ANÁLISIS DE LAS PRAXEOLOGÍAS MATEMÁTICAS EN EL NIVEL UNIVERSITARIO EN TORNO A LA NOCIÓN DE FUNCIÓN

Parra Verónica; Virginia Cano; Elichiribehety Inés; Otero, Maria Rita;
Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología. Facultad de Ciencias Exactas Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
vparra@exa.unicen.edu.ar virginiacano2002@yahoo.com.ar ielichi@exa.unicen.edu.ar rotero@exa.unicen.edu.ar
Campo de investigación: Didáctica de la Matemática

Resumen

Este trabajo es parte de un proyecto que estudia las dificultades de la Enseñanza de la Matemática en el Nivel Universitario. El estudio fue realizado en una Facultad de Ciencias Económicas, en un curso de Matemática. Se realizó una observación no participante de la totalidad de las sesiones de varias comisiones registrando la información en video, audio y registros escritos. Se adopta el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1992,1999) para analizar las Praxeologías Matemáticas (PM) que se desarrollan durante un semestre en la asignatura Matemática. Discutimos las características de las PM en torno a la noción de función, las relaciones entre éstas, en qué medida se corresponden y los componentes de las mismas (objetos matemáticos, tareas, técnicas, tecnologías y teorías).

1. Introducción

En esta ocasión presentamos algunos resultados del trabajo que estamos realizando en una Facultad de Ciencias Económicas, analizando las PM que se desarrollan durante un semestre en la asignatura Matemática. La noción de Praxeología Matemática (PM) u Organización Matemática (OM) hace referencia a la concepción del trabajo matemático como estudio de tipos de problemas o tareas problemáticas. Lo cuál implica además, caracterizar, delimitar y clasificar los problemas; entender y describir las técnicas que los resuelven; establecer condiciones bajo las cuales funcionan o no y finalmente, construir aspectos sólidos que aseguren la validez de las maneras de proceder.
Presentamos el esquema de análisis desarrollado para evaluar las PM puestas en juego en esta particular institución y mostramos algunos resultados de esta evaluación. Nos proponemos estudiar si efectivamente estas PM son adecuadas para enseñar las nociones referidas a Función en la Universidad.

2. Elementos teóricos y presupuestos básicos

La TAD (Chevallard 1992,1999) sitúa la actividad matemática en el conjunto de las actividades humanas y de instituciones sociales. Esta teoría admite como postulado básico que toda actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo único, que se resume aquí con la palabra praxeología. Etimológicamente tal concepto proviene de la unión de los términos: praxis y logos. El primero hace referencia al saber hacer, es decir, los tipos de problemas o tareas que se estudian y las técnicas que se construyen para solucionarlos. El término logos, se identifica con el saber e incluye a las descripciones y explicaciones que nos permiten entender las técnicas, esto es, el discurso tecnológico y la teoría que da sentido a los problemas planteados, permite interpretar las técnicas y fundamentar las descripciones y fundamentaciones tecnológicas. Tipos de tareas, técnica, tecnología y teoría son los elementos que componen una Praxeología Matemática (PM) u Organización Matemática (OM).

3. Metodología de investigación

Esta investigación se realizó durante el segundo semestre del año 2004 y se observaron a los profesores que dirigían el estudio de dos comisiones constituidas por aproximadamente 40 alumnos cada una. En ambos casos se trata de docentes expertos y con amplia trayectoria. Las clases se realizaban en dos sesiones semanales de tres horas cada una. De la totalidad de las sesiones observadas, en este trabajo sólo se consideran las cuatro relativas al estudio de “Funciones de una y varias variables”. Las observaciones fueron de carácter no participante, se registraron en audio, video y además, se recogieron la totalidad de las intervenciones por escrito. Además se cuenta con los “Apuntes Teóricos” y el “Cuadernillo de Trabajos Prácticos” que la cátedra edita para los estudiantes, el programa analítico con los contenidos por unidad y con la bibliografía recomendada a los alumnos. Estos materiales son comunes en ambas comisiones. Adicionalmente se recogen los apuntes de clase de los alumnos.
Es conveniente aclarar las categorías que se utilizarán durante el análisis de los datos:

OMPE: Organización Matemática Propuesta para Enseñar.
OMPE$_1$: Organización Matemática Propuesta para Enseñar en el programa analítico.
OMPE$_2$: Organización Matemática Propuesta para Enseñar en el apunte teórico (materiales instruccionales).
OMEE: Organización Matemática Efectivamente Enseñada.
OMR: Organización Matemática de Referencia (observada en los libros de texto de los cuales han reconstruido la OMPE).
Para organizar y analizar la información, construimos dos tipos de tablas. Con la primera realizamos una trascripción completa del apunte teórico:

Objetos matemáticos presentes	Tipos de tareas	Tareas	Técnicas	Tecnología	Teorías	Ejemplos propuestos

Tabla 1

La primera columna nos permite identificar los objetos matemáticos que aparecen explícitos en el apunte teórico, ya sean antiguos o nuevos, respetando el orden de introducción de los mismos (consideraremos objeto matemático a todo aquello que pueda ser estudiado). La segunda columna, nos permite identificar los tipos de tareas que se generan en torno a esos objetos. La tercera columna, nos informa acerca de las tareas que se proponen en el apunte teórico y la siguiente, nos brinda las técnicas propuestas para resolverlas. La quinta y sexta columna nos permite identificar los elementos tecnológicos

teóricos que aparecen explícitos en el apunte teórico. Finalmente, la última columna nos muestra los ejemplos de tareas y técnicas que se proponen en el mismo apunte.
La Tabla 2, nos permite realizar un análisis más detallado de cada una de las OM puestas en juego. Hemos volcado en esta tabla los datos referidos a la $OMPE_2$ y a la OMR:

Objetos Matemáticos presentes (δ_N: nuevo, δ_A: antiguo)	Género de Tareas (G_i)	Tipos de Tareas (T_{ij})	Técnicas (τ_{ijk})	Elementos tecnológicos-teóricos ($\theta i/\Theta i$)

Tabla 2

La primera columna nos informa de los objetos matemáticos que se explicitan en cada una de las OM analizadas. La segunda nos permite identificar qué géneros de tareas se construyen en torno a esos objetos matemáticos. En la siguiente columna, detallamos los tipos de tareas que conforman dichos géneros. La cuarta columna nos indica acerca de las técnicas propuestas para la resolución de esos tipos de tareas. Finalmente, identificamos los elementos tecnológicos-teóricos que se explicitan.

4. Análisis de las Organizaciones Matemáticas puestas en juego

4.1. Características de la Organización Matemática Propuesta para Enseñar

En virtud del análisis de la OMPE, se han identificado las siguientes características:
Una desconexión interna en la OMPE que hace necesaria la distinción entre la $OMPE_1$ y la $OMPE_2$. Algunos de los indicadores más relevantes de esta desconexión son: una secuenciación de contenidos diferentes en cada una de las organizaciones mencionadas (la $OMPE_1$ y la $OMPE_2$) y la presencia de distintos objetos matemáticos en cada una de ellas. Identificamos además, objetos matemáticos estudiados en el apunte teórico que el programa analítico no considera.
Con respecto a la definición de función propuesta en la $OMPE_2$ debe destacarse un aspecto importante: la condición de existencia no se formula explícitamente. Tanto esta condición como la de unicidad, son necesarias en una definición de función. Notamos que ninguna de ellas se menciona de manera explícita, mientras que las tareas propuestas en el cuadernillo de trabajos prácticos y en el apunte teórico, requieren las mencionadas condiciones, particularmente, la condición de existencia. Observamos la presencia de un gran número de definiciones incompletas, imprecisas y coloquiales dentro del apunto teórico, definiciones que, formuladas de esta manera, naturalizan el saber. Por ejemplo:

- *La correspondencia f de un subconjunto A de $R \times R = R^2$ en el conjunto R, dada por f: $A \subseteq R^2 \rightarrow R$ y tal que $\forall (x, y) \in A$ $\exists z = f(x, y) \in R$, se denomina función real de dos variables reales.* Identificamos aquí, la ausencia de la condición de unicidad de imágenes.
Otra de las características más relevantes de la $OMPE_2$ es la presencia de una excesiva cantidad de ejemplos de tareas y las técnicas necesarias para resolverlas. Identificamos en la misma $OMPE_2$ un gran número de "agujeros" (ausencia de tareas, técnicas, tecnologías y teorías en torno a una amplia cantidad de objetos matemáticos introducidos). Tenemos así, una serie de definiciones que luego no se utilizan, de lo cuál se sigue una naturalización de las mismas.

Nos encontramos con una serie de "contradicciones" dentro de la misma $OMPE_2$. El propio texto formula explícitamente una definición y luego, utiliza otra. Por ejemplo:

θ_1: *Una función irracional es aquella en las que se aplica la raíz de cualquier índice a la variable x, o sea, la expresión* $y = \sqrt[n]{x}$

T_1: *Determinar el dominio de las siguientes funciones:* $f(x) = \sqrt{x-7}$

La definición formulada (θ_1) no se ajustaría a la tarea propuesta (T_1), ya que la expresión: $f(x) = \sqrt{x-7}$ según θ_1 no sería función irracional. Esto nos hace suponer la existencia de dos OM que conviven dentro de la propuesta en el apunte teórico: una que gira en torno a las definiciones efectivamente institucionalizadas y otra organización distinta a ésta, en torno a las tareas propuestas en el mismo apunte teórico.

A partir del instrumento de análisis que proporciona la tabla 2, concluimos en lo siguiente:

La $OMPE_2$, gira en torno a 5 géneros de tareas:

***G_1**: Analizar el dominio de funciones.* (Determinar el dominio de funciones de una y dos variables y graficar este último caso)

***G_2**: Operar con funciones.*

***G_3**:.Caracterizar funciones.* (Se refiere a analizar inyectividad, suryectividad, biyectividad, inversas, simetrías, homogeneidad, ceros, intervalos de crecimiento, decrecimiento, de positividad y de negatividad)

***G_4**: Representar gráficamente funciones.*

***G_5**: Analizar curvas de nivel.*

Las técnicas matemáticas asociadas, por ejemplo, al género G_1 son:

τ_{11}: *Si es una expresión con raíz, considerar el radicando mayor o igual a cero.*

τ_{12}: Si es una expresión fraccionaria considerar el denominador distinto de cero.

τ_{13}: Si es una expresión fraccionaria con una raíz en el numerador, analizar el radicando y el denominador. Domf=Dom numerador ∩ Dom denominador.

τ_{14}: Si es una expresión logarítmica considerar el argumento mayor a cero.

Detectamos la existencia de un bloque práctico-técnico que gira en torno a los cinco géneros de tareas que hemos señalado (***G_i***). Los tipos de tareas propuestos son algo limitados y no ofrecen la posibilidad de relacionar las nociones referidas a función. Se observa una importante fragmentación de los contenidos y por lo tanto, una fragmentación de las tareas y de las técnicas, estableciendo una desconexión con otras tareas y técnicas.

El bloque tecnológico teórico que respalda el uso de estas técnicas está conformado sólo por las definiciones de cada uno de los objetos matemáticos que se ponen en juego. Consideramos que éste no se ajustaría a las tareas y técnicas puestas en juego en la $OMPE_2$, sería necesario algo más que definiciones, por ejemplo, generalizaciones, teoremas con sus demostraciones, proposiciones, lemas, entre otros.

4.2 Características de la Organización Matemática Efectivamente Enseñada

En virtud del análisis de la OMEE, se han identificado las siguientes características:

Se detectó la presencia de definiciones incompletas e imprecisas, por ejemplo:

-Definición de función irracional: Están afectadas por una raíz. Son la inversa de la parábola matriz.

En este ejemplo no se menciona que es lo afectado por una raíz, si una variable o una determinada expresión. Detectamos la misma definición que la propuesta en la $OMPE_2$. Considerando una función irracional como la inversa de la parábola matriz, solo se está

teniendo en cuenta la expresión f(x) = √x, excluyendo del campo de las funciones irracionales un gran número de expresiones.
Se detectó en la OMEE una excesiva cantidad de ejemplos de tareas y las técnicas de resolución. Identificamos así un bloque práctico-técnico, conformado por una amplia cantidad de ejemplos de pares de tareas-técnicas. La resolución de las tareas es llevada a cabo por el profesor en la totalidad de la clase y la tarea del alumno es resolver algunas pocas tareas fuera de clase.

A partir del instrumento de análisis que proporciona la Tabla 2, concluimos en lo siguiente:
La OMEE gira en torno a cuatro géneros de tareas:
$\boldsymbol{H_1}$*: Analizar el dominio de funciones.* (Determinar el dominio de funciones de una y dos variables y graficar este último caso)
$\boldsymbol{H_2}$*: Componer funciones.*
$\boldsymbol{H_3}$*: Representar gráficamente funciones.*
$\boldsymbol{H_4}$*: Hallar curvas de nivel.*

Describimos a continuación las técnicas asociadas a cada uno de estos géneros de tareas:
Las técnicas asociadas a H_1 se basan en el manejo algebraico de las expresiones. Se identifican exactamente las mismas técnicas que en la OMPE2. La técnica asociada a H_2 es: "*donde está la variable x poner g(x)*". Para H_3, la técnica propuesta es *"graficar usando tablas"*. Para H_4, la técnica propuesta es *"darle valores al parámetro k y analizar que función se obtiene"*.
Destacamos aquí una diferencia importante entre la $OMPE_2$ y la OMEE. La diferencia radica en las técnicas que se construyen en torno al género de tareas referido a graficar funciones: (G_4 para la $OMPE_2$ y H_3 en la OMEE). En la $OMPE_2$ las técnicas se basan en el análisis de la función estudiada evitando así, el uso de tablas de valores, mientras que en la OMEE, la única técnica es el uso de estas tablas. Esto tiene como consecuencia inmediata, que el G_4 de la $OMPE_2$ pierde cierto sentido en el H_3 de la OMEE. El bloque tecnológico-teórico está conformado sólo por una serie de definiciones que, como hemos mencionado anteriormente, son definiciones incompletas e imprecisas.

4.3 Características de la Organización Matemática de Referencia

La bibliografía que se propone en el programa analítico como material de consulta nos proporciona datos sobre una posible Organización Matemática de Referencia (OMR). Hemos construido esta OMR a partir de tres de los libros de texto enumerados en el programa. Destacamos algunas conexiones y desconexiones entre la $OMPE_2$, la OMEE y esta OMR. Como ejemplo de algunas desconexiones se tiene: en la OMR se definen de manera explicita las condiciones de existencia y unicidad luego de dar la definición de función. Esto se ha observado tanto para funciones de una variable como para funciones de dos variables. Otra de las diferencias es el tipo de definiciones que allí se dan, se trabajan con definiciones completas. Identificamos así, un bloque tecnológico-teórico formado por definiciones, pero con definiciones claras y precisas. Se explicitan en la OMR las relaciones entre los conceptos de plano, trazas, curvas de nivel y funciones de dos variables. Estos aspectos no se han identificado en ninguna de las otras dos organizaciones mencionadas, la $OMPE_2$ y la OMEE.

Las semejanzas con la $OMPE_2$ y la OMEE, son en los que respecta al género, tipo y tareas propuestas y a las técnicas asociadas a esas tareas. Analizando la información de la Tabla 2, concluimos lo siguiente:
Los géneros de tareas detectados en la OMR son:
O_1*: Analizar el dominio de funciones.* (Determinar el dominio de funciones de una y dos variables y graficar este último caso)
O_2*: Analizar que expresiones resultan ser relación funcional.*
O_3*: Representar gráficamente funciones de una y dos variables.*
O_4*: Analizar casos particulares de curvas de nivel.*

Las técnicas matemáticas asociadas a cada uno de estos géneros de tareas son:
Para el primer género de tareas (O_1), detectamos exactamente las mismas técnicas que en la $OMPE_2$. Para O_2, las técnicas se basan en analizar si existen puntos del dominio de la posible función para los cuales existan dos valores de imagen. Las técnicas asociadas a O_3 se refieren al análisis de los parámetros de las funciones estudiadas, no se considera bajo ningún punto de vista la posible construcción de tablas de valores. En O_4 identificamos la técnica de dar valores al parámetro k en la ecuación de la curva de nivel f(x, y) = k y luego identificar que expresión se ha obtenido.
Detectamos la existencia de un bloque práctico-técnico que gira en torno a los géneros de tareas que hemos señalado (O_i). Identificamos en este bloque una gran cantidad de ejemplos de tareas y la técnica de resolución, inclusive, algunos de éstos son los mismos que se han propuesto en la $OMPE_2$. Identificamos aquí un apartado con varias tareas nuevas, diferentes a las analizadas por el texto.
El bloque tecnológico-teórico está conformado sólo por una serie de definiciones que, en este caso, son completas, precisas y se relacionan en gran medida entre sí y con las tareas y técnicas propuestas. Se observa una fragmentación de los contenidos similar a la llevada a cabo en la $OMPE_2$.

5. Conclusiones

El análisis de las OM puestas en juego muestra que en todos los casos, aun en OMR, que el bloque tecnológico-teórico está formado sólo por un conjunto de definiciones. La OMR difiere de la $OMPE_2$ y de la OMEE en el bloque tecnológico-teórico.
Tanto en la $OMPE_2$ como en la OMEE y en la OMR predomina el bloque práctico-técnico, es decir, se proponen constantemente duplas formadas por tareas y técnicas. Las OM analizadas giran en torno a los mismos géneros de tareas. Éstas OM pueden caracterizarse "locales", ellas están formadas por una serie de organizaciones puntuales, que giran en torno a un género de tareas.
El análisis de la $OMPE_2$ evidencia una gran cantidad de definiciones poco precisas e incompletas desde el punto de vista matemático, de lo cual se sigue una inevitable naturalización del saber. Se encuentran definiciones que no son utilizadas en ningún tipo de tarea. Por otra parte, en la $OMPE_2$ se institucionalizan ciertas definiciones, mientras posteriormente se usan otras distintas aunque equivalentes, sin ninguna aclaración.

En síntesis, la actividad matemática que se lleva a cabo en esta institución es básicamente práctico-técnica y raramente alcanzan el nivel tecnológico. Como consecuencia, las OM son “puntuales”, lo que impide que se reconstruyan efectivamente OM “locales” relativamente completas. Estas restricciones institucionales sobre la actividad matemática conllevan al fracaso de los estudiantes, por tanto es necesario encontrar formas de modificar las praxeologías espontáneas que trasciendan la visión naturalizada de la Matemática.

Bibliografía

Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 12, (1) pp. 73-112.

Chevallard, Y. (1997) Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 17 (3) pp. 17-54.

Chevallard, Y (1999) L´ ánalyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 19 (2) pp. 221-266.