir que $18°C$ equivalen a $64,4°F$.

En algunos casos, las variables involucradas en el problema no pueden tomar cualquier número real. Por ejemplo, si estudiamos las ganancias de un comerciante en función de la cantidad de productos vendidos, la variable asociada a los productos vendidos deberá ser un número natural. Es decir, no tendremos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Aún así podemos modelar el problema, sin olvidar estas restricciones que le dan sentido a la situación.

Ejemplo 5.3.2

Una empresa de cattering ofrece un servicio que tiene un costo fijo de \$1.250 más \$170 por persona. El salón tiene capacidad para 180 personas.

1. Encontrar una función que establezca el costo del servicio en función de la cantidad de personas.
2. ¿Cuál es el dominio de esta función? Dar una representación gráfica de la misma.
3. ¿Cuál es el costo del servicio si asisten al evento 85 personas?
4. Si el costo de un evento fue de \$21.310 ¿cuántas personas asistieron?
5. ¿Es posible que el costo de un evento haya sido de \$25.000?

Vamos a llamar p a la cantidad de personas, y C al costo del servicio.

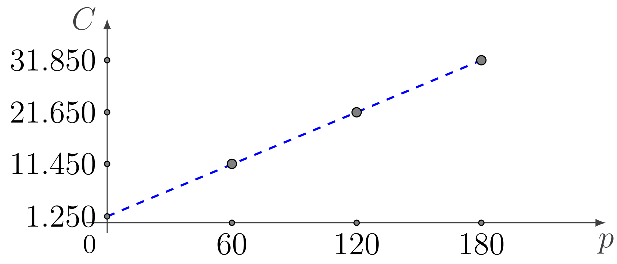
1. La relación entre costo y cantidad de personas está dada por

$$C(p) = 170\,p + 1.250.$$

2. El dominio de esta función es el subconjunto de los números naturales menores o iguales a 180 (que es el número máximo de personas que entran en el salón). Es decir,

$$\operatorname{Dom} f = \{1, 2, 3, ..., 180\} = \{p \in \mathbb{N} : p \leqslant 180\}.$$

   Gráficamente tenemos un conjunto finito de pares ordenados $(p, C(p))$. Marcamos algunos de ellos en el plano cartesiano y los unimos con una línea punteada.



3. Para saber el costo del servicio para 85 personas, reemplazamos en la ecuación con $p = 85$.
$$C(85) = 170 \cdot 85 + 1.250 = 15.700.$$
Así, para 85 personas el costo del servicio es de \$ 15.700.

4. Si el costo de un evento fue de \$21.310, reemplazamos con este valor en el lugar de la variable C.
$$21.310 = 170\,p + 1.250 \quad \Longrightarrow \quad p = (21.310 - 1.250) : 170 = 118.$$
Entonces, podemos afirmar que al evento asistieron 118 personas.

5. En este caso tenemos
$$25.000 = 170\,p + 1250 \quad \Longrightarrow \quad p = (25.000 - 1250) : 170 \simeq 139,70.$$
Este valor de p no tiene sentido en el contexto del problema que estamos estudiando. Luego un costo de \$ 25.000 no es posible.

5.4 Rectas paralelas y perpendiculares

Dos rectas son **paralelas** si tienen la misma pendiente o si ambas son paralelas al eje y. Si además de la pendiente tienen la misma ordenada al origen las rectas son **coincidentes**.

Dos rectas de pendientes $a_1 \neq 0$ y $a_2 \neq 0$ son **perpendiculares** si $a_1 \cdot a_2 = -1$, es decir, si el valor de una pendiente es el opuesto e inverso del valor de la otra pendiente, $a_2 = -\frac{1}{a_1}$.

En el caso en que la pendiente de una recta es cero, es decir, si la recta es horizontal y tiene ecuación $y = b$, $b \in \mathbb{R}$, es perpendicular a cualquier recta vertical de ecuación $x = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 5.4.1

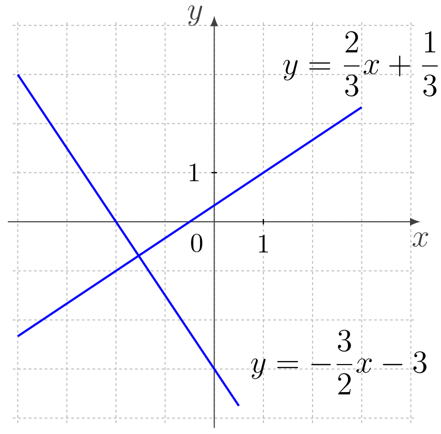
Veamos cómo encontrar la ecuación de la recta que corta al eje de abscisas en $x = -2$ y es perpendicular a la recta $2x - 3y + 1 = 0$.

Para encontrar la pendiente de la recta dada debemos despejar la variable y.
$$2x - 3y + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 3y = 2x + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}.$$
Entonces la pendiente de la recta buscada es $a = -\frac{3}{2}$.

Además, la recta corta el eje de las abscisas en $x = -2$, y esto quiere decir que la recta pasa por el punto $(-2, 0)$. Entonces, la ecuación de la recta buscada es

$$y = -\frac{3}{2}(x - (-2)) + 0 = -\frac{3}{2}x - 3.$$

Mostramos a la derecha el gráfico de las dos rectas en un mismo sistema de ejes coordenados.



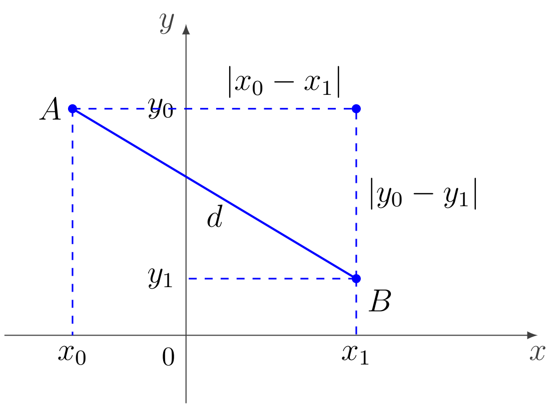
5.5 Distancia entre puntos del plano

Para finalizar esta unidad, vamos a presentar la fórmula de distancia entre dos puntos del plano cartesiano, para luego usarla en algunos ejemplos en los que se combinan los distintos conceptos estudiados.

Dados dos puntos $A = (x_0, y_0), B = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ definimos la **distancia entre dos puntos del plano** de la forma

$$d((x_1, y_1), (x_0, y_0)) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

Esta fórmula se deduce a partir del Teorema de Pitágoras, y nos indica la medida del segmento determinado por esos dos puntos.



Ejemplo 5.5.1

Veamos que los puntos $A = (-2, 0)$, $B = (0, -2)$, $C = (1, 0)$, $D = (-1, 2)$ forman un paralelogramo y calculemos su perímetro.

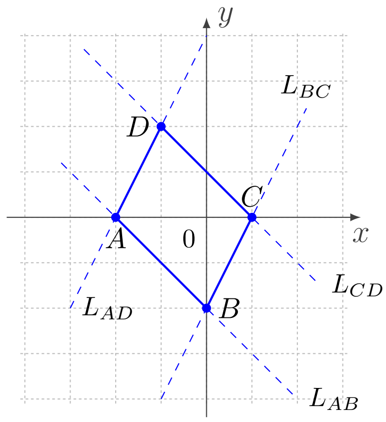
Para empezar, debemos mostrar que las rectas L_{AB} y L_{CD} son paralelas, y también las rectas L_{AD} y L_{BC} son paralelas.

$$\text{Pendiente de } L_{AB} \longrightarrow a_{AB} = \frac{-2-0}{0-(-2)} = -1$$

$$\text{Pendiente de } L_{CD} \longrightarrow a_{CD} = \frac{2-0}{-1-1} = -1$$

$$\text{Pendiente de } L_{AD} \longrightarrow a_{AD} = \frac{2-0}{-1-(-2)} = 2$$

$$\text{Pendiente de } L_{BC} \longrightarrow a_{BC} = \frac{0-(-2)}{1-0} = 2$$



Encontramos así que las pendientes de L_{AB} y L_{CD} son iguales, lo cual prueba que las rectas son paralelas. También las pendientes de L_{AD} y L_{BC} son iguales, por lo que las rectas son paralelas.

Ahora, calculamos la medida de los lados de este paralelogramo usando la fórmula de distancia entre puntos. Notemos que es suficiente calcular la medida de dos de sus lados ya que los lados opuestos tienen la misma medida.

$$\text{Medida de } \overline{AB} \longrightarrow d(A,B) = \sqrt{(0-(-2))^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Medida de } \overline{BC} \longrightarrow d(B,C) = \sqrt{(1-0)^2 + (0-(-2))^2} = \sqrt{5}$$

De esta forma encontramos que el perímetro del paralelogramo, en unidades de medida genéricas (u.m.), es

$$\mathcal{P} = 2 \cdot 2\sqrt{2}\text{ u.m.} + 2\sqrt{5}\text{ u.m.} = (4\sqrt{2} + 2\sqrt{5})\text{ u.m.}$$

Para pensar 18

La distancia de $A = (-2, 3)$ a $B = (0, 3)$ es igual a 2. ¿Es B el único punto del plano que se encuentra a distancia 2 de A? ¿Cuántos puntos verifican esta condición? Indicar, si es posible, otros tres puntos que la verifiquen.

Nota: Esta actividad está relacionada con lo propuesto en el ejercicio 18 de las actividades planteadas al final de esta unidad.

Actividades

1. Determinar la pendiente y la ordenada al origen de las siguientes funciones lineales.

   (a) $f(x) = 3x + 1$,

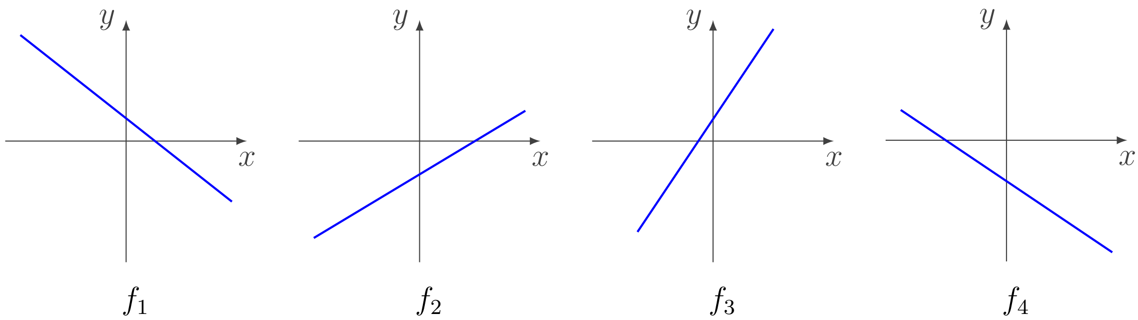
   (b) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 2$,

   (c) $f(x) = -4x$,

   (d) $f(x) = -1$.

2. Sabiendo que las gráficas corresponden a funciones del tipo $f(x) = ax + b$, asociar cada condición con su gráfica correspondiente.

   (a) $a < 0$ y $b < 0$, (b) $a > 0$ y $b < 0$, (c) $a < 0$ y $b > 0$, (d) $a > 0$ y $b > 0$.



3. Graficar las rectas definidas por

   (a) $y = 3$,

   (b) $y = 2x - 3$,

   (c) $5x + 2y - 1 = 0$,

   (d) $-\dfrac{3}{2}x + 3y - 2 = 0$.

4. (a) Indicar si los puntos $A = (2, 3)$, $B = (3, 1)$ y $C = (-2, 1)$ pertenecen a la recta de ecuación $y = \frac{2}{3}x - 1$.

   (b) Cuatro puntos A, B, C y D pertenecen a la recta $3x - 2y - 6 = 0$, sus abscisas son 4, 0, 2 y $\frac{2}{5}$, respectivamente. Determinar las ordenadas de los puntos.

5. Sea la función lineal $f(x) = -\dfrac{2}{3}x + 5$.

   (a) Graficar e indicar el dominio y la imagen.

   (b) Hallar $f(6)$, $f(-1)$ y $f(0,75)$.

   (c) Hallar $a, b \in \mathrm{Dom}\,(f)$ tal que $f(a) = 30$ y $f(b) = -14$.

   (d) Hallar los valores de $x \in \mathrm{Dom}\,(f)$ tales que $f(x) \geq 9$.

6. Un video club ofrece dos opciones para alquilar videos:
   Opción A: \$ 20 de abono anual más \$ 2,5 por video alquilado.
   Opción B: \$ 30 de abono anual más \$ 2 por video alquilado.

   (a) Hallar para cada opción la expresión del precio a pagar en función del número x de videos alquilados y representar en un mismo gráfico.

   (b) Si el cliente dispone de \$ 90. ¿Cuántos videos puede alquilar con cada una de las dos opciones?

7. Una población inicial de 100 bacterias crece a medida que transcurre el tiempo (medido en horas). Después de 2 horas la población de bacterias se duplicó.
   (a) Hallar una función que indique el tamaño de la población en función del tiempo.
   (b) ¿Qué cantidad de bacterias hay después de 15 horas?
   (c) ¿Cuántas horas deben transcurrir para que la población sea de 3.600 bacterias?

8. Determinar, analíticamente, si los puntos $M = \left(3, \frac{5}{2}\right)$, $N = \left(-1, -\frac{7}{2}\right)$ y $P = \left(\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}\right)$ están alineados.

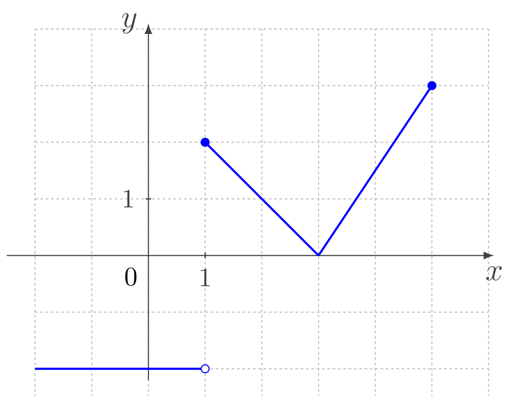
9. En cada caso, hallar la ecuación de la recta que
   (a) tiene pendiente 2 y ordenada al origen -3,
   (b) pasa por los puntos $P = (-2, 1)$ y $Q = (-1, 7)$,
   (c) pasa por el punto $P = (2, 3)$ y corta al eje de abscisas en $x = -1$,
   (d) corta a los ejes coordenados en $y = -2$ y en $x = 4$,
   (e) pasa por los puntos $A = (1, -3)$ y $B = (5, -3)$,
   (f) pasa por el punto $A = (1, 3)$ y es paralela a la recta $y = \frac{1}{3}x - 2$,
   (g) es paralela a la recta $x + 4y + 8 = 0$ y pasa por el punto $Q = (6, -2)$,
   (h) es perpendicular a la recta $2x + 3y = 4$ y pasa por el origen.

10. Graficar cada una de las siguientes funciones lineales a trozos e indicar dominio e imagen.

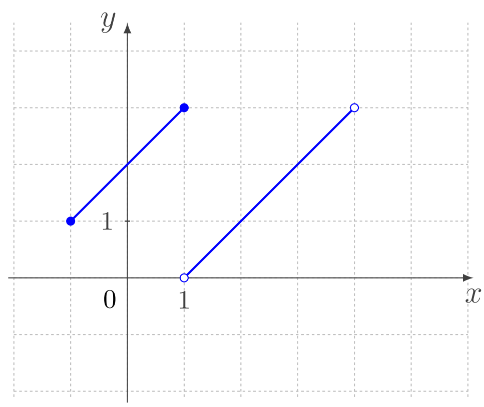
(a) $f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{si} \quad x \geq 1, \\ 3, & \text{si} \quad x < 1, \end{cases}$ (b) $g(x) = \begin{cases} -x, & \text{si} \quad x \geq 0, \\ 4x - 1, & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$

11. Hallar la expresión de las funciones lineales a trozos e indicar el dominio y la imagen en cada gráfica.

(a)



(b)

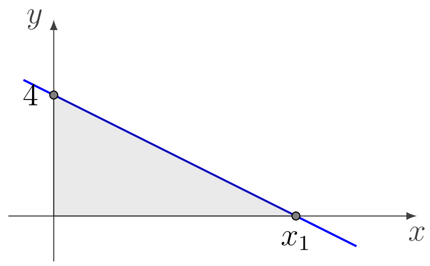


12. Definimos
$$f(x) = |2x+3|, \qquad g(x) = \frac{3}{4} + \left|x - \frac{1}{2}\right|, \qquad h(x) = 4 - \left|2 - \frac{2}{3}x\right|.$$
   (a) Para cada una de estas funciones, representar gráficamente e indicar su dominio, su imagen y las intersecciones de los gráficos con los ejes coordenados.
   (b) Encontrar el conjunto de valores de x para los cuales se verifica $h(x) > 2$.
   (c) Encontrar los valores del dominio de g para los cuales $g(x) = 1$.

13. Hallar todos los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ de modo tal que las rectas
$$L_1 : -3x + 2y - 4 = 0, \qquad L_2 : \ 3ax + 2y - b = 0$$
sean
   (a) paralelas y distintas, (b) coincidentes, (c) perpendiculares.

14. Determinar, en cada caso, el o los valores de k para los cuales la recta de ecuación $kx + (2k+1)y + 3 = 0$,
   (a) sea vertical,
   (b) tenga pendiente igual a $-\frac{1}{3}$,
   (c) pase por el punto $P = \left(k, -\frac{k}{2}\right)$,
   (d) corte en un punto a la recta $4x + 2y = 7$.

15. Dada la recta $y = mx + 4$, determinar el valor de m para que el área de la figura sea igual a 24.



16. Plantear y resolver
   (a) Durante 48 días se realizó un experimento con gallinas. Se determinó que durante ese lapso el peso promedio es una función lineal del número de días trascurridos. Sabiendo que el peso promedio al inicio del experimento fue de 45 gramos y que 26 días después fue de 226 gramos, determinar la fórmula de dicha función lineal y calcular el peso promedio de las gallinas a los 35 días.
   (b) En un parque de diversiones se paga una entrada y luego un adicional por cada juego (todos los juegos tienen el mismo costo). Martín gastó \$ 35 y utilizó 4 juegos, y Leonel por utilizar 7 juegos gastó \$ 50.
      i. Encontrar la fórmula de la función lineal que relaciona el costo del paseo con la cantidad de juegos que se utilizan. Representar gráficamente dicha función.
      ii. ¿Qué representan la pendiente y la ordenada al origen en este problema?
      iii. ¿Cuál será el costo de utilizar 6 juegos?
      iv. Si se dispone de \$ 70, ¿cuántos juegos se pueden utilizar?

17. Calcular la distancia entre los siguientes pares de puntos pertenecientes a $\mathbb{R}^2$.

    (a) $P = (3, -8)$, $Q = (2, -6)$,

    (b) $P_1 = \left(\frac{1}{4}, 0\right)$, $Q_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

18. (a) Sea $A = \left(-\dfrac{1}{2}, -1\right) \in \mathbb{R}^2$. Encontrar todos los posibles $y \in \mathbb{R}$ tales que

    $$d(A, (1, y)) = \frac{5}{2}.$$

    (b) Sea $B = (2, -1) \in \mathbb{R}^2$. Encontrar todos los posibles $x \in \mathbb{R}$ tales que

    $$d(B, (x, 1)) = \sqrt{8}.$$

19. Demostrar que los puntos $A = (3, 3)$, $B = (11, 5)$ y $C = (8, 17)$, son los vértices de un triángulo rectángulo y hallar su perímetro.

20. Los pares ordenados

    $$A = (1, 3), \quad B = (3, -2), \quad C = (-1, -3), \quad D = (-3, 2),$$

    determinan los vértices de un cuadrilátero.

    (a) ¿De qué tipo de cuadrilátero se trata?

    (b) Calcular su perímetro.

    (c) Encontrar las ecuaciones de las rectas que contienen a sus diagonales.

6 Sistemas de ecuaciones lineales

Síntesis de la unidad

A lo largo de esta unidad vamos a estudiar sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, y estableceremos una relación entre la interpretación geométrica de estos sistemas y las rectas estudiadas en la unidad anterior. Los conceptos más destacados son los siguientes.

1. Definición de sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas. Clasificación según la cantidad de soluciones: sistema compatible determinado, sistema compatible indeterminado y sistema incompatible.

2. Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones.

3. Interpretación geométrica y relación con los conceptos estudiados en la unidad anterior.

4. Planteo y resolución de problemas.

Un sistema de dos ecuaciones lineales, a las que llamamos $L_1 : a_1\,x + a_2\,y + a_3 = 0$, $L_2 : b_1\,x + b_2\,y + b_3 = 0$, con dos incógnitas x, y tiene la forma general

$$\begin{cases} a_1\,x + a_2\,y + a_3 = 0, \\ b_1\,x + b_2\,y + b_3 = 0. \end{cases}$$

donde los coeficientes $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ son números reales. No siempre un sistema viene dado en la forma completa y ordenada que presentamos. Por ejemplo,

$$\begin{cases} x - 2y = 3, \\ 3y = x. \end{cases}$$

es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Resolver un sistema de este tipo implica encontrar, si es posible, un par de valores (x, y) que sea solución de ambas ecuaciones.

Si un sistema tiene una única solución se denomina **sistema compatible determinado**. Sin embargo no siempre existe una única solución. Algunos sistemas, llamados **sistemas compatibles indeterminados** tienen infinitas soluciones; y otros, llamados **sistemas incompatibles**, no tienen solución.

6.1 Métodos de resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales

Existen distintos métodos de resolución para sistemas de dos ecuaciones lineales. En los siguientes ejemplos repasamos algunos de los métodos de resolución y presentamos las distintas situaciones que podemos encontrar respecto de la solución de un sistema.

Ejemplo 6.1.1

1. Consideremos el sistema $\begin{cases} 3x - 4y = 10, \\ x + 2y = 0. \end{cases}$

Una forma de resolver un sistema de ecuaciones consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y luego reemplazarla en la otra ecuación. En este caso la incógnita más simple de despejar es x en la segunda ecuación, que llamamos L_2, así encontramos

$$x + 2y = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -2y.$$

Con esta expresión para x reemplazamos en L_1 y resulta

$$3x - 4y = 10 \quad \Longrightarrow \quad 3 \cdot (-2y) - 4y = 10 \quad \Longrightarrow \quad -10y = 10 \quad \Longrightarrow \quad y = -1.$$

Ahora, con este valor de y resulta

$$x = -2y = -2 \cdot (-1) = 2.$$

De esta manera encontramos que $x = 2, y = -1$ es la solución del sistema dado. Se trata entonces de un sistema compatible determinado.

Podemos verificar si la solución encontrada es la correcta reemplazando en cada ecuación los valores encontrados.

$$\begin{array}{rr} \text{Primera ecuación} & 3x - 4y = 3 \cdot (2) - 4 \cdot (-1) = 10. \\ \text{Segunda ecuación} & x + 2y = 2 + 2 \cdot (-1) = 0. \end{array}$$

Así verificamos que la solución hallada es la correcta.

2. Sea el sistema $\begin{cases} x - 2y = -6, \\ 6y - 3x = 2. \end{cases}$

Despejamos x en la primera ecuación

$$x - 2y = -6 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -6 + 2y,$$

y con esto reemplazamos en la segunda ecuación

$$6y - 3x = 2 \quad \Longrightarrow \quad 6y - 3 \cdot (-6 + 2y) = 2 \quad \Longrightarrow \quad 18 = 2 \ \rightarrow \ ABSURDO.$$

Este absurdo nos indica que el sistema no tiene solución. Luego el mismo es un sistema incompatible.

3. Consideremos el sistema $\begin{cases} 9 \cdot (y + 1) = 6x, \\ 2x - 3y - 3 = 0. \end{cases}$

Veamos en este caso otra forma de resolver un sistema, que consiste en despejar la misma incógnita de ambas ecuaciones y luego igualar las expresiones encontradas.

Despejemos entonces x en las dos ecuaciones.

$$\text{Primera ecuación} \qquad x = \frac{9}{6}(y+1) = \frac{3}{2}(y+1) \Longrightarrow x = \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}.$$

$$\text{Segunda ecuación} \qquad 2x = 3y + 3 \Longrightarrow x = \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}.$$

Ahora, dado que el valor de x debe ser el mismo en ambas ecuaciones, igualamos las expresiones encontradas para esta incógnita, y resulta así

$$\frac{3}{2}y + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}.$$

Esta igualdad es una identidad, es decir que es válida para cualquier valor de y. Luego, el sistema tiene infinitas soluciones. Tenemos así un sistema compatible indeterminado.

Ahora, si bien tenemos infinitas soluciones no cualquier par (x, y) es solución. Las soluciones deben verificar la relación establecida por la ecuación: $x = \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}$. Entonces, las soluciones de este sistema son pares de la forma

$$(x, y) = \left(\frac{3}{2}y + \frac{3}{2}, y\right), \ y \in \mathbb{R}.$$

Así, por ejemplo, $A = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$ y $B = (0, -1)$ son soluciones del sistema. Sin embargo $C = (2, 1)$ no lo es.

6.2 Interpretación geométrica

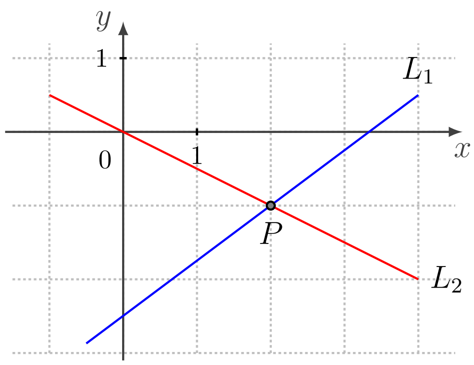
Notemos que podemos interpretar cada una de las ecuaciones de un sistema como la ecuación implícita de una recta. Entonces al resolver un sistema estamos buscando un punto $P = (x, y)$ que pertenezca a ambas rectas. Es decir que resolver un sistema consiste en encontrar, si existe, la **intersección entre dos rectas** dadas.

Ejemplo 6.2.1

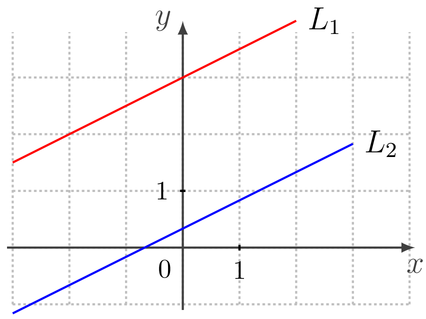
Retomemos los sistemas estudiados en el ejemplo anterior y grafiquemos las rectas involucradas. Para eso, en cada ecuación debemos despejar la variable y.

1. $\begin{cases} 3x - 4y = 10, \\ x + 2y = 0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}, \\ y = -\frac{1}{2}x. \end{cases}$

De esta manera las rectas resultan $L_1 : y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}$ y $L_2 : y = -\frac{1}{2}x$, la intersección de estas rectas coincide con la solución del sistema $P = (2, -1)$.

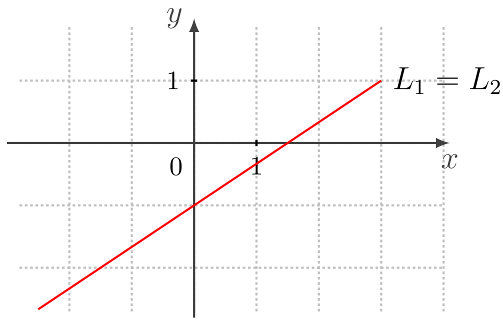


2. $\begin{cases} x - 2y = -6, \\ 6y - 3x = 2. \end{cases} \implies \begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x + 3, \\ y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3}. \end{cases}$



En este caso, en el que vimos que no existe solución, las rectas $L_1 : y = \frac{1}{2}x + 3$ y $L_2 : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$, resultan ser paralelas no coincidentes.

3. $\begin{cases} 9 \cdot (y+1) = 6x, \\ 2x - 3y - 3 = 0. \end{cases} \implies \begin{cases} y = \dfrac{2}{3}x - 1, \\ y = \dfrac{2}{3}x - 1. \end{cases}$



Las rectas L_1 y L_2 tiene la misma ecuación $y = \frac{2}{3}x - 1$. Encontramos así un par de rectas paralelas coincidentes y la solución es cualquier punto sobre esta recta.

La siguiente tabla resume las distintas situaciones estudiadas.

Sistema	**Soluciones**	**Representación gráfica**
compatible determinado	una única solución	rectas no paralelas
compatible indeterminado	infinitas soluciones	rectas paralelas coincidentes
incompatible	sin solución	rectas paralelas no coincidentes

Ejemplo 6.2.2

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} a^2x + y = 2a^2, \\ 12a + 2y + 18x = 0. \end{cases}$$

Queremos determinar, si es posible, un valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual el sistema resulte ser

1. compatible indeterminado,
2. incompatible,
3. compatible determinado.

Despejamos en cada ecuación la variable y.

$$\begin{aligned} y &= -a^2x + 2a^2, \\ y &= -9x - 6a. \end{aligned}$$

Para que el sistema sea compatible indeterminado las rectas deben ser paralelas coincidentes. Es decir que las pendientes y las ordenadas al origen de ambas rectas deben ser iguales. Esto es

$$-a^2 = -9 \quad \text{y} \quad 2a^2 = -6a,$$

y $a = -3$ verifica ambas ecuaciones.

Ahora, para que el sistema sea incompatible las rectas deben ser paralelas no coincidentes. Es decir que las pendientes de ambas rectas deben ser iguales y sus ordenadas al origen deben ser distintas. Esto es

$$-a^2 = -9 \quad \text{y} \quad 2a^2 \neq -6a,$$

y $a = 3$ verifica ambas ecuaciones.

Para cualquier otro valor de a distinto de 3 y -3 el sistema resulta ser compatible determinado.

Por último, veamos un ejemplo que combina la aplicación de distintos conceptos vistos en esta unidad y la anterior.

Ejemplo 6.2.3

Consideremos las rectas dadas por

$$L_1 : y = 2x + 4, \qquad L_2 : x + 2y = 2.$$

Veremos que estas rectas determinan, junto con el eje de las abscisas, un triángulo rectángulo. Luego, haciendo uso de la fórmula de distancia, calcularemos su área y su perímetro.

Comenzamos buscando la ecuación explícita de L_2, la cual resulta ser $L_2 : y = -\frac{1}{2}x + 1$. Dado que las pendientes $a_1 = 2$ y $a_2 = -\frac{1}{2}$ de ambas rectas son opuestas e inversas, las rectas son perpendiculares, es decir, se cortan formando un ángulo recto.

Veamos ahora los puntos en que cada recta intersecta al eje x reemplazando el valor de y por 0.

- ⋄ Para L_1, $\quad 0 = 2x + 4 \implies x = -2.$
- ⋄ Para L_2, $\quad 0 = -\dfrac{1}{2}x + 1 \implies x = 2.$

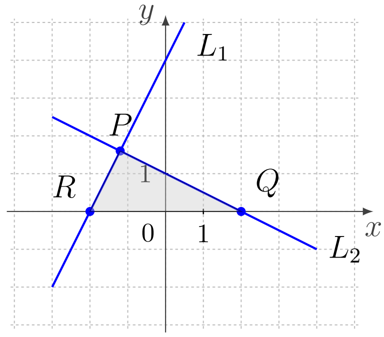
Llamemos $R = (-2, 0)$ al punto del plano en que la recta L_1 intersecta al eje x, y llamemos $Q = (2, 0)$ al punto en que se intersectan la recta L_2 con este mismo eje.

Ahora, el punto $P = (x_0, y_0)$ en que se intersectan ambas rectas lo encontramos resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y = 2x + 4, \\ x + 2y = 2. \end{cases}$$

La primera ecuación nos da una expresión para la variable y, que sustituimos en la segunda ecuación para encontrar

$$\begin{aligned} x+2(2x+4) &= 2 \\ 5x &= -6 \\ x &= -\frac{6}{5}. \end{aligned}$$



Reemplazando con este valor en la primera ecuación resulta

$$y = 2x+4 = 2\left(-\frac{6}{5}\right)+4 = \frac{8}{5}.$$

Así, $P = \left(-\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$ es el punto en que se intersectan L_1 y L_2.

Para calcular el perímetro y el área del triángulo $\overset{\triangle}{PQR}$ necesitamos calcular la medida de sus lados.

La medida del segmento $\overline{RQ}$ es muy simple de determinar sin necesidad de fórmulas. Tenemos $|\overline{RQ}| = 4$. Las medidas de los restantes lados de este triángulo las calculamos usando la fórmula de distancia entre dos puntos de $\mathbb{R}^2$.

- $\diamond$ $|\overline{PR}| = d(P,R) = \sqrt{\left[-2-\left(-\frac{6}{5}\right)\right]^2 + \left(0-\frac{8}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}+\frac{64}{25}} = \frac{4}{5}\sqrt{5}.$

- $\diamond$ $|\overline{PQ}| = d(P,Q) = \sqrt{\left[2-\left(-\frac{6}{5}\right)\right]^2 + \left(0-\frac{8}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{256}{25}+\frac{64}{25}} = \frac{8}{5}\sqrt{5}.$

Ahora podemos calcular el perímetro del triángulo que, expresado en unidades de medida genéricas u. m. (ver **Consideraciones generales**), resulta

$$\mathcal{P} = 4\,\text{u.m.} + \frac{4}{5}\sqrt{5}\,\text{u.m.} + \frac{8}{5}\sqrt{5}\,\text{u.m.} = 4 + \frac{12}{5}\sqrt{5}\,\text{u.m.}$$

Además podemos calcular el área del triángulo. Si consideramos el lado $\overline{PQ}$ como base, el lado $\overline{PR}$ nos da la altura del triángulo y así obtenemos

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\sqrt{5}\,\text{u.m.}\cdot\frac{8}{5}\sqrt{5}\,\text{u.m.} = \frac{16}{5}\,\text{u.m.}^2$$

Otra forma de calcular el área es usar como base el lado $\overline{RQ}$, en este caso la altura es la coordenada y del punto P, de esta manera

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\cdot 4\,\text{u.m.}\cdot\frac{8}{5}\,\text{u.m.} = \frac{16}{5}\,\text{u.m.}^2$$

Para pensar 19

Planteando un sistema de ecuaciones, encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A = (2,-3)$ y $B = (-1,1)$.

Actividades

1. Resolver y clasificar los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. Si el sistema resulta ser compatible indeterminado, dar la solución general e indicar dos soluciones particulares.

(a) $\begin{cases} x - 3y = 1, \\ 2x + 6y = 4, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0, \\ 4x + 2y = 6, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x - y = 2, \\ 2(y + x) = x - y + 6, \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x = 3y - 1, \\ 4x = 6y + 2, \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2(y + 2x) = x - 2(y - 2), \\ 4y + 3x = 4, \end{cases}$

(f) $\begin{cases} -2x + 4 = 3y, \\ 9y = 12 - 6x. \end{cases}$

2. Representar gráficamente y dar una interpretación geométrica de cada uno de los sistemas del ejercicio anterior.

3. (a) Determinar para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ el sistema $\begin{cases} kx - y = -1, \\ -2x - y = 3k, \end{cases}$ representa geométricamente dos rectas que se cortan en un punto.

   (b) Hallar un valor de $k \in \mathbb{R}$ para que el punto $A = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ sea solución del sistema del inciso anterior.

4. Determinar $a \in \mathbb{R}$ de modo tal que el sistema $\begin{cases} y = a(3ax - 1), \\ a + y = 3x, \end{cases}$ sea

   (a) incompatible,

   (b) compatible determinado,

   (c) compatible indeterminado.

5. Determinar las coordenadas del centro de un cuadrado de vértices $A = (0, 0)$, $B = (1, 2)$, $C = (-2, 1)$ y $D = (-1, 3)$.

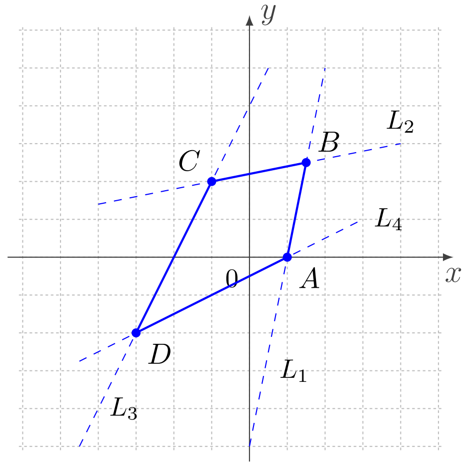
6. Encontrar las coordenadas de los vértices del romboide $ABCD$ a partir de las ecuaciones de las rectas que contienen a sus lados. Calcular el perímetro de esta figura.

$$L_1: \ y = 5x - 5,$$

$$L_2: \ y = \frac{1}{5}x + \frac{11}{5},$$

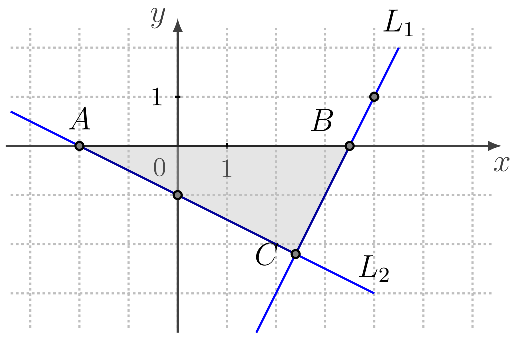
$$L_3: \ y = 2x + 4,$$

$$L_4: \ y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$



7. Encontrar el área del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ a partir de los siguientes datos.

   - ◇ La recta L_2 intersecta al eje de las abscisas en $(-2, 0)$ y al de las ordenadas en $(0, -1)$.
   - ◇ La recta L_1 es perpendicular a L_2 y el punto $(4, 1)$ pertenece a L_1.



7 Función cuadrática. Parábolas

Síntesis de la unidad

En esta unidad vamos a estudiar la función cuadrática y su representación gráfica: la parábola. En particular, repasaremos los siguientes conceptos.

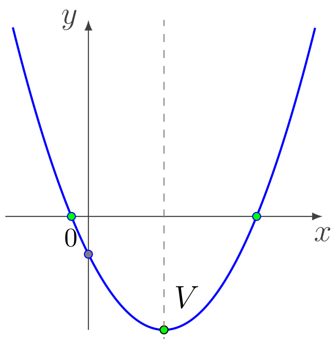
1. Definición de función cuadrática. Representación gráfica.
2. Elementos destacados de la parábola: vértice, eje de simetría, concavidad, raíces.
3. Formas de expresar la ecuación de la parábola: canónica, polinómica y factorizada.
4. Planteo y resolución de problemas utilizando funciones cuadráticas.

Una **función cuadrática** es una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuya forma general es

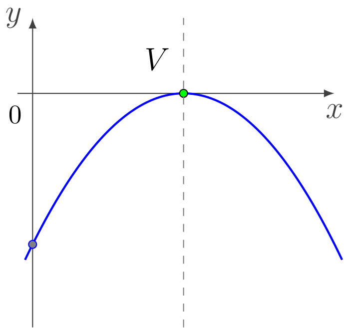
$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

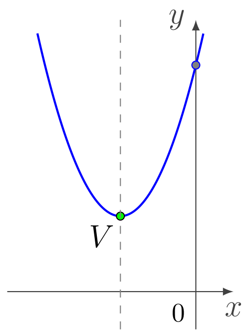
El gráfico de una función cuadrática es una **parábola** de ecuación $y = ax^2 + bx + c$, con un **vértice**, que en general notamos $V = (h, k)$, y un **eje de simetría vertical** de ecuación $x = h$. El signo de a indica la **concavidad** de la parábola: hacia arriba, si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$, según se observa en la figura.



$a > 0$



$a < 0$



$a > 0$

En la Unidad 4 estudiamos, en forma general, las intersecciones del gráfico de una función con los ejes coordenados. Ahora, para el caso particular de una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, encontramos que su gráfico corta a eje y en el punto $P = (0, f(0)) = (0, c)$. Por otro lado, las intersecciones con el eje x serán puntos de la forma $(x_0, 0)$, siendo x_0 una solución, si existe, de la ecuación

$$0 = ax^2 + bx + c.$$

Los valores x_0 son llamados usualmente ceros o **raíces** de la función. Sabemos, por lo estudiado en la Unidad 2, que pueden existir dos, una o ninguna solución de esta ecuación dependiendo del signo del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Así, las parábolas tienen dos, una o ninguna raíz, como podemos observar en los gráficos anteriores.

El dominio de una función cuadrática f es $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, y su imagen depende del signo de a y del vértice V. Si el vértice tiene coordenadas $V = (h, k)$, con $h, k \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{array}{lcl} a > 0 & \Longrightarrow & \mathrm{Im}(f) = [k, +\infty), \\ a < 0 & \Longrightarrow & \mathrm{Im}(f) = (-\infty, k]. \end{array}$$

Para pensar 20

Si la parábola $y = ax^2 + bx + c$ tiene vértice $V = (-2, -1)$ y no intersecta al eje de las abscisas, ¿qué podemos decir del valor de a? ¿podemos hallar la imagen de la función cuadrática correspondiente?

7.1 Distintas expresiones de la ecuación de la parábola

Existen tres formas equivalentes de presentar la ecuación de una parábola, o bien la función cuadrática correspondiente.

1. Forma polinómica.
2. Forma canónica.
3. Forma factorizada.

Analizamos a continuación lo que cada una de ellas aporta al estudio de la función, así como el paso de una a otra de las expresiones.

1. En *forma polinómica* la parábola se expresa $y = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$.

   Como ya mencionamos, a partir de esta expresión es inmediato indicar el punto en que la parábola intersecta al eje y: $P = (0, c)$. También podemos encontrar las intersecciones con el eje x haciendo uso de la fórmula resolvente

   $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

   Así, por ejemplo, $y = 2x^2 + x + 3$ intersecta al eje y en $P = (0, 3)$, y no intersecta al eje x (ya que el discriminante $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -23$ es negativo).

2. En *forma canónica* la expresión de la parábola es $y = a(x - h)^2 + k,\ a, h, k \in \mathbb{R},\ a \neq 0$.

   Esta expresión nos brinda explícitamente las coordenadas del vértice de la parábola: $V = (h, k)$, así como la ecuación del eje de simetría: $x = h$.

   Dada una parábola en forma canónica, para encontrar la forma polinómica basta desarrollar el cuadrado del binomio y agrupar los términos que corresponda. Por otro lado, dada una parábola en forma polinómica, podemos encontrar su forma canónica a partir de un **completamiento de cuadrados**. Esta estrategia consiste en sumar y restar un término que transforma el binomio $ax^2 + bx$ en un trinomio cuadrado perfecto. (Recordar el ejercicio 3 de la unidad de expresiones algebraicas).

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c - \frac{b^2}{4a} \\
&= a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2 + c - \frac{b^2}{4a}.
\end{aligned}$$

De aquí se deduce que las coordenadas del vértice V son

$$h = -\frac{b}{2a}, \quad k = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Por ejemplo, dada la parábola $y = 2x^2 + 12x + 19$, tenemos

$$\begin{aligned}
2x^2 + 12x + 19 &= 2\left(x^2 + 6x\right) + 19 \\
&= 2\left(x^2 + 6x + 3^2 - 3^2\right) + 19 \\
&= 2\left(x^2 + 6x + 3^2\right) + 19 - 18 \\
&= 2\left(x - (-3)\right)^2 + 1,
\end{aligned}$$

de esta manera resulta

$$h = -3, \quad k = 1.$$

Luego la forma canónica de esta parábola es $y = 2[x - (-3)]^2 + 1 = 2(x + 3)^2 + 1$, su vértice es $V = (-3, 1)$ y su eje de simetría es $x = -3$.

3. En la *forma factorizada* podemos encontrar dos situaciones distintas. Comúnmente se asocia a esta forma la expresión $y = a(x - x_1)(x - x_2),\ a, x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ a \neq 0$.

   Esta representación nos indica explícitamente las raíces de la parábola: x_1 y x_2. Así las intersecciones con el eje x son los puntos de coordenadas $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.

   Sin embargo, no siempre las parábolas tienen raíces. En el caso de no tenerlas, la forma factorizada es la misma que la polinómica. Por ejemplo, $y = x^2 + 3$ es una parábola dada en forma factorizada. Más aún, esta es también su forma polinómica y canónica. Notemos que $y = x^2 + 3 = (x - 0)^2 + 3$.

   Dada una parábola en forma canónica $y = a(x - h)^2 + k$, para dar la forma factorizada debemos encontrar sus raíces. Para eso despejamos x de la ecuación $a(x - h)^2 + k = 0$. Veamos esto a partir de un ejemplo. Consideremos $y = -2(x - 1)^2 + 8$.

$$\begin{aligned}
-2(x - 1)^2 + 8 &= 0 \\
(x - 1)^2 &= 4 \Longrightarrow \begin{cases} x - 1 = \sqrt{4} & \Rightarrow \ x_1 = 3, \\ \\ x - 1 = -\sqrt{4} & \Rightarrow \ x_2 = -1. \end{cases}
\end{aligned}$$

De esta forma encontramos que $y = -2(x-1)^2 + 8 = -2(x-3)(x+1)$. A partir de la forma factorizada podemos también indicar la ecuación del eje de simetría, dado que esta recta pasa por el punto medio entre las raíces. El eje de simetría entonces tiene ecuación

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

En el ejemplo anterior teníamos $x_1 = 3, x_2 = -1$, y así el eje de simetría es $x = 1$.

Para pensar 21

1. ¿Cual es la forma general de una parábola que posee una única raíz (doble) $x = x_0$?
2. ¿En qué casos no es posible expresar una parábola en la forma $y = a(x - x_1)(x - x_2)$?

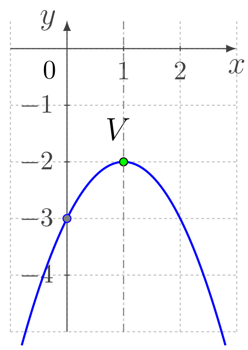
7.2 Representación gráfica

Para graficar una parábola es necesario, por ejemplo, conocer el vértice V y algún otro punto que pertenezca al gráfico.

Ejemplo 7.2.1

Consideremos $f(x) = -x^2 + 2x - 3$. Inmediatamente podemos decir que $P = (0, -3)$ es la intersección del gráfico de esta función con el eje y. Completemos cuadrados para encontrar el vértice.

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 - 2x) - 3 \\ &= -(x^2 - 2x + 1 - 1) - 3 \\ &= -(x - 2x + 1) + 1 - 3 \\ &= -(x-1)^2 - 2. \end{aligned}$$



De aquí concluimos que $V = (1, -2)$, el eje de simetría es $x = 1$ y la parábola es cóncava hacia abajo ya que $a < 0$. Mostramos a la derecha el gráfico de la parábola.

Notemos que si la parábola está dada en forma canónica $y = a(x-h)^2 + k$, podemos graficarla a partir de corrimientos de la parábola $y = ax^2$, esta última parábola tiene vértice $V = (0, 0)$ y su eje de simetría es $x = 0$. Para representar gráficamente $y = ax^2$ es necesario, además del vértice, otro punto, como podría ser $A_1 = (1, a)$. Por la simetría de la parábola, $A_2 = (-1, a)$ también pertenece al gráfico.

En los siguientes gráficos representamos, a la izquierda, la función $f(x) = x^2$ y a la derecha las funciones $g(x) = 2x^2$ y $h(x) = \frac{1}{2}x^2$.

En el caso de la función f, el coeficiente que multiplica a x^2 es $a = 1$, por lo que la parábola pasa por los puntos $A_1 = (1, 1)$ y $A_2 = (-1, 1)$. Para la función g, el coeficiente que multiplica a x^2 es $a = 2$, de forma que la parábola correspondiente pasa por $B_1 = (1, 2)$ y $B_2 = (-1, 2)$. Por último, en el caso de la función h, el coeficiente que multiplica a x^2 es $a = \frac{1}{2}$, y entonces podemos asegurar que la parábola correspondiente pasa por $C_1 = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ y $C_2 = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

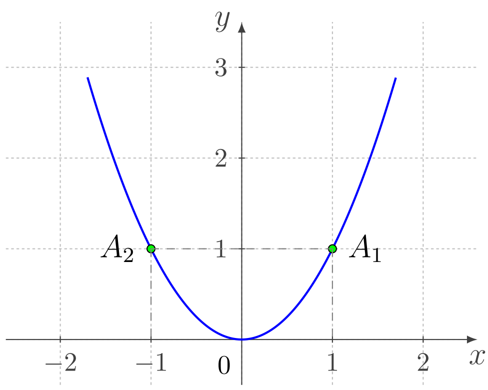
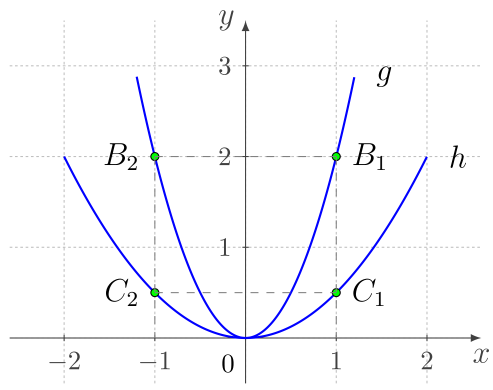


Gráfico de $f(x) = x^2$.



Gráficos de $g(x) = 2x^2$ y $h(x) = \frac{1}{2}x^2$.

7.3 Planteo y resolución de problemas

Ejemplo 7.3.1

Consideremos los rectángulos cuya altura es dos unidades menor que la medida de la base.

1. Encontrar una función que relacione la medida del área (en cm^2) de uno de estos rectángulos en términos de la medida de la base (en cm).
2. Indicar el dominio de esta función. Representar gráficamente.
3. ¿Cuál es la medida de la base de uno de estos rectángulos cuya área es $11,25$ cm^2?

Resolvamos cada uno de los incisos anteriores.

1. Si llamamos x a la medida de la base, entonces la altura del rectángulo medirá $x - 2$. Luego, el área A está dada por

$$A(x) = x(x-2) = x^2 - 2x.$$

2. La representación gráfica de esta función es una parábola. Pero la medida de la base x no puede ser cualquier número real pues tanto la base como la altura deben tener medida positiva. Entonces debe ser

$$x > 0 \quad \text{y} \quad x - 2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x > 2.$$

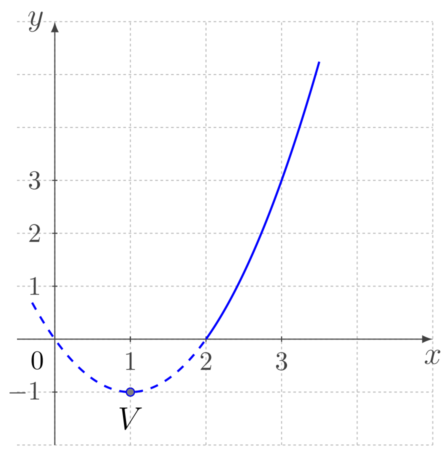
Así, el dominio de la función es $\text{Dom}\,(A) = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$. Para poder dibujar la parábola buscamos el vértice $V = (h, k)$, dado por

$$h = -\frac{(-2)}{2 \cdot 1} = 1, \qquad k = A(h) = A(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1,$$

y las raíces que son fáciles de determinar,

$$x(x-2)=0 \quad \Longrightarrow \quad x=0 \quad \text{ó} \quad x=2.$$

Con estos datos podemos graficar la parábola, teniendo en cuenta el dominio correspondiente a este problema. Con línea punteada graficamos la parte de la parábola que no corresponde al dominio de la función para este problema particular.



3. Si el área de un rectángulo es $11,25$ cm^2, entonces la medida de la base la encontramos resolviendo

$$11,25 = x^2 - 2x \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x - 11,25 = 0.$$

Esta ecuación tiene dos soluciones,

$$x_1 = \frac{-(-2)+\sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-11,25)}}{2\cdot 1} = \frac{2+7}{2} = \frac{9}{2} = 4,5,$$

$$x_2 = \frac{-(-2)-\sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-11,25)}}{2\cdot 1} = \frac{2-7}{2} = -\frac{5}{2} = -2,5.$$

El valor x_2 no tiene sentido en el contexto del problema pues la medida del lado de un rectángulo no puede ser negativa. Luego, la única solución posible es $x_1 = 4,5$. Así la medida de la base del rectángulo cuya área es $11,25$ cm^2 será de $4,5$ cm.

Actividades

1. Determinar, sin recurrir a la gráfica, si los puntos

$$P_1 = (0, 2), \quad P_2 = (3, -6), \quad P_3 = \left(-2, -\frac{2}{3}\right),$$

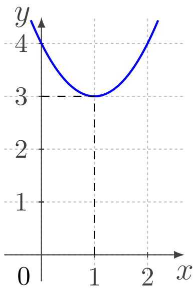
pertenecen al gráfico de $f(x) = x^2 + \dfrac{10}{3}x + 2$.

2. Si $f(x) = 2kx^2 + 1$ determinar, en cada caso, los valores de k de forma que

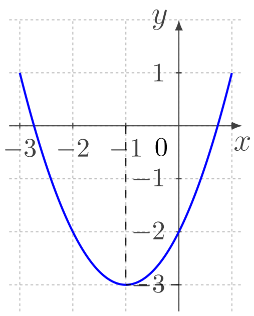
   (a) la imagen de $x = 1$ sea $y = 1$, (b) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 5$.

3. Relacionar cada una de las siguientes parábolas con la ecuación correspondiente.

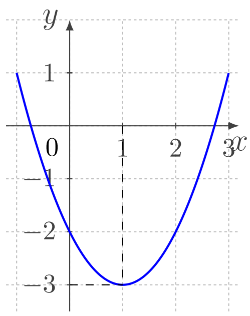
f_1



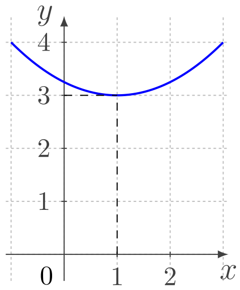
f_2



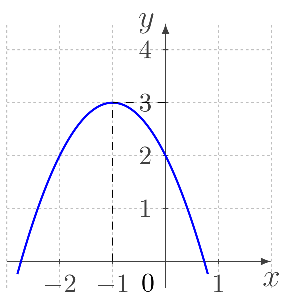
f_3



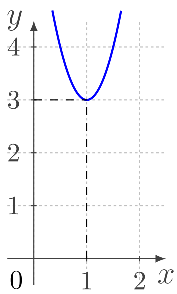
f_4



f_5



f_6



   (a) $y = (x-1)^2 - 3$,
   (b) $y = \frac{1}{4}(x-1)^2 + 3$,
   (c) $y = -(x+1)^2 + 3$,
   (d) $y = (x-1)^2 + 3$,
   (e) $y = 4(x-1)^2 + 3$,
   (f) $y = (x+1)^2 - 3$.

4. A partir del gráfico de la parábola $y = x^2$ representar gráficamente las siguientes funciones cuadráticas indicando, en cada caso, si se produjo un desplazamiento vertical, horizontal o cambio de la concavidad.

   (a) $y = -2x^2$,
   (b) $y = (x-5)^2$,
   (c) $y = \dfrac{1}{3}(x-1)^2 + 2$,
   (d) $y = -(x+2)^2 + 4$.

5. Dadas las funciones cuadráticas

   i. $f(x) = -5x^2 - 3,$

   ii. $f(x) = x^2 + 4x,$

   iii. $f(x) = x^2 - 9x + 9,$

   iv. $f(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}x - 1\right)\left(\sqrt{3}x + 1\right).$

   (a) expresarlas en forma canónica,
   (b) determinar las coordenadas del vértice,
   (c) indicar la imagen de cada una de las funciones,
   (d) hallar la intersección con el eje y,
   (e) verificar los resultados obtenidos mediante la representación gráfica de cada función.

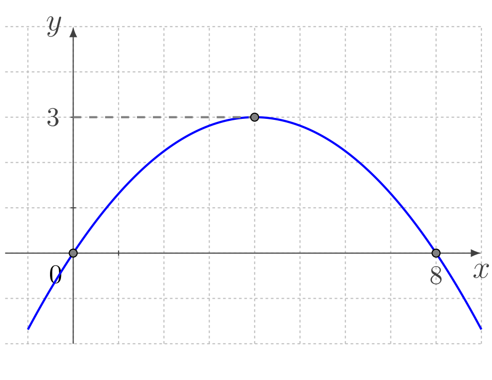
6. Sea f una función cuadrática a trozos definida por $f(x) = \begin{cases} -2x^2, & \text{si} \quad x < 1, \\ x^2 - 2x, & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$

   (a) Graficar esta función.
   (b) Indicar su dominio e imagen.
   (c) Calcular, si es posible, $f(-1)$, $f(1)$ y $f(2)$.

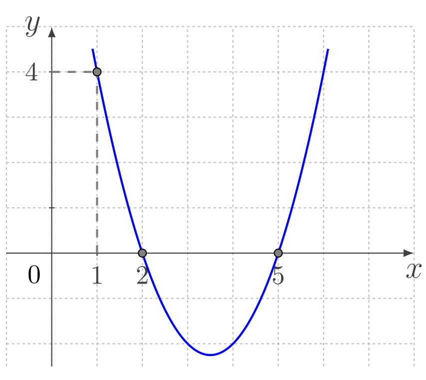
7. Hallar, en cada caso, la ecuación de la parábola que verifica las condiciones dadas.

   (a) Pasa por el punto $(1, -1)$ y su vértice es el punto $V = (-2, 3)$.
   (b) Intersecta al eje y en el punto $(0, 3)$ y su vértice es el punto $V = (1, 2)$.
   (c) Pasa por los puntos $(0, 2)$, $(-1, 5)$ y $(\frac{1}{2}, 1)$.
   (d) Tiene a $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$ como ceros y cuyo gráfico pase por el punto $(0, 8)$.
   (e) Tiene a $x_1 = \sqrt{3}$ y $x_2 = -\sqrt{3}$ como ceros y $f(1) = 1$.
   (f) Su imagen es $(-\infty, 3]$ y corta al eje de las abscisas en los puntos $(-1, 0)$ y $(-2, 0)$.
   (g) Su imagen es $[-5, +\infty)$, tiene vértice sobre la recta $x = 1$ y un cero en $x = -2$.

8. Hallar, en cada caso, la ecuación de la función cuadrática utilizando los datos indicados en los gráficos (a) y (b).



(a)



(b)

9. Dadas las siguientes funciones cuadráticas

   i. $f(x) = x^2 - x - 20$,

   ii. $f(x) = 3x^2 - 42x + 147$,

   iii. $f(x) = x^2 - 2x + 4$,

   iv. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}$.

   (a) Indicar, sin trazar la gráfica, el número de intersecciones con el eje de abscisas.

   (b) En caso de ser posible, expresar la función cuadrática en forma factorizada.

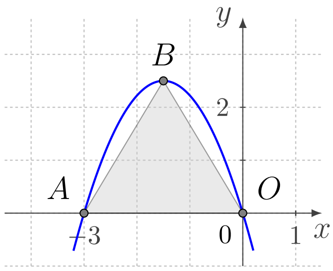
10. Hallar los posibles valores de m de modo tal que

    (a) $f(x) = x^2 + mx + 4$ tenga dos ceros reales distintos,

    (b) $g(x) = 2x^2 - x - m$ no tenga ceros reales,

    (c) $h(x) = -x^2 - mx - 5$ tenga un único cero.

11. Hallar la ecuación de la parábola de vértice B sabiendo que $A = (-3, 0)$, $O = (0, 0)$ y el triángulo $\overset{\triangle}{ABO}$ es equilátero.



12. Un fabricante encuentra que la ganancia G obtenida por la venta de uno de sus productos está dada por

$$G(q) = -0,1q^2 + 150q - 2.000$$

donde q es la cantidad de unidades vendidas de dicho producto.

    (a) ¿Cuántos productos debe vender para obtener la máxima ganancia posible? ¿Cuál es esa ganancia máxima?

    (b) Si en marzo la venta de este producto le dejó una ganancia de $\$\,48.000$ ¿Cuántas unidades vendió?

13. Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba. La altura alcanzada por la pelota (h, expresada en metros) en función del tiempo (t, expresado en segundos), está dada por la siguiente función

$$h(t) = 1 + 12\,t - 5\,t^2.$$

    (a) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota y en qué instante se alcanza?

    (b) ¿En qué instante la pelota toca el suelo?

    (c) ¿En qué intervalo de tiempo la pelota asciende? ¿En qué intervalo de tiempo la pelota desciende?

8 Razones y funciones trigonométricas

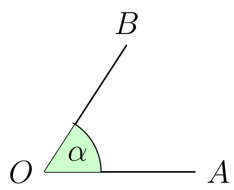
Síntesis de la unidad

En esta unidad revisamos los conceptos vinculados a las razones y funciones trigonométricas. Los principales temas a desarrollar son los siguientes.

1. El sistema sexagesimal y el sistema radial para la medición de ángulos.
2. Razones trigonométricas sobre triángulos rectángulos y sus propiedades. Aplicación a la resolución de triángulos rectángulos.
3. Planteo y resolución de problemas haciendo uso de las razones trigonométricas.
4. Funciones trigonométricas y sus propiedades.

8.1 El sistema sexagesimal y el sistema radial

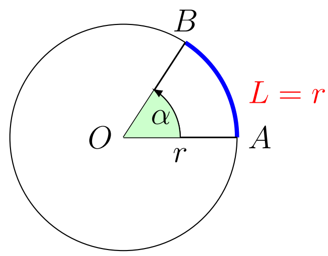
Un ángulo α está caracterizado por un par de semirrectas, que forman los lados del ángulo, y que tienen el mismo origen, llamado vértice. En la siguiente figura, $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son los lados del ángulo α y el punto O es el vértice.



Si queremos medir la amplitud de un ángulo podemos utilizar el sistema sexagesimal o el sistema radial. En el sistema sexagesimal los ángulos se miden en grados (°), minutos (′) y segundos (″). Un grado se obtiene al dividir un giro completo en 360 partes iguales, y tenemos las relaciones

$$1^\circ = 60', \qquad 1' = 60''.$$

En el sistema radial, la unidad de medida es el **radián**. Un ángulo de medida un radián es aquel que abarca un **arco de circunferencia** cuya longitud es igual a la del radio. La siguiente figura representa un ángulo α de medida 1 radian (escribimos $\alpha = 1$, es decir, usamos la letra α tanto para indicar el nombre del ángulo como su medida).



Tenemos la siguiente equivalencia entre ambos sistemas de medición: *un ángulo de un giro en el sistema sexagesimal mide* $360°$ *en tanto que en el sistema radial mide* 2π*.* De esta forma, la relación entre la medida de un ángulo α dada en cada uno de los sistemas es

$$\frac{\alpha \text{ (en grados)}}{360°} = \frac{\alpha \text{ (en radianes)}}{2\pi}.$$

Así, por ejemplo, si queremos la medida en grados de un ángulo α que en radianes mide $\frac{\pi}{6}$ hacemos

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{\frac{\pi}{6}}{2\pi} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{360°}{12} = 30°.$$

O bien, si tenemos un ángulo que mide $127°15'$, calculamos su medida en radianes a partir de

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{127°15'}{360°} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \simeq 2,22.$$

Notemos que en este caso damos un valor aproximado de la medida del ángulo α, dado que su medida exacta es un número irracional.

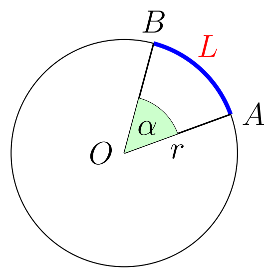
Tenemos también las siguientes relaciones destacadas.

α	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
Sistema sexagesimal	0	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
Sistema radial	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Consideremos a continuación una circunferencia de radio r y un ángulo α con vértice en el centro de la circunferencia, como mostramos en la siguiente figura.

Si llamamos L a la longitud del arco de circunferencia de radio r determinado por un ángulo de medida α dada en el sistema radial, entonces tenemos la relación

$$L = \alpha \cdot r.$$



Ejemplo 8.1.1

Consideremos una circunferencia de radio $r = 3$ cm.

1. ¿Cuál es la medida del arco determinado por un ángulo central de $120°$?

   Para poder usar la relación $L = \alpha \cdot r$ en primer lugar debemos transformar la medida del ángulo al sistema radial.

   $$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{120°}{360°} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{2}{3}\pi.$$

   Ahora podemos calcular la medida del arco pedida

   $$L = \frac{2}{3}\pi \cdot 3\,\text{cm} = 2\pi\,\text{cm}.$$

2. ¿Cuál es la medida del ángulo central determinado por un arco de 10 cm?

   Tenemos
$$\alpha = \frac{L}{r} = \frac{10\,\mathrm{cm}}{3\,\mathrm{cm}} = \frac{10}{3}$$
   y esta medida está dada en radianes. En el sistema sexagesimal el valor de α es
$$\alpha = \frac{\frac{10}{3}}{2\pi} \cdot 360° \simeq 190°$$

Notemos que esto concuerda con la fórmula ya conocida para la longitud (o perímetro) de una circunferencia, pues en tal caso el ángulo que abarca la circunferencia completa mide 2π.

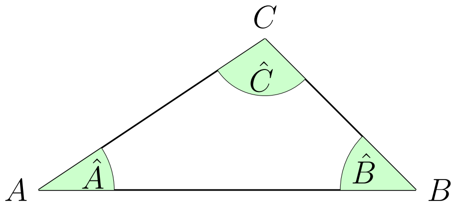
8.2 Razones trigonométricas. Triángulos rectángulos

Dado un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ vamos a indicar sus ángulos interiores de la forma $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, y sus lados los indicaremos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.

Recordemos dos propiedades fundamentales vinculadas a los triángulos. La primera de ellas es válida para cualquier triángulo y establece una relación entre los ángulos interiores del mismo.

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.

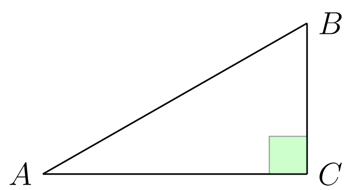
Simbólicamente: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$.



La segunda propiedad, válida para triángulos rectángulos, es el **teorema de Pitágoras**.

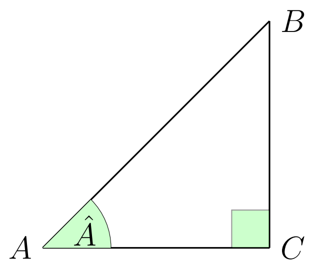
La suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de su hipotenusa.

Simbólicamente: $|\overline{AC}|^2 + |\overline{CB}|^2 = |\overline{AB}|^2$.



Para un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ rectángulo en $\hat{C}$, como el de la figura, definimos el **seno**, **coseno** y **tangente** del ángulo $\hat{A}$ (no recto) de la forma

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} \hat{A} &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|}, \\
\cos \hat{A} &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|}, \\
\operatorname{tg} \hat{A} &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|}.
\end{aligned}$$



Estas relaciones se denominan **razones trigonométricas**. Definimos también la **secante**, **cosecante** y **cotangente** del ángulo $\hat{A}$ de la forma

$$\operatorname{cosec}\hat{A} = \frac{1}{\operatorname{sen}\hat{A}}, \qquad \sec\hat{A} = \frac{1}{\cos\hat{A}}, \qquad \operatorname{cotg}\hat{A} = \frac{1}{\operatorname{tg}\hat{A}}.$$

Observemos en primer lugar que

$$\operatorname{tg}\hat{A} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|}\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} = \frac{\operatorname{sen}\hat{A}}{\cos\hat{A}}.$$

Además, a partir del teorema de Pitágoras se deduce lo que se conoce como **relación pitagórica**

$$\operatorname{sen}^2\hat{A} + \cos^2\hat{A} = \left(\frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|}\right)^2 + \left(\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|}\right)^2 = \frac{|\overline{AC}|^2 + |\overline{BC}|^2}{|\overline{AB}|^2} = \frac{|\overline{AB}|^2}{|\overline{AB}|^2} = 1.$$

Veamos cómo se definen, de manera poco formal, el **arco seno**, **arco coseno** y **arco tangente** de un número $x \in \mathbb{R}$.

- ◇ Dado $x \in [-1,1]$, el arco seno de x es un ángulo θ cuyo seno vale x.
  En símbolos: $\operatorname{arcsen} x = \theta \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = x$.
- ◇ Dado $x \in [-1,1]$, el arco coseno de x es un ángulo θ cuyo coseno vale x.
  En símbolos: $\arccos x = \theta \Leftrightarrow \cos\theta = x$.
- ◇ Dado $x \in \mathbb{R}$, el arco tangente de x es un ángulo θ cuya tangente vale x.
  En símbolos: $\operatorname{arctg} x = \theta \Leftrightarrow \operatorname{tg}\theta = x$.

Para calcular el seno, coseno y tangente de un ángulo dado, así como el arco seno, arco coseno y arco tangente de un valor dado, usamos la calculadora científica. En general estos valores no son números racionales por lo que vamos a utilizar aproximaciones.

Haciendo uso de las razones trigonométricas y de las propiedades enunciadas podemos resolver problemas que involucran triángulos rectángulos. Dado un triángulo rectángulo es suficiente conocer dos datos (ya sean dos lados o un lado y un ángulo), además del ángulo recto, para poder encontrar los restantes ángulos y lados. Cuando hablamos de **resolver un triángulo rectángulo** nos referimos a encontrar todos sus lados y todos sus ángulos, a partir de ciertos datos conocidos.

Veamos a continuación, a partir de algunos ejemplos, cómo resolver un triángulo rectángulo.

Ejemplo 8.2.1

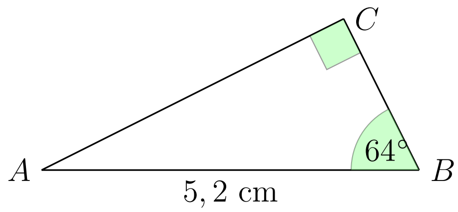
Consideremos un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ rectángulo en $\hat{C}$ y tal que $|\overline{AB}| = 5,2$ cm y $\hat{B} = 64°$. Veamos cómo encontrar la medida de los restantes lados y ángulos.

En primer lugar, conocemos dos ángulos: $\hat{B} = 64°$ y $\hat{C} = 90°$. Luego el ángulo restante es

$$\hat{A} = 180° - 64° - 90° = 26°.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\hat{A} &= \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|} \\ \operatorname{sen}26^\circ &= \frac{|\overline{BC}|}{5,2\,\text{cm}} \\ |\overline{BC}| &= 5,2\,\text{cm}\cdot\operatorname{sen}26^\circ \simeq 2,28\,\text{cm}. \end{aligned}$$



Para encontrar el lado restante podemos usar el teorema de Pitágoras, o bien alguna de las razones trigonométricas. Por ejemplo,

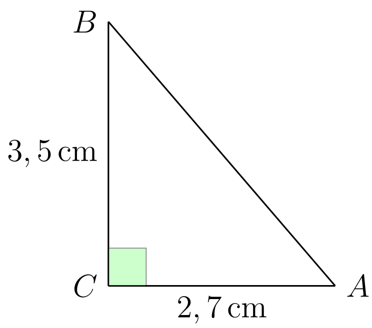
$$\operatorname{tg}\hat{A} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|} \implies \operatorname{tg}26^\circ = \frac{2,28\,\text{cm}}{|\overline{AC}|} \implies |\overline{AC}| = \frac{2,28\,\text{cm}}{\operatorname{tg}26^\circ} \simeq 4,67\,\text{cm}.$$

Ejemplo 8.2.2

Sea $\overset{\triangle}{ABC}$ un triángulo rectángulo en $\hat{C}$, para el cual $|\overline{AC}| = 2,7$ cm y $|\overline{BC}| = 3,5$ cm. Calculemos el lado restante y sus ángulos interiores.

Para encontrar la longitud del lado $\overline{AB}$ usamos el teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} |\overline{AB}|^2 &= |\overline{AC}|^2 + |\overline{BC}|^2 \\ &= (2,7\,\text{cm})^2 + (3,5\,\text{cm})^2 \\ &= 19,54\,\text{cm}^2. \end{aligned}$$



Luego $|\overline{AB}| = \sqrt{19,54\,\text{cm}^2} \simeq 4,42\,\text{cm}$. Ahora, para encontrar el ángulo $\hat{A}$ usamos, por ejemplo, su tangente.

$$\operatorname{tg}\hat{A} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|} \simeq \frac{3,5\,\text{cm}}{2,7\,\text{cm}} = 1,296 \implies \hat{A} \simeq \operatorname{arctg}1,296 = 52^\circ 21'.$$

Observemos que podríamos haber calculado este ángulo a partir de su coseno, con lo cual utilizaríamos en el cálculo el valor del lado $|\overline{AB}|$ encontrado en un paso anterior. Sin embargo, siempre que sea posible es conveniente usar los datos dados en el problema para evitar errores, ya que lo calculado en otros incisos puede no ser correcto.

Finalmente, el ángulo restante resulta ser

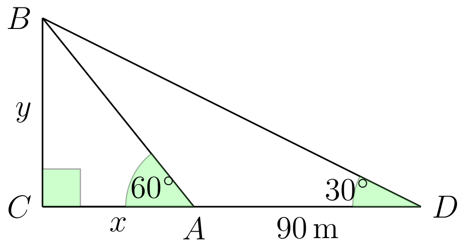
$$\hat{B} \simeq 180^\circ - 90^\circ - 52^\circ 21' \simeq 37^\circ 39'.$$

Ahora veamos cómo resolver un problema usando las propiedades de los triángulos y las razones trigonométricas.

Ejemplo 8.2.3

Queremos calcular la altura de una torre si el ángulo de elevación disminuye de 60° a 30° cuando un observador, que está situado a x metros del pie de la torre, se aleja 90 metros en la misma dirección.

Para resolver este tipo de problemas es conveniente realizar un esquema gráfico de la situación. De esta forma, volcando los datos sobre el gráfico, podemos decidir más fácilmente qué propiedades aplicar en base a lo que sabemos y a lo que queremos calcular.



Llamamos y a la altura de la torre, dato que nos interesa calcular. Observemos que y es la medida del segmento opuesto a los ángulos conocidos, y los restantes datos se encuentran sobre el cateto adyacente a dichos ángulos. Por esto, la razón trigonométrica que vamos a usar es la tangente. Planteamos entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 60^\circ &= \frac{y}{x} \quad \Longrightarrow \quad y = (\operatorname{tg} 60^\circ)x \simeq 1,73\,x \\ \operatorname{tg} 30^\circ &= \frac{y}{x + 90\,\mathrm{m}} \quad \Longrightarrow \quad y = (\operatorname{tg} 30^\circ)(x + 90\,\mathrm{m}) \simeq 0,58\,x + 51,96\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

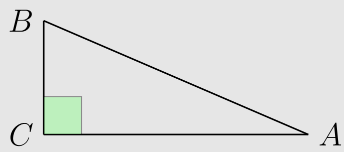
Estas ecuaciones forman un sistema como los estudiados en la Unidad 6. En la primera ecuación despejamos el valor de x para encontrar $x \simeq 0,58\,y$. Con esta expresión reemplazamos en la segunda ecuación, donde resulta

$$y \simeq 0,58(0,58y) + 51,96\,\mathrm{m} \quad \Longrightarrow \quad y \simeq 78,3\,\mathrm{m}.$$

Así encontramos que la altura aproximada de la torre es $78,3$ m.

Para pensar 22

Dado el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ rectángulo en $\hat{C}$, ¿qué relación existe entre las razones trigonométricas del ángulo $\hat{A}$ y las del ángulo $\hat{B}$?

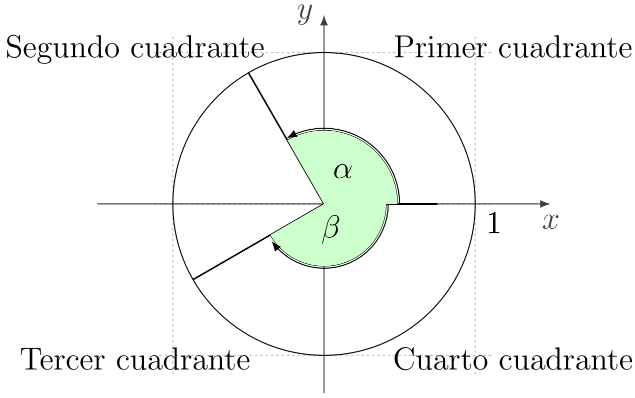


8.3 Funciones trigonométricas

En la sección anterior definimos el seno, el coseno y la tangente para ángulos interiores (agudos) de un triángulo rectángulo. También vimos que en el sistema radial la medida de un ángulo es un número real. Podemos pensar entonces en extender las definiciones de seno, coseno y tangente a cualquier número real. Veamos cómo hacerlo en forma gráfica.

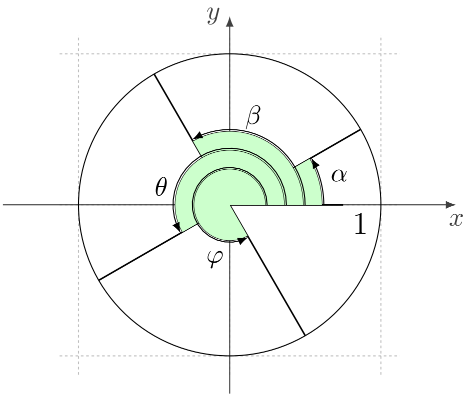
Consideremos una circunferencia de radio $r = 1$, a la que llamamos **circunferencia unitaria**. Ubicamos el centro de esta circunferencia en el origen de coordenadas de un sistema de ejes cartesianos. Centrados en el origen de coordenadas vamos a marcar distintos **ángulos**

orientados, como muestra la siguiente figura. En estos ángulos, uno de los lados permanece fijo sobre el semieje positivo de las abscisas y el otro lado es una semirrecta con origen en $(0,0)$.



En el gráfico anterior, el ángulo α tiene medida positiva, y el ángulo β es negativo. Además, como indicamos en la figura, los ejes cartesianos dividen al plano en cuatro cuadrantes.

En la figura de la derecha observamos que

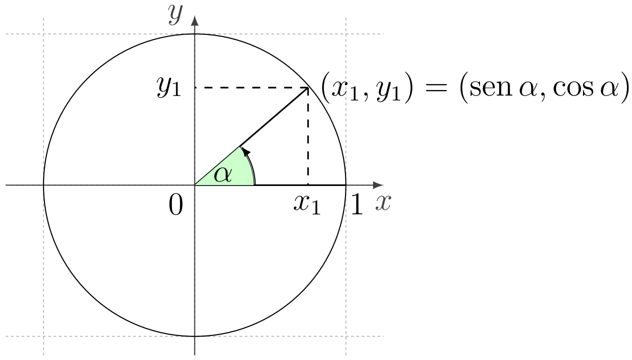


- $\diamond$ $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ pertenece al primer cuadrante,
- $\diamond$ $\beta = \dfrac{2}{3}\pi$ pertenece al segundo cuadrante,
- $\diamond$ $\theta = \dfrac{7}{6}\pi$ pertenece al tercer cuadrante,
- $\diamond$ $\varphi = \dfrac{5}{3}\pi$ pertenece al cuarto cuadrante.

Consideremos ahora un ángulo α en el primer cuadrante, como indicamos en la siguiente figura. Notemos que α es un ángulo interior del triángulo rectángulo determinado por los puntos $(0,0)$, $(x_1,0)$ y (x_1,y_1). El cateto opuesto a α mide y_1, el cateto adyacente mide x_1 y la hipotenusa mide 1.

Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\alpha &= \frac{y_1}{r} = y_1,\\
\cos\alpha &= \frac{x_1}{r} = x_1,\\
\operatorname{tg}\alpha &= \frac{y_1}{x_1} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.
\end{aligned}$$



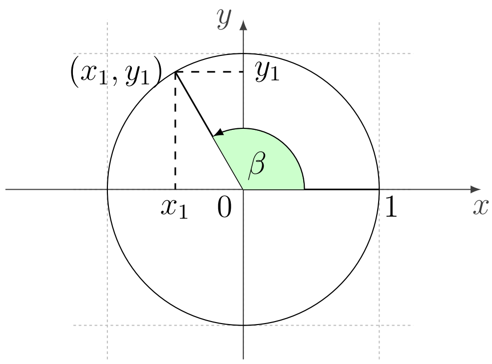
De esta forma podemos extender las definiciones de seno, coseno y tangente para ángulos en los restantes cuadrantes. Veamos algunos ejemplos

Ejemplo 8.3.1

Consideremos el ángulo $\beta = \frac{2}{3}\pi$ que graficamos en la siguiente figura. Podemos observar que el valor del seno (es decir, y_1) es positivo, mientras que el del coseno (esto es, x_1) es negativo.

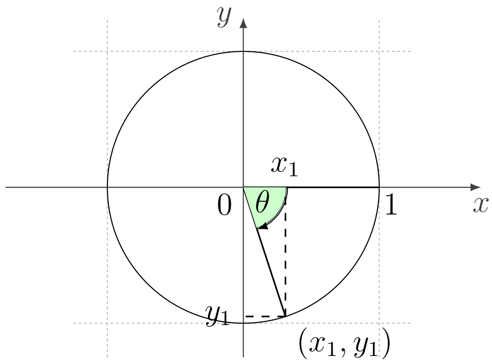
En este caso es posible dar el valor exacto de las funciones trigonométricas. Tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi &= y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos\frac{2}{3}\pi &= x_1 = -\frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg}\frac{2}{3}\pi &= \frac{y_1}{x_1} = -\sqrt{3}. \end{aligned}$$



El ángulo representado en la figura de la derecha es $\theta = -\frac{2}{5}\pi$. En este caso no tenemos un valor exacto para los valores de las funciones trigonométricas por lo que utilizamos la calculadora para encontrar

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(-\frac{2}{5}\pi\right) &= y_1 \simeq -0,95, \\ \cos\left(-\frac{2}{5}\pi\right) &= x_1 \simeq 0,31, \\ \operatorname{tg}\left(-\frac{2}{5}\pi\right) &= \frac{y_1}{x_1} \simeq -3,08. \end{aligned}$$



El dominio de las funciones seno y coseno se extiende a todos los números reales. Así mismo, la tangente *no está definida* para ángulos a los que les corresponde $x_1 = 0$ sobre la circunferencia unitaria. Es decir, los valores $\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \ldots$ no pertenecen al dominio de esta función.

Algunos valores destacados, que se deducen inmediatamente a partir de la interpretación gráfica dada, son los siguientes.

α	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\nexists$
π	0	-1	0
$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	$\nexists$

El signo del seno, coseno y tangente de un ángulo nos indica en qué cuadrante se encuentra.

Ejemplo 8.3.2

1. Si $\operatorname{sen}\alpha < 0$ y $\cos\alpha > 0$, entonces α se encuentra en el cuarto cuadrante. Más aún, de la relación $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ concluimos que $\operatorname{tg}\alpha < 0$. Podemos observar estas conclusiones en la segunda figura del ejemplo anterior.

2. Si $\operatorname{sen}\alpha > 0$ y $\operatorname{tg}\alpha < 0$, entonces $\cos\alpha < 0$ y el ángulo α se encuentra en el segundo cuadrante. Podemos observar estas conclusiones en la primera figura del ejemplo anterior.

La identidad pitagórica sigue siendo válida para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$. Esta propiedad nos proporciona una relación entre el seno y el coseno de un ángulo, por lo que nos permite resolver situaciones como la siguiente.

Ejemplo 8.3.3

Si $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y α es un ángulo del cuarto cuadrante, ¿cuál es el valor de su seno y su tangente?

De la relación pitagórica resulta

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2} \text{ ó } \operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{2}.$$

Dado que α está en el cuarto cuadrante, su seno es negativo, por lo que debe ser $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{2}$.

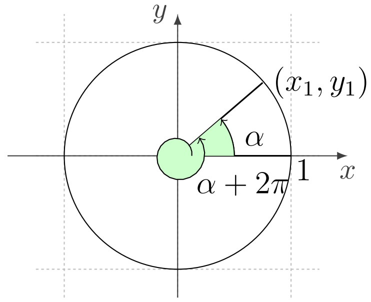
Podemos calcular ahora la tangente del ángulo

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Veamos a continuación algunas **propiedades** de las funciones seno y coseno.

(I) En primer lugar, si dos ángulos α, β difieren en un giro, es decir $\beta = \alpha + 2\pi$, entonces los valores del seno y el coseno de estos ángulos coinciden. Esto es, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

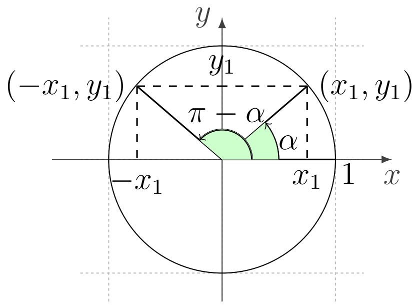
$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) &= \operatorname{sen}\alpha, \\ \cos(\alpha + 2\pi) &= \cos\alpha, \end{aligned}$$



Las funciones que tienen esta propiedad se llaman **periódicas**.

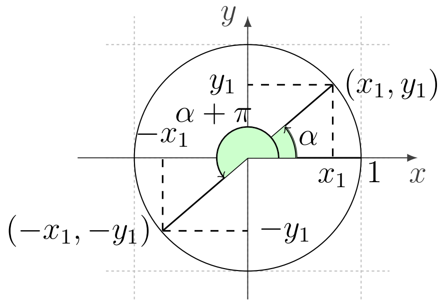
(II) La siguiente propiedad importante que podemos observar sobre el gráfico relaciona ángulos del segundo cuadrante con ángulos del primero. Tenemos que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\pi - \alpha) &= \operatorname{sen}\alpha, \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos\alpha. \end{aligned}$$



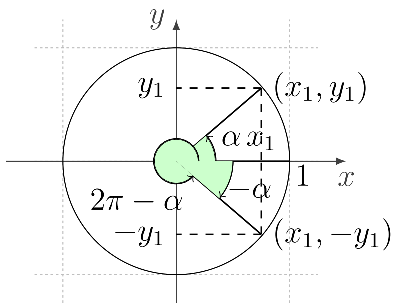
(III) La tercera propiedad de interés relaciona ángulos del tercer cuadrante con ángulos del primero. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha + \pi) &= -\operatorname{sen}\alpha, \\ \cos(\alpha + \pi) &= -\cos\alpha. \end{aligned}$$



(IV) Por último tenemos la siguiente relación entre ángulos del cuarto cuadrante y ángulos del primero. Además destacamos, en este caso, la relación entre ángulos positivos y negativos. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(-\alpha) &= \operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha, \\ \cos(-\alpha) &= \cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha. \end{aligned}$$

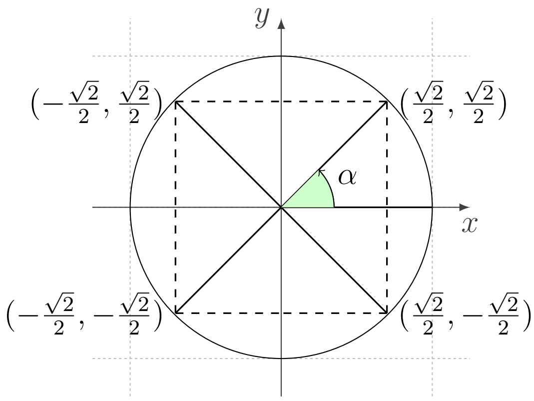


Estas propiedades nos dan relaciones entre los valores del seno y coseno de ángulos que se encuentran en distintos cuadrantes y que podemos utilizar para resolver algunos problemas.

Ejemplo 8.3.4

Para $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ se verifica

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Con este dato y aplicando las propiedades anteriores podemos calcular los siguientes valores (que pueden verificarse gráficamente en la figura).

1. $\operatorname{sen}\dfrac{3}{4}\pi = \operatorname{sen}\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) \overset{\text{(II)}}{=} \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2},$

2. $\cos\left(-\dfrac{5}{4}\pi\right) \overset{\text{(IV)}}{=} \cos\left(\dfrac{5}{4}\pi\right) = \cos\left(\pi + \dfrac{1}{4}\pi\right) \overset{\text{(III)}}{=} -\cos\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

También haciendo uso de las propiedades vistas podemos resolver ecuaciones como las estudiadas en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 8.3.5

Encontremos todos los valores de $x \in [0, 2\pi)$ para los cuales

$$\operatorname{sen} x + 2 = -\operatorname{sen}^2 x + \frac{5}{2}\operatorname{sen} x + \frac{3}{2}.$$

Una vez más, la estrategia es sustituir la incógnita x por otra de forma que la nueva ecuación sea más simple de resolver. Esta estrategia se presentó en el **Ejemplo 2.4.3** donde se estudió una ecuación bicuadrática.

Llamamos $u = \operatorname{sen} x$, de forma que la ecuación inicial se transforma en la ecuación cuadrática

$$u + 2 = -u^2 + \frac{5}{2}u + \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad u^2 - \frac{3}{2}u + \frac{1}{2} = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación son

$$u_1 = \frac{1}{2}, \qquad u_2 = 1.$$

Para volver a la incógnita x, tenemos que encontrar los valores $x \in [0, 2\pi)$ tales que $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ ó $\operatorname{sen} x = 1$.
El único valor x que verifica $\operatorname{sen} x = 1$ en el intervalo dado es $x = \frac{\pi}{2}$. Ahora, una solución conocida de $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ es $x = \frac{\pi}{6}$ (y se puede encontrar con calculadora). Pero este valor del seno se repite en un ángulo del segundo cuadrante, pues

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \overset{(\mathrm{II})}{=} \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\frac{5}{6}\pi.$$

En conclusión, encontramos tres valores que verifican la ecuación dada:

$$x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{\pi}{6}, \quad x_3 = \frac{5}{6}\pi.$$

Actividades

1. Expresar en grados, minutos y segundos sexagesimales la medida de un ángulo que en el sistema radial mide

   (a) $\dfrac{2}{5}\pi$ radianes, (b) 2.5 radianes, (c) $\dfrac{5}{6}\pi$ radianes.

2. Expresar en radianes la medida de un ángulo que en el sistema sexagesimal mide

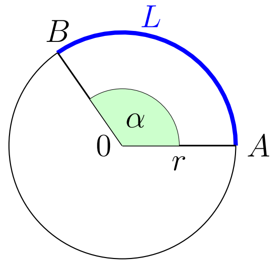
   (a) $171^\circ\, 53'\, 14''$, (b) $35^\circ\, 40'$, (c) $70^\circ\, 10'\, 40''$.

3. Completar la siguiente tabla.

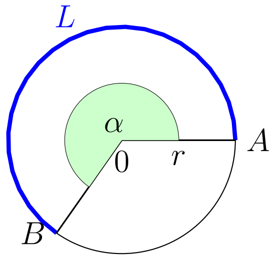
Medida sexagesimal	0°	30°			90°		135°	150°		240°	270°		360°
Medida radial	0		$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$		$\frac{2}{3}\pi$			π			$\frac{5}{3}\pi$	

4. Determinar el radio r de cada una de las siguientes circunferencias.

   (a) $\alpha = 125^\circ$, $L = 5\pi$ cm.



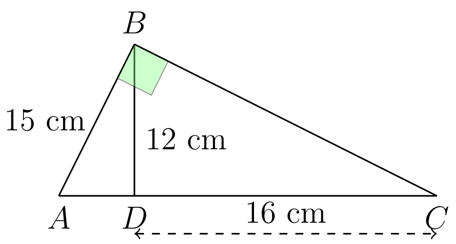
   (b) $\alpha = 4$ radianes, $L = 18$ cm.



5. Determinar la longitud del arco de una circunferencia de 5 cm. de radio, determinado por un ángulo con vértice en el centro de la misma, que mide 60°.

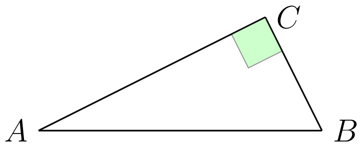
6. Dos niños juegan en un sube y baja que tiene una longitud de 5,5 m. Al subir uno de los extremos de la barra recorrió un arco de 1,25 m. Calcular la medida radial del ángulo que describió dicha barra.

7. Calcular las razones trigonométricas de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{C}$, $A\hat{B}D$ y $C\hat{B}D$ del siguiente triángulo y completar la tabla.



θ	$\hat{A}$	$\hat{C}$	$A\hat{B}D$	$C\hat{B}D$
$\operatorname{sen}\theta$				
$\cos\theta$				
$\operatorname{tg}\theta$				

8. Resolver el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ indicado en la figura, para cada uno de los siguientes casos.



(a) $\hat{A} = 42°$, $|\overline{AB}| = 7$ cm.

(b) $|\overline{AB}| = 43{,}9$ cm, $|\overline{AC}| = 24{,}3$ cm.

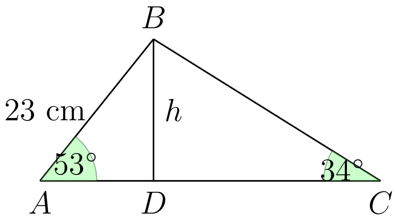
(c) $\hat{B} = 55°$, $|\overline{AC}| = 12$ cm.

9. Calcular la altura que alcanza un barrilete que sostiene un chico a 80 cm del suelo, si la cuerda tensada mide 35 m y forma un ángulo de 35° con el piso.

10. Los brazos de un compás, que miden 12 cm, forman un ángulo de 50°. ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura?

11. Un poste se quiebra. La parte superior se inclina formando con la parte inferior un ángulo de 70°. El extremo superior toca el piso a una distancia de $2,10$ m del pie del poste. Determinar la longitud del poste.

12. A partir del dibujo, hallar



(a) la altura h del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$,

(b) la longitud de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$,

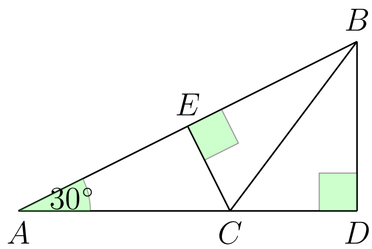
(c) el área del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$,

(d) el perímetro.

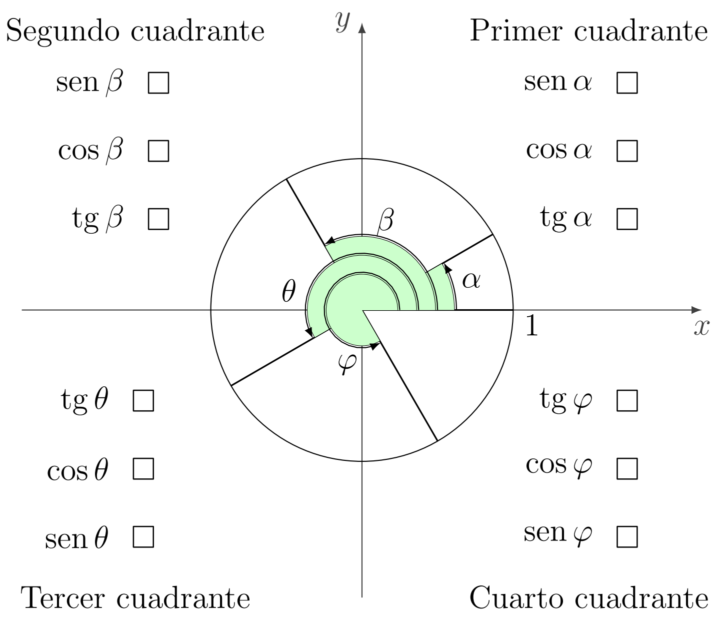
13. Desde el lugar donde se encuentra Lucía, puede observar el extremo superior de una torre con un ángulo de elevación de 32°. Si Lucía avanza 25 m en dirección a la torre, lo observa con un ángulo de 50°. Calcular la altura de la torre si la altura de Lucía es de 1,65 m.

14. En la cima de un cerro se ha levantado una antena de telefonía celular. Desde un punto ubicado en el valle se miden los ángulos de elevación del extremo superior y la base de la antena, obteniendo como resultado 57° y 42°, respectivamente. ¿Cuál es la altura del cerro si la antena mide 80 m de alto?

15. Sabiendo que el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ de la figura es isósceles, que $\overline{AC}$ mide 30 cm y que $\hat{A} = 30°$. Calcular la medida de los lados del triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ADB}$.



16. Indicar los signos de las funciones trigonométricas en cada uno de los cuatro cuadrantes sobre el siguiente diagrama.



17. Indicar, en cada caso, en qué cuadrante está el ángulo α.

    (a) $\operatorname{sen}\alpha > 0,\ \cos\alpha < 0$, (b) $\operatorname{tg}\alpha > 0,\ \cos\alpha > 0$, (c) $\operatorname{sen}\alpha < 0,\ \operatorname{tg}\alpha < 0$.

18. (a) Sabiendo que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, encontrar el valor exacto de $\cos\frac{\pi}{6}$. Con estos dos datos calcular en forma exacta los valores del seno, del coseno y de la tangente de

$$\alpha = \frac{5}{6}\pi, \qquad \beta = -\frac{7}{6}\pi, \qquad \gamma = -\frac{13}{6}\pi.$$

    (b) Sabiendo que $\operatorname{sen}\frac{3}{8}\pi \simeq 0,92$, calcular un valor aproximado de $\cos\frac{3}{8}\pi$. Con estos datos calcular en forma aproximada los valores del seno, del coseno y de la tangente de

$$\alpha = \frac{21}{8}\pi, \qquad \beta = \frac{11}{8}\pi, \qquad \gamma = -\frac{3}{8}\pi.$$

19. En cada inciso hallar los dos valores exactos que se piden.

    (a) $\cos\alpha$ y $\operatorname{tg}\alpha$, sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{9}$ y α pertenece al segundo cuadrante,

    (b) $\operatorname{sen}\beta$ y $\operatorname{tg}\beta$, sabiendo que $\cos\beta = \frac{2}{3}$ y β pertenece al primer cuadrante,

    (c) $\operatorname{sen}\gamma$ y $\cos\gamma$, sabiendo que $\operatorname{tg}\gamma = \sqrt{5}$ y γ pertenece al tercer cuadrante.

20. Hallar todos los valores de x, $0 \leq x < 2\pi$ que sean soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas.

    (a) $\cos x = -2^{-1}$, (d) $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$, (g) $3\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$,

    (b) $2\operatorname{sen} x = -\sqrt{2}$, (e) $2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0$, (h) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$,

    (c) $3\operatorname{tg} x + 3 = 0$, (f) $4\operatorname{sen}^2 x - 1 = 0$, (i) $2\operatorname{sen}^2 x = 3\operatorname{sen} x - 1$.

A. 1. Propiedades de números reales

A continuación presentamos algunas propiedades de los números reales que complementan las ya presentadas en las **Unidades 1 y 2**. Muchas de ellas fueron usadas en la resolución de ejemplos aunque no se hayan explicitado en ese momento.

Empecemos con algunas propiedades vinculadas a los signos en las operaciones.

- $-(-a) = a$
- $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b) \qquad \text{y} \qquad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Notemos que como la división equivale a la multiplicación por un inverso, las dos propiedades del último item se extienden también para la división siempre que $b \neq 0$. Agregamos además,

- $(a^{-1})^{-1} = a, \quad a \neq 0$
- $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}, \iff a \cdot d = b \cdot c$, siempre que $b \neq 0$, $d \neq 0$

Presentamos ahora algunas propiedades más de las desigualdades.

- $a < b \;\text{ y }\; c < d \implies a + c < b + d$
- $0 < a < b \;\text{ y }\; 0 < c < d \implies a \cdot c < b \cdot d$
- $a > 0 \iff -a < 0$
- $a < 0 \iff \dfrac{1}{a} < 0 \quad \text{y} \quad a > 0 \iff \dfrac{1}{a} > 0$
- $0 < a < b \implies 0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a} \quad \text{y} \quad a < b < 0 \implies \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a} < 0$
- $a \cdot b > 0 \iff a > 0 \text{ y } b > 0 \;\text{ ó }\; a < 0 \text{ y } b < 0$

  $a \cdot b < 0 \iff a > 0 \text{ y } b < 0 \;\text{ ó }\; a < 0 \text{ y } b > 0$
- $0 < a < b \implies a^2 < b^2 \quad \text{y} \quad a < b < 0 \implies b^2 < a^2$

Radicación y potencia de exponente racional

En la Unidad 1 presentamos las definiciones de potenciación y de raíz n-ésima para números reales y recordamos las propiedades de estas operaciones. En esta parte del apéndice vamos a repasar la definición de raíz y de potencia fraccionaria y analizaremos sus propiedades.

Comenzamos considerando la raíz n-ésima, con $n \in \mathbb{N}$, de un número real positivo $a > 0$. Recordemos que notamos a la raíz $b = \sqrt[n]{a}$, siendo $b > 0$ el valor real tal que se verifica $b^n = a$.

Recordemos como extender la definición anterior a números reales no positivos.

Si $a = 0$, el único número real b tal que $b^n = 0$ es $b = 0$, y así tenemos que $\sqrt[n]{0} = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Suponiendo ahora que $a < 0$, consideramos por separado los casos en que el índice n es par o impar. Si n es par, podemos escribir $n = 2k$, con $k \in \mathbb{N}$. Por propiedades de potencia para todo $b \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$b^n = b^{2k} = (b^2)^k \geqslant 0.$$

Luego, ya que a es negativo, no existe un valor real b de manera que $b^n = a$.

Si $n \in \mathbb{N}$ es impar, no tenemos una restricción de signo como en el caso n par y la definición de raíz n-ésima se puede extender directamente. Así, si n es impar y $a < 0$, la raíz n-ésima de a es el valor $b < 0$ que verifica $b^n = a$.

En resumen, de lo anterior se sigue que la raíz n-ésima de un número real a, $\sqrt[n]{a}$, está *bien definida* para todo $n \in \mathbb{N}$ si $a \geq 0$, y para n impar si $a < 0$.

Las propiedades de radicación mencionadas en la Unidad 1, no serán válidas en general en el caso de raíces n-ésimas de números reales negativos. Sin embargo, como ya mencionamos, podemos agregar algunas restricciones a los índices para que cada uno de los términos este bien definido. Específicamente, si $a, b \in \mathbb{R}^-$ las propiedades (R1), (R2), (R3) y (R4) son válidas siempre que los índices n y s sean impares.

Potencia de exponente racional

Recordemos ahora la definición de potencia de exponente racional. Sea $a \in \mathbb{R}^+$ y $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, definimos la potencia r-ésima de a considerando:

- si $r = 0$ y $a \neq 0$, entonces $a^0 = 1$,
- si $r = \dfrac{m}{n} > 0,\ m > 0,\ n > 0$, entonces $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$,
- si $r < 0$ y $a \neq 0$, entonces $a^r = \dfrac{1}{a^{-r}}$.

En la potencia de exponente racional estamos combinando las operaciones de potenciación y radicación. Así, si la base a es negativa, la potencia de exponente racional no estará bien definida para cualquier $r \in \mathbb{Q}$. Si la base es negativa, la existencia de la potencia r-ésima dependerá de la paridad del denominador n de r. En particular, si $a < 0$ tenemos que la potencia r-ésima, con $r = \frac{m}{n}$, solamente estará definida en el caso en en el que el denominador n sea impar.

Si $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $r, q \in \mathbb{Q}$, todas las potencias estarán bien definidas, y se verifican las siguientes propiedades.

(Pr1) $a^{r+q} = a^r a^q$

(Pr2) $a^{r \cdot q} = (a^r)^q$

(Pr3) $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$

(Pr4) $(a : b)^r = a^r : b^r, \quad b \neq 0$

En los casos en que $a, b \in \mathbb{R}^-$, las propiedades dadas antes no son válidas en general. Sin embargo, al igual que en el caso de raíces n-ésimas, podemos agregar restricciones para que cada término este bien definido. Así, por ejemplo, si $a < 0$, la propiedad (Pr1) es válida si r y q son números fraccionarios con denominador impar.

A. 2 Algo más sobre funciones trigonométricas

En esta sección del apéndice profundizamos sobre algunos conceptos vinculados a las funciones trigonométricas. Esto será de utilidad en algunas de las primeras materias de matemática que se dictan en la universidad.

Comenzamos presentando los gráficos de las funciones seno y coseno.

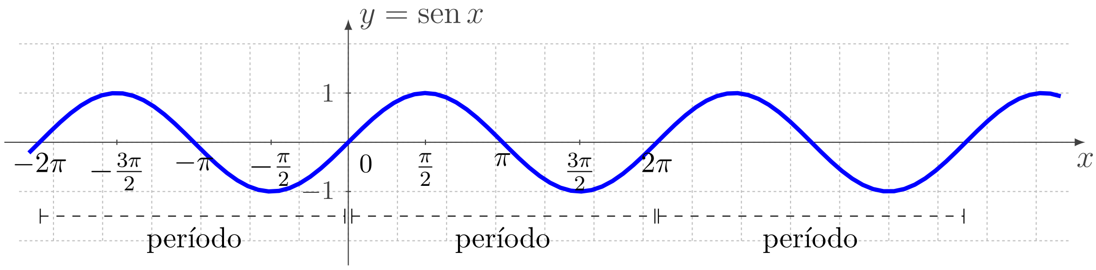


Figura 1. Gráfico de la función $y = \operatorname{sen} x$.

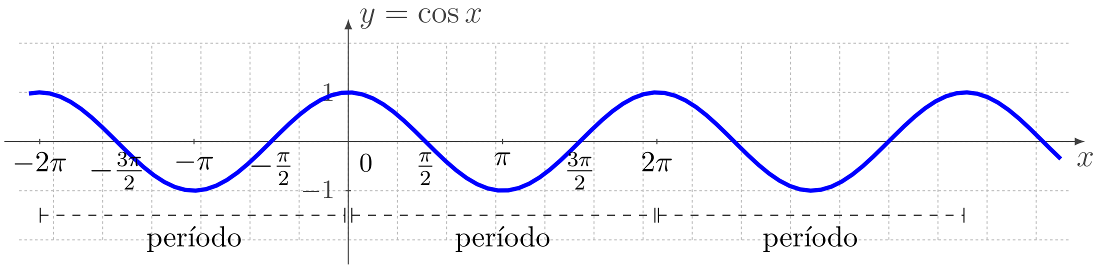


Figura 2. Gráfico de la función $y = \cos x$.

Llamemos

$$f_s(x) = \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad f_c(x) = \cos x.$$

En primer lugar, notemos que el dominio de las funciones seno y coseno se extiende a todos los números reales y su imagen oscila entre -1 y 1. Es decir

$$\begin{aligned} \operatorname{Dom}(f_s) &= \mathbb{R}, \qquad & \operatorname{Im}(f_s) &= [-1, 1], \\ \operatorname{Dom}(f_c) &= \mathbb{R}, \qquad & \operatorname{Im}(f_c) &= [-1, 1]. \end{aligned}$$

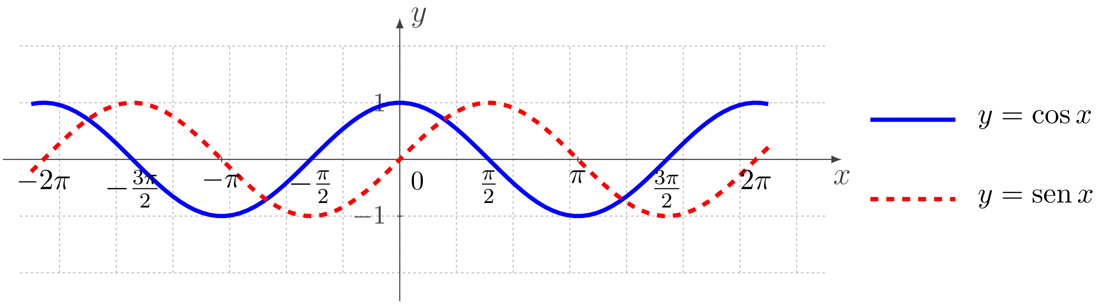
Además, podemos distinguir el conjunto de puntos en que estas funciones se anulan (es decir, donde cortan al eje x). Simbólicamente

$$\begin{aligned} \mathcal{S} =& \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} x = 0\} \\ =& \{\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots\} \qquad \text{(lo vemos en el gráfico de la función)} \\ =& \{x \in \mathbb{R} : x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C} =& \{x \in \mathbb{R} : \cos x = 0\} \\ =& \left\{\ldots, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\right\} \qquad \text{(lo vemos en el gráfico de la función)} \\ =& \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

Si comparamos los gráficos de las funciones seno y coseno, vemos que la gráfica de la función coseno puede obtenerse a partir de un desplazamiento horizontal de la función seno:

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$



La función tangente se expresa

$$f_t(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

y así vemos que los puntos en los que se anula el coseno, es decir los puntos del conjunto $\mathcal{C}$, no pertenecen al dominio de esta función. Su representación gráfica es la siguiente.

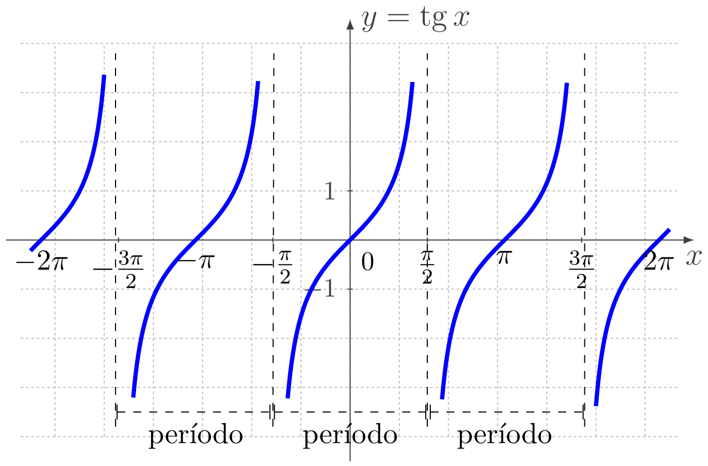


Figura 3. Gráfico de la función $y = \operatorname{tg} x$.

La imagen de la función tangente resulta ser el conjunto de los números reales. Entonces

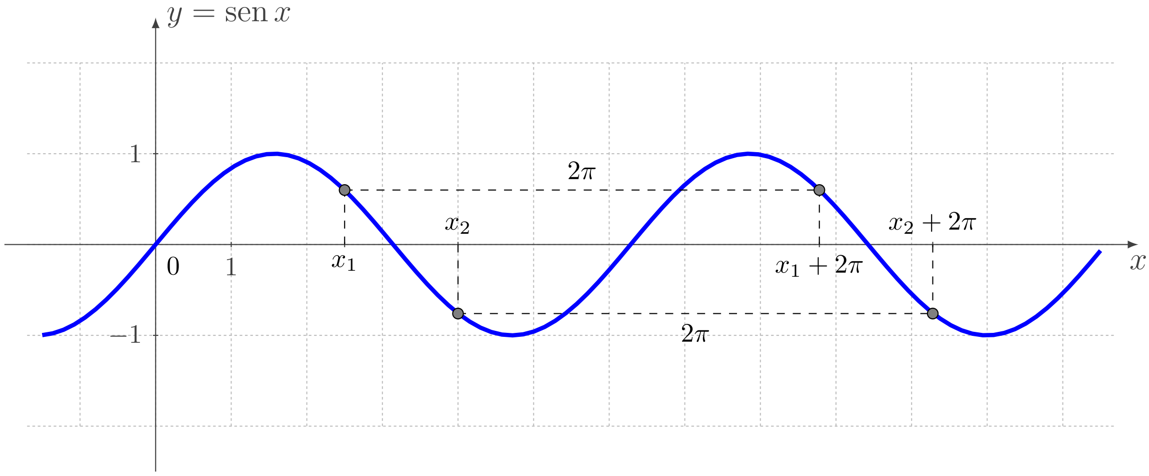
$$\operatorname{Dom}(f_t) = \mathbb{R} - \mathcal{C}, \qquad \operatorname{Im}(f_t) = \mathbb{R}.$$

El conjunto de puntos en los que se anula la tangente, es decir los puntos en los que esta función corta al eje x, coincide con el conjunto $\mathcal{S}$ de ceros de la función seno.

Las propiedades **(I), (II), (III), (IV)** presentadas en la **Unidad 8** pueden observarse sobre los gráficos de las respectivas funciones. Así por ejemplo, vimos que las funciones seno y coseno son periódicas, y su período es $p = 2\pi$. Esto es, para cualquier $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

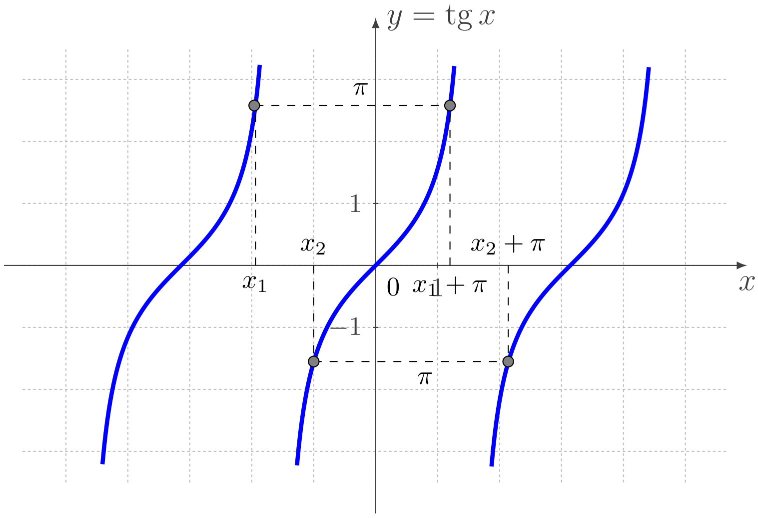
Esto puede pensarse en términos de traslaciones: al trasladar lateralmente 2π unidades los gráfico de las funciones seno y coseno obtenemos nuevamente los gráficos iniciales.



También la función tangente es periódica y su período es $p = \pi$. Esto es, para cualquier $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x.$$

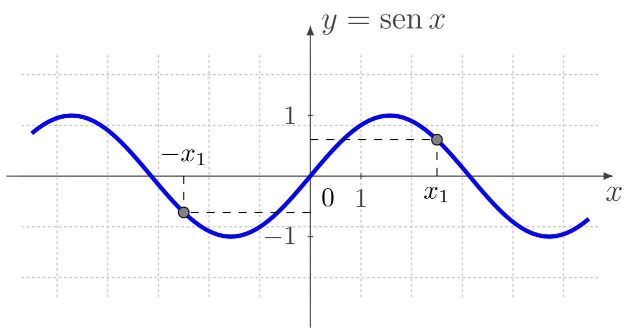
Así, si trasladamos π unidades el gráfico de la función tangente obtenemos nuevamente el gráfico inicial.



Otras propiedades presentadas en la **Unidad 8** son las siguientes.

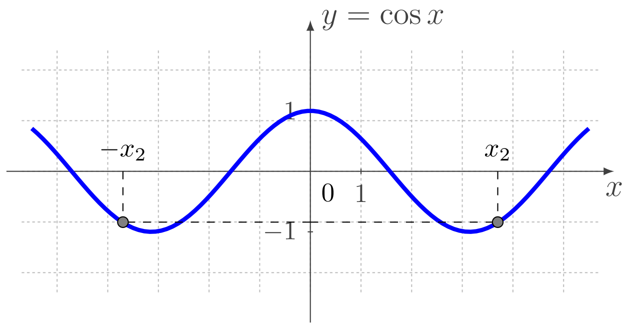
1. $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$.

Las funciones que cumplen esta propiedad se llaman **funciones impares**. Notemos que esto equivale a $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(-x)$, y resulta así que el gráfico de la función seno presenta una doble simetría: primero respecto del eje y: $\operatorname{sen} x \to \operatorname{sen}(-x)$, y luego respecto del eje x: $\operatorname{sen}(-x) \to -\operatorname{sen}(-x)$.



2. $\cos(-x) = \cos x$.

Las funciones que cumplen esta propiedad se llaman **funciones pares**, y sus gráficos son curvas simétricas respecto del eje y.



Tenemos una propiedad de este tipo para la función tangente: la tangente es una función impar. Lo podemos concluir a partir de su gráfico, donde vemos que

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x,$$

o bien podemos deducirlo a partir de la relación de esta función con las funciones seno y coseno,

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x.$$

Respuestas a los problemas para pensar

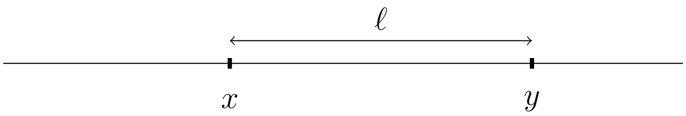
Unidad 1. Los números reales

Para pensar 1

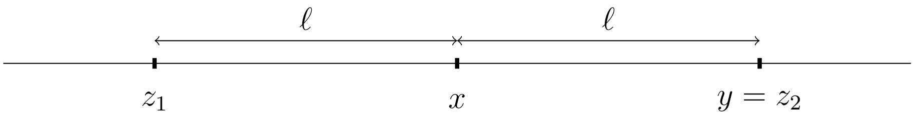
Supongamos que $x, y, z \in R$ son tales que la distancia de x a y es positiva, y es igual a la distancia de x a z. ¿Qué se puede decir de la distancia entre y y z?

Dado que x, y, z representan números reales, podemos ubicarlos en una recta numérica. Si bien no sabemos su valor, podemos proponer un esquema general de la situación. Llamemos ℓ a la distancia de x a y, es decir, $\ell = d(x, y)$. Pueden ocurrir solo dos situaciones: o bien $x < y$, o bien $x > y$.

Situación 1: Si $x < y$, entonces en la recta numérica tenemos

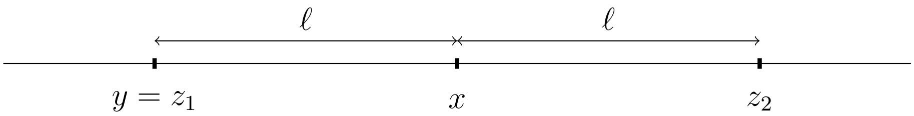


Ahora, para z también hay dos opciones: puede ser menor que x, esto es $z_1 < x$, o mayor que x, es decir $z_2 > x$. Teniendo en cuenta que la distancia entre x y z es d, la representación gráfica de esta situación es



De aquí concluimos que la distancia entre y y z o bien es cero o es igual a 2ℓ.

Situación 2: Si $x > y$, un razonamiento similar al anterior nos lleva a la siguiente representación gráfica



De lo anterior se deduce, nuevamente, que la distancia entre y y z o bien es cero o es igual a 2ℓ.

Así, en cualquiera de las situaciones resulta que

$$d(y, z) = 0 \qquad \text{ó} \qquad d(y, z) = 2\ell.$$

Para pensar 2

1. ¿Es cierto que el único número racional entre $2,1$ y $2,3$ es $2,2$?
2. ¿Es posible indicar todos los números racionales mayores que -2 y menores que -1?
3. ¿Cuántos números enteros tienen valor absoluto menor o igual que 4? ¿Y cuántos naturales cumplen esa condición?

1. La afirmación es falsa. Hay infinitos números racionales entre $2,1$ y $2,3$. Por ejemplo,
$$2,11, \quad 2,25, \quad 2,2236$$
son números racionales que verifican esta condición.
2. No es posible nombrar explícitamente a todos los números racionales mayores que -2 y menores que -1, pues son infinitos. Sin embargo, el lenguaje matemático nos permite indicarlos en forma simbólica, como un conjunto al que llamamos A:
$$A = \{q \in \mathbb{Q} : -2 < q < -1\}.$$
3. Hay 9 números enteros con valor absoluto menor o igual que 4. Estos son
$$4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4.$$
Y hay 4 números naturales que cumplen esta condición: $1, 2, 3, 4$.

Para pensar 3

¿Son válidas las siguientes igualdades para cualquier par de números reales a, b distintos de cero?

$$\text{(i)} \quad \frac{a}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{b} \qquad \text{y} \qquad \text{(ii)} \quad \frac{\frac{a}{b}}{a} = \frac{a}{\frac{b}{a}}$$

(i) La igualdad no es válida en general. Para probar que es falsa mostramos un contraejemplo, es decir, mostramos dos valores reales a, b distintos de cero para los que la igualdad no se verifica. Si $a = 1$ y $b = 2$, obtenemos
$$\frac{a}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 : \frac{1}{2} = 2 \qquad \text{y por otro lado} \qquad \frac{1}{b} = \frac{1}{2}.$$

(ii) La igualdad no es válida en general. Como en el caso anterior mostremos un contraejemplo. Si $a = 2$ y $b = 5$, resulta que
$$\frac{\frac{a}{b}}{a} = \frac{\frac{2}{5}}{2} = \frac{2}{5} : 2 = \frac{1}{5} \qquad \text{y} \qquad \frac{a}{\frac{b}{a}} = \frac{2}{\frac{5}{2}} = 2 : \frac{5}{2} = \frac{4}{5}.$$

Para pensar 4

Mostrar que las igualdades

$$\text{(i)}\quad \frac{a}{b+c}=\frac{a}{b}+\frac{a}{c} \qquad \text{y} \qquad \text{(ii)}\quad \frac{a}{a+b}=\frac{1}{b}$$

no son válidas en general. Para cada una de ellas, encontrar tres números a, b y c que las verifiquen. ¿Es posible encontrar otros?

(i) Para $a=2$, $b=1$, $c=3$ la igualdad no se verifica. Sin embargo para $a=0$, $b=3$, $c=-1$ sí se verifica. Es posible encontrar otras ternas de números a, b, c que verifiquen esta igualdad, basta tomar $a=0$ y cualquier par de valores b, c no nulos.

(ii) Para $a=1$, $b=1$ la igualdad no se verifica. Si tomamos $a=b=2$ la igualdad se cumple. También los valores $a=3$, $b=\frac{3}{2}$ la verifican.

Para pensar 5

¿Existe algún $x \in \mathbb{R}$ que verifique $x^2=5$? Si existe, ¿es el único? ¿Y existe algún $x \in \mathbb{R}$ que verifique $x^2=-5$?

Existen dos números que verifican que su cuadrado es 5: $x_1=\sqrt{5}$ y $x_2=-\sqrt{5}$.

No existe ningún número real tal que su cuadrado sea -5, ya que el cuadrado de cualquier número real es siempre mayor o igual que cero.

Para pensar 6

¿Son válidas las igualdades

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b} \qquad \text{y} \qquad (a+b)^3=a^3+b^3$$

para cualquier par de números reales a, b? ¿Existen pares de números $a, b \in \mathbb{R}$ que verifiquen alguna de estas igualdades?

Ninguna de las dos igualdades es válida en general. Es decir que estas no son dos propiedades de los números reales. Como contraejemplo consideremos los valores $a=2$ y $b=1$, de forma que resulta

$$\sqrt{2+1}=\sqrt{3} \;\neq\; \sqrt{2}+\sqrt{1},$$

$$(2+1)^3=27 \;\neq\; 2^3+1^3=9.$$

Sin embargo, existen pares de números que las verifican, por ejemplo, si $a=0$ y $b=7$ entonces tenemos

$$\begin{aligned}\sqrt{0+7} &= \sqrt{0}+\sqrt{7},\\ (0+7)^3 &= 0^3+7^3.\end{aligned}$$

Unidad 2. Expresiones algebraicas

Para pensar 7

1. ¿Qué término se podría agregar (sumar o restar) al binomio $9p^2 - 12pq$ para que sea un trinomio cuadrado perfecto? ¿Y para el caso del binomio $y^2 + 16z^4$?
2. ¿Es posible factorizar la expresión $a^2 - 2$ como suma por diferencia? ¿Y la expresión $a - 2$, siendo $a > 0$?

1. Consideremos el binomio $9p^2 - 12pq$. Queremos sumarle un término de forma que resulte un trinomio cuadrado perfecto, es decir, un trinomio de la forma $a^2 + 2ab + b^2$.

   Podemos expresar el primer término del binomio dado como $(3p)^2$ y asociarlo al primer término del trinomio buscado, es decir, $(3p)^2 = a^2$. De acuerdo a lo anterior podemos elegir $a = 3p$ (y notemos que esta no es la única opción posible, podría ser $a = -3p$).

   El segundo término del binomio lo podemos asociar al segundo término del trinomio, esto es $-12pq = 2ab$. Como tenemos que $a = 3p$, resulta que

   $$-12pq = 2 \cdot 3p \cdot b \quad \Longrightarrow \quad b = -2q.$$

   Luego el término que debemos sumar es $b^2 = 4q^2$, de forma que el trinomio cuadrado perfecto resulta ser $9p^2 - 12pq + 4q^2$.

   Consideremos ahora el binomio $y^2 + 16z^4$, al cual podemos expresar como una suma de cuadrados de la forma $y^2 + (4z^2)^2$. El término que podríamos agregar es, por ejemplo, $2 \cdot y \cdot 4z^2 = 8yz^2$ y así obtenemos

   $$y^2 + 8yz^2 + 4z^4 = (y + 4z^2)^2.$$

   Como en el caso anterior, la solución elegida no es la única, hay otras formas de elegir un tercer término que verifique lo pedido.

2. Podemos factorizar ambas expresiones de la siguiente manera

   $$\begin{aligned} a^2 - 2 &= (a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2}), \\ a - 2 &= (\sqrt{a} - \sqrt{2})(\sqrt{a} + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Para pensar 8

Resolvemos la ecuación

$$\begin{aligned} (\sqrt{x} + 3)^2 - 6\sqrt{x} &= 5 \\ x \cancel{+ 6\sqrt{x}} + 9 \cancel{- 6\sqrt{x}} &= 5 \\ x &= -4, \end{aligned}$$

y encontramos que $x = -4$ es la solución. ¿Es esto correcto?

Notemos que -4 no es solución de esta ecuación, ya que si queremos verificar este resultado al reemplazar con el valor en la ecuación inicial encontramos la expresión $\sqrt{-4}$ la cual no tiene sentido. Por este motivo, esta solución encontrada debe ser descartada.

La manera correcta de resolver la ecuación sería indicando las restricciones correspondientes a los valores de x antes de iniciar el procedimiento de resolución. Es decir, iniciar el ejercicio indicando los valores para los cuales están bien definidos cada uno de los términos de la ecuación. En este caso en particular deberíamos haber empezado la resolución diciendo que debe ser $x \geqslant 0$.

Para pensar 9

1. ¿Es posible encontrar un valor de m para que $x = -2$ sea solución de la ecuación $x^2 - (m+1)x + m = 1$?
2. ¿Es posible encontrar un valor de p para que $x^4 - (p-2) = 1$ no tenga solución en $\mathbb{R}$?

1. Si reemplazamos con el valor $x = -2$ en la ecuación, encontramos una ecuación con la incógnita m que resolvemos para hallar el valor pedido.

$$\begin{aligned} (-2)^2 - (m+1)(-2) + m &= 1 \\ 4 + 2m + 2 + m &= 1 \\ 3m &= -5 \\ m &= -\frac{5}{3}. \end{aligned}$$

2. Reescribimos la ecuación de la forma

$$x^4 = p - 1.$$

Dado que para cualquier número real x se verifica $x^4 \geqslant 0$, podemos decir que esta ecuación no tendrá solución si $p - 1 < 0$. Luego, para cualquier valor $p < 1$ esta ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$.

Para pensar 10

1. Sea $x \in \mathbb{R},\ x > 0$. ¿Cuál es el signo de x^{-1}?
2. Sean $x, y \in \mathbb{R}$, tales que $x > y > 0$. ¿Es correcto afirmar que $x^{-1} > y^{-1}$? ¿Y que $x^2 > y^2$?

1. Cualquier número real no nulo y su inverso tienen el mismo signo: o ambos son positivos, o ambos son negativos. Esto se concluye a partir de la definición del inverso de un número x:
$$x \cdot x^{-1} = 1 > 0 \quad \Longrightarrow \quad x \text{ y } x^{-1} \text{ tienen el mismo signo.}$$
2. Dado que
$$x > 0,\ y > 0 \quad \Longrightarrow \quad x^{-1} > 0,\ y^{-1} > 0,$$

y así $x^{-1} \cdot y^{-1} > 0$. Luego, si

$$x > y \quad \Longrightarrow \quad \cancel{x} \cdot (\cancel{x^{-1}} \cdot y^{-1}) > \cancel{y} \cdot (x^{-1} \cdot \cancel{y^{-1}}) \quad \Longrightarrow \quad y^{-1} > x^{-1}.$$

Por lo tanto la afirmación es falsa. Notemos que, dado que la afirmación es falsa, podríamos haberla refutado mostrando un contraejemplo.

Ahora, la afirmación $x^2 > y^2$ es verdadera. Vamos a demostrarla usando una demostración directa (ver **Consideraciones generales**).

En este caso, por hipótesis, tanto x como y son números reales positivos. Entonces tenemos

$$x > y \quad \Longrightarrow \quad x \cdot x > x \cdot y$$

$$x > y \quad \Longrightarrow \quad x \cdot y > y \cdot y$$

De estas dos desigualdades y la propiedad transitiva resulta que $x^2 > xy > y^2$.

Para pensar 11

1. ¿Que valores de $y \in \mathbb{R}$ son solución de $1 - |2y| > 3$?
2. ¿Qué valores de $y \in \mathbb{R}$ verifican la inecuación $|y + 2| + 5 > 1$?

1. Al despejar la incógnita y encontramos

$$1 - |2y| > 3 \quad \Longrightarrow \quad |2y| < -2.$$

Esta inecuación no tiene solución, pues para cualquier $y \in \mathbb{R}$ se verifica $|2y| \geqslant 0$.

2. Nuevamente despejamos la incógnita y,

$$|y + 2| > -4.$$

En este caso cualquier $y \in \mathbb{R}$ es solución de esta inecuación, pues $|y + 2| \geqslant 0 > -4$.

Unidad 3. Polinomios

Para pensar 12

Al dividir el polinomio $P(x)$ por $Q(x) = 2x^2 - 3$ se obtiene el polinomio cociente $C(x) = x^2 - x + 1$ y el resto resulta $R(x) = 3x - 2$. ¿Cuál es la expresión del polinomio $P(x)$?

El polinomio $P(x)$ está dado por

$$\begin{aligned} P(x) &= Q(x)C(x) + R(x) \\ &= (2x^2 - 3)(x^2 - x + 1) + 3x - 2 \\ &= 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x^2 + 3x - 3 + 3x - 2 \\ &= 2x^4 - 2x^3 - x^2 + 6x - 5. \end{aligned}$$

Para pensar 13

1. Si a es raíz del polinomio $P(x)$, y $Q(x)$ es otro polinomio cualquiera, entonces a es raíz del polinomio $T(x) = P(x) \cdot Q(x)$. ¿Por qué?

2. Si un polinomio $P(x)$ tiene término independiente nulo, entonces podemos indicar en forma inmediata una de sus raíces. ¿Cuál?

1. Si a es raíz de $P(x)$ entonces podemos expresar este polinomio como $P(x) = (x-a)P_1(x)$. Luego
$$T(x) = P(x) \cdot Q(x) = (x-a)P_1(x) \cdot Q(x).$$
Es decir que a es raíz de $T(x)$.

2. Si $P(x)$ no tiene término independiente, entonces x es un factor común a todos sus términos. Es decir que
$$P(x) = xP_1(x).$$
Luego $x = 0$ es una raíz de $P(x)$.

Para pensar 14

Si el resto de dividir un polinomio $P_1(x)$ por $Q(x) = x-a$ es 3 y el resto de dividir un polinomio $P_2(x)$ por el mismo $Q(x)$ es -5, ¿es posible saber cuál es el resto de dividir $P(x) = P_1(x) \cdot P_2(x)$ por este mismo polinomio $Q(x)$? ¿Qué se puede asegurar respecto del resto de dividir $T(x) = P_1(x) + P_2(x)$ por el polinomio $Q(x)$?

Por el teorema del resto sabemos que el resto de dividir $P_1(x)$ por $Q(x)$ es $P_1(a)$, entonces debe ser $P_1(a) = 3$, y de la misma forma, el resto de dividir $P_2(x)$ por $Q(x)$ es $P_2(a)$ y así $P_2(a) = -5$.

De acuerdo a lo anterior, el resto de dividir $P(x)$ por $Q(x)$ es

$$P(a) = P_1(a) \cdot P_2(a) = 3 \cdot (-5) = -15.$$

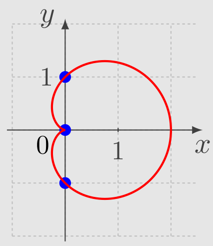
El resto de dividir $T(x)$ por $Q(x)$ es

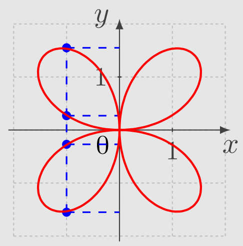
$$T(a) = P_1(a) + P_2(a) = 3 - 5 = -2.$$

Unidad 4. Funciones

Para pensar 15

Los siguientes gráficos ¿corresponden a funciones de la forma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? ¿Por qué?





Ninguno de estos gráficos corresponde a una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. En el dibujo de la izquierda, al valor del dominio $x = 0$ le corresponden tres valores de la imagen: $y_1 = -1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$ (puntos azules en la figura). Es decir que como función no está bien definida en el valor $x = 0$.

Lo mismo ocurre en la figura de la derecha. En este caso podemos ver que, por ejemplo, al valor del dominio $x = -1$ le corresponden cuatro valores de la imagen, indicados con puntos azules en la figura.

Para pensar 16

Consideremos las funciones $f(x) = 1 - x$ y $g(x) = x^2$ y notemos que para $x = 0$ y para $x = 1$ se verifica $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

$$(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(0) = 1 \quad \text{y} \quad (g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(1) = 1,$$

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = 0 \quad \text{y} \quad (g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(0) = 0.$$

A partir de esto, ¿podemos concluir que la composición de funciones es conmutativa? Es decir, ¿vale la propiedad $f \circ g = g \circ f$?

Como ya dijimos, que una igualdad se verifique para ciertos casos particulares no quiere decir que sea verdadera en general. En este caso, si tomamos $x = 3$ podemos observar que no se verifica que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$. Luego la afirmación $f \circ g = g \circ f$ no es cierta.

Unidad 5. Función lineal. Rectas

Para pensar 17

Sea $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. ¿Cuál es el conjunto imagen de la función f? Si $a = 0$, ¿cuál es el conjunto imagen de f?

Si $a \neq 0$, entonces f es una función lineal no constante con dominio $\mathbb{R}$. Su imagen es también $\mathbb{R}$. Para probar esto debemos mostrar que para cualquier elemento y_0 de la imagen $\mathbb{R}$

existe un x_0 en el dominio $\mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = y_0$. Es decir, queremos que

$$y_0 = ax_0 + b \quad \Longrightarrow \quad x_0 = \frac{y_0 - b}{a}.$$

De esta manera, dado $y_0 \in \mathbb{R}$, existe $x_0 = \dfrac{y_0 - b}{a} \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = y_0$.

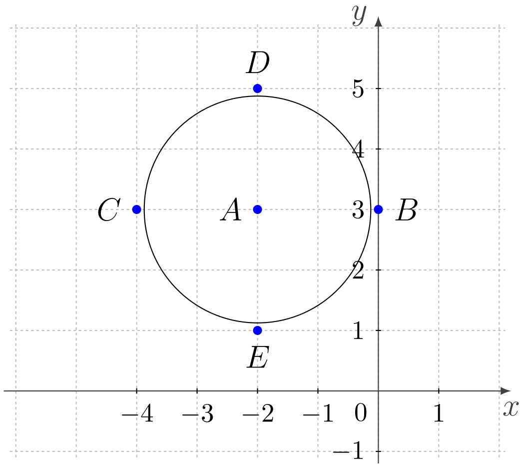
Si $a = 0$, entonces la función es constante $f(x) = b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Es decir que el único elemento de la imagen es b, luego $\operatorname{Im} f = \{b\}$.

Para pensar 18

La distancia de $A = (-2, 3)$ a $B = (0, 3)$ es igual a 2. ¿Es B el único punto del plano que se encuentra a distancia 2 de A? ¿Cuántos puntos verifican esta condición? Indicar, si es posible, otros tres puntos que la verifiquen.

Hay infinitos puntos que se encuentran a distancia 2 de A. Todos los puntos de la circunferencia de radio 2 y centro A cumplen esta condición. Por ejemplo,

$$C = (-4, 3), \quad D = (-2, 5), \quad E = (-2, 1).$$



Unidad 6. Sistemas de ecuaciones lineales

Para pensar 19

Planteando un sistema de ecuaciones, encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A = (2, -3)$ y $B = (-1, 1)$.

La ecuación general de una recta es $y = ax + b$, y debemos encontrar a y b de manera que el gráfico de la recta contenga los dos puntos dados.

Si reemplazamos ambos puntos en la ecuación de la recta, encontramos un sistema de dos ecuaciones lineales con las incógnitas a y b. Esto es,

$$\begin{cases} -3 = a \cdot 2 + b, & \text{(reemplazamos con las coordenadas del punto } A\text{)}, \\ 1 = a \cdot (-1) + b, & \text{(reemplazamos con las coordenadas del punto } B\text{)}, \end{cases}$$

Despejamos b en ambas ecuaciones

$$\begin{cases} -3 - 2a = b, \\ 1 + a = b. \end{cases}$$

e igualamos lo encontrado

$$-3 - 2a = 1 + a \quad \Longrightarrow \quad -4 = 3a \quad \Longrightarrow \quad a = -\frac{4}{3}.$$

Luego, para encontrar b reemplazamos en L_2

$$b = 1 + \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{3}.$$

La ecuación de la recta buscada es $y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$.

Unidad 7. Función cuadrática. Parábolas

Para pensar 20

Si la parábola $y = ax^2 + bx + c$ tiene vértice $V = (-2, -1)$ y no intersecta al eje de las abscisas, ¿qué podemos decir del valor de a? ¿podemos hallar la imagen de la imagen de la función cuadrática correspondiente?

Dado que la ordenada del vértice es negativa (es -1) y la parábola no corta al eje x, entonces la concavidad de la parábola debe ser hacia abajo. Concluimos entonces que el coeficiente a debe ser negativo.

Ahora, sabiendo que $a < 0$ y que $V = (-2, -1)$ podemos asegurar que $\operatorname{Im} f = (-\infty, -1]$.

Para pensar 21

1. ¿Cual es la forma general de una parábola que posee una única raíz (doble) $x = x_0$?
2. ¿En qué casos no es posible expresar una parábola de la forma $y = a(x - x_1)(x - x_2)$?

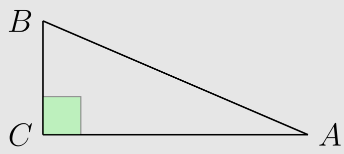
1. La forma general de dicha parábola es $y = a(x - x_0)^2$, para algún $a \in \mathbb{R}$.
2. Para poder expresar una parábola de la forma $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ es necesario que esta tenga raíces reales, ya sea una (doble) o dos distintas. De esta manera, si la parábola no tiene raíces reales entonces no es posible expresarla en la forma indicada.

   En otras palabras, si el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ de la ecuación cuadrática correspondiente $0 = ax^2 + bx + c$ es negativo, entonces no es posible expresar la parábola de la forma $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Unidad 8. Razones y funciones trigonométricas

Para pensar 22

Dado el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ rectángulo en $\hat{C}$, ¿qué relación existe entre las razones trigonométricas del ángulo $\hat{A}$ y las del ángulo $\hat{B}$?



Tenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \hat{A} &= \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{BA}|} = \cos \hat{B} \\ \cos \hat{A} &= \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{BA}|} = \operatorname{sen} \hat{B}. \end{aligned}$$

Para la tangente encontramos que

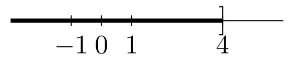
$$\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \hat{B} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{BC}|},$$

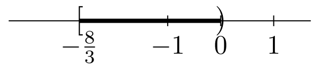
de lo que concluimos que

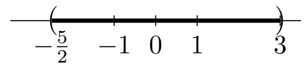
$$\operatorname{tg} \hat{A} = \left(\operatorname{tg} \hat{B}\right)^{-1} = \operatorname{cotg} B.$$

Unidad 1. Los números reales

1. (a) $\{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 4\}$ (b) $\left\{x \in \mathbb{R}^- : x \geqslant -\frac{8}{3}\right\}$ (c) $\left\{x \in \mathbb{R} : x > -\frac{5}{2} \text{ y } x < 3\right\}$







2. (a) Resolver las operaciones indicadas en cada caso

   i. $a = 6,\ b = 2 \longrightarrow |a+b| = 8 \quad |a-b| = 4$

   $|a| + |b| = 8 \quad |a| - |b| = 4$

   ii. $a = \dfrac{2}{3},\ b = \dfrac{5}{2} \longrightarrow |a+b| = \dfrac{19}{6} \quad |a-b| = \dfrac{11}{6}$

   $|a| + |b| = \dfrac{19}{6} \quad |a| - |b| = -\dfrac{11}{6}$

   iii. $a = 2,\ b = -\dfrac{12}{5} \longrightarrow |a+b| = \dfrac{2}{5} \quad |a-b| = \dfrac{22}{5}$

   $|a| + |b| = \dfrac{22}{5} \quad |a| - |b| = -\dfrac{2}{5}$

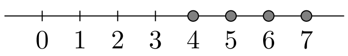
   (b) Las igualdades no son válidas.

3. (a) $\dfrac{\pi}{2}$ es un número irracional y real.
   (b) $\sqrt{36}$ es natural, entero, racional y real.
   (c) $2,25111$ es racional y real.
   (d) 0 es entero, racional y real.
   (e) $\sqrt{7}$ es irracional y real.
   (f) $-2,0\widehat{1}$ es racional y real.
   (g) $-\dfrac{9}{81}$ es racional y real.
   (h) $\sqrt[3]{-8}$ es entero, racional y real.
   (i) -11^{-1} es racional y real.
   (j) $\left(\dfrac{-2}{6}\right)^{-1}$ es entero, racional y real.

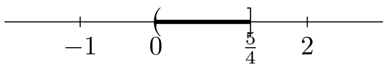
4. (a) Falso. $\pi \in \mathbb{R}$ y $\pi \notin \mathbb{Q}$.
   (b) Verdadero, pues $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
   (c) Verdadero, pues $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
   (d) Falso. $3 \in \mathbb{R}$ y $3 \notin \mathbb{I}$.
   (e) Falso, pues $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.
   (f) Verdadero. $\dfrac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ y $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$.
   (g) Falso. $-2 \in \mathbb{Z}$ y $-2^{-1} = -\dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.
   (h) Falso. $1 \in \mathbb{N}$ y $1^{-1} = 1 \in \mathbb{N}$.
   (i) Verdadero. Si $x = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q} - \{0\}$, entonces $x^{-1} = \dfrac{n}{m} \in \mathbb{Q}$.
   (j) Falso. El opuesto de $-7 \in \mathbb{Z}$ es $7 \in \mathbb{Z}^+$.
   (k) Verdadero. Si $b \in \mathbb{N}$ entonces $-b \in \mathbb{Z}^-$.
   (l) Verdadero, pues $|a| = |-a|$.

5. (a) $\{-100, -99, -98\}$,
   (b) $\{-17, -16, -15, -14, -13\}$,
   (c) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$,
   (d) $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,
   (e) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

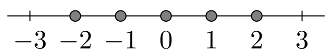
6. (a) Números naturales mayores que 3



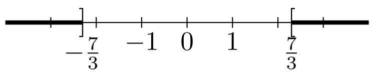
(b) Números reales positivos menores o iguales que $\frac{5}{4}$



(c) Números enteros cuyo valor absoluto es menor que $\frac{5}{2}$



(d) Números reales cuyo valor absoluto es mayor que $\frac{7}{3}$



7. (a) El error es realizar la resta $2-3$, lo correcto es hacer $2-48$. Resultado: -46.

(b) El error es $-2^2 \neq 4$, lo correcto es $-2^2=-4$. Resultado: $\dfrac{15}{34}$.

(c) El error es $\sqrt{1+\dfrac{9}{16}} = 1+\dfrac{3}{4}$ pues la raíz cuadrada no es distributiva con respecto de la suma. Lo correcto es

$$\sqrt{1+\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}.$$

Resultado: $\dfrac{42}{5}$.

8. (a) $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{b} : c$, (b) $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = a : \dfrac{b}{c}$.

9. Existen muchos valores que sirven por ejemplo para mostrar que las igualdades son falsas. Por ejemplo, $a=3, b=7, c=2$ pueden ser usados en todos los casos.

10. (a) 6, (b) -3, (c) 10.

11. (a) $2^{-8} = \dfrac{1}{256}$, (b) $-\dfrac{8}{27}$, (c) 1, (d) $2^{\frac{7}{8}}$, (e) 125, (f) $\dfrac{1}{3}$, (g) $(-4)^{\frac{2}{5}}$, (h) $2^{\frac{5}{9}}$, (i) $\left(-\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$, (j) $6^{-\frac{3}{2}}$.

12. (a) $a^{\frac{5}{4}}b^{\frac{3}{2}}$, (b) $a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}}$.

13. Las igualdades se prueban aplicando las propiedades de la radicación y la potenciación. Para el inciso (b) basta notar que $5^{999}+5^{999}+5^{999}+5^{999}+5^{999} = 5\cdot 5^{999} = 5^{1000}$.

14. (a) -3, (b) -4, (c) -8, (d) $-\dfrac{5}{2}$, (e) $\dfrac{21}{16}$, (f) $-\dfrac{7}{6}$.

15. (a) $\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ es irracional y real.

(b) -11 es entero, racional y real.

(c) $-7+8\sqrt{5}$ es irracional y real.

(d) $\dfrac{11}{3}+\dfrac{8}{3}\sqrt{6}$ es irracional y real.

(e) $-\dfrac{1}{2}$ es racional y real.

(f) $4\sqrt{6}$ es irracional y real.

16. (a) Área: 144 cm^2, Perímetro: $32\sqrt{3}$ cm.
    (b) Área: 24 cm^2, Perímetro: $14\sqrt{2}$ cm.
    (c) Área: $\left(\frac{9}{2}\pi + 9\right)$ cm^2, Perímetro: $\left(3\pi + 6\sqrt{2}\right)$ cm.

17. (a) $\frac{\sqrt{6}-1}{3}$, (b) $1 + \frac{\sqrt{6}}{6}$, (c) $-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}$, (d) $3\sqrt{5}+6$, (e) $\sqrt{2}$, (f) $-2\sqrt{35}$.

Unidad 2. Expresiones algebraicas. Ecuaciones. Inecuaciones

1. (a) $13ab^3c(13a^4 + c^4)$,
   (b) $\frac{x^2y^2}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{y}{2} + \frac{x^2y^2}{(\sqrt{2})^3}\right)$,
   (c) $5a^2b^2(a - 2a^3 + b + 3a^4b^3)$,
   (d) $\frac{1}{2}m^3n\left(5m^2n^2 - 1 + \frac{p^3}{4} + 5m\right)$,
   (e) $\frac{2}{3}xyz\left(\frac{5}{7} + 2xy^4z^3 - \frac{y^5z^4}{3} - yz^7\right)$.

2. (a) $(x+5)^2$, (b) $(m-n)^2$, (c) $\left(\frac{q}{2} - p\right)^2$, (d) $(\sqrt{2}y^2 + x)^2$, (e) $\left(2x^3 + \frac{y}{3}\right)^2$, (f) $\left(2x^3 - \frac{y^4}{4}\right)^2$.

3. (a) $x^2 + 4xy + \mathbf{4y^2} = (x+2y)^2$,
   (b) $9a^2 - 6ab + \mathbf{b^2} = (3a-b)^2$,
   (c) $\dfrac{25}{4}x^2 - 15x + \mathbf{9} = \left(\dfrac{5}{2}x - 3\right)^2$,
   (d) $16 + 4x + \mathbf{\frac{x^2}{4}} = \left(4 + \frac{x}{2}\right)^2$,
   (e) $\frac{9}{4}x^2 + 2xy + \mathbf{\frac{4}{9}y^2} = \left(\frac{3}{2}x + \frac{2}{3}y\right)^2$,
   (f) $a^2 - 6\sqrt{2}ab + \mathbf{18b^2} = (a - 3\sqrt{2}b)^2$.

4. (a) $(x-3)(x+3)$,
   (b) $(y-5m)(y+5m)$,
   (c) $(2a - \sqrt{3}b^2)(2a + \sqrt{3}b^2)$,
   (d) $(12m^3 - 11x^4y^2)(12m^3 + 11x^4y^2)$,
   (e) $(x-y-a)(x-y+a)$,
   (f) $\left(\frac{2}{3}a^3 - \frac{b^2}{5}\right)\left(\frac{2}{3}a^3 + \frac{b^2}{5}\right)$.

5. (a) $\frac{x+1}{(x+2)^2}$, (b) $-\frac{9}{(y-3)(y+3)}$, (c) $-\frac{bx+1}{x(x+1)}$, (d) $\frac{2}{3}$, (e) $p+q$, (f) $\frac{a+b}{a-b}$, (g) $x+2$, (h) $\frac{m}{m-n}$.

6. Las igualdades se verifican operando algebraicamente (factorización y simplificación).

7. (a) Sugerencia: multiplicar el miembro izquierdo por $1 = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}$.
   (b) $-\frac{\sqrt{a}}{a+b}$.

8. (a) $x = \frac{7}{4}$,
   (b) La ecuación es válida para cualquier valor de x.
   (c) $x = 18$,
   (d) $x = 4$,
   (e) La ecuación no tiene solución.
   (f) $x = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

9. (a) $x = 2$ no es solución; $x = -1$ es solución.
   (b) $x = -1$ es solución; $x = -2$ no es solución.
   (c) $x = -1$ no es un valor permitido pues el denominador se anula en este valor. Esta ecuación no tiene solución.

10. (a) $x_1 = -1,\ x_2 = 3$,
    (b) Esta ecuación no tiene solución.
    (c) $x_1 = x_2 = 2$,
    (d) $x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = -2$.

11. (a) $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
    (b) $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -\sqrt{3},\ x_4 = \sqrt{3}$,
    (c) $x_1 = -\sqrt{5},\ x_2 = \sqrt{5}$,
    (d) $x_1 = -2,\ x_2 = -5$,
    (e) $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = 2$,
    (f) $x_1 = -5,\ x_2 = 5,\ x_3 = -1,\ x_4 = 0$,
    (g) $x = 12$,
    (h) $x_1 = 0,\ x_2 = -9$.

12. (a) $x_1 = 6,\ x_2 = 1$,
    (b) $x_1 = \frac{11}{5},\ x_2 = \frac{13}{5}$,
    (c) Esta ecuación no tiene solución,
    (d) $x_1 = 3\sqrt{3},\ x_2 = -\frac{11}{3}\sqrt{3}$,
    (e) Esta ecuación no tiene solución,
    (f) $x = 6$.

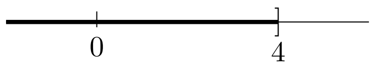
13. (a) $x = \frac{6}{5}$, (b) $x = \frac{7}{9}$,
    (c) La ecuación es válida para cualquier $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$.
    (d) $x = 2$. Al resolver la ecuación cuadrática del numerador se encuentra también el valor $x = -5$ pero debe ser descartado como solución pues para ese valor se anula el denominador.
    (e) $x = 0$. El valor $x = 2$ que surge al resolver la ecuación cuadrática del numerador debe ser descartado, pues en dicho valor se anula el denominador.
    (f) La ecuación no tiene solución.

14. (a) $k = \frac{16}{3}$, (b) $k = \sqrt{2}$, (c) $k = -\frac{1}{2}$.

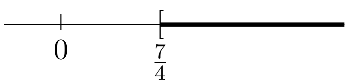
15. (a) El precio original es \$ 12.000.
    (b) Alberto tiene 13 años.
    (c) La operación comercial dejo \$ 9.075 de ganancia, que se repartieron de la siguiente forma: \$ 3.025 para Eduardo, \$ 3.630 para Jorge, \$ 1.210 para Miguel y \$ 1.210 para Roberto.

16. (a) Los números son 97 y 98.
    (b) El lado del cuadrado mide 13 m.
    (c) La medida de la base es 10, 5 cm, y la de la altura es 7, 5 cm.
    (d) $x = 3$, base mayor: 10 cm, base menor: 7 cm, altura: 4 cm.

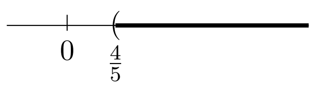
17. (a) $x \leqslant 4$, $\mathcal{S} = (-\infty, 4]$



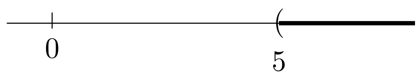
    (b) $x \geqslant \frac{7}{4}$, $\mathcal{S} = \left[\frac{7}{4}, +\infty\right)$



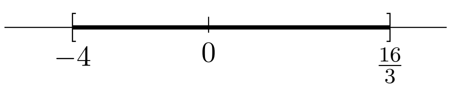
    (c) $x > \frac{4}{5}$, $\mathcal{S} = \left(\frac{4}{5}, +\infty\right)$



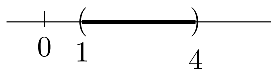
    (d) $x > 5$, $\mathcal{S} = (5, +\infty)$



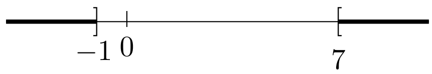
18. (a) $\mathcal{S} = \left[-4, \frac{16}{3}\right]$



    (b) $\mathcal{S} = (1, 4)$



(c) $\mathcal{S} = (-\infty, -1] \cup [7, +\infty)$



(d) Cualquier número real verifica esta inecuación, es decir, $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

19. (a) $\mathcal{S} = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [3, +\infty)$,
(b) $\mathcal{S} = \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$,
(c) $\mathcal{S} = \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{5}, +\infty\right)$,
(d) $\mathcal{S} = [0, 2)$,
(e) $\mathcal{S} = [0, 1]$,
(f) $\mathcal{S} = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$,
(g) $\mathcal{S} = (-\infty, -2)$,
(h) $\mathcal{S} = (-2, 0) \cup (2, +\infty)$.

20. (a) Debe ser $x > 23$.
(b) Hay que recorrer más de 100 km.
(c) La respuesta correcta es la *iv*.
(d) El lado mide entre 5 cm y $7,5$ cm.

Unidad 3. Polinomios

1. Las expresiones que son polinomios son las de los incisos (a), (b), (d), (f) e (i).

2.

Polinomio	Grado	Coeficiente principal	Término independiente	Forma decreciente
$P(x) = 3 + 5x^5 + 6x^3$	5	5	3	$5x^5 + 6x^3 + 3$
$P(x) = 2 - x$	1	-1	2	$-x + 2$
$P(x) = 8$	0	8	8	8
$P(x) = x^4 + x^7 + 9x$	7	1	0	$x^7 + x^4 + 9x$
$P(x) = x + 1 + 4x^2$	2	4	1	$4x^2 + x + 1$
$P(x) = 3x^6$	6	3	0	$3x^6$

3. (a) $a = 0, \quad b = 5, \quad c = -1.$
(b) $a = 1, \quad b = 0, \quad c = 0.$

4. $a = 2, \quad b = -1.$

5. (a) $P(2) = -1,\ P(-1) = -4,$
(b) $Q(2) = -4,\ Q(-1) = 2,$
(c) $R(2) = -28,\ R(-1) = -1.$

6. (a) $m = 2,$
(b) $m = -\frac{4}{3},$
(c) $m = 10.$

7. (a) $P(x) - Q(x) = x^5 + 2x^4 - 8x^2 + 2x$ (grado 5),
(b) $P(x) - 3Q(x) + 5x^2 = x^5 - 6x^4 + 17x^2 + 2x$ (grado 5),
(c) $-3 \cdot R(x) - P(x) = -12x^6 - x^5 + 9x^4 - 3x^3 + 24x^2 - 11x$ (grado 6),
(d) $P(x) \cdot Q(x) = -2x^9 + 5x^7 + 6x^6 - 4x^5 - 15x^4 + 10x^3$ (grado 9),
(e) $Q(x)^2 = 4x^8 - 20x^6 + 25x^4$ (grado 8),
(f) $Q(x)^2 + x \cdot P(x) + R(x) = 4x^8 - 15x^6 + 22x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 3x$ (grado 8).

8. (a) Cociente: $x+4$, resto: $3x^2-6x+12$,
$P(x) = x^4+3x^3-3x+8 = \left(x^3-x^2+x-1\right)(x+4)+\left(3x^2-6x+12\right)$.

(b) Cociente: $6x^6+4x^5+4x^4+3x^3+3x^2+3x+4$, resto: 4. (Por regla de Ruffini),
$P(x) = 6x^7-2x^6-x^4+x = (x-1)\left(6x^6+4x^5+4x^4+3x^3+3x^2+3x+4\right)+4$.

(c) Cociente: $-2x^3+6x^2-21x+63$, resto: -189. (Por regla de Ruffini),
$P(x) = -2x^4-3x^2 = (x+3)\left(-2x^3+6x^2-21x+63\right)+(-189)$.

(d) Cociente: $3x^3-4x^2+16x-32$, resto: $101x-130$,
$P(x) = 3x^5-x^4+5x-1 = \left(x^2+x-4\right)\left(3x^3-4x^2+16x-32\right)+(101x-130)$.

9. (a) $P(x) = Q(x)\cdot C(x)+R(x) = x^7-3x^6-x^5+3x^4+x^3+3x^2$.

(b) $Q(x) = (P(x)-R(x)) : C(x) = x^2+1$.

10. (a) -2 y $\frac{1}{3}$ son raíces de $P(x)$, -1 no es raíz de $P(x)$,

(b) $-\frac{1}{2}$ es raíz de $P(x)$, 2 y -1 no son raíces de $P(x)$.

11. (a) $x=-1$ es raíz con orden de multiplicidad: 1., $x=0$ es raíz con orden de multiplicidad: 2,
$P(x) = x^2(x+1)(2x^2-x+1)$.

(b) $x=0$ es raíz con orden de multiplicidad: 1, $P(x) = x(x^2+1)^2$.

(c) $x = -\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}$ y $x = -\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4}$ son raíces con orden de multiplicidad: 1, $x=\frac{1}{2}$ es raíz con orden de multiplicidad: 2,

$$P(x) = 8\left(x+\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}\right)\left(x+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

(d) $x=0$ es raíz con orden de multiplicidad: 3, $x=3$ y $x=-3$ son raíces con orden de multiplicidad: 2, $P(x) = x^3(x-3)^2(x+3)^2(x^2+4)$.

(e) $x=\sqrt{5}$ y $x=-\sqrt{5}$ son raíces con orden de multiplicidad: 1,

$$P(x) = (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})(x^2+5)(x^2+2x+2).$$

(f) $x=0$ es raíz con orden de multiplicidad: 1, $x=1$ es raíz con orden de multiplicidad: 3,
$P(x) = 3x(x-1)^3$.

12. (a) $P(x) = a\,x\left(x-\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+1)^2$, $a \in \mathbb{R}-\{0\}$,

(b) $P(x) = a\,\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(x-4)^2$, $a \in \mathbb{R}-\{0\}$,

(c) $P(x) = -3\,x\,\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$.

(d) $P(x) = a\,(x-2)(x+3)\left(x^2+4\right)$, $a \in \mathbb{R}-\{0\}$,

(e) $P(x) = a(x-2)(x-3)\left(x^2-1\right) = a\left(x^4-5x^3+5x^2+5x-6\right)$ con $a \in \mathbb{R}-\{0\}$.
No es único pues a puede tomar infinitos valores, para cada uno de estos valores obtenemos un polinomio diferente.

(f) $P(x) = -\frac{1}{4}(x^2+3)(x-1)^3$, y este es el único polinomio que verifica las condiciones indicadas.

13. (a) $P(x)$ es divisible por $Q(x)$, pues $P(2) = 0$,
    (b) $P(x)$ no es divisible por $Q(x)$, pues $P(-1) = -36$,
    (c) $P(x)$ es divisible por $Q(x)$, pues $P(3) = 0$,
    (d) $P(x)$ no es divisible por $Q(x)$, pues $P\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$.

14. (a) $k = -\frac{5}{2}$, (b) $k = 1$.

15. (a) $m = -1$, (b) $x = 9$, (c) $a = -2$ ó $a = -3$.

Unidad 4. Funciones de variable real

1. Los gráficos (b), (d) y (f) sí representan una función. Los gráficos (a), (c) y (e) no corresponden a funciones.

2. (a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\text{Im}(f) = (-\infty, 4]$.
   $\text{Dom}(g) = (-4, 4) \cup [5, +\infty)$, $\text{Im}(g) = (-5, 4]$.
   $\text{Dom}(h) = (-2, 5]$, $\text{Im}(h) = [-5, 4)$,

   (b) $f(3) = 4$, $f(-2) = -1$,
   $\frac{9}{2} \notin \text{Dom}(g)$, luego no es posible calcular g en este valor, $g(5) = 3$,
   $h(3) = 0$, $-2 \notin \text{Dom}(h)$, luego no es posible calcular h en este valor.

   (c)

	f	g	h
Intersección con eje x	$(5, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$ y $(3, 0)$
Intersección con eje y	$(0, -1)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$

   (d) f es positiva en el intervalo $[1, 5)$,

   (e) g es negativa en el intervalo $(-4, 0)$.

3. (a) $f(3) = \sqrt{24}$,
   $0 \notin \text{Dom}(f)$, luego no es posible evaluar la función en 0.
   (b) $f(x) = 5 \iff x = \sqrt[3]{28}$.
   (c) $g(-2) = -\frac{9}{5}$,
   $\frac{4}{3} \notin \text{Dom}(g)$, luego no es posible evaluar la función en este valor.
   (d) $g(x) = 0 \iff x = 0$ ó $x = \frac{1}{4}$.
   (e) $h(1) = 0$,
   $0 \notin \text{Dom}(h)$, luego no es posible evaluar la función en 0.
   (f) $h(x) > 1 \iff x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

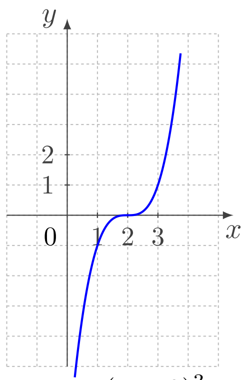
4. (a) $f(x) = 0 \iff x = 1$, (c) $f(x) < -1 \iff x \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$,
   (b) $f(x) = 3 \iff x = \frac{5}{2}$, (d) $f(x) > 3 \iff x \in \left(2, \frac{5}{2}\right)$.

5. (a) $A(\ell) = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$, $A(3) = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ cm^2.
   (b) $P(d) = \pi d$.
   (c) $A(h) = \frac{h^2}{3}$, $A(12) = 48$ cm^2.

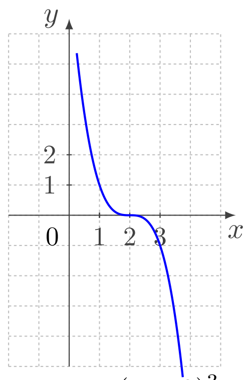
6. (a) $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$,
   (b) $\mathrm{Dom}\,(f) = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$,
   (c) $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$,
   (d) $\mathrm{Dom}\,(f) = (-\infty, 0) \cup (0, 3) \cup (3, +\infty)$,
   (e) $\mathrm{Dom}\,(f) = [-2, 1) \cup [2, +\infty)$.

7. (a) Los dominios no son iguales: $\mathrm{Dom}\,(f) = (-\infty, -8) \cup (-8, 1]$, $\mathrm{Dom}\,(g) = (-\infty, 1]$.
   (b) No es posible evaluar f en $x = -8$ pues $-8 \notin \mathrm{Dom}\,(f)$, mientras que $g(-8) = \frac{1}{6}$.

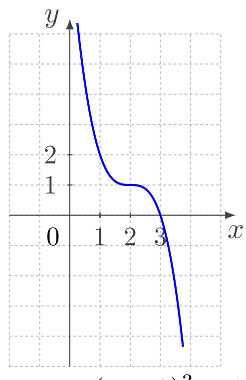
8. (a) $y = (x-2)^3$: desplazamiento horizontal dos unidades ($\rightarrow$).
   (b) $y = -(x-2)^3$: desplazamiento horizontal dos unidades ($\rightarrow$) y reflexión respecto del eje x.
   (c) $y = -(x-2)^3 + 1$: desplazamiento horizontal dos unidades hacia la derecha, reflexión respecto del eje x y desplazamiento vertical de una unidad ($\uparrow$).



$y = (x-2)^3$

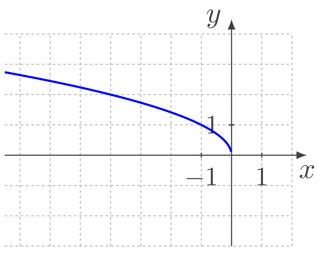


$y = -(x-2)^3$

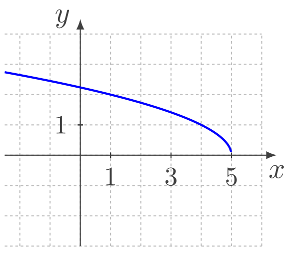


$y = -(x-2)^3 + 1$

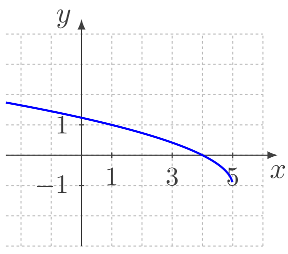
   (d) $y = \sqrt{-x}$: reflexión respecto del eje y.
   (e) $y = \sqrt{-x+5} = \sqrt{-(x-5)}$: desplazamiento horizontal cinco unidades ($\rightarrow$) y reflexión respecto del eje y.
   (f) $y = \sqrt{-x+5} - 1 = \sqrt{-(x-5)} - 1$: desplazamiento horizontal cinco unidades ($\rightarrow$), reflexión respecto del eje y y desplazamiento vertical una unidad ($\downarrow$).



$y = \sqrt{-x}$

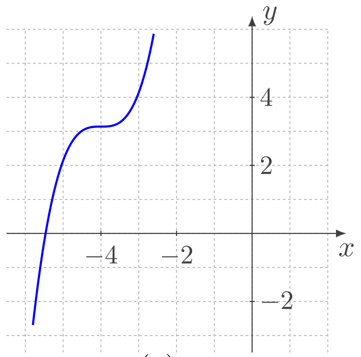


$y = \sqrt{-x+5}$

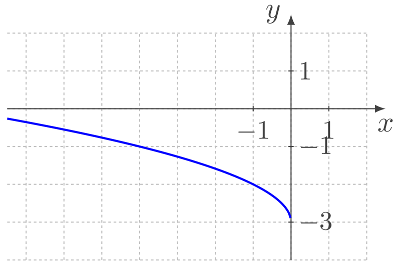


$y = \sqrt{-x+5} - 1$

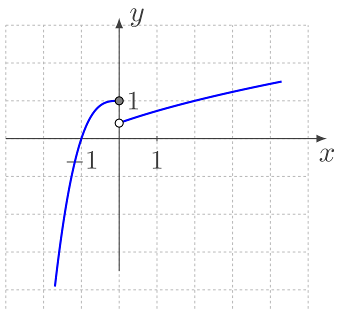
9.



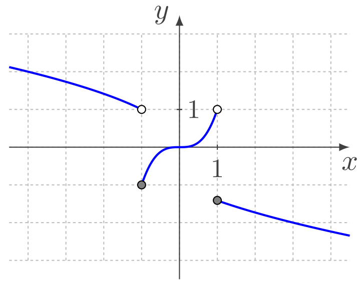
(a)



(b)



(c)



(d)

10. (a) $f(-3) = 2$,
   (b) $f(0) = 4$,
   (c) $f(2) = 3$,
   (d) No es posible calcular $f(-2)$, pues $2 \notin \mathrm{Dom}\,(f)$,
   (e) No existe $x \in \mathrm{Dom}\,(f)$ tal que $f(x) = -1$.
   (f) $f(x) = 4 \iff x \in (-2, 2)$, ó $x = 3$, ó $x = -4$.

11. (a) i. $f(x) = 4x - 2 + \frac{1}{x+2}$,
   ii. $f(x) = x^2 - 8x + 25$,
   iii. $f(x) = 2x - 1 + \frac{2}{x^2-4}$,
   iv. $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$,
   v. $f(x) = 54x^3 - 63x^2 + 9$,
   vi. $f(x) = \frac{x-5}{x^2-4}$.

   (b) i. $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$,
   ii. $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$,
   iii. $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$,
   iv. $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$,
   v. $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$,
   vi. $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

12. (a) $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R} - \{-4, 0, 4\}$, (b) $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}^+ - \{4\}$, (c) $\mathrm{Dom}\,(f) = [0, 1)$.

13. Las tablas que representan a las funciones composición son

x	-2	-1	1	2	3	4
$(f \circ g)(x)$	3	5	7	3	1	3

x	-1	0	2	3
$(g \circ f)(x)$	0	4	0	-1

$\mathrm{Dom}\,(f \circ g) = \{-2, -1, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathrm{Dom}\,(g \circ f) = \{-1, 0, 2, 3\}$.

14. (a) i. $(f \circ g)(x) = (\sqrt{x+1})^3 - 2$,
   ii. $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^3 - 1}$,
   iii. $(g \circ h)(x) = \sqrt{x + \frac{1}{x} + 1}$,
   iv. $(h \circ f)(x) = x^3 - 2 + \frac{1}{x^3 - 2}$.

   (b) No, $f \circ g$ y $g \circ f$ no son la misma función. Se prueba fácilmente que la imagen de ambas es distinta en un mismo valor de x, por ejemplo si $x = 1$, tenemos $(f \circ g)(1) = \sqrt{2}^3 - 2$ y $(g \circ f)(1) = 0$. Luego, ambas composiciones no definen la misma función.

   (c) i. $(f \circ h)(2) = \frac{109}{8}$.
   ii. No es posible calcular $((h \circ g)(-1)$.
   iii. $(h \circ f)(2) = \frac{37}{6}$.
   iv. No es posible calcular $(g \circ f)(0)$.

15. Las siguientes soluciones **no son únicas**,

   (a) $f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = x + 1$,
   (b) $f(x) = 4x,\ g(x) = x^3 + 3$,
   (c) $f(x) = \sqrt[5]{x+1},\ g(x) = x^2$,
   (d) $f(x) = \sqrt[5]{x} - 1,\ g(x) = x^2$.

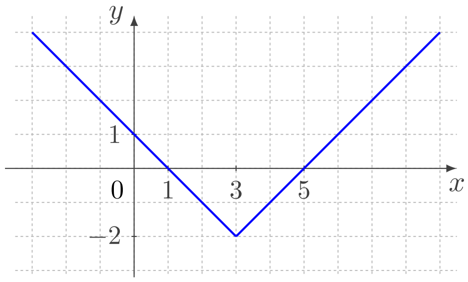
16. (a) $a = -1$ y $a = -3$,
   (b) $a = -3$,
   (c) $a = 1$,
   (d) $a = \frac{6}{7}$.

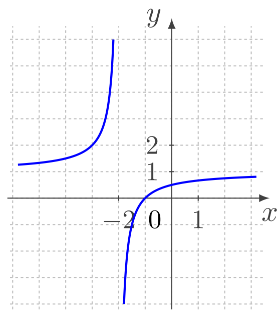
17. (a) 65°C.

   (b) A las 18 hs $(10 + 8 = 18)$ y a las 2 hs del día siguiente $(18 + 8 = 26)$.
   Observar que las mediciones son a partir de 8 hs.

   (c) Entre las 18 hs y las 2 hs del día siguiente.

18. (a)





   (b) $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R},\ \mathrm{Im}\,(f) = [-2, +\infty)$;
   $\mathrm{Dom}\,(g) = \mathbb{R} - \{-2\},\ \mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R} - \{1\}$,

   (c) El gráfico de la función f intersecta al eje x en los puntos $P_1 = (5, 0)$, $P_2 = (1, 0)$, y al eje y en el punto $P_3 = (0, 1)$. El gráfico de la función g intersecta al eje x en el punto $Q_1 = (-1, 0)$, y al eje y en el punto $Q_2 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

   (d) $x \in (-\infty, -1) \cup (7, +\infty)$,

   (e) $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, -1)$.

Unidad 5. Función lineal. Rectas

1. (a) Pendiente: $a = 3$. Ordenada al origen: $b = 1$.

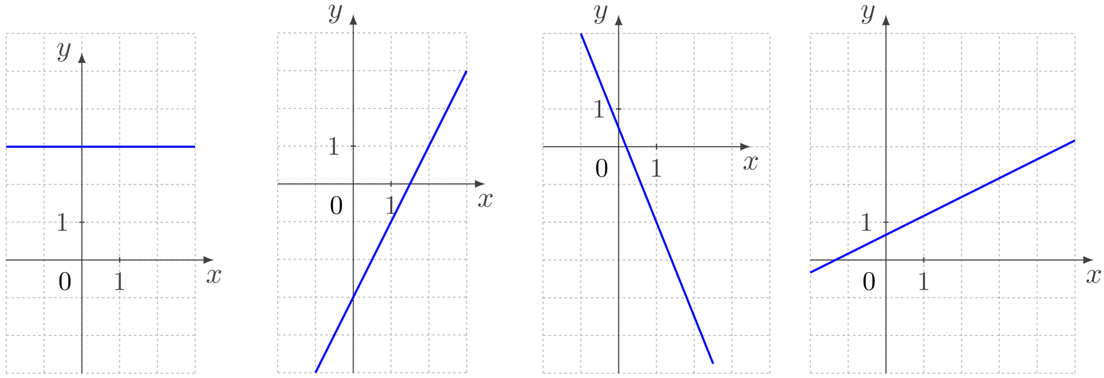
(b) Pendiente: $a = -\frac{1}{2}$. Ordenada al origen: $b = 2$.

(c) Pendiente: $a = -4$. Ordenada al origen: $b = 0$.

(d) Pendiente: $a = 0$. Ordenada al origen: $b = -1$.

2. (a) f_4, (b) f_2, (c) f_1, (d) f_3.

3. (a) $y = 3$ (b) $y = 2x - 3$ (c) $y = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$ (d) $y = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}$



4. (a) $A = (2, 3)$ y $C = (-2, 1)$ no pertenecen a la recta. $B = (3, 1)$ pertenece a la recta.

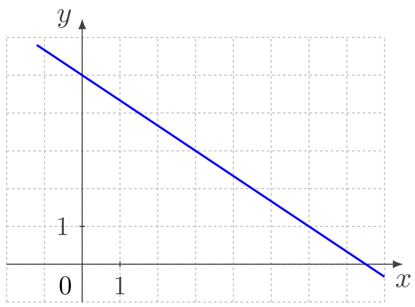
   (b) $A = (4, 3)$, $B = (0, -3)$, $C = (2, 0)$ y $D = \left(\frac{2}{5}, -\frac{12}{5}\right)$.

5. (a) $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$.

   (b) $f(6) = 1$, $f(-1) = \frac{17}{3}$, $f(0,75) = \frac{9}{2}$.

   (c) $a = -\frac{75}{2}$, $b = \frac{57}{2}$.

   (d) $x \in (-\infty, -6]$.



6. (a) Si x representa la cantidad de videos alquilados, el precio en función de x para cada una de las opciones es :
   Opción A: $P_A(x) = 20 + 2,5\,x$.
   Opción B: $P_B(x) = 30 + 2\,x$.

   (b) Opción A: con \$ 90 el cliente puede alquilar 28 videos.
   Opción B: con \$ 90 el cliente puede alquilar 30 videos.

7. (a) La función es $P(t) = 100 + 50\,t$, siendo t el tiempo en horas y P la población de bacterias.

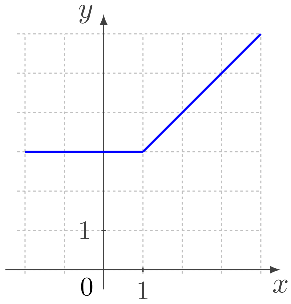
   (b) $P(15) = 850$.

   (c) Deben transcurrir 70 horas para que la población sea de 3.600 bacterias.

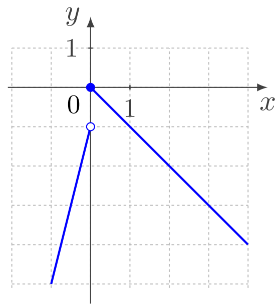
8. La recta que contiene los puntos M y N, y la recta que contiene los puntos M y P tiene la misma ecuación, dada por $y = \frac{3}{2}x - 2$. Luego, los tres puntos están alineados.

9. (a) $y = 2x - 3$,
(b) $y = 6x + 13$,
(c) $y = x + 1$,
(d) $y = \dfrac{1}{2}x - 2$,
(e) $y = -3$,
(f) $y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$,
(g) $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$,
(h) $y = \frac{3}{2}x$.

10. (a) $\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$, $\quad \text{Im}\,(f) = [3, +\infty)$.



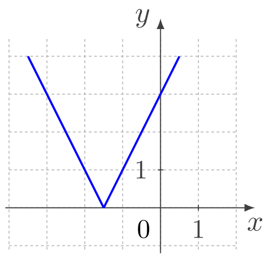
(b) $\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$, $\quad \text{Im}\,(f) = (-\infty, 0]$.



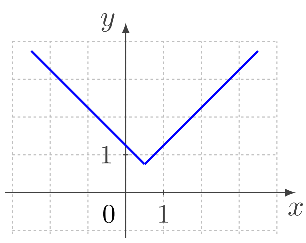
11. (a) $f(x) = \begin{cases} -2, & \text{si} \quad x < 1, \\ -x + 3, & \text{si} \quad 1 \le x < 3, \\ \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}, & \text{si} \quad 3 \le x \le 5, \end{cases}$ $\quad \text{Dom}\,(f) = (-\infty, 5]$, $\quad \text{Im}\,(f) = \{-2\} \cup [0, 3]$.

(b) $g(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{si} \quad -1 \le x \le 1. \\ x - 1, & \text{si} \quad 1 < x < 4, \end{cases}$ $\quad \text{Dom}\,(g) = [-1, 4)$, $\quad \text{Im}\,(g) = (0, 3]$.

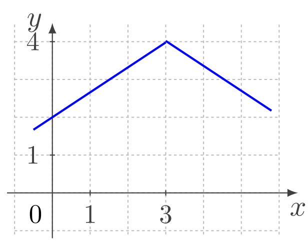
12. (a) Representación gráfica



$f(x)$



$g(x)$



$h(x)$

$\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$, $\quad \text{Dom}\,(g) = \mathbb{R}$ $\quad \text{Dom}\,(h) = \mathbb{R}$,
$\text{Im}\,(f) = [0, +\infty)$, $\quad \text{Im}\,(g) = \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$, $\quad \text{Im}\,(h) = (-\infty, 4]$.

La función f intersecta al eje x en $P_1 = \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ y al eje y en $P_2 = (0, 3)$.

La función g no intersecta al eje x. Su intersección con el eje y es $P = \left(0, \frac{5}{4}\right)$.

La función h intersecta al eje x en $Q_1 = (-3, 0)$ y en $Q_2 = (9, 0)$, y al eje y en $Q_3 = (0, 2)$.

(b) $x \in (0, 6)$,

(c) $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{1}{4}$.

13. (a) $a = -1$, $b \neq 4$, (b) $a = -1$, $b = 4$, (c) $a = \frac{4}{9}$, $b \in \mathbb{R}$.

14. (a) $k = -\frac{1}{2}$, (b) $k = 1$, (c) $k = 6$, (d) $k \neq -\frac{2}{3}$.

15. $m = -\frac{1}{3}$.

16. (a) El peso promedio es $p(t) = \frac{181}{26}t + 45$, siendo t la cantidad de días transcurridos. El peso promedio a los 35 días es aproximadamente $288,65$ gr.

    (b) i. El costo del paseo en el parque es $G(j) = 5j + 15$, siendo j la cantidad de juegos adicionales usados.

    ii. La pendiente representa el gasto adicional por cada juego y la ordenada el valor de la entrada general.

    iii. El costo de utilizar 6 juegos es $\$\,45$.

    iv. Si se dispone de $\$\,70$ pesos se pueden utilizar 11 juegos.

17. (a) $d(P, Q) = \sqrt{5}$, (b) $d(P_1, Q_1) = \frac{3}{4}$.

18. (a) $y = -3$, $y = 1$, (b) $x = 0$, $x = 4$.

19. Es un triángulo rectángulo, con ángulo recto en el vértice B, y su perímetro es $P = (\sqrt{68} + \sqrt{153} + \sqrt{221})$ u.m. $\simeq 35,48$ u.m.

20. (a) Es un paralelogramo no rectángulo.

    (b) Perímetro: $P = 2(\sqrt{17} + \sqrt{29})$ u.m. $\simeq 19,02$ u.m.

    (c) Diagonal $\overline{AC} : y = 3x$, diagonal $\overline{BD} : y = -\frac{2}{3}x$

Unidad 6. Sistemas de ecuaciones lineales

1. (a) Compatible determinado. Solución: $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{6}$.

   (b) Incompatible.

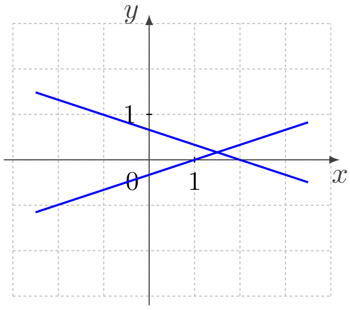
   (c) Compatible determinado. Solución: $x = 3$, $y = 1$.

   (d) Incompatible.

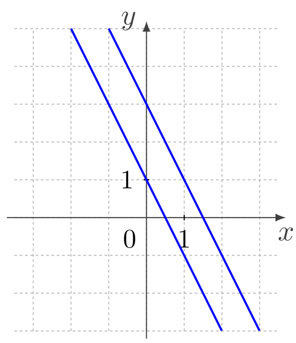
   (e) Compatible indeterminado. Solución: $\left\{\left(x, 1 - \frac{3}{4}x\right), x \in \mathbb{R}\right\}$.

   (f) Compatible indeterminado. Solución: $\left\{\left(x, \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x\right), x \in \mathbb{R}\right\}$.

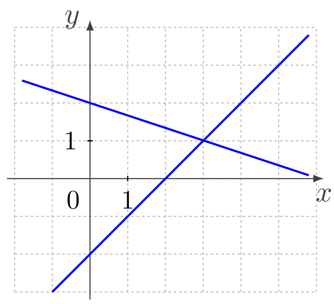
2. *Representación gráfica*



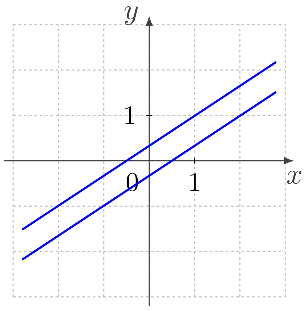
(a)



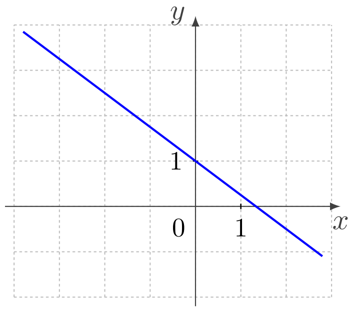
(b)



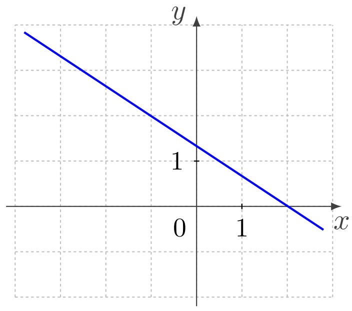
(c)



(d)



(e)



(f)

Interpretación geométrica
Los sistemas (a) y (c) se interpretan como dos rectas que se cortan en un punto, que es la solución del mismo.
Los sistemas (b) y (d) representan dos rectas paralelas no coincidentes. Dado que las rectas no se cortan, el sistema no tiene solución.
Los sistemas (e) y (f) representan dos rectas paralelas coincidentes, los infinitos puntos de intersección (todos los puntos de la recta) son las soluciones del sistema.

3. (a) $k \in \mathbb{R} - \{-2\}$, (b) $k = 0$.

4. (a) No es incompatible para ningún valor de a.
   (b) Es compatible determinado si $a \neq -1$ y $a \neq 1$.
   (c) Es compatible indeterminado si $a = -1$ ó $a = 1$.

5. Coordenadas del centro $P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

6. $A = (1,0)$, $B = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $C = (-1,2)$, $D = (-3,-2)$. Perímetro: $(4\sqrt{5} + \sqrt{26})$ u.m.

7. Punto de intersección de L_1 y L_2: $C = \left(\frac{12}{5}, -\frac{11}{5}\right)$. Área del triángulo: $\frac{121}{20}$ u.m. $= 6,05$ u.m.

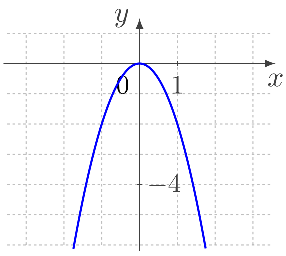
Unidad 7. Función cuadrática. Parábolas

1. $P_1 = (0,2)$ y $P_3 = \left(-2, -\frac{2}{3}\right)$ pertenecen a la parábola,
   $P_2 = (3,-6)$ no pertenece a la parábola.

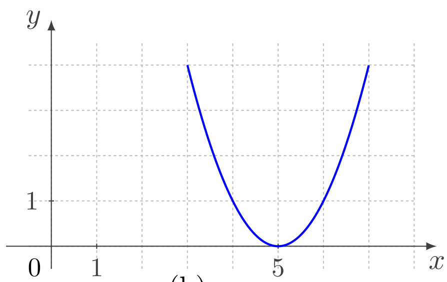
2. (a) $k = 0$, (b) $k = 8$.

3. (a) f_3, (b) f_4, (c) f_5, (d) f_1, (e) f_6, (f) f_2.

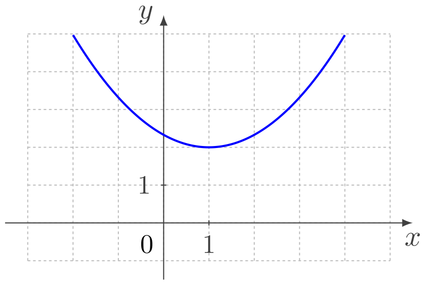
4. *Representación gráfica*



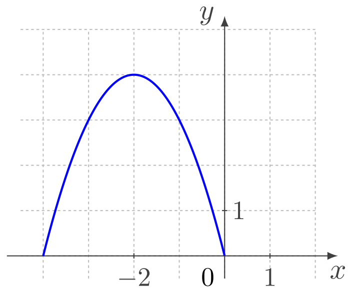
(a)



(b)



(c)



(d)

Descripción del desplazamiento

(a) Cambio de concavidad ($\frown$).

(b) Desplazamiento horizontal ($\rightarrow$).

(c) Desplazamiento horizontal ($\rightarrow$) y desplazamiento vertical ($\uparrow$).

(d) Desplazamiento horizontal ($\leftarrow$) , desplazamiento vertical ($\uparrow$) y cambio de concavidad ($\frown$) .

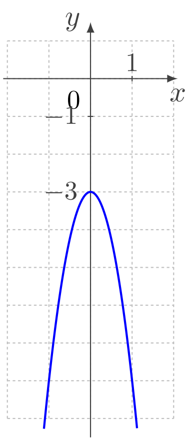
5. i. (a) $f(x) = -5x^2 - 3$,
(b) $V = (0, -3)$,
(c) $\text{Im}(f) = (-\infty, -3]$,
(d) $P = (0, -3)$,

ii. (a) $f(x) = (x + 2)^2 - 4$,
(b) $V = (-2, -4)$,
(c) $\text{Im}(f) = [-4, +\infty)$,
(d) $P = (0, 0)$,

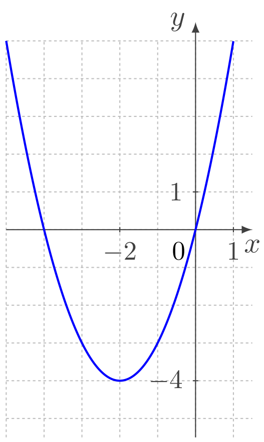
iii. (a) $f(x) = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{45}{4}$,
(b) $V = \left(\frac{9}{2}, -\frac{45}{4}\right)$,
(c) $\text{Im}(f) = \left[-\frac{45}{4}, +\infty\right)$,
(d) $P = (0, 9)$,

iv. (a) $f(x) = -\sqrt{3}x^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$,
(b) $V = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,
(c) $\text{Im}(f) = \left(-\infty, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$,
(d) $P = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,

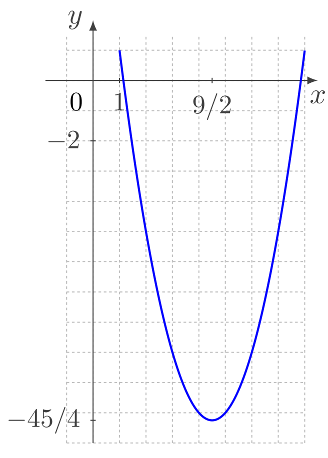
Representación gráfica



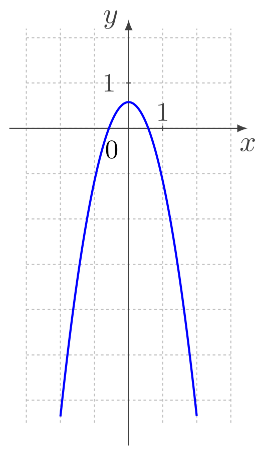
(i)



(ii)

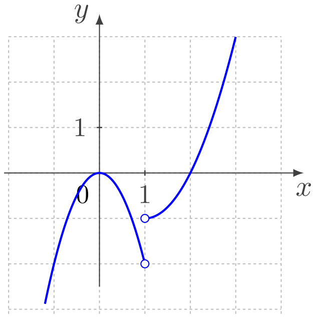


(iii)



(iv)

6. (a)



(b) Dom $(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, Im $(f) = \mathbb{R}$.

(c) $f(-1) = -2$, no existe $f(1)$, $f(2) = 0$.

7. (a) $y = -\frac{4}{9}(x+2)^2 + 3$,
   (b) $y = (x-1)^2 + 2$,
   (c) $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 2$,
   (d) $y = \frac{4}{3}(x-2)(x-3)$,
   (e) $y = -\frac{1}{2}(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$,
   (f) $y = -12(x+1)(x+2)$,
   (g) $y = \frac{5}{9}(x-1)^2 - 5$.

8. (a) $y = -\frac{3}{16}x\,(x-8)$,
   (b) $y = (x-2)\,(x-5)$.

9. i. (a) Hay 2 intersecciones con el eje x, pues $\Delta > 0$.
      (b) $y = (x-5)\,(x+4)$.
   ii. (a) Hay 1 intersección con el eje x, pues $\Delta = 0$.
      (b) $y = 3\,(x-7)^2$.
   iii. (a) No hay intersecciones con el eje x, pues $\Delta < 0$.
      (b) No es posible factorizar.
   iv. (a) Hay 2 intersecciones con el eje x, pues $\Delta > 0$.
      (b) $y = \dfrac{1}{3}\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$.

10. (a) $m \in (-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$,
    (b) $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{8}\right)$,
    (c) $m_1 = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, $m_2 = -\sqrt{20} = -2\sqrt{5}$.

11. $y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

12. (a) Para obtener la máxima ganancia debe vender 750 unidades y esta ganancia es de \$ 54.250.
    (b) Para obtener una ganancia de \$ 48.000 debió vender 500 unidades o 1.000 unidades.

13. (a) La altura máxima es $8,2$ metros y se alcanza a los $1,2$ segundos.
    (b) La pelota toca el suelo cuando $t \simeq 2,48$ segundos.
    (c) La pelota asciende cuando t varía de 0 a $1,2$ (segundos) y desciende cuando t varía de $1,2$ a $2,48$ (segundos).

Unidad 8. Razones y funciones trigonométricas

1. (a) $72°$, (b) $143° \, 14' \, 20''$, (c) $150°$.

2. (a) 3 rad, (b) $0,6225$ rad, (c) $1,22$ rad.

3.

Medida sexagesimal	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
Medida radial	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π

Medida sexagesimal	$240°$	$270°$	$300°$	$360°$
Medida radial	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	2π

4. (a) $7,2$ cm, (b) $4,5$ cm.

5. $\frac{5}{3}\pi$ cm.

6. $0,\widehat{45}$ rad.

7.

θ	$\hat{A}$	$\hat{C}$	$A\hat{B}D$	$C\hat{B}D$
$\operatorname{sen}\theta$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
$\cos\theta$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
$\operatorname{tg}\theta$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$

8. (a) $\hat{C} = 90°$, $\hat{B} = 48°$, $|\overline{BC}| \simeq 4,6839$ cm y $|\overline{AC}| \simeq 5,2020$ cm.
   (b) $\hat{A} = 56° \, 23' \, 25,53''$, $\hat{B} = 33° \, 36' \, 34,47''$, $\hat{C} = 90°$ y $|\overline{BC}| \simeq 36,5611$ cm.
   (c) $\hat{A} = 35°$, $\hat{C} = 90°$, $|\overline{AB}| \simeq 14,6493$ cm y $|\overline{BC}| \simeq 8,4025$ cm.

9. Altura aproximada $20,8751$ m.

10. $r \simeq 10,143$ cm.

11. Altura aproximada 3 m.

12. (a) $h \simeq 18,37$ cm
    (b) $\overline{AC} \simeq 41,07$ cm y $\overline{BC} \simeq 32,85$ cm
    (c) El área (aproximada) es $377,23$ cm^2
    (d) El perímetro (aproximado) es $96,92$ cm

13. La altura aproximada es $34,50$ m.

14. La altura aproximada es $112,64$ m.

15. $\overline{AB} \simeq 51,96$ cm, $\overline{BD} \simeq 25,98$ cm y $\overline{AD} \simeq 45$ cm.

16.

Cuadrante	Primer	Segundo	Tercero	Cuarto
Seno	+	+	-	-
Coseno	+	-	-	+
Tangente	+	-	+	-

17. (a) $\alpha \in$ II cuadrante, (b) $\alpha \in$ I cuadrante, (c) $\alpha \in$ IV cuadrante.

18. (a) $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$,
$\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$,
$\operatorname{sen}\gamma = -\frac{1}{2}$, $\cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.
(b) $\cos\frac{3}{8}\pi \simeq 0,39$,
$\operatorname{sen}\alpha \simeq 0,92$, $\cos\alpha \simeq -0,39$, $\tan\alpha \simeq -2,35$,
$\operatorname{sen}\beta \simeq -0,92$, $\cos\beta \simeq -0,39$, $\tan\beta \simeq 2,35$,
$\operatorname{sen}\gamma \simeq -0,92$, $\cos\gamma \simeq 0,39$, $\tan\gamma \simeq -2,35$.

19. (a) $\cos(\alpha) = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$ y tg $(\alpha) = -\frac{1}{4\sqrt{5}}$,
(b) sen $(\beta) = \frac{\sqrt{5}}{3}$ y tg $(\beta) = \frac{\sqrt{5}}{2}$,
(c) $\cos(\gamma) = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ y $\sin(\gamma) = -\frac{\sqrt{30}}{6}$.

20. (a) $x_1 = \frac{2}{3}\pi$, $x_2 = \frac{4}{3}\pi$,
(b) $x_1 = \frac{5}{4}\pi$, $x_2 = \frac{7}{4}\pi$,
(c) $x_1 = \frac{3}{4}\pi$, $x_2 = \frac{7}{4}\pi$,
(d) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \pi$,
(e) $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \frac{3}{2}\pi$, $x_4 = \frac{11}{6}\pi$,
(f) $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5}{6}\pi$, $x_3 = \frac{7}{6}\pi$, $x_4 = \frac{11}{6}\pi$,
(g) $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5}{6}\pi$, $x_3 = \frac{7}{6}\pi$, $x_4 = \frac{11}{6}\pi$,
(h) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}\pi$, $x_3 = \frac{4}{3}\pi$,
(i) $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \frac{5}{6}\pi$.